

**Best  
Available  
Copy**

**CLASSIFIED**

**4073**

**Technical Information Agency**

**MON HALL STATION  
STATION 12 VIRGINIA**

**OF 5**

**OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA  
THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED  
OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS  
OPERATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE  
OPERATION, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE  
OPERATION OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY  
OPERATION ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER  
OPERATION ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE,  
OPERATION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**CLASSIFIED**

MORTON ALPERIN  
Director of Advanced  
Studies  
AFOGR  
11 June 1957

ALP  
Return to  
ASTIA  
WASHINGTON HALL STATION  
MONTGOMERY 22, VIRGINIA  
ATTN: TISSA (5)

EL 0402



**AVAILABLE**

**COPY**

~~SECRET~~

It should be noted that the Parties to the Contract have recognized that the Work and Reports are covered and protected by the Patents granted and pending as specified in Paragraph V of the said Contract.

•  
•

- The order of work and experiments was decided and directed by :

Professor Henri COANDA

in view of the final drafting of the present report which was drawn up under his direct supervision.

- The general drafting of the report and the technical and scientific organization was undertaken by :

Professor A.R. METRAL, Professor at the "Conservatoire National des Arts et Métiers" and the "Ecole Nationale Supérieure de l'Armement", and joint author with the late Professor ZERNER of research work concerning the application of a Coanda type bidimensional flow,

assisted by :

Mr. P.E. LEMONNIER, graduate in science, who studied under Professors POINCARÉ and J. PERES of Paris University (Fluid Mechanics and Aeronautical Technique), Research Scholar at the French National Center for Scientific Research and holder of six diplomas from Paris University.

- The numerical calculus was carried out by :

Mr. J. GUILLOUD, graduate in science, specialized in mathematics, engineer with the "Société d'Electronisme et d'Automatisme", Master lecturer at the "Ecole Nationale Supérieure Aéronautique",

assisted by Mr. TALLEPIED and Mr. CHAUVESAU, students of the Faculty of Sciences of Paris University.

- Responsibility for the practical execution of the work and the accomplishment of the program drawn up by Professor Henri COANDA was taken by :

Madame M. RIBEYROLLES,

Mr. P. GARNIER,

Managing Directors of "SFERI-COANDA", collaborating directly with Professor Henri COANDA.

- Madame M. RIBEYROLLES and Mr. M. GARNIER were assisted in the general direction of the experimental work by :

Mr. P.E. LEMONNIER - mentioned above.

Mr. H.J. GLAIZOT, engineer responsible for measurements and experiments, former collaborator of Mr. Kadenaci and Mr. E. Bugatti.

( SFERI-COANDA )

Mr. B. BRUNEAU, engineer-draftsman,

( SFERI-COANDA )

Mr. A. GRESSER, technical assistant,

( SFERI-COANDA )

- The tests were carried out at the COANDA Center in the MALFAIRE works, at Précigné (Sarthe), with the collaboration of Mr. JEANARD, and assistants, entrusted with the supervision of the Center.
- The final make-up and typing of the report was accomplished by Madame V. ASTHUC, Secretary to the Management of SFERI-COANDA.
- The English translation was prepared by Miss D. TRAVIÇCI, Technical Translator.
- All the work involved in sifting and classifying test results, plotting the curves and preparing the drawings contained in this report was performed by the SFERI-COANDA team, at CLICHY (Seine), under the permanent supervision of Professor Henri COANDA, assisted by Madame M. RIBEYROLLES and Mr. GARNIER.

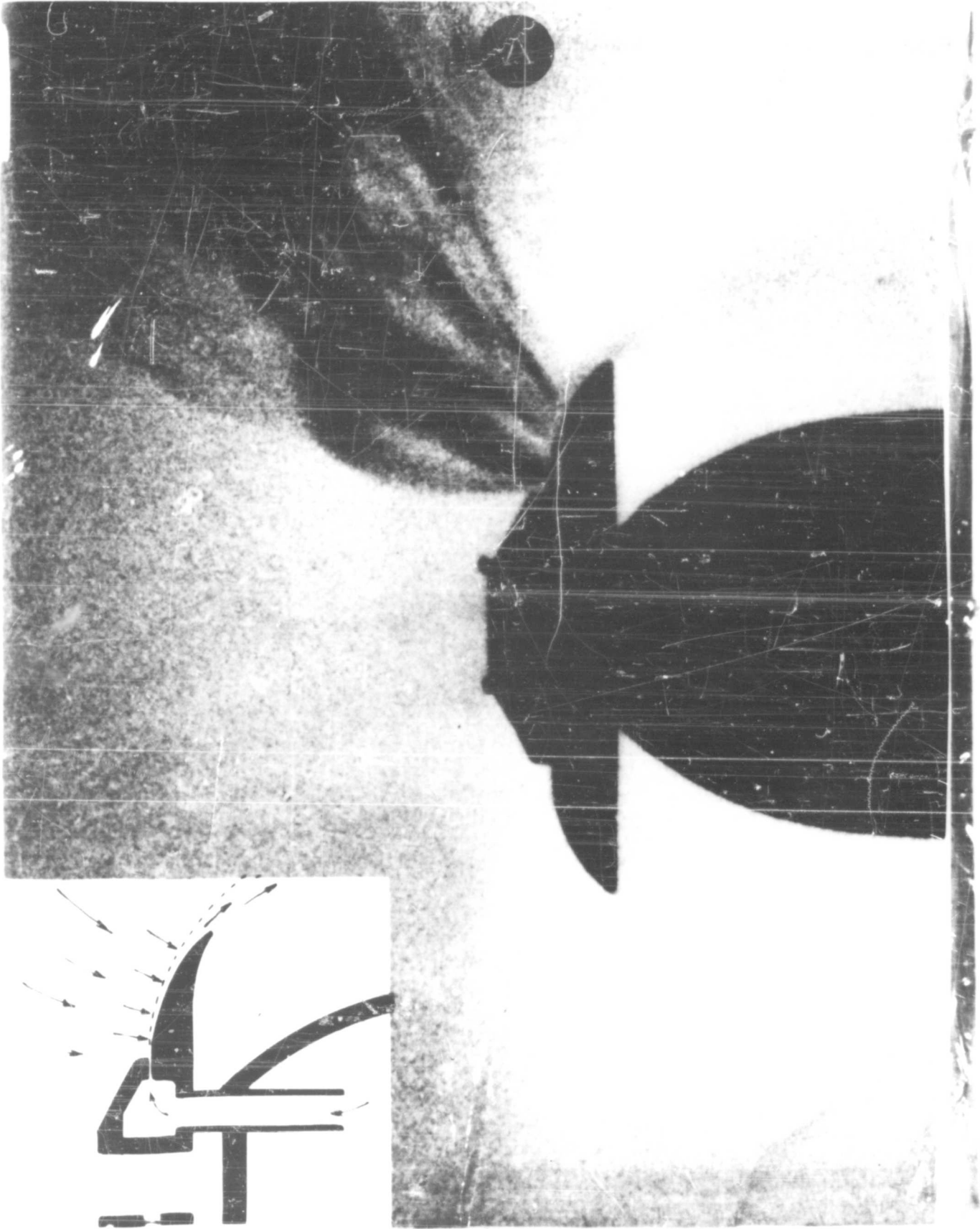
1 June, 1937.

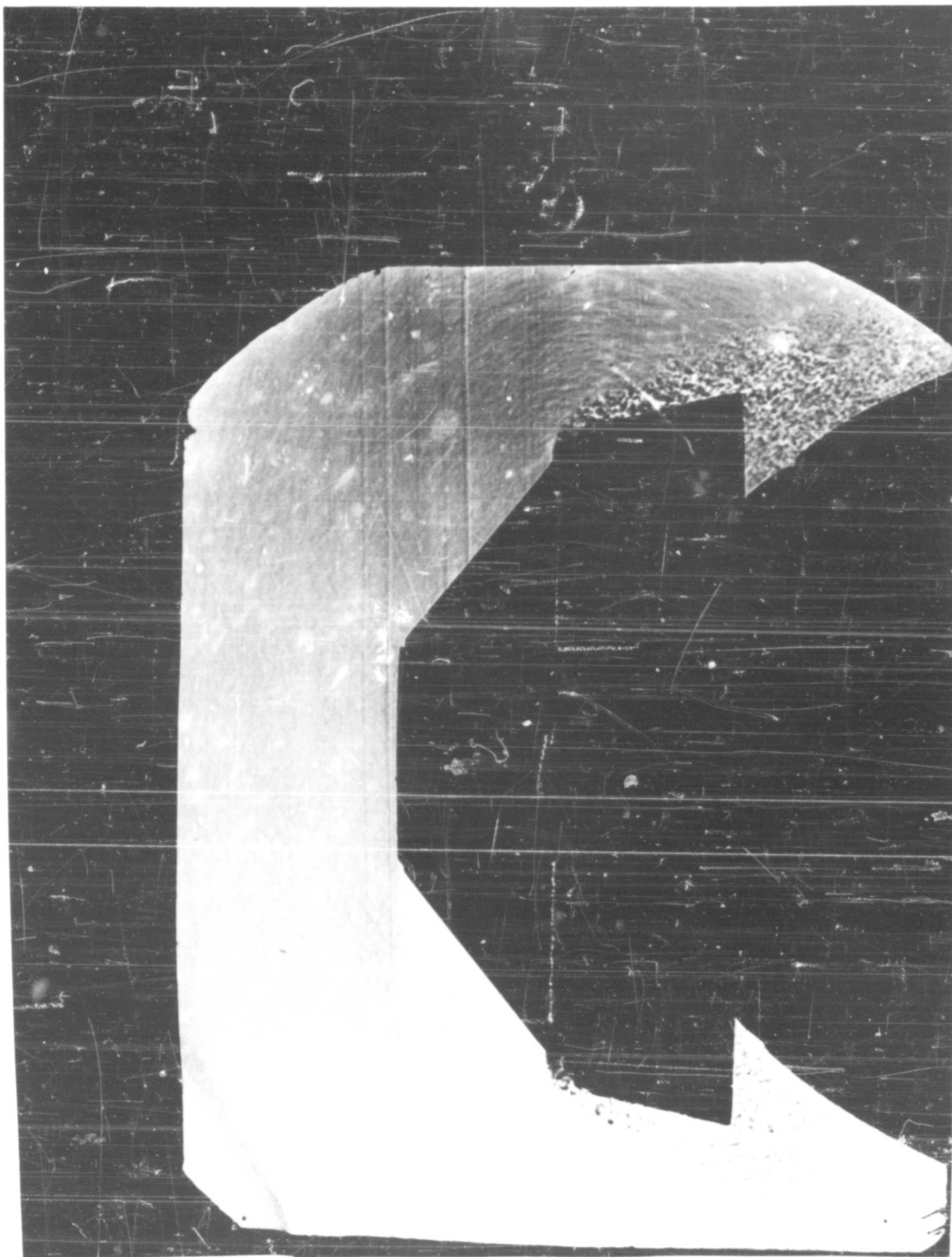
**P A R T I**

---

- Introduction - the COANDA Effect.
- Physical analysis of the COANDA Effect.
- Mathematical analysis of the COANDA Effect. Importance of compressibility. Numerical calculus.
- Considerations on direct reaction and its comparison with the reaction resulting from the COANDA Effect. Importance of viscosity.

•  
•





## - INTRODUCTION -

Dès le début de ce siècle, Monsieur Henri COANDA dirigeait ses recherches expérimentales aussi bien que ses études physiques théoriques dans une voie parfaitement déterminée, à savoir l'utilisation avec le meilleur rendement possible, d'une énergie cinétique ou potentielle pour la création d'une quantité de mouvement d'un fluide au sein duquel on désire faire se déplacer un corps plus lourd que le fluide.

Ayant été l'un des premiers, sinon même le premier, à visualiser les écoulements autour d'obstacles les plus variés, il donnait le 13 Mai 1911, à l'Aéroclub, une conférence dans laquelle, rendant compte de ses essais de 1906 à 1911, il mettait nettement en évidence le rôle de la quantité de mouvement, grandeur physique, vectorielle orientée, alors que l'énergie cinétique est une quantité scalaire. (Le résumé de cette conférence parut dans l'"Aérophile" du 1<sup>er</sup> Juin 1911).

C'est après la guerre de 1914 que l'auteur, ayant longuement observé les phénomènes aérodynamiques accompagnant l'émission d'un jet par une tuyère classique, considéra qu'il était possible d'obtenir la déviation d'un jet fluide sortant d'une fente et ceci dans une direction déterminée par avance. Il créait ainsi le long du jet une dépression analogue à celle qui existe sur l'extrados d'une aile d'avion.

Dans les pages qui suivent nous exposerons ces expériences initiales. Il est évident qu'à partir d'une certaine époque, et notamment après la prise du brevet de base de Novembre 1932, il est difficile de séparer les progrès dus à l'expérience seule ou à la théorie, et qu'il y a eu cheminement parallèle des acquisitions sur l'ensemble de ce phénomène que l'on caractérise depuis plus de vingt ans du nom d'Effet COANDA.

Le premier appareil réalisé fut un propulseur de forme ogivale, solide de révolution et présentant à sa partie supérieure un chapeau portant une fente annulaire par où le fluide amené par l'intérieur se décharge dans l'air ambiant. La direction du jet à la sortie de la fente est normale à l'axe du propulseur. La photo A a été prise, le jet fonctionnant et une torchère productrice de fumée opaque étant disposée en avant et latéralement par rapport au propulseur. On aperçoit aussitôt la fumée opaque de la torchère aspirée vers le jet dans une direction presque perpendiculaire à la direction de celui-ci, puis entraînée par diffusion visqueuse dans le jet dont elle visualise ainsi les contours limites. - Les flèches indiquent le mouvement du fluide ambiant, qui est au repos au début de l'expérience et reste au repos à grande distance du propulseur en action. On soulignera toutefois que l'exploration à la torchère de la zone du fluide ambiant en avant du nez du propulseur montre que toute cette zone est englobée dans le phénomène. Il y a donc dépression de toute la zone en avant du propulseur.

Par ailleurs on voit nettement la direction de la déviation, le jet tendant à devenir très rapidement parallèle à l'axe du propulseur.

## - INTRODUCTION -

At the beginning of the century, Prof. Henry already di-  
recting his experimental research as well as his the ... physical  
studies towards a well-defined goal, namely, the utilization with the  
highest possible efficiency of kinetic or potential energy to impart mo-  
mentum to a fluid in which it is desired to move a body which is heavier  
than the said fluid.

Having been one of the first, if not the very first, to visualize the  
flow around various types of obstacle, he gave a lecture at the Aeroclub  
in Paris on May 13th, 1911, in which, reporting on the tests he had made  
between 1906 and 1911, he clearly revealed the part played by momentum, a  
physical, vector quantity, whereas kinetic energy is only a scalar quan-  
tity. (A summary of this lecture appeared in the "Aerophile" of June 1st,  
1911).

It was after the 1914 war that Henry COANDA, having studied at length  
the aerodynamic phenomena accompanying the emission of a jet from a classi-  
cal nozzle, decided that it must be possible to obtain the deviation, in a  
direction determined in advance, of a fluid jet emerging from a slot. In  
this way he produced a depression along the jet similar to that existing  
on the extrados of an airplane wing.

In the following pages we shall describe these first experiments. It  
stands to reason that after a certain time, and especially after the master  
patent was taken out in November 1932, it becomes difficult to make a dis-  
tinction between the progress due to experimental work and that due to  
theoretical study; both contributed equally to the further knowledge acqui-  
red on the phenomenon which has been known for more than twenty years as  
the COANDA Effect.

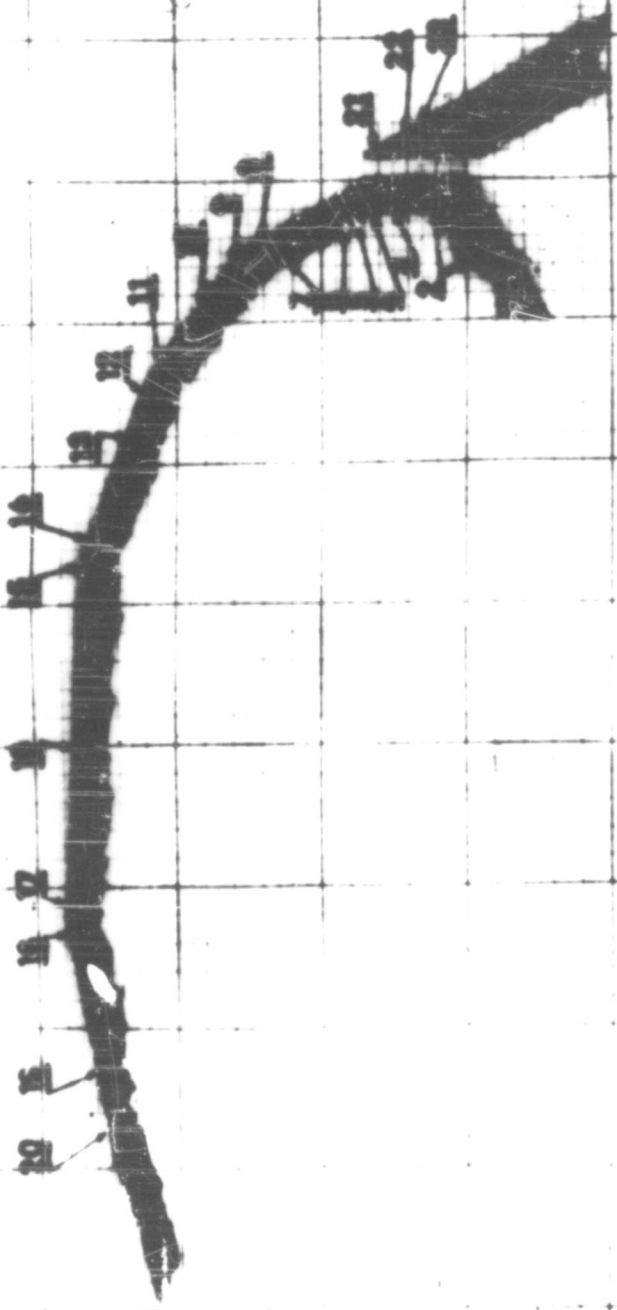
The first device produced was a driving-head of ogival form, a solid  
of revolution having on its upper part a cap through which the fluid arri-  
ving in the interior of the head escaped into the surrounding air by means  
of an annular slot. The direction of the jet emerging from the slot is  
perpendicular to the axis of the driving-head. Photograph A was taken  
with the jet functioning and a torch producing opaque smoke placed on one  
side in front of the driving-head. The opaque smoke from the torch is seen  
being drawn towards the jet in a direction almost perpendicular to the di-  
rection of the jet itself, and then being induced by viscous diffusion into  
the jet whose outline is thus rendered visible. The arrows indicate the  
movement of the surrounding fluid, which is at rest at the beginning of the  
experiment and remains at rest at a great distance from the driving-head  
in action. It should be emphasized, however, that investigation by means  
of the torch of the ambient fluid in the zone in front of the nose of the  
driving-head reveals that the whole of this zone is also involved in the  
phenomenon. There is therefore a depression in the whole area lying in  
front of the driving-head.

One can also see clearly the direction of the deviation, the jet ten-  
ding rapidly to become parallel to the axis of the driving-head.

AILE D30

CHAPEAU 90.

FENTE 0.88

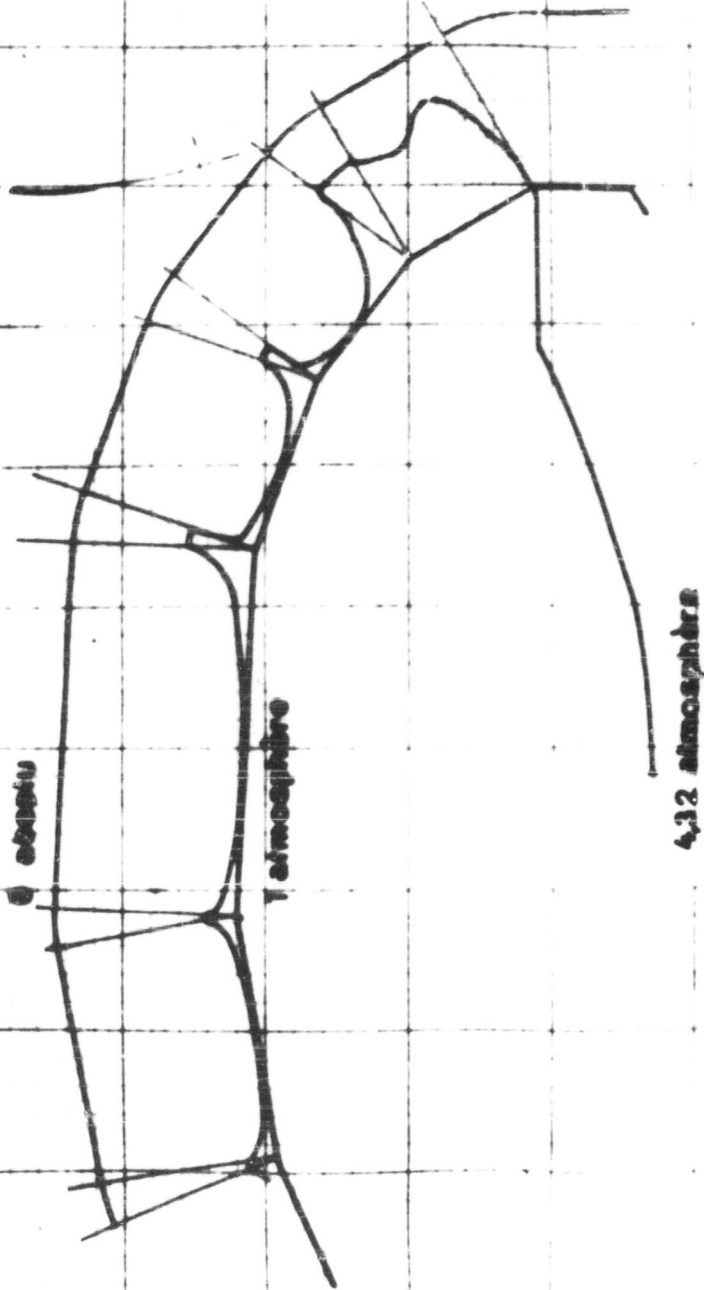


échelle 10/1

VILLE D-30

CHAPEAU 30

FENTE 0-88



Ainsi donc cette première expérience montre :

- a) que le jet est dévié et colle à la paroi dans une direction sensiblement perpendiculaire à celle de sa sortie de la fente annulaire;
- b) qu'il crée une forte dépression dans le fluide ambiant;
- c) que cette dépression produit une mise en mouvement de ce fluide, lequel est entraîné par le fluide primaire du jet.

°  
° °

La deuxième photographie (21) correspond à une des expériences faites sur un dispositif de tuyères à deux fentes superposées. On aperçoit parfaitement la fente inférieure parce qu'elle se trouve exactement dans le plan diamétral du cône de l'étincelle. Toutes ces expériences furent effectuées, en effet, en appliquant la méthode des ombres de l'ingénieur général Libesart avec le Stroborama des frères Laurent et Augustin Seguin. On manifeste ainsi le phénomène élémentaire instantané, la cadence étant telle que l'apparition des phénomènes supersoniques soit rendue visible. La durée d'éclairement est comprise en effet entre le centième et le milliardième de seconde.

Sur la photographie on aperçoit nettement le parfait écoulement le long de la face polyédrique de la lèvre inférieure seule alimentée, et on voit apparaître des ondes soniques.

°  
° °

Ayant ainsi caractérisé en écoulement subsonique et en écoulement supersonique le phénomène physique, il était nécessaire d'effectuer un certain nombre de mesures qualitatives. Une succession d'orifices de 3 dixièmes de millimètre fut percée sur les facettes de la tuyère polyédrique et dans la fente elle-même. La Figure 1 précise la répartition exacte des prises de pression au nombre de 20 sur la lèvre défectrice formée de cinq volets, et au nombre de 3 sur le chapeau dans la fente elle-même. L'ouverture de la fente fut constamment prise égale à 0,88 millimètre.

Chaque prise fut reliée à un tube manométrique, un tube référence donnant la pression atmosphérique et servant ainsi de zéro aux lectures des surpressions ou des dépressions. Sur la Figure 2 on a reporté les mesures piézométriques en suivant le profil de la lèvre défectrice : la pression au réservoir était de 4,32 atmosphères. La ligne de référence est prise de façon que le profil méridien de la tuyère corresponde à la pression atmosphérique.

On peut également tracer des diagrammes rectangulaires, les abscisses représentant les longueurs développées des facettes successives et les ordonnées les mesures piézométriques.

La figure 5 est relative à une pression au réservoir égale à 1,625 atmosphère. On observe l'existence d'une dépression dans la fente,

Hence this first experiment shows :

- a) that the jet is deviated and clings to the wall in a section which is more or less perpendicular to that of the exit of the angular slot;
- b) that it produces a great depression in the surrounding fluid;
- c) that this depression produces a movement of the surrounding fluid, this fluid being induced by the primary fluid of the jet.

°  
° °

The second photograph (21) corresponds to one of the experiments made with a device consisting of a driving-head with two slots one above the other. One can see the lower slot perfectly because it falls just in the diametrical plane of the cone made by the spark. All these experiments were carried out using the shadow method of General Libessart with the Stroborama designed by the brothers Laurent and Augustin Seguin. By this means the instantaneous, elemental phenomenon can be recorded, the rate of exposure being such that the apparition of supersonic phenomena becomes visible. The actual length of one exposure lies between one hundredth and one thousand-millionth of a second.

The photograph shows clearly the perfect flow along the polyhedral face of the lower lip which is functioning alone, and we note the appearance of sonic waves.

°  
° °

Having thus fixed the characteristics of the physical phenomenon in subsonic and in supersonic flow, it was necessary to effect a certain number of qualitative measurements. A succession of holes of three-tenths of a millimeter were pierced in the facets of the polyhedral nozzle and in the slot itself. Figure 1 shows the exact distribution of these pressure-taking points of which 20 were on the deflecting lip formed by five facets, and 3 on the cap in the slot itself. The slot opening was always taken at 0.88 mm.

Each pressure point was connected to a manometric tube, a reference tube giving the atmospheric pressure and thus serving as zero point for the readings of over- or underpressure. Figure 2 shows the piezometric measurements following the profile of the deflecting lip; the pressure in the reservoir was 4.32 atmospheres. The reference line is taken such that the meridian profile of the nozzle corresponds to atmospheric pressure.

One can also plot rectangular diagrams, the abscissae representing the developed lengths of the successive facets and the ordinates the piezometric measurements.

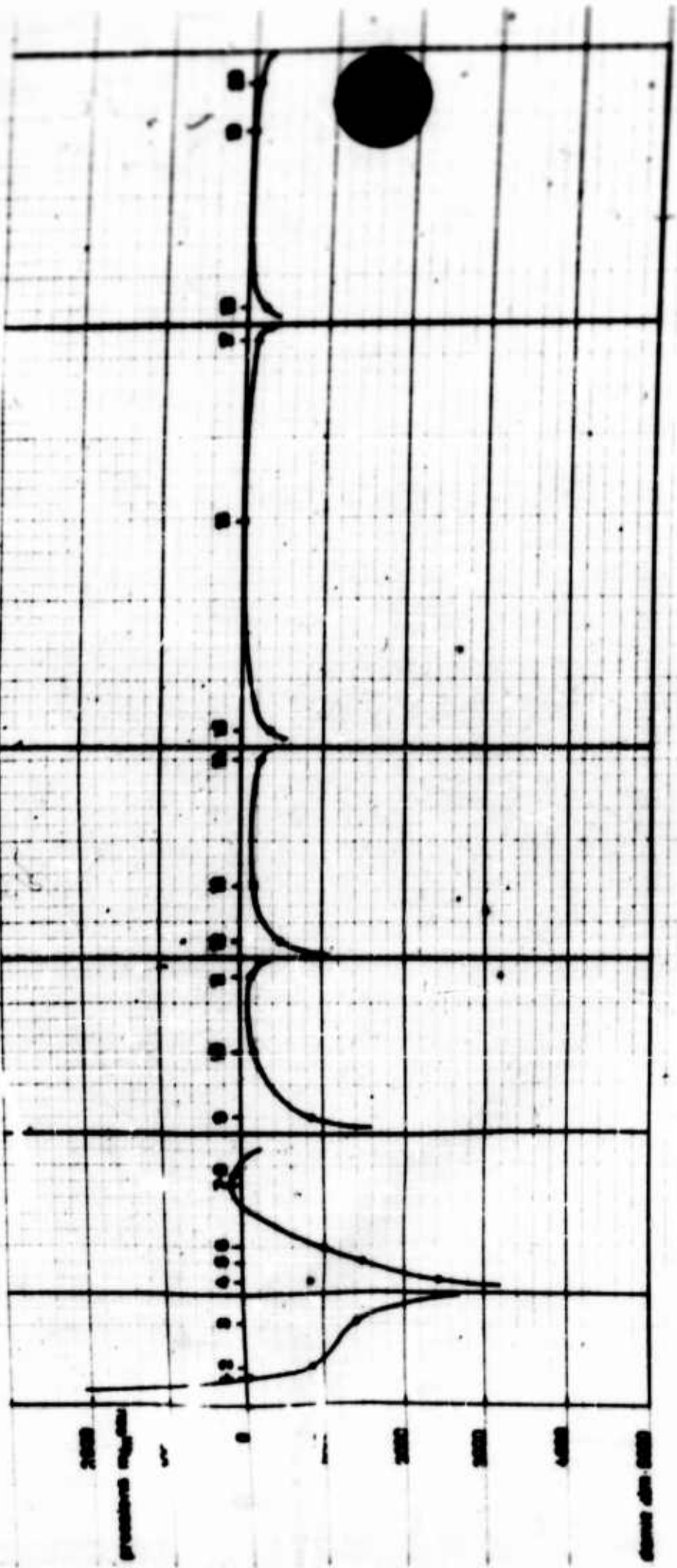
Figure 5 refers to a reservoir pressure of 1.625 atmospheres. In the slot a depression can be noted, which increases up to the point directly above the edge of the first facet; then it decreases and passes through a minimum before increasing again up to the point above the edge of the

FENTE 0.60

CHAPEAU 90

CHAPITEAU 1.00

AILE 0.30

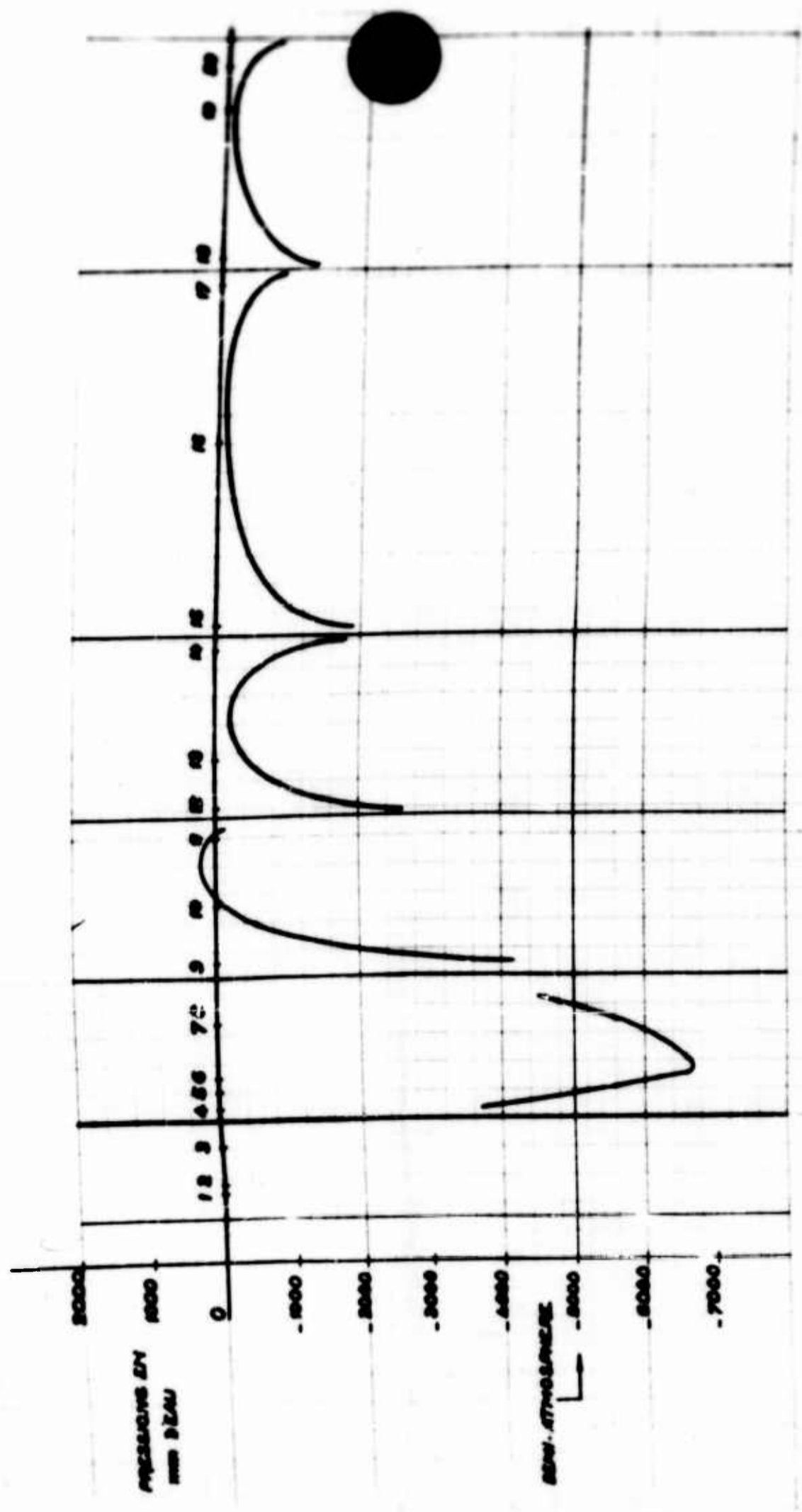


AILE D 30

CHAPEAU 90

FENTE 0,88

PRESSION 4 120/cm<sup>2</sup>



dépression qui croît jusqu'au droit de l'arête de la première facette; puis la dépression diminue, passe par un minimum pour croître encore jusqu'au droit de l'arête de la seconde facette, et ainsi de suite.

Si l'on augmente la pression dans le réservoir on fait apparaître des vitesses supersoniques à la fente de la tuyère. C'est ce que manifeste la Figure 7bis. L'installation ne permettant pas d'enregistrer des pressions supérieures à 2 atmosphères et la pression au réservoir étant de 4 atmosphères, aucun point n'est figuré à gauche de l'abscisse de la première arête. On observe que la dépression prenant naissance au voisinage immédiat de la première arête, le maximum de dépression se situe ici en un point de la première facette. Mais avant même l'extrémité de cette première facette le phénomène a repris l'allure correspondant au régime subsonique. La vitesse du fluide évoluant est tombée en dessous de la vitesse du son par suite de l'aspiration du fluide ambiant avec échange de quantité de mouvement.

°  
° °

On a recherché à caractériser photographiquement le phénomène physique tout le long du volet polyédrique; pour ce faire on utilisa le Stroborama déjà cité ci-dessus, et la méthode des ombres, avec photographie directe, la plaque étant directement exposée à l'éclairage de la source ponctuelle, sans interposition d'aucun appareillage.

Les photographies (9) à (12) correspondent à une série d'expériences destinées à observer l'écoulement dans une tuyère, sous différentes pressions d'alimentation du fluide primaire, avec évacuation à l'air libre.

La photographie (9) donne l'ombre des volets sans aucun écoulement. Elle constitue donc la photographie de référence.

La photographie (10) est celle de l'écoulement du fluide primaire le long du volet avec une vitesse inférieure à celle du son, la pression au réservoir étant de 1,600 atmosphère.

La photographie (11) correspond à un écoulement du fluide primaire à une vitesse voisine de celle du son; pression au réservoir 2,2 atmosphères. L'examen à la loupe laisse apparaître quelques ondes soniques.

Sur la photographie (12) l'écoulement correspond à une vitesse supérieure à celle du son; pression au réservoir 4,2 atmosphères. Les ondes soniques sont nettement visibles.

°  
° °

Une série d'expériences, entre beaucoup d'autres, a été poursuivie pour manifester l'influence déterminante des angles de déflexion de la lèvre inférieure de la tuyère. Les photographies de ces expériences ont été effectuées suivant le même processus opératoire et avec le même Stroborama. Le dispositif utilisé était un propulseur à deux fentes superposées. Comme précédemment, mais ici pour la fente supérieure, on aperçoit

second facet, and so on.

If we increase the pressure in the reservoir we obtain supersonic velocities at the slot of the nozzle. This is what appears in Figure 7b. As the manometric equipment did not register pressures above 2 atmospheres and the pressure in the reservoir was 4 atmospheres, no figures are shown to the left of the abscissa of the first edge. We note that the depression starts in the immediate neighborhood of the first edge, its maximum point occurring somewhere along the first facet. But even before reaching the end of this first facet, the phenomenon resumes a rate corresponding to the subsonic regime. The velocity of the fluid has fallen below the speed of sound owing to induction of the surrounding medium accompanied by a transfer of momentum.

•  
••

We sought to fix the characteristics of the physical phenomenon photographically along the whole polyhedral flap, using for this purpose the Stroborama already mentioned and the shadow method, with direct photography, the plate being directly exposed to illumination from the point source of light without interposition of any other apparatus.

Photographs 9 to 12 correspond to a series of experiments made to observe the flow through a nozzle for different feed pressures of primary fluid, which escapes into the free air.

Photograph 9 shows the shadow outline of the facets with no flow. It is therefore the reference photo.

Photograph 10 shows the flow of primary fluid along the flap at an infrasonic velocity, the pressure in the reservoir being 1,600 atmospheres.

Photograph 11 corresponds to a flow of primary fluid at a velocity approaching sound speed; reservoir pressure 2.2 atmospheres. Examination with a magnifying glass reveals a few sonic waves.

On Photograph 12 the flow velocity is supersonic; reservoir pressure 4.2 atmospheres. The sonic waves are clearly visible.

•  
••

One series of experiments, among many others, was carried out in order to demonstrate the determining influence of the angle of deflection of the lower lip of the nozzle. The photographs of these experiments were made using the same process and the same Stroborama. The device used was a driving-head with two slots one above the other. As before, but in this case for the upper slot, the slot is clearly visible on the two first photos (18 and 19), because it was right in the diametrical plane of the cone of light made by the spark.

parfaitement cette fente sur les deux premières photographies (18) et (19), car elle se trouvait exactement dans un plan diamétral du cône d'éclairement de l'étincelle.

Sur la photographie (18) (pression au réservoir 1,6 atmosphère), le volet qui prolongeait la lèvre inférieure de la fente faisait avec l'horizontale un angle de plus de  $45^\circ$  ; le résultat est net, car le jet poursuit directement sa trajectoire sans venir coller au volet.

Il en est de même sur la photographie (19) qui correspond aux mêmes caractéristiques géométriques, seule la pression au réservoir ayant varié pour atteindre 4,30 atmosphères, ce qui fait apparaître des ondes soniques à l'extrémité de la fente.

Par contre sur la photographie (20) l'angle du volet a été diminué de  $1/2$  degré. Sous la même pression, on retrouve évidemment les mêmes ondes soniques, mais le jet vient coller à la paroi.

Ces trois photographies montrent de façon très frappante l'influence primordiale de l'angle du volet avec la section droite de la fente.

°  
° °

Il était alors particulièrement indiqué de passer des tuyères externes aux tuyères internes, ce qui devait immédiatement régulariser le fluide secondaire et sélectionner les régions d'appel de ce fluide. Le montage réalisé sur la Figure B et qui provient de la combinaison de deux photographies A de l'appel de fumée opaque de la torchère, permettait, en première approximation, de se rendre compte de l'allure du phénomène dans ce cas.

La suite de ce rapport indiquera les résultats obtenus lors de nos récentes mesures effectuées à l'occasion du contrat signé avec l'A.R.D.C. On concevra aisément que la forme même de ces tuyères internes empêche toute visualisation photographique du phénomène.

°  
° °

Ainsi sont parfaitement mises en lumière les constatations expérimentales relatives à l'Effet COANDA.

-----

In Photograph 18 (reservoir pressure 1.6 atm.), the flap extending the lower lip of the slot made an angle of more than  $45^\circ$  with the horizontal; the result is quite clear, for the jet continues on its straight trajectory, without being deviated and clinging to the flap.

The same occurs in Photograph 19 which corresponds to the same geometrical characteristics, except for the pressure in the reservoir which has been raised to 4.30 atm., thus causing the appearance of sonic waves at the extremity of the slot.

On the other hand in Photograph 20 the angle of the flap has been reduced by half a degree. For the same pressure, we note the same sonic waves but the jet clings to the wall.

These three photographs demonstrate in a striking manner the overwhelming influence of the angle made by the flap and the cross section of the slot.

°  
° °

The next step indicated was of course to pass from external nozzles to internal nozzles, which would enable us immediately to channel the secondary fluid and select the regions from which it was to be induced. The arrangement shown in Figure B, and which consists of two A photographs combined, showing the induction of the opaque smoke from the torch, gave us a first, approximate idea of the aspect of the phenomenon in that case.

The rest of this report will indicate the results obtained from the recent measurements made in execution of the contract with A.R.D.C. It is, of course, evident that the shape of these internal nozzles renders any photographic visualization of the phenomenon impossible.

°  
° °

The experimental conclusions reached in connection with the COANDA Effect are thus clearly illustrated.

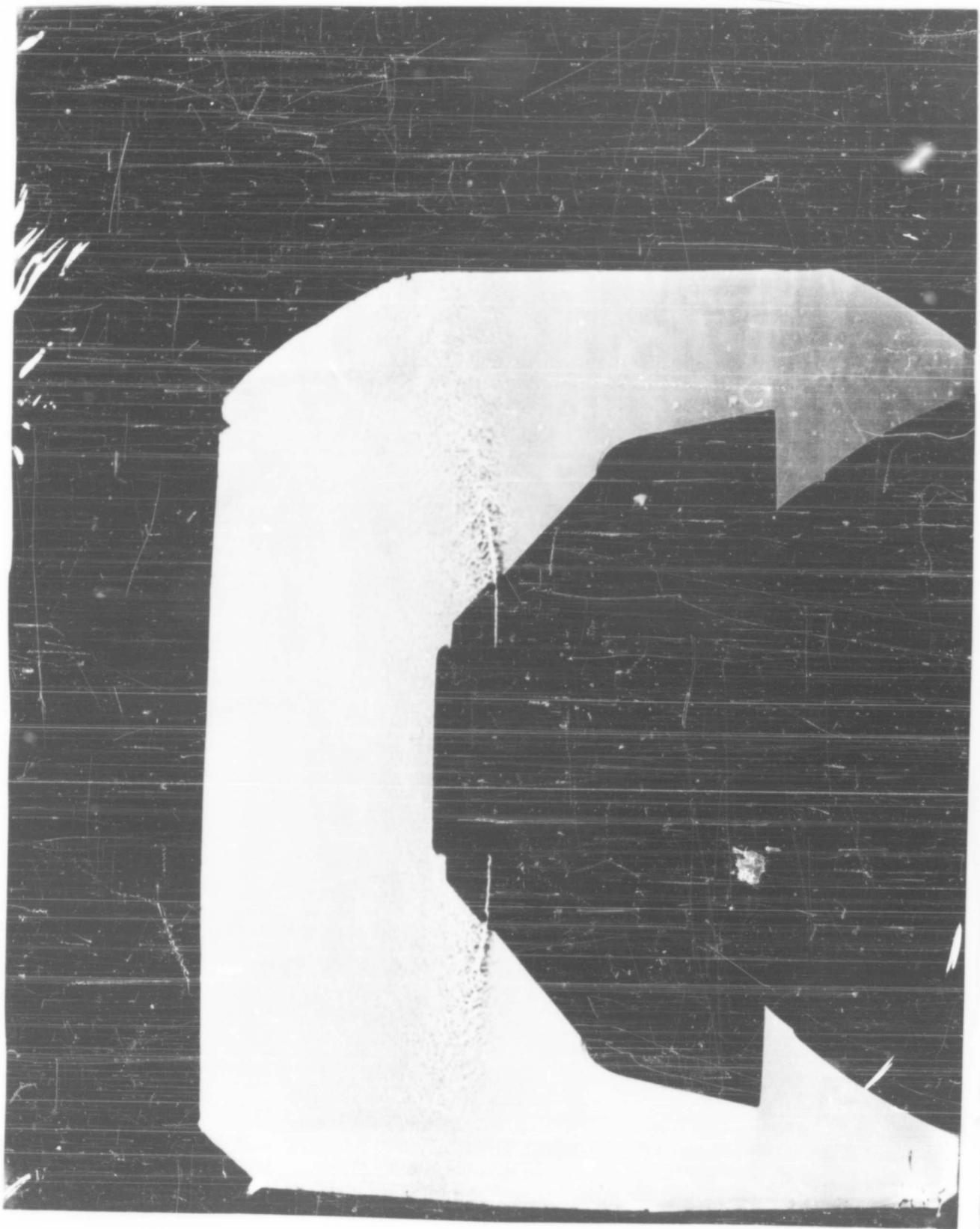


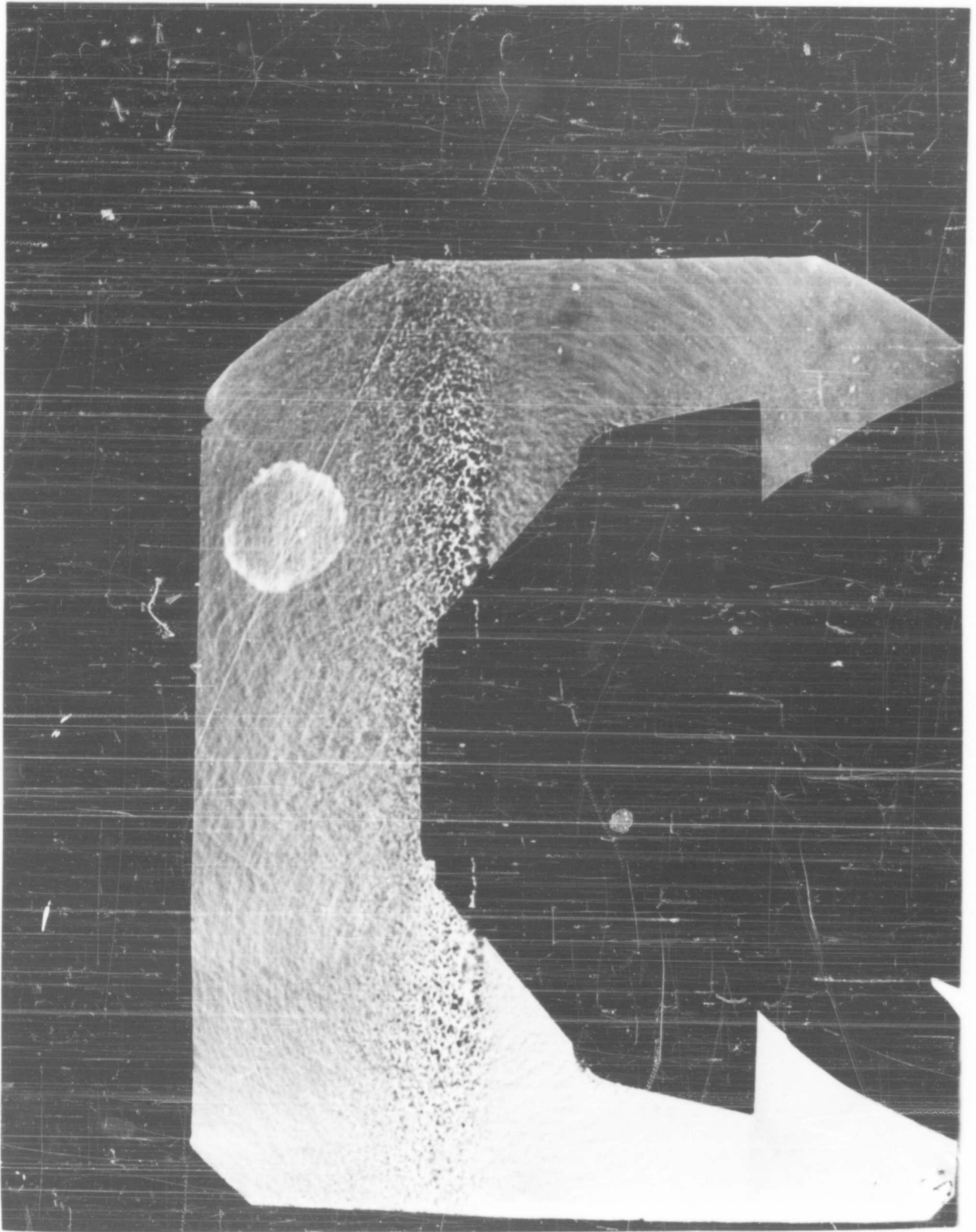




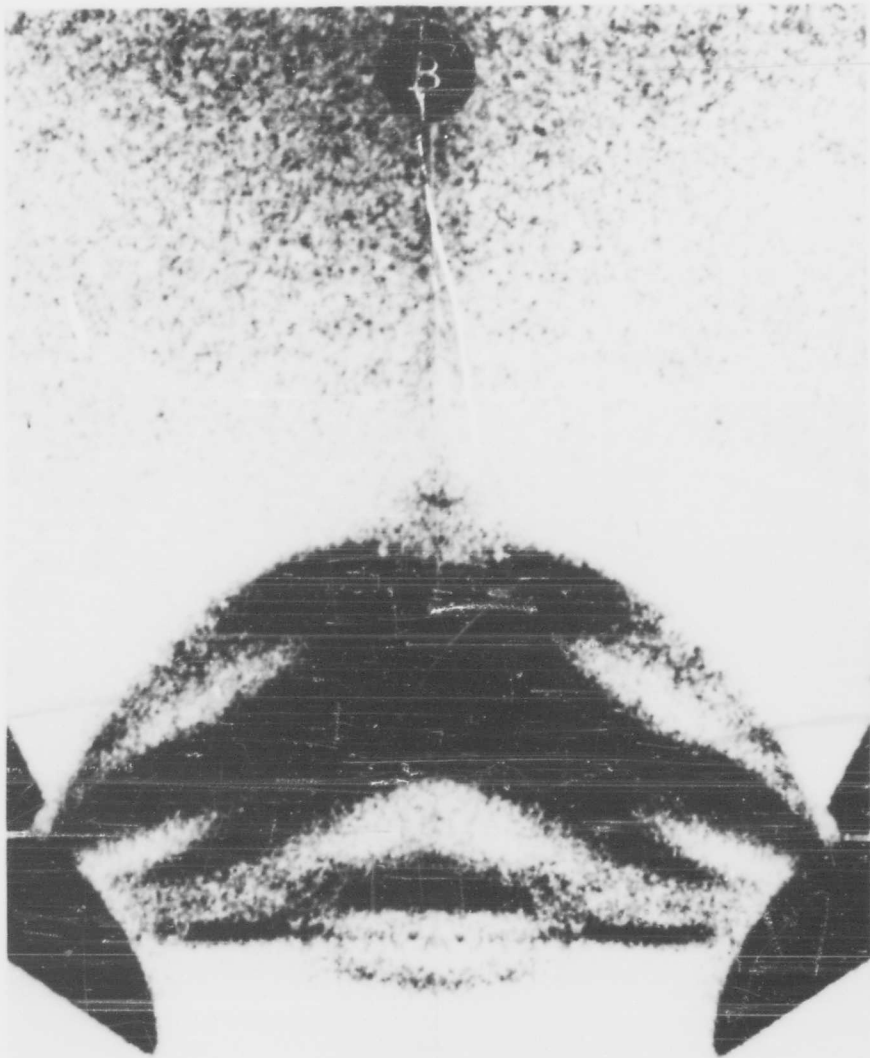
12











## EXPOSE PHYSIQUE GENERAL

Dans ce qui va suivre et pour répondre aux desiderata exprimés par les clauses du contrat passé entre notre Société et les services de l'A.R.D.C., nous avons, pour la meilleure compréhension de ce qui nous est demandé, été obligés d'intervertir les paragraphes. Effectivement, c'est en partant de l'aérodynamique que nous avons été amenés à établir ce qui aujourd'hui est connu sous la dénomination de l'Effet COANDA.

Le problème essentiel du plus lourd que l'air prenant appui sur le fluide ambiant, consiste à créer pour obtenir la sustentation une quantité de mouvement de cet air ambiant, orientée vers le bas et dont la valeur doit être au moins égale au poids de l'appareil qu'il s'agit de sustenter, mais on ne s'impose pas, a priori, que le système qui fabrique cette quantité de mouvement soit capable de transposer la totalité de l'impulsion obtenue par la quantité de mouvement orientée vers le bas, à l'appareil à sustenter lui-même.

A toute quantité de mouvement correspond une énergie cinétique, laquelle correspond à son tour en tout ou en partie à l'énergie dont on dispose. Or, toute énergie cinétique est proportionnelle à un carré de vitesse, alors que la quantité de mouvement n'est que proportionnelle à la vitesse.

Par conséquent, pour avoir une utilisation meilleure de l'énergie dont on dispose, il faut que la vitesse de la masse d'air soufflée vers le bas soit aussi petite que possible, alors que la masse mise en mouvement doit être aussi grande que possible.

Mais les appareils mécaniques qui sont capables de mettre en mouvement de grandes masses d'air soufflant vers le bas sont très encombrants, de dimensions très grandes et relativement très lourds par rapport au poids utile à transporter.

La première des solutions qui est apparue comme la plus facile à réaliser en partant d'une énergie donnée a consisté à créer cette quantité de mouvement en deux temps. C'est à dire transposer d'abord (1<sup>er</sup> temps) l'énergie dont on dispose à un système imprimant à une petite masse gazeuse une vitesse relativement grande, et ensuite (2<sup>ème</sup> temps) utiliser la quantité de mouvement qui en est résultée pour mettre en mouvement horizontalement un système de grandes dimensions agissant sur une grande masse d'air, lequel système en mouvement imprimera à son tour à cette grande masse une vitesse relativement faible, orientée perpendiculairement à son déplacement, afin d'obtenir la grande quantité de mouvement recherchée dans cette nouvelle direction.

Cette solution est celle de l'avion (hélice ou réacteur pour le premier temps et déplacement horizontal de l'ensemble des ailes de l'avion pour réaliser le second temps).

GENERAL PHYSICAL SURVEY

In the following report and in order to fulfil the requirements of the clauses of the contract concluded between our company and the A.R.D.C., we have found it necessary, so as to facilitate the comprehension of our work, to reverse the order of two of the paragraphs. For it was actually on the basis of aerodynamics that we were led to establish what is today known as the " COANDA Effect ".

The essential problem of machines which are heavier than air but supported by the surrounding medium, consists in the creation in order to obtain the necessary lift of a downward momentum of the surrounding air, whose value must be at least equal to the weight of the machine to be lifted. However, it does not necessarily follow that the system which creates this momentum is capable of transferring the total power obtained by means of the downward momentum to the flying machine itself.

Every momentum has its corresponding kinetic energy which in turn corresponds wholly or in part to the energy available. However, all kinetic energy is proportional to a square of the speed, whereas momentum is only directly proportional to the speed.

This means that in order to insure fullest use of the available energy, the velocity of the mass of air blown downwards should be as small as possible whereas the mass which is set in motion should be as great as possible.

But the mechanical apparatus capable of imparting a downward motion to large masses of air is very cumbersome, of very large dimensions and relatively very heavy by comparison with the live weight transported.

The first solution, which appeared as the easiest to realize starting from a given quantity of energy, was that of creating this energy in two stages. That is to say, first of all to transfer the available energy to a device imparting a relatively high velocity to a small gaseous mass ( 1st stage) and then ( 2nd. stage ) use the resulting momentum to impart a horizontal motion to a device of large dimensions acting on a large mass of air; this device in motion will then impart a relatively low velocity to the large mass of air, in a direction perpendicular to its own motion, in order to obtain the great momentum desired in this new direction.

This solution is that of the airplane (propellor or jet for the first stage and the horizontal motion of the whole airfoil accomplishing the second stage).

L'aire balayée par l'hélice ou influencée par le réacteur étant relativement de petites dimensions, la vitesse de la masse gazeuse orientée horizontalement sera grande. Et pour une énergie cinétique relativement élevée on obtient une quantité de mouvement relativement faible mais suffisante pour déplacer l'avion. L'aire balayée par les ailes de l'avion se trouve définie par la surface formée par l'envergure et le chemin parcouru. Elle devient alors très grande, et il est donc possible d'obtenir, par une aile bien conçue, un faible déplacement vers le bas d'une grande masse d'air et par conséquent une grande quantité de mouvement, et ceci pour l'énergie dont on pouvait disposer au départ.

Il y avait dans le cas de ce type d'appareil deux façons de penser le problème afin d'obtenir une grande aire à balayer : celle de très grandes envergures et de vitesses de déplacement horizontal relativement lentes (solution des planeurs en général), et celle de la réduction de l'envergure et augmentation très sensible de la vitesse de déplacement (solution des avions en général).

Le problème le plus délicat à résoudre consistait alors dans la réalisation de l'outil capable de provoquer la mise en mouvement de l'air et de transposer à l'avion l'effet de cette quantité de mouvement. C'est ce qui a donné lieu aux études très poussées des profils d'ailes pour augmenter la circulation tout en gardant le maximum de finesse.

Mais très vite cette solution "avion", qui paraissait la plus facile, se compliqua. Surtout lorsqu'on arriva aux appareils de plus grandes dimensions. La construction et les exigences d'une infrastructure appropriée ont posé des problèmes extrêmement complexes.

D'une part, les questions de construction proprement dites, de stabilité et de sécurité, l'établissement et la connaissance des efforts de tous genres qui agissent sur les différentes parties de l'appareil, l'étude des gouvernes, les fatigues des matériaux, etc..., ont obligé les constructeurs à des frais considérables. A tout ceci se sont ajoutées des questions de confort notamment pour des déplacements à grandes distances.

De telle sorte que les réalisations se sont révélées nécessairement très compliquées et fort longues.

Il en est résulté également un prix de revient extrêmement élevé.

D'autre part, la grande charge par mètre carré de surface portante a exigé : a) l'obtention de grandes vitesses avant de pouvoir décoller, et b) le maintien de ces vitesses à l'atterrissage, ce qui a eu pour résultat la construction de pistes d'envol bien orientées et de très grandes dimensions et tout un système d'infrastructure très important. Tout ceci, entre autres inconvénients, a fait encore augmenter le prix réel de la solution "avion".

C'est pourquoi, presque en même temps, on a recherché une deuxième solution en partant directement de la source d'énergie, pour agir par une mécanique délicate sur une assez grande aire afin d'obtenir la quantité de mouvement recherchée pour la sustentation, sachant d'avance que le rendement mécanique serait de beaucoup inférieur à la solution avion, et ce fut

The area swept by the propeller or influenced by the jet being of relatively small dimensions, the velocity of the gaseous mass in a horizontal direction will be high. And for a relatively high kinetic energy we obtain a relatively small momentum, but enough to move the plane. The area swept by the wings of the plane is defined as the surface formed by the span and the distance travelled. This makes it very large and it is possible by means of a well-designed wing, to obtain a small downward velocity of a large mass of air, and consequently great momentum, all of which comes from the energy which was available at the start.

In the case of this type of machine, there were two ways of looking at the problem in order to obtain a large sweep area: either there must be very great spans but relatively slow horizontal speeds (in general the glider solution), or the span must be reduced and the speed very greatly increased (general airplane solution).

The most tricky problem which had then to be solved was that of finding the instrument capable of setting the air in motion as desired and transposing the effect of its momentum to the plane. This is what stimulated the very intensive study of wing profiles to increase air circulation while still retaining maximum lift-drag ratio.

But this "airplane" solution, though appearing the easiest at first, soon became complicated. Especially when it became a question of larger machines. Their construction and the requirements of an appropriate infrastructure set some extremely complex problems.

First of all the problems of construction proper: questions of stability and security, the determination of and allowance for all the various types of stress affecting the different parts of the machine, study of the controls, of the fatigue of materials, etc... led constructors into considerable expense. To all this were added problems of comfort, particularly for long-distance flights.

For these reasons the machines constructed were inevitably very complicated and also took a long time.

As a result, prime costs were extremely high.

In addition, the heavy load per square meter of carrying-surface demanded: a) the obtention of high speeds before take-off and b) the maintenance of these speeds on landing. This necessitated the construction of runways oriented in definite directions and of very large dimensions, and a whole very extensive system of infrastructure. All this, among other inconveniences, again increased the prime costs of the "airplane" solution.

This is why, almost at the same time, a second solution was sought, in which direct use would be made of the source of energy, acting by means of a delicate mechanism over a fairly large area in order to obtain the momentum required to lift the machine, although it was of course realised

la solution de l'hélicoptère (gyroplane, autogyre, etc....), avec tous les énormes inconvénients (notamment la faible possibilité de vitesse horizontale) et les grandes complications mécaniques que celle-ci comporte.

Nous avons alors envisagé une troisième solution, qui consisterait à réaliser par un moyen simple, sans complications mécaniques, la transmission la plus directe possible de l'énergie dont on pouvait disposer à une grande masse d'air, laquelle masse serait déplacée vers le bas à une vitesse aussi réduite que possible mais qui pourrait aussi imprimer une grande vitesse horizontale à l'appareil.

C'est cette idée directrice qui a guidé nos études, dont le résultat est ce que l'on nomme aujourd'hui l'"Effet COANDA".

En d'autres termes, nous avons cherché s'il était possible, pour une énergie donnée, d'obtenir, entre autres choses et sans l'intervention de systèmes mécaniques, la plus grande quantité de mouvement possible dont la valeur serait supérieure au poids de l'ensemble, et ceci en agissant directement sur l'air ambiant.

Ceci nous a conduit à rechercher comment l'on pourrait éventuellement se servir de l'énergie cinétique d'un jet gazeux, laquelle bien employée et dans des conditions bien définies, serait en mesure d'agir directement sur l'ambiance comme nous le désirions.

Il ne s'agissait pas, par conséquent, de chercher simplement, sans choc sur une paroi, à dévier un jet fluide, mais de l'amener à transposer directement l'énergie qu'il aurait emmagasinée, à une grande partie de l'air ambiant afin d'imprimer à celui-ci un mouvement orienté dans la direction que l'on aurait pu donner au jet.

Pour atteindre ce résultat il fallait faire en sorte que le jet, après sa sortie d'un canal d'amenée, fut mis dans un état tel que par la faible pression qui y règnerait et qui devait être inférieure à celle de l'ambiance, il puisse être capable d'agir sur celle-ci en l'entraînant, non pas uniquement par frottement mais bien plus par l'action de la différence de pression existant entre celle de l'ambiance et celle du jet.

Telles sont les données générales du problème que nous nous étions posé lorsque nous avons commencé nos recherches.

Nous avons pensé que la solution consisterait à chercher, une fois le jet sorti de son canal d'amenée, à le faire circuler dans une tuyère asymétrique, à savoir une tuyère dont une des parois serait réelle, l'autre fictive étant réalisée par l'ambiance gazeuse.

En somme, l'Effet Coanda est un ensemble de phénomènes de mécanique des fluides dus à l'action réciproque de deux fluides, dans le cas où celui qui doit entraîner l'autre est amené à circuler le long d'une tuyère asymétrique.

Cet "Effet" est en définitive le résultat d'une très longue série de constatations et d'études commencées un peu après le début du siècle, mais qui ont été plus particulièrement poussées depuis 1932.

from the outset that the mechanical efficiency would be far below that of the airplane solution. This second solution was that of the helicopter (gyroplane, autogyro, etc...) with all the great disadvantages it involved (especially the reduced possibilities of horizontal speed) and the excessive mechanical complication.

So we then began to consider a third solution, which would consist of finding a simple device, without mechanical complications, for transposing the energy available as directly as possible to a large mass of air, which mass would be set in downward motion at a speed as low as possible but which would also be capable of imparting great horizontal speed to the machine.

This was the idea which led to the investigations that resulted in the discovery of what is today known as the COANDA Effect.

In other words, we set out to study the possibility of obtaining, for a given amount of energy, and among other things without the intervention of mechanical elements, the greatest possible momentum, the value of which would be greater than the weight of the whole machine, by direct action on the surrounding air.

This led us to seek a means of utilising the kinetic energy of a gaseous jet, which, used in the right way and in definite conditions, would be capable of acting directly on the surrounding air in the desired manner.

It was therefore not a case of simply seeking to deviate a jet of fluid without causing it to strike a wall, but of persuading the jet to transpose its stored energy directly to a large part of the surrounding air in order to set this air moving in the same direction as that given to the jet.

To achieve this result we had to obtain that the pressure in the jet after it left its conduit should be low, lower than that of the surrounding air, which would enable the jet to act on the surrounding air and induce it, not only by surface friction but above all due to the effect of the difference of pressure between the jet and the surrounding atmosphere.

These were the general data of the problem which we had set ourselves at the beginning of our research.

We thought that the best solution would be to make the jet, once out of its conduit, flow through an asymmetric nozzle of which one wall would be real and the other fictitious, being formed by the ambient atmosphere.

Actually, the COANDA Effect is a combination of phenomena in the sphere of fluid mechanics due to the reciprocal action of two fluids when the primary, inducing fluid is made to flow along an asymmetric nozzle.

In fact, this "Effect" is the result of a very long series of investigations and research work, begun a little after the beginning of the century but pursued most intensively since 1932.

Dans le cadre du présent exposé il ne s'agit que de l'étude de l'action réciproque de deux gaz, c'est à dire de deux fluides compressibles et plus particulièrement de l'air. On étudiera aussi les limites des possibilités de transposition de l'énergie cinétique dont peut disposer un gaz de faible masse lancé à grande vitesse à une autre masse beaucoup plus grande, en vue de son utilisation à la résolution d'un problème bien défini.

Nous nous sommes tout de suite heurtés au fait que nous n'avions qu'une idée très approximative de ce que pouvait être l'air et en général un gaz qui en plus se comporte comme s'il était optiquement vide.

Que savons-nous d'un gaz ?

Personne n'a jamais vu sa structure, personne ne sait comment sont faites ses molécules, a fortiori personne ne les a vu se mouvoir, et pourtant, on a établi des lois de comportement auxquelles ce gaz, c'est à dire l'ensemble de ses molécules, paraît répondre assez correctement.

Pour établir ces lois, on a dû émettre un grand nombre d'hypothèses qui apparaissent, dans certaines limites, justifiées quant à la structure interne du gaz, mais qui nous laissent dans l'ignorance totale de ce qu'est physiquement une molécule, alors que cette connaissance nous apparaît essentielle.

Cette molécule qui est à la base de la structure interne d'un gaz est certainement très particulière. Elle doit être d'une complexité très grande, formée de protons, de neutrons, de mésons de tous genres, d'électrons, entourée de champs de force de natures diverses et disposant certainement d'une énergie propre.

Ce sont des populations (au sens statistique) de telles molécules qui se groupent pour faire ce que nous appelons un gaz.

Même groupées on les suppose cependant parfaitement indépendantes les unes des autres, ayant chacune une énergie propre laquelle se manifeste notamment par des mouvements de déplacement rapide, apparemment rectilignes, et ceci dans des espaces libres qui sont propres aux caractères physiques de leur groupement.

On les considère également comme caractérisées par leur masse au repos, par leur charge électrique, par leur moment de quantité de mouvement de rotation (spin), par leur moment magnétique.

De plus, on constate qu'elles ont la faculté, sous certaines actions extérieures, de pouvoir accumuler des quantités énormes d'énergie qu'elles restituent à cent pour cent lorsque les conditions d'origine sont rétablies.

On constate aussi que sous l'action de forces extérieures et à l'état de groupement, leur nombre est identique lorsque ce sont les mêmes conditions qui leur sont imposées (et ceci quels que soient leurs origines ou leurs poids). On constate enfin qu'elles se transmettent de l'une à l'autre leur excédent d'énergie afin d'arriver toutes au même degré énergétique individuel.

Within the scope of the present survey we shall only study the reciprocal action of two gases, that is to say of two compressible fluids and more particularly of air. We shall then study the limits within which it is possible to transfer the kinetic energy available in a small mass of gas driven at great speed to another and much greater mass, in view of using this to solve a well-defined problem.

To begin with, we immediately stumbled over the fact that we only had a very approximate idea of the real nature of air or, in general, of gas which behaves as if it were optically empty.

What do we know about gases ?

No one has ever seen their structure; no one knows how their molecules are made; a fortiori no one has seen them move, and yet laws have been established for the behavior of gases, that is to say of the molecular aggregates of which they are formed to which these appear in large measure to conform.

In order to establish these laws a number of hypotheses had to be made which appear within certain limits to be justified as regards the internal structure of gases, but which still leave us in complete ignorance as to the real physical nature of a molecule, which question appears to us, however, to be essential.

This molecule, which is the basic element in the internal structure of a gas, must be a very special thing. It is extraordinarily complex, consisting of protons, neutrons, mesons of all sorts, electrons, surrounded by fields of force of different kinds and certainly possessing its own energy.

These molecules group themselves together in populations (in the statistical sense) in order to form what we call a gas.

Even when grouped, we assume that they are perfectly independent of one another, each one having, as we said, its own proper energy which manifests itself in the rapid and apparently rectilinear translation of the molecule along the free paths depending on the physical characteristics of the group.

They are also considered as characterized by their mass at rest, their electric charge, the moment of their rotational momentum (spin) and by their magnetic moment.

In addition, we find that they are capable under certain external influences of accumulating enormous quantities of energy, which they give up again entirely ( 100 % ) on restoration of the original conditions.

We also note that, when grouped, the aggregate will, under the action of external forces producing the same prevailing conditions, always contain the same number of molecules (regardless of their origin or their weight). They also transfer their surplus energy to one another so that each one acquires the same degree of energy.

Mais quelle est leur forme ? On l'ignore.

Quelles sont leurs dimensions réelles ? On l'ignore.

Le développement de certaines théories physiques conduisit à les considérer comme parfaitement sphériques; cela pourrait encore s'admettre pour des gaz monoatomiques, en supposant que l'atome est sphérique, mais l'hypothèse ne se justifie déjà plus pour des gaz diatomiques.

On a voulu également les concevoir comme parfaitement dures et élastiques, mais en étudiant les variations des coefficients de viscosité avec la température, il a fallu admettre que leur diamètre hypothétique diminuait avec la température; dès lors, elles ne peuvent pas être parfaitement dures ni élastiques.

On est donc arrivé, pas à pas, à une conception qui paraît être plus juste en admettant que ces molécules à l'intérieur du gaz, avec tout leur bagage de charge électrique ou magnétique, leurs rotations, leurs vibrations, etc....., doivent être intimement liées à leur déplacement. Elles représenteraient ainsi avec leur déplacement un tout ayant sa propre quantité de mouvement, et l'on devrait dès lors considérer que dans un gaz il s'agit de rayons-molécules, c'est à dire de corpuscules accompagnés de leurs "ondes associées", ayant chacune, comme nous le disions, son énergie propre. C'est dès lors, pour nous, d'un faisceau de rayons-molécules dont on devrait parler lorsqu'il s'agira d'un écoulement gazeux.

Nous verrons plus tard le comportement d'un tel faisceau de rayons-molécules en présence de parois solides.

Pour le moment, récapitulons ce que l'on a pu établir comme lois pour un ensemble gazeux, et plus particulièrement celles qui ont pu être plus ou moins vérifiées par la théorie cinétique des gaz.

Cette théorie a, en fait, été émise dès 1658 par Gassendi, de Lyon, (Syntagma Philosophicum, Lugdini 1658) lorsque celui-ci, en examinant les différents états de la matière et la passation d'un état dans un autre, émit la première hypothèse de l'énergie cinétique interne de la matière. C'est lui le véritable père de cette théorie, dont injustement on a crédité, cent ans plus tard, Hooke et Bernoulli.

Mais ceux-ci ont, à leur tour, énoncé pour la première fois le principe suivant lequel la pression des gaz sur les parois d'une capacité était due aux impacts de particules sur lesdites parois.

Il faut attendre encore un siècle pour voir un Joule, un Clausius ou un Maxwell (vers 1859), reprendre l'étude du même sujet.

Clausius calcule d'une façon assez précise les relations entre la pression, la température et le volume, en admettant pour ses calculs que les molécules ont des dimensions infinitésimales. Il établit même les deux espèces de chaleur spécifique, en admettant que les molécules n'ont d'autre énergie que celle de leur mouvement dans l'espace.

Clerk Maxwell, à peu près au même moment, présente à la British Association d'Aberdeen sa fameuse loi sur la distribution des vitesses des molécules dans un gaz.

But what is their shape ? No one knows.

What are their real dimensions ? No one knows.

The development of certain physical theories led to the assumption that they were perfectly spherical. This might possibly be true of monatomic gases, assuming that the atom is spherical, but the hypothesis is no longer tenable when the molecules are formed of two or more atoms.

They were also taken to be perfectly hard and elastic, but a study of the variations of the viscosity coefficients with changes in temperature revealed that their hypothetical diameter diminished with the increase of the temperature; therefore they could neither be perfectly hard nor perfectly elastic.

Gradually we reached a conception which appears to be more correct, by assuming that these molecules in the interior of a gas, with all their load of electric or magnetic charges, their rotation, their vibrations etc., must be intimately linked to their own rectilinear motion. Together with their linear translation they represent a whole which has its own momentum, and we should therefore consider a gas as consisting of molecule-rays, that is to say particles accompanied by their "associated waves", each one possessing, as we said before, its own energy. Consequently, when dealing with a gaseous flow, we believe that one should talk about a pencil of molecule-rays.

We shall discuss the behavior of such a pencil of molecule-rays in the presence of solid walls later on.

For the moment let us recapitulate the laws which have been established for gases, and in particular those which it has been possible to verify, more or less, by means of the Kinetic Theory of Gases.

This theory was actually put forward in 1658 by Gassendi, at Lyon, (Syntagma Philosophicum, Lugduni, 1658) . While he was studying the different states of matter and the change from one state to another, he put forward the first hypothesis concerning the internal kinetic energy of matter. He was the real originator of this theory which, a hundred years later, was unjustly attributed to Hook and Bernoulli.

However these two men, in their turn, first stated the principle according to which the pressure of a gas against the walls of the containing vessel is due to the impact of particles on those walls.

Then we have to wait another century before we find a Joule, a Clausius or a Maxwell (towards 1859) reverting to the study of the same subject.

Clausius calculated the relationship between pressure, temperature and volume fairly accurately, assuming for his calculations that molecules are of infinitesimal dimensions. He even determined the two types of specific heat, assuming that molecules have no other energy than that of their motion in space.

At about the same time, Clerk Maxwell, before the British Association at Aberdeen, presented his famous law concerning the distribution of molecular velocities in a gas.

Par analogie avec l'hypothèse formulée par Brown (et mise en évidence par les expériences de Deleaux et Gouy en 1877 et dont la théorie mathématique a été faite par Einstein et Smoluchowsky en 1905), Kappler, en 1938, s'attache à démontrer qu'un phénomène similaire existe dans l'air.

Ainsi, au même moment où le Professeur A. METRAL présentait son mémoire sur l'Effet COANDA au 5<sup>ème</sup> Congrès de la Mécanique Appliquée, à Massachusetts, Kappler ayant construit une balance de torsion extrêmement sensible montée sous vide, enregistrait sur un film des chocs très irréguliers, dus aux rares molécules qui se trouvent encore dans la capacité qui entoure sa balance et met ainsi en évidence le mouvement Brownien dans l'air.

Aujourd'hui, en restant dans le cadre des Lois Newtoniennes, et en admettant que les dimensions des molécules sont infinitésimales, qu'elles sont parfaitement dures, parfaitement sphériques et parfaitement élastiques, on vérifie entre certaines limites les lois de Gay-Lussac, Boyle et Mariotte, à savoir : " ..... que les pressions dans un gaz varient inversement proportionnellement au volume", et partiellement aussi la Loi de Charles : " ..... que la pression pour un volume constant est proportionnelle à la température absolue".

Pour envisager le comportement gazeux en fonction de la température il faudrait, pensons-nous, abandonner au moins en partie la théorie cinétique des gaz pour introduire la théorie des quanta de Planck, car il existe une relation précise entre le rayonnement et sa fréquence.

Afin d'introduire la notion du covolume, Van der Waals d'une part, et Dietrich d'autre part, introduirent dans les formules résultant des lois ci-dessus mentionnées, des coefficients de correction.

C'est ainsi que l'on a pu établir un coefficient de variation de pression à volume constant que l'on trouve pour une densité déterminée complètement indépendant de la température. De la même façon, on a établi un coefficient de variation de volume à pression constante.

Dès lors, en partant de ces coefficients et des coefficients de Van der Waals, on peut déterminer le diamètre hypothétique de la zone d'influence qui se trouve autour de la molécule.

La théorie de l'énergie cinétique interne des gaz avait permis de préciser que : La pression par unité de surface dans l'unité de temps est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique interne pour l'unité de volume.

Puis Boltzmann a établi la constante universelle des gaz et l'hypothèse d'Avogadro se trouvait confirmée.

Loschmidt définit ensuite le nombre de molécules toujours constant de n'importe quel gaz dans les mêmes conditions de pression et de température, dans un centimètre cube de gaz.

Ces derniers travaux ont conduit à désigner sous le nom de nombre d'Avogadro le nombre de molécules dans une molécule-gramme, et du nom de nombre de Loschmidt le nombre de molécules par centimètre cube.

By analogy with the hypothesis which Brown had formulated (evidence in support of which was provided by the experiments of Delsaux and Gouy in 1877, and which was given its mathematical basis by Einstein and Smoluchowsky in 1905), Kappler, in 1938, undertook to prove that a similar phenomenon existed in the air.

At the same time as Professor A. METRAL was presenting his memorandum on the COANDA Effect before the Fifth Congress of Applied Mechanics in Massachusetts, Kappler, who had constructed an extremely sensitive torsion balance set up in a vacuum, registered on a film a number of very irregular shocks, due to the few molecules which were still present in the enclosed space round the balance, thus revealing the existence of Brownian movement in air.

Today, remaining within the limits of Newton's laws, and assuming that molecules are of infinitesimal dimensions, that they are perfectly hard, perfectly spherical and perfectly elastic, we can verify within certain limits the laws of Gay-Lussac, Boyle and Mariotte, i.e. : " .... the pressure in a gas varies in inverse proportion to the volume", and partially also Charles' law : " .... the pressure at constant volume is proportional to the absolute temperature".

When dealing with the behavior of gases as a function of temperature, we are of the opinion that the kinetic theory of gases should be abandoned at least in part, in order to introduce Planck's quantum theory, for there is a definite relation between radiation and its frequency.

To introduce the notion of covolume, Van der Waals on one hand and Dietrich on the other inserted correction coefficients into the formulæ resulting from the laws mentioned above.

This made it possible to establish a coefficient of pressure variation at constant volume, which, for a given density, we find to be completely independent of the temperature. In the same way, a coefficient of variation of volume at constant pressure was established.

On the basis of these coefficients and those of Van der Waals, one can determine the hypothetical diameter of the zone of influence surrounding the molecule.

The theory of the internal kinetic energy of gases had made it possible to state that : The pressure per unit of surface in unit time is equal to two-thirds of the internal kinetic energy for unit volume.

Then Boltzmann established the universal gas constant and Avogadro's hypothesis was confirmed.

Loschmidt defined the constant number of molecules of any gas, in the same conditions of pressure and temperature, in 1 cc. of gas.

Later, the number of molecules in one molecule-gram was called the Avogadro number and in 1 cc. the Loschmidt number.

These numbers were verified by analogy with electrolytic phenomena,

Ces nombres ont été vérifiés par analogie avec les phénomènes électrolytiques en partant du fait que l'on connaissait le nombre d'unités électromagnétiques nécessaires pour briser électrolytiquement une masse de substance quelconque représentant une molécule-gramme. Ceci fait, on est arrivé à la conclusion que dans l'atmosphère qui entoure notre terre le nombre des molécules de l'air était de l'ordre de  $10^{24}$ , et que les molécules s'y déplaçaient, à notre altitude, à une vitesse légèrement inférieure à 500 mètres par seconde, à la température moyenne.

Mais l'on est resté incapable d'établir théoriquement le rapport entre les chaleurs spécifiques de l'air. Certes, la différence des deux chaleurs spécifiques, de celle à pression constante et de celle à volume constant, reste toujours constante pour chaque gaz, mais pour les gaz diatomiques ou polyatomiques la théorie ne correspond plus aux mesures. Il faut donc admettre que la différence constatée provient du fait que dans la molécule il y a absorption d'énergie.

Et comme l'énergie cinétique interne qui se manifeste correspond aux degrés de liberté suivant trois dimensions et que la différence trouvée correspondait en fait à deux autres degrés de liberté pour la molécule de l'air, on arrive à la conception d'un mouvement de rotation autour d'un axe de symétrie de ladite molécule.

Nous pouvons maintenant entrevoir ce que pourrait être cette molécule : une espèce de corps de révolution en mouvement rotationnel continu qui représente peut-être la zone d'influence et qui se déplace suivant la direction générale de son mouvement, un peu comme un corpuscule sur son onde pilote. Et la trajectoire de ce rayon-molécule de gaz diatomique se présenterait comme une double spire dont la nature physique reste complètement inconnue.

Mais il reste aussi à examiner la question de l'élasticité parfaite ou non de la molécule.

Lorsqu'on cherche à calculer l'espace libre entre les molécules et le diamètre hypothétique de la zone d'influence de celles-ci, il est bien évident qu'il est impossible de considérer la molécule comme une sphère élastique. Toutes les expériences et mesures faites dans ce but sont en contradiction avec la théorie.

Mais si la molécule n'est pas une sphère parfaitement élastique, comment peut-on expliquer le rebondissement des molécules contre les parois d'une capacité ?

Tout simplement, à notre avis, par la raison qu'il n'y a pas rebondissement. Les expériences de Knussden et surtout celles de Langmuir, montrent d'ailleurs qu'effectivement les molécules ne rebondissent pas.

Elles sont, après l'impact, absorbées par les parois et ensuite éjectées hors de celles-ci et cela dans une direction quelconque due au hasard et qui n'a plus aucune relation avec la direction qu'elles avaient avant le choc.

La molécule semble perdre sa vie de mouvement lorsqu'elle vient en contact avec la paroi et après un certain intervalle de temps elle commence

on the basis of the fact that the number of electromagnetic units required to break up by electrolysis a mass representing one molecule-gram of any substance was known. This led to the conclusion that the number of molecules of air in the atmosphere surrounding our earth must be of the order of  $10^{24}$ , and that, at our altitude, these molecules are moving at a speed of slightly less than 500 meters per second, at normal temperature.

But we were still unable to establish the theoretical ratio between the specific heats of air. The difference between the two specific heats, that at constant pressure and that at constant volume, always remains the same for each gas, but in the case of diatomic or polyatomic gases the theoretical values for the ratio between the specific heats no longer correspond to the measurements. It must therefore be assumed that the resulting difference is due to the fact that there is absorption of energy in the molecule.

And as the internal kinetic energy which reveals itself corresponds to the degrees of liberty in three dimensions, and the difference found corresponds to two more degrees of liberty for the molecule of air, we are led to the conception of a rotational movement about an axis of symmetry of the molecule.

We can now perceive what this molecule might be : a sort of body of revolution in continuous rotational movement which may represent the zone of influence and which moves in its general direction of motion rather like a particle on its pilot wave. And the trajectory of this molecule-ray of diatomic gas resembles a double spiral, the physical nature of which is as yet entirely unknown.

Yet another very important point requires investigation. It is the question of whether the molecule is perfectly elastic or not.

When we seek to calculate the free path between the molecules and the hypothetical diameter of their zone of influence, it is obvious that the molecule cannot possibly be considered as an elastic sphere. All experiments and measurements made with this object are in contradiction to the theory.

But if the molecule is not a perfectly elastic sphere, how can one explain that molecules rebound off the walls of a closed vessel ?

Quite simply, in our opinion, by the fact that they do not rebound. Knudsen's experiments and especially those of Langmuir confirm that molecules really do not rebound.

On impact, they are absorbed by the walls and later expelled from them in some direction which has no connection at all with the direction they had before impact.

The molecule appears to lose its life of motion when it comes into contact with the wall and after a certain interval of time it starts

une autre vie dans une direction quelconque qui est conditionnée par la qualité de la paroi et le milieu ambiant.

Il y a analogie entre ce phénomène et la manifestation de la couleur d'un corps sous l'action de la lumière.

Dans l'évolution de la physique, beaucoup d'hypothèses se sont évanouies, d'autres disparaîtront encore, comme il en est de nos jours de la notion de parité dans les phénomènes nucléaires. Il en sera certainement ainsi dans l'écoulement des gaz pour la notion de frottement sur les parois.

L'intervalle de temps qui s'écoule entre l'impact et l'éjection d'un gaz par une paroi indique que l'on est en présence d'un phénomène distinct de celui du rebondissement de la molécule.

Cet intervalle garde une valeur constante pour chaque constituant formant la paroi et ne varie qu'avec les dimensions de la molécule gazeuse.

Si l'absorption par la paroi varie dans des limites assez étendues tout en étant fonction de la surface de contact, le temps nécessaire à l'éjection varie par contre dans des limites beaucoup plus restreintes et en fonction d'un volume ayant une épaisseur très faible, presque moléculaire.

Il en résulte aussitôt qu'une surface rugueuse pourra absorber plus qu'elle ne peut éjecter dans l'unité de temps; il y aura dès lors emmagasinement d'énergie, donc élévation de température.

Ainsi, l'éjection par une surface rugueuse gênera bien plus considérablement l'écoulement que si elle avait lieu par une surface lisse.

Mais de toute façon, l'éjection se faisant au hasard des positions et des mouvements des molécules existant dans le corps formant paroi, il existera entre ce corps et le gaz proprement dit une couche très particulière qui est la "couche limite". Cette couche est composée : des molécules venant du gaz pour réaliser à une vitesse déterminée l'impact sur la paroi, et des molécules éjectées avec un certain retard et à une vitesse d'éjection différente. Cette couche parasitaire constitue comme une espèce de matelas entre la masse fluide en mouvement et la paroi fixe. En quittant cette couche, les molécules qui s'introduisent à nouveau dans le gaz en mouvement doivent se plier aussitôt aux lois de la viscosité et de la diffusion.

Car si à l'intérieur d'un gaz on peut parler de coefficient de viscosité et même de coefficient de viscosité dynamique (coefficient de diffusion de Meyer) il n'est pas possible de parler des mêmes valeurs dans le comportement des corpuscules de la couche limite.

Le coefficient de viscosité interne est fonction directe de la quantité de mouvement attachée à chaque molécule, et indirecte du carré de la dimension du diamètre hypothétique de la zone d'influence de ladite molécule.

another life in some other direction which is determined by the nature of the wall and of the ambient medium.

There is analogy between this phenomenon and the appearance of the color of a body under the action of light.

In the evolution of physics many hypotheses have vanished and others will also disappear, such as for instance, in our time, the notion of parity in nuclear phenomena. The same will surely happen to the notion of friction against walls in the case of gaseous flow.

The interval of time which passes between the impact of a gas on the wall and its expulsion indicates that we are here faced with a phenomenon which is quite distinct from the mere rebounding of the molecules.

This interval has a constant value for each substance constituting the wall and only varies with the dimensions of the gas molecule.

Whereas absorption by the wall varies within fairly wide limits, while being a function of the contact area, the time required for expulsion varies within much narrower limits and as function of a space of very little thickness, almost molecular.

As a result of this, a rough surface will absorb more than it can expel in unit time, so that energy will be stored up, accompanied by a rise in temperature.

Hence expulsion by a rough surface will be a much greater hindrance to flow than expulsion by a smooth surface.

In any case, since expulsion occurs entirely according to the position and movement of the molecules in the body forming the wall, there will be, between this body and the gas proper, a very special layer which is the "boundary layer". This layer is composed of molecules coming from the gas and on their way to strike the wall at a fixed velocity and molecules expelled after a certain interval and at a different velocity. This parasitic layer forms a sort of mattress between the fluid mass in motion and the fixed wall. On leaving this layer, the molecules reentering the gas in motion must immediately conform to the laws of viscosity and diffusion.

For although in the interior of a gas we can speak of a viscosity coefficient and even of a dynamic viscosity coefficient (Meyer's diffusion coefficient), we cannot speak of the same values when we are dealing with the behavior of particles in the boundary layer. The internal viscosity coefficient is a direct function of the momentum attached to each molecule, and an indirect function of the square of the hypothetical diameter of the zone of influence of the molecule.

This coefficient is independent of the number of molecules in a fixed volume, and therefore independent of density.

Ce coefficient est indépendant du nombre de molécules dans un volume déterminé, donc indépendant de la densité.

Par contre, le coefficient de diffusion de Meyer (coefficient de viscosité dynamique), est le rapport entre le coefficient de viscosité et la densité du gaz.

On peut dire alors qu'à l'intérieur du gaz le coefficient de diffusion se rapporte au transport de la qualité (valeur moléculaire interne), alors que le coefficient de viscosité se rapporte à la quantité (nombre des molécules).

D'où on voit ainsi qu'à l'intérieur d'un gaz la qualité ne change pas après les chocs, alors que la quantité peut changer. La qualité reste fonction de l'espace libre lequel, à température égale, varie inversement proportionnellement avec la pression et le volume. Cet espace libre à température et volume constants varie par conséquent de façon inversement proportionnelle à la pression.

Avant d'aller plus loin dans cet exposé, rappelons ce qu'est un écoulement gazeux.

Les molécules de deux gaz en présence s'interpénètrent, et s'il y a écoulement visible de l'un vers l'autre c'est que le premier possède une énergie interne supérieure au second. Or, nous rappelons que dans l'unité de temps et pour l'unité de volume, la pression exercée sur l'unité de surface par le gaz est égale aux deux tiers de son énergie interne. Si les deux gaz en présence sont à la même température, la supériorité énergétique de l'un par rapport à l'autre manifestera qu'il possède dans l'unité de volume un nombre de molécules supérieur à celles de l'autre.

Ainsi ce que l'on constate dans l'écoulement c'est uniquement le mouvement de diffusion du nombre excédentaire de molécules d'un gaz vers un autre, car pendant le même temps l'on ne peut discerner le mouvement du gaz qui se trouvant en aval remonte vers celui qui se trouve en amont de l'écoulement.

Si par un moyen quelconque, par exemple par l'action d'une paroi de forme appropriée, on pouvait arriver à un endroit déterminé et sans dépense supplémentaire d'énergie extérieure, à réduire l'énergie interne du gaz remontant, c'est à dire à diminuer le nombre des rayons-molécules se trouvant à cet endroit, on y constaterait alors une accélération de l'écoulement. C'est ce qui se passe pour un écoulement à travers une tuyère de section circulaire lorsqu'on introduit un passage convergent-divergent. Le divergent a pour rôle de conjuguer l'action de sa paroi avec le coefficient de viscosité du gaz aval et d'empêcher ainsi celui-ci dans une certaine mesure d'agir sur le gaz amont.

De cette façon, au col qui relie le convergent au divergent le nombre de molécules du gaz aval sera réduit, et étant donné que la diffusion est inversement proportionnelle à la densité on assistera à une rapide diffusion à travers ledit col des molécules plus nombreuses venant du gaz amont.

On the other hand, Meyer's coefficient of diffusion (dynamic viscosity coefficient) is the ratio of the coefficient of viscosity to the density of the gas.

One can therefore say that in the interior of a gas the diffusion coefficient refers to the transport of quality (internal molecular value), whereas the viscosity coefficient refers to quantity (number of molecules).

Thus we see that in the interior of a gas there is no change of quality after collisions, whereas quantity can change. The quality remains a function of the free space which, at constant temperature, varies in inverse proportion to pressure and volume.

This free space at constant temperature and volume will therefore vary in inverse proportion to the pressure.

Before continuing this survey, let us recall the nature of a gaseous flow.

The molecules of two gases in contact intermingle and if there is a visible flow from one to the other it is because the first one has a greater intrinsic energy than the other. However, let us remember that in unit time and for unit volume the pressure exerted by the gas on unit area is equal to two-thirds of its intrinsic energy. If the two gases in contact are at the same temperature, a higher energy level in one than in the other will indicate that the former contains a larger number of molecules per unit volume.

Thus what we observe in a flow is simply the movement of diffusion of the excess molecules from one gas to the other, for we cannot discern at the same time the movement of the gas downstream which is rising towards the gas upstream of the flow.

If by some means, for instance by the action of a suitably shaped wall, we could, without using any additional outside energy, succeed in reducing the intrinsic energy of the rising gas at a certain point, that is to say in reducing the number of molecule-rays there, an acceleration of flow would be produced at that point. This is what happens in the case of a flow through a nozzle of circular section if one introduces a convergent-divergent passage. The role of the divergent is to couple the action of its wall with the viscosity coefficient of the gas downstream, thus to a certain extent preventing the latter from exerting an action on the gas upstream.

By this means the number of molecules of downstream gas at the throat connecting the convergent to the divergent is reduced and, since diffusion is in inverse proportion to density, we then have rapid diffusion through the throat of the excess molecules coming from the gas upstream.

C'est ce phénomène que l'on observe pendant la circulation d'un gaz à travers une tuyère dite de "VENTURI".

Il y a donc localement un accroissement de l'énergie cinétique de l'écoulement et cet accroissement se manifestera par une chute provisoire de l'énergie potentielle du gaz, c'est à dire que l'on pourra mesurer à cet endroit une chute de température et une chute de pression. Par conséquent, en amont du col, donc dans le convergent, il y aura chute de température ce qui doit correspondre à une diminution de la vitesse interne des molécules, donc à une réduction de la valeur du rayon-molécule (quantité de mouvement de la molécule) et par conséquent, d'une part à une réduction progressive de la valeur de la viscosité et, d'autre part, à une diminution progressive de la couche limite par réduction de la valeur des impacts. Cela devient de plus en plus sensible lorsque l'on s'approche du col.

Etant donné la loi des grands nombres, on conçoit que la direction moyenne de l'éjection par la paroi des molécules d'un gaz soit normale à la tangente en un point au profil de la paroi.

Si donc pour faciliter l'écoulement de l'amont vers l'aval on trace le profil de la paroi du convergent afin que les molécules éjectées soient fortement dispersées, on doit arriver à augmenter encore l'écoulement mesurable de l'amont vers l'aval à travers un col.

Une série de travaux fort intéressants ont été faits par Kröner, Biffort, Martinot-Lagarde, Vedermikoff, Donek, Margoulis, etc..., sur les écoulements partant d'un col à travers un divergent. La constatation de tous ces chercheurs, c'est que l'écoulement se fait le mieux dans des tuyères divergentes de section circulaire. Ceci était à prévoir. Pour mesurer la valeur du phénomène et établir ce qu'ils appellent un rendement, ils mesuraient la pression dynamique au col et la comparaient à la pression statique à la sortie du divergent.

Kröner s'est donné un rapport de section : Celle du col par rapport à celle de la sortie du divergent d'environ 3,7 avec une pente de divergence, c'est à dire un angle d'ouverture, de  $11^\circ$  environ.

Il a mesuré les différentes pressions statiques sur les parois en partant de la pression statique au col prise pour zéro et les a rapportées à la pression dynamique au col calculée à partir de la vitesse moyenne. Il a ainsi obtenu un quotient.

Pour une vitesse au col de 30 m./sec., il a obtenu à la sortie du divergent un quotient qui avait une valeur de 105 % !

Biffort, lui, a cherché surtout l'augmentation de la qualité en travaillant les angles d'ouverture. Il a obtenu pour des vitesses moyennes au col de 100 m./sec. et un angle d'ouverture de  $7^\circ$  et en évitant surtout toute dispersion des molécules éjectées par la paroi à la sortie du divergent, c'est à dire en évitant tout évasement à ce point, des rendements dépassant 90 %, ces rendements étant pour lui le rapport entre le travail représenté par l'énergie cinétique au col et celui qui correspondrait à la compression qui amènerait la masse qui passe par seconde en ce col de la pression statique existant au col à celle existant à la sortie du divergent.

This is the phenomenon which we observe during the flow of a gas through a so-called "Venturi" nozzle.

There is thus a local increase in the kinetic energy of the flow and this increase will show itself by a temporary drop in the potential energy of the gas, that is to say, a drop in both temperature and pressure can be measured at that point. As a result, above the throat, in the convergent, there is a drop in temperature which must correspond to a reduction of the internal velocity of the molecules, hence to a reduction of the value of the molecule-ray (momentum of the molecule) and consequently on one hand to a progressive reduction of the viscosity value and on the other to a progressive reduction of the boundary layer since the collision values are reduced. This becomes more and more marked as one approaches the throat.

In view of the law of large numbers we assume that the mean direction in which the molecules of a gas are expelled from the wall is normal to the tangent at a point on the profile of the wall.

If, therefore, in order to facilitate flow in the downstream direction, we give the wall of the convergent a profile such that the expelled molecules are widely dispersed, we should be able to increase still further the measurable flow through a throat in the downstream direction.

Some very interesting work was done by Kröner, Biffort, Martinot-Lagarde, Vedernikoff, Donek, Margoulis, etc....., on flow through a throat followed by a divergent. All these experimenters found that the best flow was obtained with divergent nozzles of circular section. This was to be expected. In order to measure the value of the phenomenon and to establish what they called the efficiency, they measured the dynamic pressure at the throat and compared it with the static pressure at the exit of the divergent.

Kröner took a sectional ratio : the throat section to that of the divergent, of approximately 3.7, with a divergent slope, that is an angle of divergence of approximately  $11^\circ$ .

He measured the different static pressures on the walls, starting from the static pressure at the throat as zero, and compared them with the dynamic pressure at the throat calculated from the mean velocity. By this means he obtained a quotient.

For a velocity of 30 m/sec. at the throat he obtained, at the exit of the divergent, a quotient with a value of 105 % .

Biffort concentrated particularly on improving the quality by working on the angles of divergence. For mean velocities of 100 m/sec. at the throat and an angle of divergence of  $7^\circ$  and above all avoiding all dispersion of the molecules expelled from the wall at the exit of the divergent, that is to say avoiding all widening of the nozzle at that point, he obtained efficiencies exceeding 90 %, the efficiency being for him the ratio between the work represented by the kinetic energy at the throat and that corresponding to the compression which would raise

Biffort a travaillé sur des systèmes convergents-divergents. Lorsqu'il enleva le convergent, son rendement tombe à moins de 67 %. Essayant dans une tuyère convergente-divergente de procéder à un léger étranglement après la sortie du divergent dans une partie cylindrique qu'il avait ajoutée, ce qu'il appela le rendement approchait alors de 100 %.

Martinot-Lagarde a étudié plus particulièrement les effets que pourrait avoir sur l'écoulement l'introduction d'un col cylindrique plus ou moins long entre le convergent et le divergent.

Les résultats de toutes ces expériences ont prouvé d'abord qu'en régime subsonique pour qu'un divergent fonctionne bien il faut qu'il soit précédé d'un convergent et que dans ce cas on peut trouver à la sortie du divergent une pression statique élevée par rapport à celle du col prise pour zéro.

Il y a donc intérêt à chercher comment avec le minimum de dépense cette pression statique au col peut être maintenue aussi haute que possible.

Admettons maintenant qu'en amont comme en aval d'une tuyère convergente-divergente, nous ayons affaire à deux gaz absolument identiques (par exemple, tant en amont qu'en aval, nous avons de l'air ambiant). Nous apportons en amont une certaine énergie représentée par un jet gazeux ayant une énergie cinétique importante pour une faible masse. Cette énergie peut être transposée avec un certain rendement à l'air ambiant et lui imprimer de ce fait une certaine vitesse.

Plusieurs moyens peuvent être employés pour réaliser le plus haut rendement, c'est à dire pour maintenir au maximum le rapport entre l'énergie finale de l'air à la sortie du divergent et celle qui existe dans le jet gazeux.

On peut agir soit en réduisant la dépense d'énergie qui a permis d'obtenir le jet, soit en augmentant l'énergie potentielle de la masse d'air mise en mouvement par ledit jet, soit encore agir sur les deux énergies à la fois.

Dans le premier cas, on peut imaginer un jet gazeux agissant de façon intermittente lequel pendant son fonctionnement et par interaction du gaz imprime à une masse d'air ambiant une certaine vitesse, réalisé de façon telle que lorsque le jet cesse de fonctionner, la masse d'air lancée continue son mouvement pendant un certain laps de temps tout en entraînant une certaine quantité supplémentaire d'air. Après ce laps de temps on provoquera une seconde bouffée du jet et par suite une seconde impulsion à l'air qui s'écoulera de la même façon, et ainsi de suite .... La pression au col serait de cette manière rétablie entre chaque action du jet gazeux et le rendement de l'ensemble encore faible se trouverait cependant fortement amélioré par rapport à l'action d'un jet continu.

Dans le second cas, on peut imaginer un processus augmentant l'énergie de la masse d'air ambiant à entraîner, en réalisant par exemple un jet qui serait lui-même en dépression par rapport à l'ambiance. Dans ce cas, il y aurait un fort appel d'air et une augmentation de l'action de cet air

the pressure of the mass passing through the throat per second from the static pressure reigning at the throat to that reigning at the exit of the divergent.

Biffort worked on convergent-divergent devices. When he removed the convergent his efficiency dropped to less than 67 %. When, with a convergent-divergent nozzle, he tried making a slight constriction after the exit of the divergent in a cylindrical part which he had added, what he termed the efficiency approached 100 %.

Martinot-Lagerde devoted his attention particularly to the effect produced on the flow by the introduction of a cylindrical throat of greater or lesser length, introduced between the convergent and the divergent.

The results of all these experiments proved, in the first place, that for a divergent to function properly in the subsonic regime it must be preceded by a convergent, and in that case the static pressure noted at the exit of the divergent may be high compared with that at the throat taken as zero.

It is therefore of interest to seek how, with the minimum expenditure of energy, this static pressure at the throat can be kept as high as possible.

Let us now assume that both upstream and downstream of a convergent-divergent we are dealing with absolutely identical gases (for instance with surrounding air both upstream and downstream). Upstream we supply a certain quantity of energy in the form of a jet which possesses high kinetic energy for a small mass. This energy can be transposed with a certain efficiency to the surrounding air, thus imparting to the latter a certain velocity.

Various means can be used to obtain the highest efficiency, that is, to maintain the highest possible ratio between the final energy of the air on exit from the divergent and that existing in the jet.

Our action can take the form either of reducing the energy expended to produce the jet, or of increasing the potential energy of the mass of air set in motion by the said jet, or again we can act on both at once.

In the first case we can imagine a jet functioning intermittently : while it is flowing and by interaction of the gases it imparts a certain velocity to the surrounding air; when it ceases to function the mass of air set in motion continues to move for a certain time, while inducing an additional quantity of air. After this lapse of time there will be a second blast from the jet and the air will receive a second impulse with the same results as before, and so on .... By this means the pressure at the throat will be reestablished between each blast of the jet and the relatively low efficiency of the whole unit will still be very much improved by comparison with what it would be if a continuous jet were used.

In the second case we can imagine a procedure which would increase the energy of the mass of surrounding air to be induced by, for instance, producing a jet which is itself at a lower pressure than the surrounding air. In this case a strong suction effect would be exerted on the

ambiant mettant en jeu son énergie interne. Cela paraît de prime abord impossible à réaliser; c'est cependant ce que nous avons cherché à réaliser.

Dans le troisième cas, on peut imaginer une combinaison entre le premier procédé et le second.

Bien que gardant encore une idée assez confuse de la structure même de la molécule, mais ayant toutefois une idée assez claire du comportement de l'air pris dans son ensemble, nous pouvons nous attaquer au problème que nous voulons résoudre et que nous posons ainsi : Comment agir sur un jet gazeux pour que tout en lui conservant une énergie cinétique élevée on puisse le faire pénétrer dans l'ambiance dans des conditions d'état fortement dépressionnaire ? Ce qui revient donc à résoudre le deuxième cas ci-dessus mentionné.

Nous étudierons ultérieurement s'il y a possibilité de rendre le jet intermittent et s'il y a au surplus avantage à le faire.

Ainsi que nous l'avons précisé, lorsqu'un jet gazeux pénètre dans un autre milieu gazeux, il y a diffusion tant des molécules du jet vers le milieu ambiant que de celles du milieu ambiant vers le jet.

Les molécules qui sortent du jet pour entrer dans l'ambiance ont une orientation de diffusion dirigée suivant la résultante entre leur mouvement interne propre et celui du jet, c'est à dire une orientation de diffusion voisine du sens de mouvement du jet; celles du milieu ambiant, par contre, pénètrent dans le jet suivant la direction de leurs impacts, c'est à dire que leur direction moyenne est orientée normalement à la tangente au contour limite du jet.

Par le jeu des combinaisons des vitesses relatives et de leur orientation, on constate des modifications de section dans le jet.

Les vitesses de translation à la périphérie de la sortie du jet sont nulles et le maximum de vitesse se trouve au centre, par conséquent sous l'action des impacts des molécules de l'ambiance on notera dans les sections successives du jet tout d'abord une légère diminution accompagnée d'une légère surpression, puis une espèce d'éclatement très progressif du jet, car les molécules de l'ambiance qui y entrent seront aussitôt entraînées par celles du jet; ainsi, au fur et à mesure le jet ralentit son mouvement et augmente son volume. Cette action dépend naturellement de la masse du jet par rapport à la surface de sa périphérie.

Si le jet est homogène et de section circulaire, plus le rayon de sa section est grand et moins les phénomènes qui l'accompagnent seront sensibles.

Supposons que l'on ait pu s'arranger pour que l'influence de l'ambiance n'agisse que sur la moitié du jet et que sur l'autre moitié cette influence soit annulée ou même que l'on ait trouvé le moyen d'agir de telle façon qu'il y ait d'un côté une espèce d'inversion du phénomène de l'action de l'ambiance : l'allure du jet sera alors entièrement modifiée.

surrounding air whose action would thus be increased, bringing into play its intrinsic energy. At first sight this would appear impossible to achieve; it is, however, what we tried to do.

In the third case we can imagine a combination of the first and second procedures.

Although we still have only a rather confused idea of the actual structure of a molecule, we now have a fairly clear view of the behavior of air taken as a whole and are in a position to attack the problem which we wish to solve, and which we define as follows: how to treat a gaseous jet so that while retaining a high kinetic energy it may penetrate the surrounding atmosphere in a state of considerable underpressure. This would represent the solution of the second case mentioned above.

We shall study the possibility of creating an intermittent jet, and whether there would be any advantage in doing so, later.

As we have stated, when a gaseous jet penetrates into another gaseous medium there is diffusion of molecules from the jet into the surrounding medium as well as from the surrounding medium into the jet.

The molecules which leave the jet to enter the surrounding medium diffuse in a direction which follows the resultant of their own internal movement and that of the jet, i.e. their diffusion is oriented roughly in the same direction as the movement of the jet. The molecules of the surrounding medium, however, enter the jet following the direction of impact, i.e. the orientation of their average direction is normal to the tangent to the limiting contour of the jet.

As a result of the different combinations of relative velocities and their orientation we note changes in the jet section.

The translational velocities at the periphery of the jet exit are nil and the maximum velocities are to be found in the centre, therefore under the influence of the impinging molecules from the surrounding medium successive jet sections will show first a slight reduction accompanied by a small overpressure and then something like a very gradual expansion of the jet, for the molecules of surrounding air entering it will immediately be drawn along by those of the jet; thus the jet will slow down more and more, while its volume will increase. This reaction of course depends on the ratio between the mass of the jet and its peripheral surface.

If the jet is homogeneous and of circular section, the larger the sectional radius the less the accompanying phenomena will be felt.

Let us assume that we have been able to create a jet such that only one half of it is subject to the influence of the surrounding medium, the other half being entirely unaffected by it, or even that we have succeeded in reversing the phenomenon caused by the action of the surrounding medium. In this case the character of the jet will be completely changed.

L'action de pénétration de l'ambiance dans le jet ne se faisant que d'un seul côté, à première vue l'entraînement devrait être réduit d'autant. Nous verrons que le comportement peut être tout autre si, bien entendu, on arrive à isoler complètement de l'ambiance le côté opposé à celui où son action est directe.

Il ne peut plus être question naturellement d'un jet plein et de section plus ou moins circulaire. Il faut choisir un jet de section tubulaire et annulaire ininterrompu, et alors une des surfaces du jet de section tubulaire et annulaire peut être séparée de l'ambiance par une paroi solide.

Il faut ensuite que l'action de cette paroi destinée à protéger une partie de la surface du jet de l'action directe des impacts de l'ambiance, se fasse sentir jusqu'au moment où ladite action de l'ambiance est moins importante. En d'autres termes, si par exemple le jet gazeux de section tubulaire et annulaire devait suivre le profil d'un convergent dans un système convergent-divergent, il faudrait que la paroi qui d'un côté doit l'isoler de l'ambiance se poursuive jusqu'à la sortie dudit système.

Alors, par le profil et par l'allure de cette paroi on pourrait continuellement agir sur l'action du jet et, par conséquent, sur l'ambiance mise en mouvement par celui-ci.

Il s'agit bien par conséquent d'un écoulement gazeux dans une tuyère asymétrique, c'est à dire dont une paroi est solide et l'autre fictive car elle est formée par l'ambiance.

On voit ainsi tous les avantages que l'on peut tirer d'une telle conception, qu'il s'agisse d'hypercirculation autour d'un profil d'aile considéré comme la paroi d'un système convergent-divergent de rayon infini, ou qu'il s'agisse de tuyères de rayons finis et pour tous usages.

Comment doit fonctionner un tel ensemble ?

La première partie aura pour but d'accélérer l'écoulement du jet en le maintenant dépressionnaire de façon que son action soit violente sur l'ambiance, et la seconde partie sera consacrée à rétablir en énergie potentielle ce que l'on avait obtenu sous forme d'énergie cinétique dans la première.

C'est donc la première partie qui est de beaucoup la plus importante et qui caractérisera le phénomène.

Considérons alors une coupe à travers un jet de section annulaire sortant ininterrompu d'un canal de section annulaire, naturellement. Admettons qu'une des lèvres de l'embouchure de la sortie du canal d'amenée soit prolongée, elle servira de ce côté du jet d'écran de protection contre l'ambiance. Supposons encore que cette lèvre prolongée ait une direction qui s'écarte continuellement de la direction initiale du jet. Que se passera-t-il ?

On comprend aisément qu'il peut, dans certaines conditions, se produire un déséquilibre sensible entre le nombre d'impacts des molécules de

Since the surrounding air only enters into the jet on one side, one would at first sight expect induction to be reduced proportionally. We shall see that the behavior observed can be entirely different, on condition of course that we have really succeeded in completely isolating from the surrounding medium that part of the jet which is not exposed to its direct action.

Of course we can no longer consider a full jet of more or less circular section. We must choose a jet of uninterrupted tubular and annular section, one of whose surfaces can then be separated from the surrounding medium by a solid wall.

The action of this wall destined to protect part of the surface of the jet from the direct action of the surrounding medium must then continue to make itself felt up to the point where the said action of the surrounding medium becomes less marked. In other words, if for instance the jet of tubular and annular section were to follow the profile of a convergent in a convergent-divergent device, the wall isolating one side of it from the surrounding medium would have to extend right up to the exit of the said device.

Then by means of the profile and the form of this wall we could exert a continuous action on the jet and consequently on the surrounding air induced by it.

It is therefore really a case of gaseous flow through an asymmetric nozzle, that is to say a nozzle of which one wall is solid and the other fictitious, being formed by the surrounding medium.

It is evident that such a conception can be of advantage in many ways, be it to obtain increased circulation around a wing profile considered as the wall of a convergent-divergent device of infinite radius, or in connection with nozzles of finite radii and for all purposes.

How is such a device going to function ?

The object of the first portion is to accelerate the flow of the jet while maintaining the underpressure in it, so that its action on the surrounding medium shall be very strong, and the second portion is destined to restore in potential energy what was obtained in the form of kinetic energy in the first part.

Hence it is the first part which is by far the most important and which will characterize the phenomenon.

Let us consider a section of annular jet emerging uninterruptedly from a channel of annular section. Let us assume that one of the lips of the exit orifice of the feed channel is extended; on that side of the jet it will serve as a protective screen against the surrounding air. Let us also assume that the direction of this lip continuously diverges from the initial direction of the jet. What will happen ?

It is evident that in certain conditions there will be unstable equilibrium between the number of molecules of surrounding air striking

**UNCLASSIFIED**

**A  
D 204073**

**Armed Services Technical Information Agency**

**ARLINGTON HALL STATION  
ARLINGTON 12 VIRGINIA**

**FOR  
MICRO-CARD  
CONTROL ONLY**

**2 OF 5**

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**UNCLASSIFIED**

l'ambiance du côté non abrité du jet et l'autre côté abrité par la lèvres prolongée. Ce déséquilibre agira sur le jet et le repoussera vers la lèvres prolongée c'est à dire la paroi, et de ce fait le déséquilibre s'accroîtra encore plus et presque instantanément le jet cherchera à se coller à la paroi. Dans son ensemble il suivra alors une espèce de courbe ballistique, dont le tracé moyen sera une courbe fonction de la vitesse du jet et de l'action extérieure de l'ambiance. Si la paroi se trouvait alors être légèrement en retrait par rapport à cette courbe et qu'en plus à un certain point plus éloigné un contact du jet et de la paroi ait lieu, il y aurait un espace de l'espace se trouvant entre le jet et la paroi (le point de contact du jet et de la paroi fonctionnant comme un joint). Cet espace se trouverait rapidement vidé des molécules qui s'y trouvaient et à partir de ce moment la vitesse de l'écoulement de ce côté du jet se trouverait très fortement accrue puisque rien ne vient de ce côté retarder son mouvement.

De ce fait aussi, la moyenne de la vitesse de l'ensemble du jet se trouverait accrue car de l'autre côté du jet la vitesse d'écoulement reste la même que celle d'un jet normal.

Les molécules de l'ambiance se précipiteraient à travers les molécules du jet pour combler l'espace à très basse pression qui se trouve près de la paroi et au fur et à mesure qu'elles entreraient dans le jet, les molécules de celui-ci leur imprimeront une direction conforme à la direction nouvelle du jet et puisque son écoulement est de plus en plus rapide plus on approche de la paroi les molécules de l'air ambiant seront entraînées à leur tour de plus en plus vite, plus elles approcheront de l'espace fortement dépressionnaire qui existe entre le jet et la paroi.

Etant donné que la surface de contact avec l'ambiance d'un jet de section annulaire est beaucoup plus grande pour une même masse que celle d'un jet de section circulaire, et que l'action de la forte dépression près de la paroi se fait fortement sentir sur l'ambiance à travers le jet, on constatera que la masse d'air entraînée est considérablement augmentée par rapport à celle pouvant être entraînée par un jet ordinaire, que sa vitesse de pénétration dans un jet annulaire est fortement accrue, et qu'il y a donc eu un apport d'énergie, cet apport provenant de l'énergie potentielle de l'air lui-même qui doit subir un abaissement de la température.

Si au point de contact, qui fait office de joint, on écarte à nouveau la paroi par rapport à la nouvelle direction du jet et ceci sur une certaine distance nouvelle, le même phénomène se reproduira mais de façon plus faible, et ainsi de suite jusqu'au moment où toutes les énergies en présence seront transmises à l'ensemble du nouveau mélange jet et ambiance.

Si comme nous l'avons envisagé ci-dessus le jet annulaire suit pendant tout son trajet le profil d'un système convergent et dans les conditions de tracé que nous venons de décrire, l'air ambiant, qui se trouve à une pression et une température plus élevées que celles du jet, doit alors nécessairement faire apport d'énergie. On doit pouvoir représenter graphiquement son rôle soit par un diagramme TS soit par un diagramme JS. - En effet, on constatera tout d'abord pendant le premier temps où l'air se précipite vers le jet, une chute de température, la température finale restant

the exposed side of the jet and those on the side protected by the extended lip. This lack of equilibrium will affect the jet, driving it towards the extended lip which forms the wall, and as a result of this the lack of equilibrium will become still more marked and, almost instantaneously, the jet will try to adhere to the wall. As a whole, the jet will then be following a kind of ballistic curve, whose mean path will be a curve, function of the velocity of the jet and the external action of the surrounding medium. If the wall is then slightly set back in relation to this curve while at a certain point further along the jet again makes contact with the wall, the space between the jet and the wall will be isolated (the point of contact between the jet and the wall acting like a join). This space will rapidly be emptied of the molecules which were in it and from that moment the velocity of flow on that side of the jet will be very greatly increased since there will be nothing to slow down its movement on that side.

For the same reason the mean velocity of the whole jet will be increased since the rate of flow on the other side remains the same as that of a normal jet.

The molecules of surrounding air will rush in through the molecules of the jet in order to try to fill the very low-pressure area existing next to the wall, and as they enter the jet the molecules of the latter will impart to them a direction in accordance with the new direction taken by the jet; and since the flow becomes more and more rapid as one approaches the wall, the molecules of surrounding air will in turn be accelerated more and more the closer they approach to the area of very low pressure existing between the jet and the wall.

Since a jet of annular section has a much greater surface of contact with the surrounding medium in proportion to its mass than has a jet of circular section, and the influence of the low-pressure zone near the wall makes itself strongly felt, through the jet, on the surrounding atmosphere, we shall find that the mass of air induced is considerably greater than that which could be induced by an ordinary jet, that it penetrates into an annular jet very much more rapidly, and that additional energy has therefore been provided, taken from the potential energy of the air itself which must undergo a drop in temperature.

If at the point of contact which acts as a join we once again make the wall diverge from the new direction of the jet over a certain distance, the same phenomenon will reoccur although a little less strongly, and so on until all the energies present have been transferred to the new mixture formed by the jet and the surrounding air.

If, as we considered above, the annular jet continuously follows the profile of a convergent device, its path being as described before, then the surrounding air which is at higher pressure and temperature than the jet must necessarily contribute additional energy. It should be possible to represent graphically the part played by this surrounding air, either by a TS or a JS diagram. During the first stage, in which the air rushes towards the jet, we do in fact notice a drop in temperature, the final temperature, however, still remaining higher than that of the jet; during the second stage there is transfer of heat from the surrounding air, raising the temperature of the jet. At the end of the second stage

supérieure à celle du jet, puis pendant le second temps une émission de chaleur de l'air ambiant qui élèvera la température du jet. A la fin du second temps la température de l'ensemble reste inférieure à l'ambiance alors que pendant le troisième temps, où commence la compression dynamique, il y aura élévation de température, et pendant le quatrième temps reprise de chaleur à l'ambiance.

Pour établir le profil de la paroi du convergent du système convergent-divergent qui doit posséder des points de contact avec le jet afin d'isoler les uns des autres les espaces ayant plus ou moins le même degré de dépression, on a été amené à le réaliser en lui donnant un tracé polyédrique, dont les facettes qui représentent des cordes de parties bien déterminées de la courbe d'écoulement du jet ont des dimensions parfaitement délimitées. Ces facettes devront faire entre elles des angles de plus en plus faibles et de valeurs bien déterminées, eux aussi.

Le divergent du système convergent-divergent aura pour objet de transformer l'énergie cinétique du mélange au col en énergie potentielle à la sortie.

C'est en partant de toutes ces considérations que nous avons trouvé et mis au point ce que l'on désigne aujourd'hui en physique du nom d'

" Effet COANDA "

Dans ce qui va suivre, on étudiera la théorie mathématique du phénomène, en commençant par l'étude du comportement du jet.

Etant donné la petite section du canal d'amenée du jet par rapport à l'ensemble du système convergent-divergent, on peut justifier que l'étude bi-dimensionnelle de l'écoulement se rapproche énormément de la solution de l'écoulement tridimensionnel.

Par ailleurs, on envisagera tout d'abord un fluide incompressible et non visqueux.

On peut se demander, bien entendu, jusqu'à quel point un fluide compressible sous une pression relativement faible peut être étudié par des formules de la théorie des fluides incompressibles. La loi de la dynamique des fluides prévoit que lorsqu'un fluide incompressible s'écoule autour d'une arête vive sa vitesse en ce point devient infinie et ceci indépendamment de la pression existant dans le réservoir dont le fluide s'échappe.

Certes, il est impossible de réaliser une arête vive, car chaque arête possède physiquement un rayon fini, quelle que soit la petitesse de ce rayon. Il est donc certain que le fluide restera dans un régime subsonique si les pressions en amont de l'embouchure sont suffisamment basses et par conséquent on peut, en première approximation tout au moins, partir de la solution donnée par la Théorie générale de la dynamique des fluides incompressibles.

temperature of the whole system is still below that of the surrounding medium, while during the third stage, in which dynamic compression starts, the temperature rises and in the fourth there is again transfer of heat from the surrounding medium.

To give the wall of the convergent a profile providing the points of contact with the jet required to separate from one another the zones of roughly equal underpressure, we designed a polyhedral outline whose facets, which represent chords subtending well-defined arcs of the flow curve of the jet, have fixed dimensions. These facets must form between them ever decreasing angles whose values are also clearly defined.

The role of the divergent of the convergent-divergent device is to transform the kinetic energy of the mixture at the throat into potential energy at the exit.

These were the considerations which led us to the discovery and perfection of what is today designated in physics as the :

#### " COANDA EFFECT "

In the following chapter we shall study the mathematical theory of the phenomenon, starting with an investigation of the behavior of the jet.

In view of the fact that the section of the feed channel of the jet is small in comparison with the whole convergent-divergent system one is justified in assuming that a bidimensional study of the flow approximates very closely indeed to the solution for tridimensional flow.

In addition, we shall start by considering an incompressible and non-viscous fluid.

It may of course be asked up to what point, in studying a compressible fluid at relatively low pressure, one may apply the formulae of the theory of incompressible fluids. According to the law of fluid dynamics, when an incompressible fluid flows round a sharp edge its velocity at that point becomes infinite, regardless of the pressure existing in the reservoir from which the fluid is flowing.

Of course it is impossible to obtain a sharp edge because every edge must, physically, have a finite radius, however small this may be. It is therefore certain that the fluid will remain in a subsonic regime if the pressures upstream of the exit orifice are sufficiently low and consequently we may, at least as a first approximation, base ourselves on the solution provided by the general theory of fluid dynamics, which concerns incompressible fluids.

Puis nous passerons à l'étude du comportement du jet en tant que fluide compressible à des régimes supersoniques.

Une fois l'étude du jet établie, nous étudierons son action sur l'ambiance et, à ce moment, nous étudierons ses possibilités aux applications aérodynamiques.

Nous finirons l'étude par l'établissement d'un avant-projet d'AÉRODYNE LENTICULAIRE.

Dans cette étude, nous verrons aussi comment il faudrait, à notre avis, établir son ellipsoïde d'inertie, et par suite le système de commande que nous préconiserons.

•  
•

Then we shall go on to study the behavior of the jet as a compressible fluid in supersonic regimes.

Having completed our study of the jet, we shall go on to study its action on the surrounding medium and at the same time we shall examine its possibilities of application in the field of aerodynamics.

We shall end our study with a draft project for a LENTICULAR AERODYNE.

In this project we shall also state how, in our opinion, its ellipsoid of inertia should be established, and we shall describe the system of controls which we advocate.

•  
•

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE  
L'EFFET COANDA

IMPORTANCE DE LA COMPRESSIBILITÉ.

L'étude théorique de l'Effet COANDA conduit directement à un problème de couche limite assez complexe. Les connaissances actuelles ne permettent pas de traiter un tel problème à fond dans toute sa complexité. Mais la première étape d'une étude de couche limite est toujours la détermination de l'écoulement potentiel correspondant. C'est ce qui nous a conduit à ces théories, purement analytiques dans le cas d'un écoulement plan, analytiques et numériques dans le cas d'un écoulement tridimensionnel à symétrie axiale.

MATHEMATICAL ANALYSIS OF  
THE COANDA EFFECT

IMPORTANCE OF COMPRESSIBILITY.

A theoretical study of the COANDA Effect leads directly to quite an intricate boundary layer problem. The knowledge we have at present is not sufficient to allow us to make a thorough study of the question in all its complexity. However, the first stage in a boundary layer problem is always the determination of the corresponding potential flow. This is what led us to establish these theories, which are purely analytic in the case of plane flow, analytic and numerical in the case of axially symmetric, tridimensional flow.

- NOTATIONS -

---

The numbers in circles refer to the Bibliography.

---

$b$	Width of the channel.
$a$	Length of the upper lip of the channel.
$L$	Length of the flap.
$\alpha$	Angle between the flap and the axis of the channel.
$L_n, L_d$	Naperian logarithms, decimal logarithms.
$P_s, T_s$	Stagnation pressure, stagnation temperature.
$P_s$	Downstream pressure.
$\rho$	Density.
$\phi$	Velocity potential.
$\psi$	Stream function.
$v; v_x, v_y$	Modulus of the velocity; velocity components along the axes $Ox, Oy$
$v_1$	Upstream velocity.
$v_2$	Downstream velocity.
$i = \sqrt{-1}$	
$z = x + iy$	Physical plane.
$w = \phi + i\psi$	Complex potential plane.
$\xi = \frac{1}{\sigma} e^{i\theta}$	Hodographic plane.
$\zeta = \mu e^{i\lambda}$	Auxiliary plane.
$t = t_x + it_y$	Schwartz plane.
$\gamma$	Ratio of specific heats.
$c$	Local sound speed.
$c_c$	Critical velocity.
$W$	Maximum velocity.
$u; u_r, u_\theta$	Modulus of the velocity; velocity components along the vector radius and perpendicular to the vector radius.

### I. PROBLEME ENVISAGE :

- " Etudier le mouvement d'un fluide s'écoulant d'une région de pression d'arrêt
- "  $P_1$  vers une région de pression  $P_2 < P_1$  par un canal rectiligne de longueur
- " infinie, de largeur  $b$  dont l'une des parois se termine par un volet de longueur
- "  $L$  faisant un angle  $-\alpha$  avec l'axe du canal, l'autre paroi dépassant l'arête
- " d'articulation du volet d'une longueur  $a$ , sous les hypothèses suivantes :
- " - le mouvement est plan, permanent, irrotationnel.
- " - le fluide est incompressible, non pesant, non visqueux.
- " - les parois du canal sont parfaitement lisses.

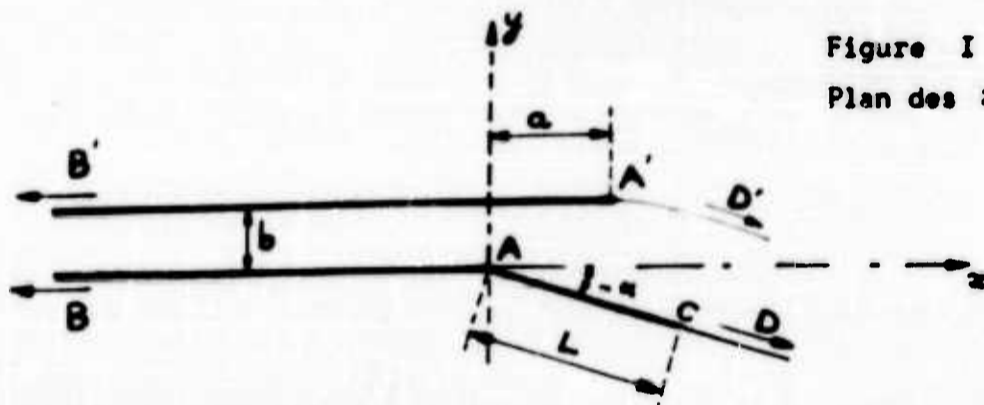


Figure I

Plan des  $z = x + iy$ 

Avant de commencer la résolution proprement dite de ce problème, nous allons préciser les données et envisager les conséquences immédiates qu'elles comportent. Pour cela, nous commencerons par définir dans le plan de l'écoulement (ou plan physique) un système d'axe permettant de repérer tout point au moyen de la variable complexe  $z = x + iy$ . Puis nous définirons le potentiel complexe régissant l'écoulement. Enfin, nous envisagerons le plan des vitesses (ou plan hodographique). Ceci fait, nous pourrons exposer la méthode permettant de résoudre entièrement le problème.

### II. LE PLAN PHYSIQUE $z = x + iy$ (Fig. I)

L'origine des axes est prise en A, point d'articulation. L'axe  $Ox$  est la partie inférieure du canal. L'axe  $Oy$  est perpendiculaire à  $Ox$  en A. Dans ce système d'axes, les points limitant le canal sont :

- |                              |    |                                   |
|------------------------------|----|-----------------------------------|
| - pour la paroi supérieure : | B' | $(-\infty, b)$                    |
|                              | A' | $(a, b)$                          |
| - pour la paroi inférieure : | B  | $(-\infty, 0)$                    |
|                              | A  | $(0, 0)$                          |
|                              | C  | $(L \cos \alpha, -L \sin \alpha)$ |

### I. PROBLEM TO BE CONSIDERED :

- " Study of the motion of a fluid flowing from an area of stagnation pressure  $P_0$  "
- " towards a area of pressure  $P_0 < P_1$  through a rectilinear channel of infinite "
- " length, of width  $b$  and of which one wall ends in a flap of length  $L$  making "
- " an angle  $-\alpha$  with the axis of the channel, the other wall extending beyond "
- " the edge of the flap by a length  $a$  , under the following hypotheses : "
- " - the motion is plane, permanent, irrotational. "
- " - the fluid is incompressible, without weight, non-viscous. "
- " - the walls of the channel are perfectly smooth. "

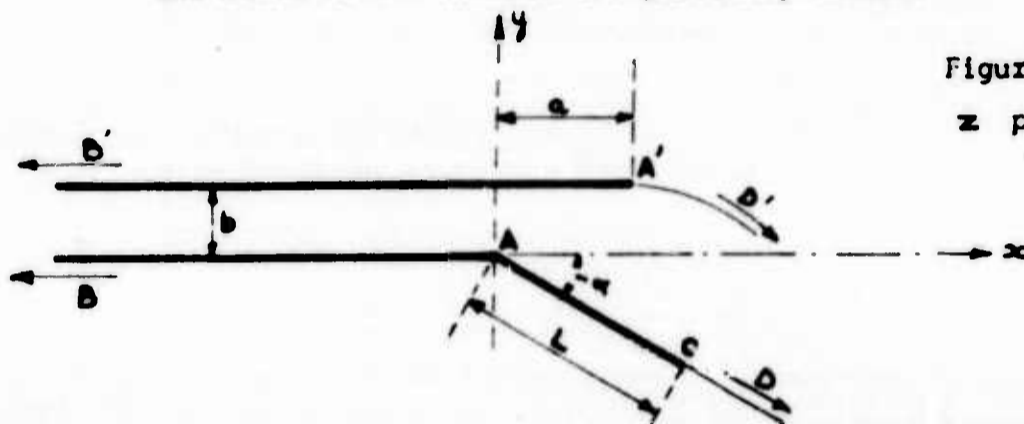


Figure I

$$z \text{ plane} = x + iy$$

Before starting on the actual solution of this problem we shall set forth the data and consider the immediate consequences involved. To do this, we shall begin by defining in the plane of flow (or physical plane) an system of axes allowing us to determine the position of any point by means of the complex variable  $z = x + iy$ . Then we shall define the complex potential governing the flow. Finally, we shall consider the plane of speeds (or hodographic plane). Having done this, we shall be able to expound the method which will allow of a complete solution to the problem.

### II. THE PHYSICAL PLANE $z = x + iy$ (Fig. I)

The origin of the axes is taken at  $A$  , the point of articulation. The  $ox$  axis is the lower part of the channel. The  $oy$  axis is perpendicular to the  $ox$  axis at  $A$  . In this system of axes, the points limiting the channel are :

- |                        |      |                                   |
|------------------------|------|-----------------------------------|
| - for the upper wall : | $B'$ | $(-\infty, b)$                    |
|                        | $A'$ | $(a, b)$                          |
| - for the lower wall : | $B$  | $(-\infty, 0)$                    |
|                        | $A$  | $(0, 0)$                          |
|                        | $C$  | $(L \cos \alpha, -L \sin \alpha)$ |

Le fluide forme un jet dont les limites sont, d'une part, les parois du canal, d'autre part deux surfaces libres, a priori indéterminées, commençant en A' et C, se terminant à l'infini en D' et D.

Les conditions aux limites sont :

- à l'infini amont (en B et B') : écoulement uniforme de vitesse  $v_1$ .
- à l'articulation (en A) : le fluide contourne un angle vif; étant incompressible, il prend donc une vitesse infinie.
- donc le long de la paroi BA, la vitesse croît de  $v_1$  à l'infini.
- le théorème de conservation de la masse exige donc que le long de la paroi B'A' la vitesse décroisse de  $v_1$  à  $v_0$  (vitesse définie plus loin).
- le long du volet AC : le fluide est supposé adhérer à la paroi (hypothèse provisoire).
- sur les surfaces libres : le mouvement est permanent, les surfaces libres sont donc fixes et cela exige l'équilibre des pressions dans le jet et à l'extérieur du jet. La pression est donc égale à  $P_0$  sur les surfaces libres. D'après le théorème de Bernoulli, la vitesse est donc constante en module et vaut :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_1 - P_0}{\rho}} \quad (1)$$

( formule où  $\rho$  désigne la masse spécifique du fluide considéré ).

- à l'infini aval (en D' et D) : les surfaces libres sont parallèles, distantes de  $d$  : la vitesse dans le jet est uniforme et vaut encore :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_1 - P_0}{\rho}}$$

### III. LE PLAN DU POTENTIEL COMPLEXE $w = \phi + i\psi$ . (fig. 2)

Le mouvement étant irrotationnel, on sait qu'il existe une fonction harmonique  $\phi(x, y)$  dont les dérivées en un point font connaître les composantes de la vitesse en ce point. On sait aussi que l'on peut associer à  $\phi$  une fonction harmonique conjuguée  $\psi(x, y)$  telle que l'équation  $\psi(x, y) = c^{ste}$  définisse une ligne de courant du jet. Etant harmoniques conjuguées,  $\phi$  et  $\psi$  définissent une fonction analytique de la variable  $z = x + iy$  : le potentiel complexe :

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

La vitesse a alors pour composantes :

$$\begin{aligned} v_x &= - \frac{\partial \phi}{\partial x} &= - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= - \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

The fluid forms a jet whose limits are, on the one hand, the walls of the channel, and on the other, two free surfaces, a priori indeterminate, beginning at  $A'$  and  $C$ , ending at infinity at  $D'$  and  $D$ .

The conditions at the limits are :

- at infinity upstream (at  $B$  and  $B'$ ) : uniform flow of velocity  $v_1$ .
- at the edge (at  $A$ ) : the fluid flows round a sharp angle; being incompressible it therefore acquires infinite velocity.
- therefore along the wall  $BA$ , the velocity increases from  $v_1$  to infinity.
- the theorem of conservation of mass therefore demands that along the wall  $B'A'$  the velocity should decrease from  $v_1$  to  $v_0$  (velocity defined further on).
- along the flap  $AC$  : the fluid is assumed to adhere to the wall (provisional hypothesis).
- on the free surfaces : the motion is permanent which means that the free surfaces are fixed and this necessitates equilibrium of the pressures within the jet and outside it. The pressure on the free surfaces is therefore equal to  $P_0$ . According to Bernoulli's theorem, the velocity is thus constant in module and has the value :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_1 - P_0}{\rho}} \quad (1)$$

( formula in which  $\rho$  indicates the density of the fluid under consideration).

- at infinity downstream (at  $D'$  and  $D$ ) : the free surfaces are parallel, at a distance of  $d$  : the velocity in the jet is constant and still has the value :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_1 - P_0}{\rho}}$$

### III. THE PLANE OF THE COMPLEX POTENTIAL $w = \phi + i\psi$ .(Fig. 2)

Since the motion is irrotational, we know that there exists a harmonic function  $\phi(x, y)$  whose derivatives at a point determine the components of the velocity at that point. We also know that we can associate with  $\phi$  a conjugate harmonic function  $\psi(x, y)$  such that the equation  $\psi(x, y) = \text{Constant}$  defines stream line of the jet. Being conjugate harmonics,  $\phi$  and  $\psi$  define an analytic function of the variable  $z = x + iy$  : the complex potential

$$w(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

The components of the velocity are then :

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_y &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2)$$

et la dérivée du potentiel complexe :  $\frac{dw}{dz} = -\phi'_z + i\psi'_z = -(v_x - i v_y)$  définit la vitesse complexe, elle aussi fonction analytique de  $z$ .

- Dans le plan physique, le jet est limité par deux lignes de courant :
- l'une formée par la paroi inférieure du canal, le volet et la surface libre CD, est définie par :  $\psi = \psi_1$ ,
  - l'autre formée par la paroi supérieure du canal et la surface libre A'D', est définie par :  $\psi = \psi_2$ .

En outre, si on se place à l'infini aval du jet (en D et D'), on se trouve en présence d'un écoulement uniforme et on peut donc écrire :

$$\frac{\psi_1 - \psi_2}{d} = v_0 \quad \text{soit : } \psi_1 - \psi_2 = d v_0$$

Donc, dans le plan  $w = \phi + i\psi$ , le domaine correspondant au jet sera limité par les deux droites parallèles à l'axe des  $\phi$  :  $w = \phi + i\psi_1$  et  $w = \phi + i\psi_2$  distantes de  $d v_0$ .

Pour simplifier les calculs, nous supposons que  $v_0 = 1$ . Il est bien évident que cette hypothèse n'enlève rien à la généralité du problème car en somme elle revient à prendre  $v_0$  comme unité de vitesse. Si  $w(z)$  est le potentiel correspondant à  $v_0 = 1$ , la fonction :

$$W(z) = \sqrt{2 \frac{P_2 - P_1}{\rho}} w(z)$$

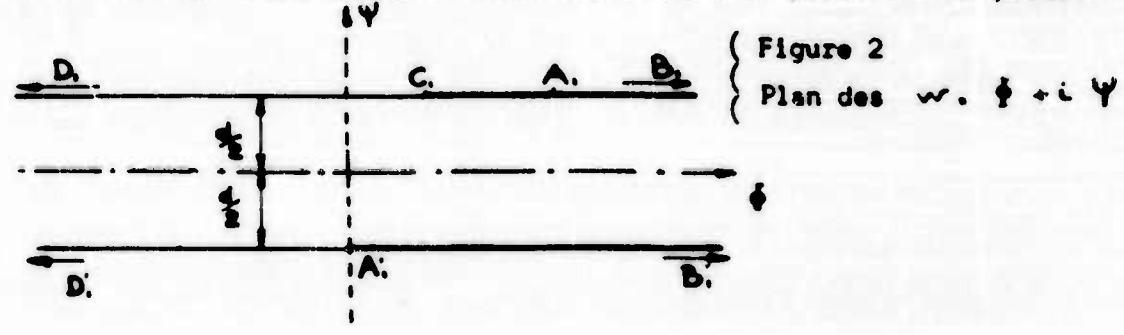
est le potentiel correspondant à :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_2 - P_1}{\rho}}$$

Le domaine correspondant au jet dans le plan  $w$  est donc limité par deux droites parallèles distantes de  $d$ .

On a encore le choix de l'origine des axes dans le plan  $w$ . Nous la prendrons telle que :  $\psi_1 = \frac{d}{2}$   $\psi_2 = -\frac{d}{2}$   $A'_1 = -i \frac{d}{2}$

(  $A'_1$  désignant l'homologue dans le plan  $w$  du point  $A'$  dans le plan  $z$  ).  
On a alors la fig. 2 qui donne l'aspect du domaine du potentiel complexe.



and the derivative of the complex potential :  $\frac{dw}{dz} = \phi'_z + i\psi'_z = -(v_2 - i v_3)$  <sup>9.</sup>  
 defines the complex velocity, which is also an analytic function of  $z$  .

In the physical plane, the jet is bounded by two stream lines :

- one, provided by the lower wall of the channel, the flap and the free surface  $CD$  ,  
 is defined by :  $\psi = \psi_1$
- the other, formed by the upper wall of the channel and the free surface  $A'D'$  ,  
 is defined by :  $\psi = \psi_2$

In addition, if we place ourselves at infinity downstream of the jet ( at  $D$  and  $D'$  ), the flow is uniform and we can therefore write :

$$\frac{\psi_1 - \psi_2}{d} = v_0 \qquad \text{i.e. } \psi_1 - \psi_2 = d v_0$$

Therefore, in the plane  $w = \phi + i\psi$  , the domain corresponding to the jet will be limited by the two straight lines parallel to the  $\phi$  axis :  $w = \phi + i\psi_1$  and  $w = \phi + i\psi_2$  whose distance apart is  $d v_0$  .

To simplify the calculations we shall assume that  $v_0 = 1$  . It is obvious that this hypothesis in no way effects the general nature of the problem, for it simply amounts to taking  $v_0$  as the unit of velocity. If  $w(z)$  is the potential corresponding to  $v_0 = 1$  , the function :

$$W(z) = \sqrt{2 \frac{P_2 - P_0}{\rho}} \quad w(z)$$

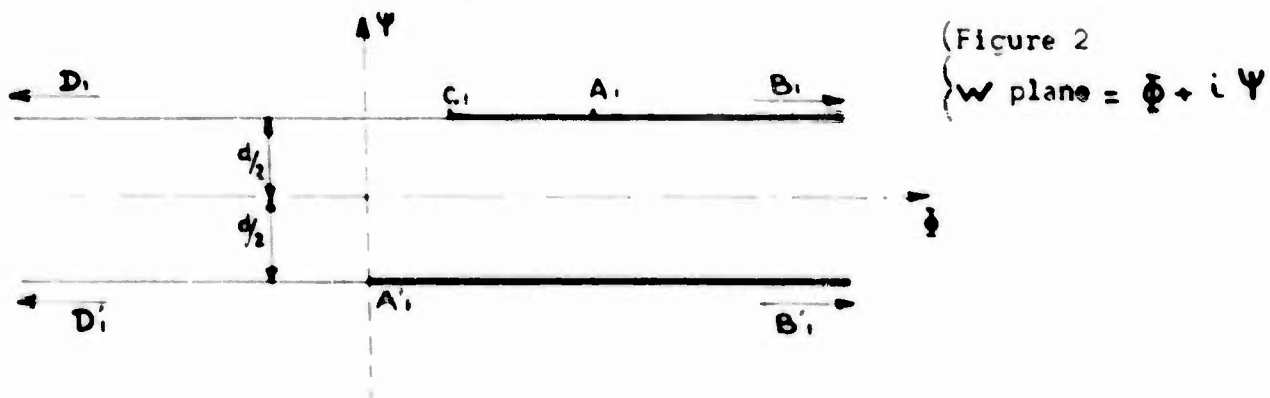
is the potential corresponding to :

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{P_2 - P_0}{\rho}}$$

The domain corresponding to the jet in the  $w$  plane is thus limited by two parallel straight lines whose distance apart is  $d$  .

We still have the choice of origins for the axes in the  $w$  plane. We shall take the origin such that :  $\psi_1 = \frac{d}{2}$      $\psi_2 = -\frac{d}{2}$      $A'_1 = -i \frac{d}{2}$

(  $A'_1$  designating the point in the  $w$  plane homologous to point  $A'$  in the  $z$  plane ).  
 We then have fig. 2 which shows the aspect of the domain of the complex potential.



IV - LE PLAN HOLOGRAPHIQUE  $\mathcal{S} = \frac{1}{v} e^{i\theta}$  (Fig. 3)

Désignons par  $v$  le module et  $\theta$  l'argument de la vitesse en un point, c.e.d. :

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad \theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

Le potentiel  $w(z)$  étant analytique en  $z$ , il en est de même de la fonction :

$$\mathcal{S} = -\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z - i\sqrt{2}} = \frac{1}{v} e^{i\theta} \quad (3)$$

Nous allons déterminer le domaine du plan  $\mathcal{S} = \frac{1}{v} \cos \theta + i \frac{1}{v} \sin \theta$  correspondant au jet dans le plan physique  $z$ .

Nous remarquons d'abord que le long des surfaces libres du jet la vitesse a un module constant égal à  $v_0 = 1$ . Il leur correspond donc, dans le plan des  $\mathcal{S}$ , la circonférence centrée à l'origine de rayon unité.

En  $A'$  et  $C$  la vitesse a pour module  $v_0 = 1$  et pour directions respectives l'axe  $Ox$  et le volet  $AC$ . Les points homologues  $A_2$  et  $C_2$  du plan  $\mathcal{S}$  sont donc parfaitement déterminés : Ce sont :

$$A_2 = (1, 0) \quad C_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$$

En  $A$  la vitesse est infinie et le point  $A_2$  homologue se trouve donc à l'origine des axes du plan  $\mathcal{S}$ .

Quand on passe de  $A$  à  $B$ , la vitesse est constamment dirigée suivant l'axe  $Ox$  et décroît de l'infini à  $v_1 > v_0 = 1$ ; donc, dans le plan  $\mathcal{S}$ , il correspond à  $AB$  un segment  $A_2 B_2$ ,  $B_2$  étant situé entre  $A_2$  et  $A'_2$ .

Quand on passe de  $B'$  à  $A'$ , la vitesse est de même constamment dirigée dans la direction de l'axe  $Ox$  et continue à décroître de  $v_1$  à  $v_0$ . Le point  $B'_2$  homologue de  $B'$  est confondu avec  $B_2$  et à  $B'A'$  correspond le segment  $B_2 A'_2$  du plan  $\mathcal{S}$ . Il est alors évident que le domaine correspondant au jet dans le plan  $\mathcal{S}$  est le secteur circulaire défini par :

$$0 < |\mathcal{S}| < 1 \quad -\alpha < \theta < 0$$

En effet, la fonction  $\mathcal{S} = -\frac{dw}{dz}$  étant analytique en  $z$ , elle assure la représentation conforme du jet dans le plan  $z$  sur le plan  $\mathcal{S}$ . Donc, en particulier, le sens dans lequel on décrit le contour du jet dans le plan  $z$  doit être le même que celui dans lequel on décrit le contour homologue dans le plan  $\mathcal{S}$ . Ceci montre que les points homologues  $D_2, D'_2$  (par ailleurs confondus) des points  $D$  et  $D'$  du plan  $z$  doivent se trouver sur l'arc de circonférence  $A'_2 C_2$ . Car, sinon,  $D_2$  et  $D'_2$  devant se trouver sur la circonférence centrée à l'origine et de rayon unité, pour passer de  $A'_2$  à  $C_2$  par  $D_2, D'_2$ , on devrait décrire un arc de cercle deux fois et la transformation ne serait plus conforme puisque plus biunivoque.

Le domaine correspondant au jet dans le plan  $\mathcal{S}$  est donc bien le secteur circu-

IV. THE HOLOGRAPHIC PLANE  $\zeta = \frac{1}{v} e^{i\theta}$  (Fig. 3)

Let us denote the module by  $v$  and the argument of the velocity at one point by  $\theta$ .

i.e.  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$   $\theta = \arctan \frac{v_y}{v_x}$

The potential  $w(z)$  being analytic of  $z$ , the same applies to the function :

$$\zeta = -\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v_x - i v_y} = \frac{1}{v} e^{i\theta}$$

We shall determine the domain of the plane  $\zeta = \frac{1}{v} \cos \theta + i \frac{1}{v} \sin \theta$  corresponding to the jet in the physical plane  $z$ .

First we shall note that along the free surfaces of the jet the velocity has a constant module equal to  $v_0 = 1$ . What corresponds to them is, therefore, in the  $\zeta$  plane, the circumference centred at the origin, of unit radius.

At  $A'$  and  $C$  the module of the speed is  $v_0 = 1$  and its respective directions are the axis  $ox$  and the flap  $AC$ . The homologous points  $A'_2$  and  $C_2$  of the  $\zeta$  plane are therefore exactly determined. They are :

$$A'_2 = (1, 0) \quad C_2 = (\cos \alpha, -\sin \alpha)$$

At  $A$  the velocity is infinite and the homologous point  $A_2$  is therefore located at the origin of the axes of the  $\zeta$  plane.

When we pass from  $A$  to  $B$ , the velocity constantly follows the direction of the axis  $ox$  and decreases from infinity to  $v_1 > v_0 = 1$ ; thus, in the  $\zeta$  plane, what corresponds to  $AB$  is a segment  $A_2 B_2$ ,  $B_2$  located between  $A_2$  and  $A'_2$ .

When we pass from  $B'$  to  $A'$ , the velocity similarly follows the direction of the axis  $ox$  and continues to decrease from  $v_1$  to  $v_0$ . The point  $B'_2$ , homologous to  $B'$  coincides with  $B_2$  and what corresponds to  $B'A'$  is the segment  $B_2 A'_2$  of the  $\zeta$  plane. It is then evident that the domain corresponding to the jet in the  $\zeta$  plane is the circular sector defined by :

$$0 \leq |\theta| \leq \alpha \quad -\alpha \leq \theta \leq 0$$

The function  $\zeta = -\frac{dz}{dw}$  being analytic of  $z$ , it fixes the conformal mapping in the  $z$  plane of the jet on the  $\zeta$  plane. Therefore, in particular, the contour of the jet in the  $z$  plane must be described the same way round as the homologous contour in the  $\zeta$  plane. This shows that the points  $D_2, D'_2$  (which incidentally coincide), homologous to the points  $D$  and  $D'$  of the  $z$  plane must be located on the arc of circumference  $A'_2 C_2$ . For otherwise, since  $D_2$  and  $D'_2$  must be on the circumference centred at the origin, of unit radius, to pass from  $A'_2$  to  $C_2$  by  $D_2, D'_2$  we should have to describe one arc of the circle twice and the mapping would no longer be conformal, since no longer one to one.

The domain corresponding to the jet in the  $\zeta$  plane is therefore definitely the

aire  $A_2 A_2 C_2$  et l'homologue du point à l'infini aval du jet (en  $D_2, D_2'$ ) est le point  $D_2, D_2'$  défini par :

$$\zeta_2 = e^{-i\theta} \quad \text{avec} \quad -\alpha < \theta < 0 \quad (4)$$

D'où la figure 3 :

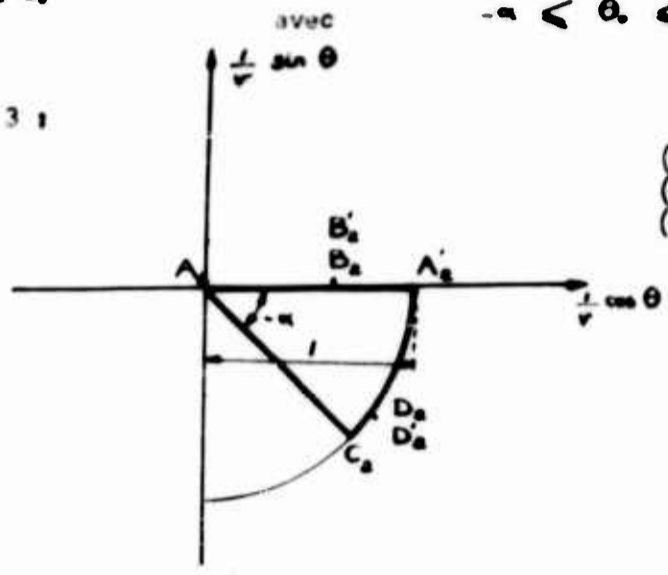


Figure 3  
Plan des  $\zeta : \frac{1}{v} e^{-i\theta}$

V. METHODE DE RESOLUTION - Plan  $t = t_x + i t_y$

La méthode que nous allons utiliser est la méthode générale de Helmholtz-Kirchhoff. Basée sur la transformation conforme, elle consiste à introduire une variable complexe auxiliaire  $t = t_x + i t_y$  qui va permettre de paramétrer le problème. Par transformation conforme, on applique les domaines correspondants au jet des plans  $w$  et  $\zeta$  sur le demi-plan  $t_y \geq 0$ . Puis, en partant de l'équation de la vitesse complexe qui lie  $w, \zeta, z$ , on exprime  $z$  sous forme d'intégrale ne dépendant plus que de  $t$ . L'intégration et l'identification des différentes constantes introduites permettra d'achever le problème : à tout point du plan physique on pourra associer un point du demi-plan  $t_y \geq 0$  et, de là, passer aux points homologues des plans  $\zeta$  et  $w$ .

VI. RELATION ENTRE LES DOMAINES  $\zeta$  ET  $t$ . (Fig. 4 et 5).

On transforme d'abord le secteur circulaire en demi-cercle par la transformation conforme :  $\zeta' = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$  (5)

Cette transformation revient à multiplier les arguments par  $\frac{\pi}{\alpha}$  et à élever les modules à la puissance  $\frac{\pi}{\alpha}$ . Il est alors évident que dans le plan

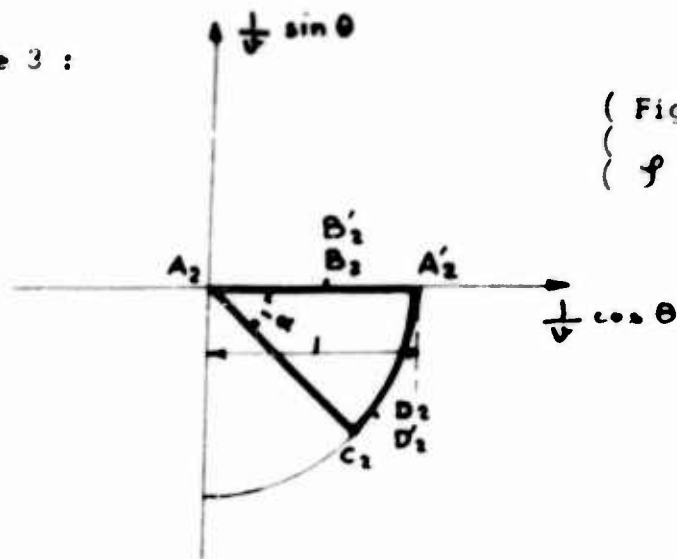
$\zeta' = e^{i\lambda}$  on obtient un demi-cercle centré à l'origine, de rayon unité, situé dans le demi-plan :

$$\begin{cases} -\pi < \lambda < 0 \\ 0 < r < 1 \end{cases}$$

circular sector  $A, A', C_2$  and the homologue of the point at infinity downstream of the jet (at  $D, D'$ ) is the point  $D_2, D'_2$  defined by :

$$\varphi_0 = e^{i\theta} \quad \text{with} \quad -\alpha < \theta < 0 \quad (4)$$

From which figure 3 :



( Figure 3  
{  $\varphi$  plane =  $\frac{1}{v} e^{i\theta}$

#### V. METHOD OF SOLUTION - $t$ plane = $t_x + it_y$

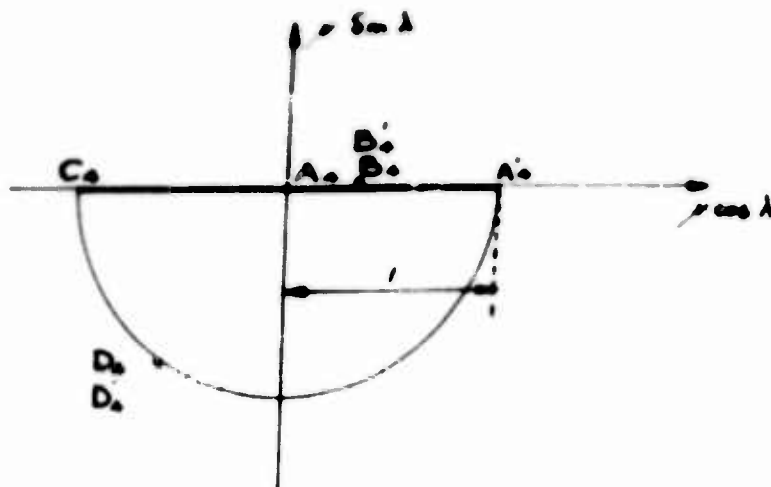
The method we are going to use is the general method of Helmholtz-Kirchhoff. Based on conformal mapping, it consists in introducing an auxiliary complex variable  $t = t_x + it_y$  which allows us to try to solve the problem by using a parameter. By conformal mapping, we map the domains corresponding to the jet in the  $w$  and  $\varphi$  planes in the half-plane  $t_y \geq 0$ . Then, starting from the equation of complex velocity which links  $w, \varphi$  and  $z$ , we express  $z$  in the form of an integral which then only depends on  $t$ . The integration and identification of the different constants introduced will give the complete solution to the problem : we shall be able to associate any point in the physical plane with a point in the half-plane  $t_y \geq 0$  and, from there, pass on to the homologous points in the  $\varphi$  and  $w$  planes.

#### VI. RELATION OF THE $\varphi$ AND $t$ DOMAINS. (Fig. 4 and 5)

First we transform the circular sector into a semi-circle by the conformal mapping :  $\varphi' = \varphi^{\pi/\alpha}$

This transformation amounts to multiplying the arguments by  $\frac{\pi}{\alpha}$  and raising the modules to the power  $\frac{\pi}{\alpha}$ . It is then evident that in the  $\varphi' = r e^{i\lambda}$  plane we obtain a semicircle centred at the origin, of unit radius, located in the half-plane :

$$\left[ \begin{array}{l} -\pi < \lambda < 0 \\ 0 \leq r \end{array} \right.$$



(Figure 4  
Plan des  $\mathcal{Y} = r e^{i\lambda}$ )

Il suffit alors d'appliquer la transformation conforme de Joukowski pour passer du demi cercle au demi plan, soit :

$$t = \frac{1}{2} [ \mathcal{Y}' + \mathcal{Y}'^{-1} ] \quad (6)$$

On vérifie bien que cette transformation donne un demi plan. En effet, en introduisant le module et l'argument de  $\mathcal{Y}'$ , on obtient :

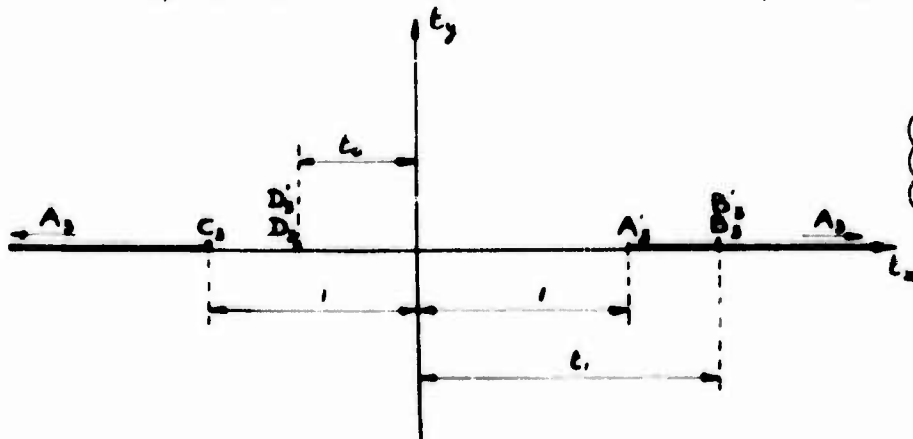
$$t = t_x + i t_y = \frac{1}{2} \left[ r e^{i\lambda} + \frac{1}{r} e^{-i\lambda} \right] = \frac{r^2 + 1}{2r} \cos \lambda + i \frac{r^2 - 1}{2r} \sin \lambda$$

Comme sur la frontière du demi cercle du plan  $\mathcal{Y}'$ , on a, soit  $\lambda = 0$  ou  $\pi$  soit  $r = 1$ , on voit que dans le plan  $t$ , le domaine correspondant est limité par la droite  $t_y = 0$ . D'autre part, en un point quelconque à l'intérieur du demi-cercle du plan  $\mathcal{Y}'$ , on a  $-\pi < \lambda < 0$  et  $0 < r < 1$  : donc le point homologue du plan  $t$  est donc toujours tel que :  $-\infty < t_x < +\infty$  et  $t_y > 0$ . Le domaine correspondant du plan  $t$  est donc bien le demi plan  $t_y > 0$ .

En définitive, la transformation conforme :

$$t = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{Y}^{\frac{\pi}{2}} + \mathcal{Y}^{-\frac{\pi}{2}} \right] \quad (7)$$

assure la représentation du secteur circulaire du plan  $\mathcal{Y}$  sur le demi plan  $t_y > 0$



(Figure 5  
Plan des  $t = t_x + i t_y$ )

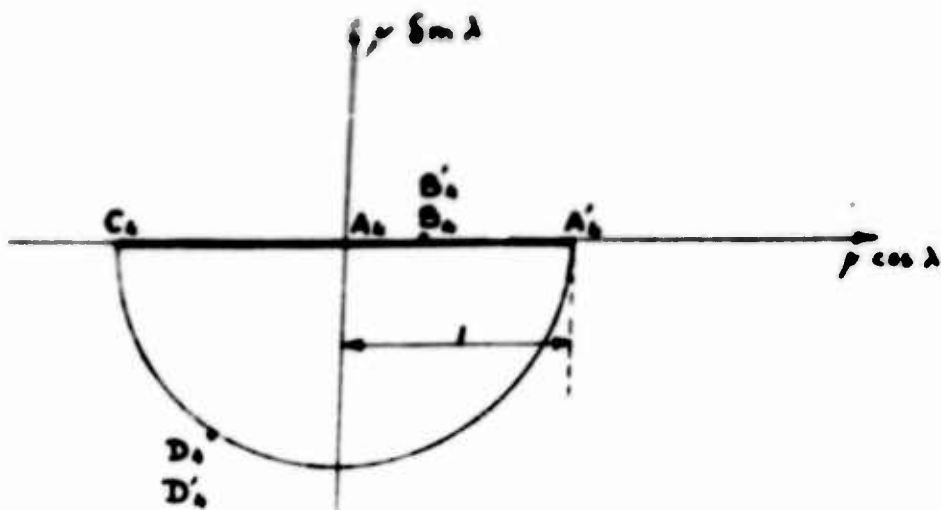


Figure 4  
 $\mathcal{P}' \text{ plane} = \rho e^{i\lambda}$

Then it is only necessary to apply Joukowski's conformal mapping to pass from the semi-circle to the half-plane, i.e. :  $t = \frac{1}{2} [\mathcal{P}' + \mathcal{P}'^{-1}]$  (6)

We can easily verify that this transformation gives a half-plane. By introducing the module and the argument of  $\mathcal{P}'$  we do, in fact, obtain :

$$t = t_x + it_y = \frac{1}{2} \left[ \rho e^{i\lambda} + \frac{1}{\rho} e^{-i\lambda} \right] = \frac{\rho^2 + 1}{2\rho} \cos \lambda + i \frac{\rho^2 - 1}{2\rho} \sin \lambda$$

As on the boundary of the semicircle of the  $\mathcal{P}'$  plane we have either  $\lambda = 0$  or  $\pi$  or  $\rho = 1$ , we see that in the  $t$  plane, the corresponding domain is limited by the straight line  $t_y = 0$ . On the other hand, at any point inside the semicircle of the  $\mathcal{P}'$  plane, we have  $-\pi < \lambda < 0$  and  $0 < \rho < 1$ ; thus the homologous point in the  $t$  plane is always such that  $-\infty < t_x < +\infty$  and  $t_y > 0$ . The corresponding domain of the  $t$  plane is therefore proved to be  $t_y > 0$ .

It is thus established that the conformal mapping :

$$t = \frac{1}{2} \left[ \mathcal{P}'^{\frac{1}{2}} + \mathcal{P}'^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (7)$$

gives us the mapping of the circular sector of the  $\mathcal{P}$  plane in the half-plane  $t_y > 0$ .

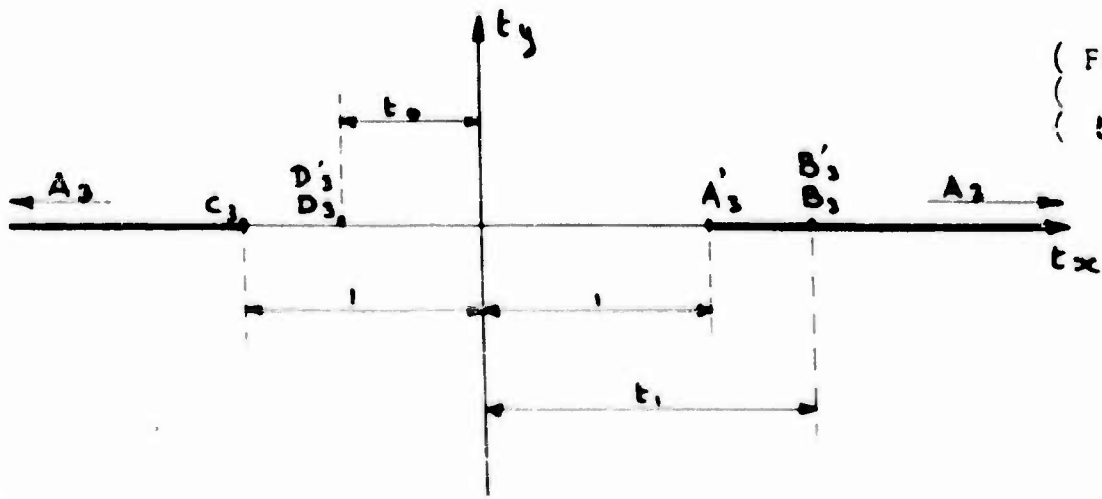


Figure 5.  
 $t \text{ plane} = t_x + it_y$

VII. RELATION ENTRE LES DOMAINES  $w$  ET  $t$

Il faut maintenant représenter la bande du plan  $w$  (Fig. 2) sur le demi plan  $t \geq 0$ . Cette bande représente un rectangle dont deux côtés parallèles sont infinis. Il vient naturellement à l'esprit d'appliquer le théorème de Schwartz que nous allons rappeler :

" Soit dans un plan  $Z, X + iY$  un polygone  $P$  dont les angles aux sommets sont " désignés par  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  et les affixes des sommets par :  $A, B, C, \dots$  "

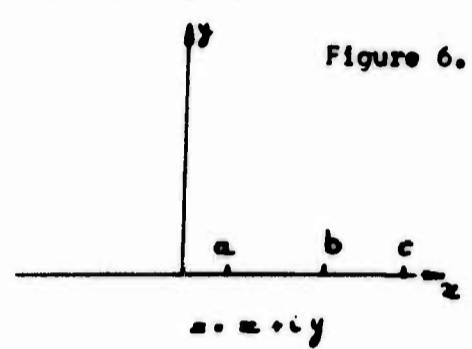
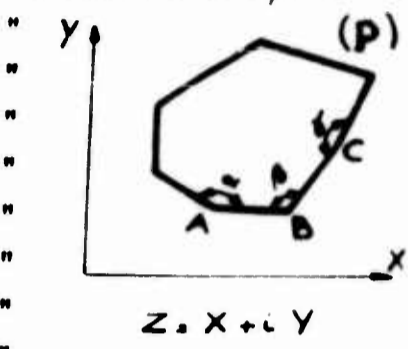


Figure 6.

" La transformation conforme qui applique le polygone  $P$  du plan  $Z$  sur le demi plan  $x \geq 0$  du plan  $z = x + iy$  est donnée par :

$$Z - \bar{Z} = K \int_z^z (z-a)^{\alpha-1} (z-b)^{\beta-1} \dots dz$$

" où  $a, b, c, \dots$  sont les affixes dans le plan  $z$  des homologues des points  $A, B, C, \dots$  du plan  $Z$  et  $\bar{Z}$  et  $z$  sont deux points homologues,  $K$  étant une constante.

Dans le cas qui nous intéresse, les angles au sommet sont au nombre de deux et sont tous les deux nuls. D'autre part, il faut évidemment que les points  $B, B'$  et  $D, D'$  aient les mêmes homologues dans le plan des  $t$  que les points  $B_0, B'_0$  et  $D_0, D'_0$  du plan des  $\zeta'$ . Donc, la transformation conforme cherchée est donnée par :

$$w - \bar{w} = K \int_t^t \frac{dt}{(t-t_0)(t-t_1)}$$

Il est commode de prendre  $\bar{w} = -t \frac{d}{dt}$  c'est à dire de se placer en  $A'$  dans le plan des  $w$  (Fig. 2). Le point correspondant du plan des  $\zeta'$  est  $A'_0$  (Fig. 3) donc  $A'_0$  dans le plan des  $\zeta'$  (Fig. 4) et enfin  $A'_0$  dans le plan des  $t$  (fig. 5) : donc :  $\bar{t} = 1$

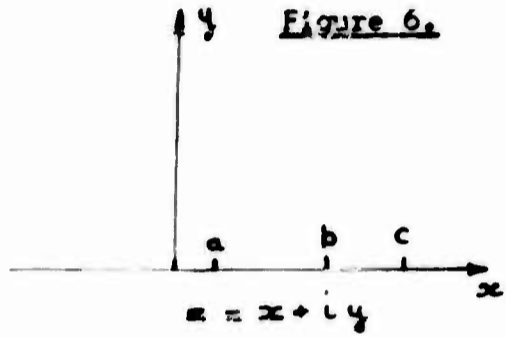
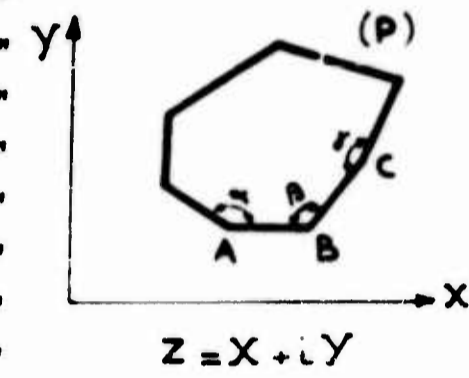
En remarquant en outre que :

$$\frac{1}{(t-t_0)(t-t_1)} = \frac{1}{t_0-t_1} \left[ \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1} \right]$$

VII. RELATION OF THE  $w$  and  $t$  DOMAINS.

We must now represent the strip of  $w$  plane (Fig. 2) on the half-plane  $t_y \geq 0$ . This strip represents a rectangle of which two parallel sides are infinite. We naturally think of applying Schwartz's theorem, which we will state again :

" In a plane  $Z = X + iY$  let there be a polygon  $P$ , the angles at its apices being " " designated as  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  and the affixes of the apices as  $A, B, C, \dots$  " " " " " "



" The conformal mapping by which the polygon  $P$  of the  $Z$  plane is mapped in the " " half-plane  $x \geq 0$  of the  $z = x + iy$  plane is given by :

$$Z - \bar{Z} = K \int_{\bar{z}}^z (z-a)^{\alpha/\pi-1} (z-b)^{\beta/\pi-1} \dots dz$$

" where  $a, b, c, \dots$  are the affixes in the  $z$  plane of the homologues of the " " points  $A, B, C, \dots$  of the  $Z$  plane, where  $\bar{Z}$  and  $\bar{z}$  are two homologous points and " "  $K$  is a constant. " "

In the case in question the angles at the apex are two in number and both of them are zero. On the other hand, it is evident that the points  $B_1, B'_1$  and  $D_1, D'_1$ , must have the same homologues in the  $t$  plane as the points  $B_4, B'_4$  and  $D_4, D'_4$  of the  $\mathcal{P}'$  plane. Hence the required conformal mapping is given by :

$$w - \bar{w} = K \int_{\bar{t}}^t \frac{dt}{(t-t_2)(t-t_1)}$$

It is convenient to take  $\bar{w} = -i \frac{d}{2}$ , that is, to place oneself at  $A'_1$  in the  $w$  plane (Fig. 2). The corresponding point of the  $\mathcal{P}$  plane is  $A'_2$  (Fig. 3), and therefore  $A'_4$  in the  $\mathcal{P}'$  plane (Fig. 4) and  $A'_3$  in the  $t$  plane (Fig. 5).

hence  $\bar{t} = 1$

Noting also that :

$$\frac{1}{(t-t_0)(t-t_1)} = \frac{1}{t_0-t_1} \left[ \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1} \right]$$

on obtient :

$$w + i \frac{d}{2} = \frac{k}{t_0 - t_1} \int_1^t \left( \frac{1}{t \cdot t_0} - \frac{1}{t \cdot t_1} \right) dt \quad (8)$$

La fonction à intégrer présente un pôle simple pour  $t = t_1$ , de résidu égal à  $-1$ . Quand le chemin d'intégration passe par  $t_1$ , il faut éviter ce pôle en intégrant sur un demi-cercle de rayon  $\epsilon$  que l'on fait tendre vers zéro.



Figure 7.

La théorie des résidus montre alors que l'intégrale augmente de  $i\pi$  en passant par  $t_1$ , c.a.d. que le second membre de l'équation 8 augmente de  $i\pi \frac{k}{t_0 - t_1}$ . D'autre part, passer de  $t_1 - \epsilon$  à  $t_1 + \epsilon$  revient, quand  $\epsilon \rightarrow 0$ , à passer de  $B_1$  à  $B_2$  dans le plan des  $w$  (Figure 2) donc le premier membre de l'équation 8 augmente de  $i d$ . On a donc :

$$i d = i\pi \frac{k}{t_0 - t_1} \quad \text{soit} \quad \frac{k}{t_0 - t_1} = \frac{d}{\pi}$$

et :

$$w + i \frac{d}{2} = \frac{d}{\pi} \int_1^t \left( \frac{1}{t \cdot t_0} - \frac{1}{t \cdot t_1} \right) dt$$

L'intégration est élémentaire et donne :

$$w + i \frac{d}{2} = -\frac{d}{\pi} \left[ L_n \frac{t \cdot t_1}{t \cdot t_0} - L_n \frac{1-t_1}{1-t_0} \right] = -\frac{d}{\pi} \left[ L_n \frac{t \cdot t_1}{t \cdot t_0} - L_n \frac{t_1-1}{1-t_0} - i\pi \right]$$

$$\left( \text{car : } L_n \frac{1-t_1}{1-t_0} = \left[ L_n \frac{t_1-1}{1-t_0} e^{i\pi} \right] = L_n \frac{t_1-1}{1-t_0} + i\pi \right)$$

On a donc enfin :

$$w = -\frac{d}{\pi} L_n \frac{t \cdot t_1}{t \cdot t_0} + \frac{d}{\pi} L_n \frac{t_1-1}{1-t_0} + i \frac{d}{2} \quad (9)$$

et

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{d}{\pi} \frac{t - t_0}{(t \cdot t_0)(t \cdot t_1)} \quad (10)$$

La formule 9 définit la transformation conforme appliquant la bande du plan des  $w$  sur le demi plan  $t_y \geq 0$ .

#### VIII. RELATION ENTRE LES DOMAINES $z$ et $t$

Pour trouver la relation permettant de passer du plan des  $z$  au plan des  $t$  et réciproquement, nous partons de la formule définissant la variable  $Y$  (équation 3) :

$$Y = -\frac{dz}{dw}$$

we obtain :

$$w + i \frac{d}{2} = \frac{\kappa}{t_0 - t_1} \int_1^t \left( \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1} \right) dt \quad (8)$$

The function to be integrated presents a simple pole for  $t = t_1$ , with a residue equal to  $-1$ . When the path of integration passes through  $t_1$ , this pole must be avoided by integration on a semicircle of radius  $\epsilon$  which is made to tend towards zero.



Fig. 7

The theory of residues then shows that the integral increases by  $i\pi$  passing through  $t_1$ , i.e. the second member of equation 8 increases by  $i\pi \frac{\kappa}{t_0 - t_1}$ . Also, passing from  $t_1 - \epsilon$  to  $t_1 + \epsilon$ , when  $\epsilon \rightarrow 0$ , amounts to passing from  $B'_1$  to  $B_1$  in the  $w$  plane (Fig. 2), hence the first member of equation 8 increases by  $id$ . We therefore have :

$$id = i\pi \frac{\kappa}{t_0 - t_1} \quad \text{or} \quad \frac{\kappa}{t_0 - t_1} = \frac{d}{\pi}$$

and :

$$w + i \frac{d}{2} = \frac{d}{\pi} \int_1^t \left( \frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1} \right) dt$$

The integration is elementary and gives :

$$w + i \frac{d}{2} = -\frac{d}{\pi} \left[ \text{Ln} \frac{t-t_1}{t-t_0} - \text{Ln} \frac{1-t_1}{1-t_0} \right] = -\frac{d}{\pi} \left[ \text{Ln} \frac{t-t_1}{t-t_0} - \text{Ln} \frac{t_1-1}{1-t_0} - i\pi \right]$$

(as :  $\text{Ln} \frac{1-t_1}{1-t_0} = \left[ \text{Ln} \frac{t_1-1}{1-t_0} e^{i\pi} \right] = \text{Ln} \frac{t_1-1}{1-t_0} + i\pi$ )

Thus we end with :

$$w = -\frac{d}{\pi} \text{Ln} \frac{t-t_1}{t-t_0} + \frac{d}{\pi} \text{Ln} \frac{t_1-1}{1-t_0} + i \frac{d}{2} \quad (9)$$

and

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{d}{\pi} \frac{t_1 - t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} \quad (10)$$

Formula 9 defines the conformal mapping by which the strip of the  $w$  plane is mapped in the half-plane  $t_y \geq 0$ .

#### VIII. RELATION OF THE $z$ and $t$ DOMAINS.

In order to find the relation allowing us to pass from the  $z$  plane to the  $t$  plane and vice versa, we start from the formula defining the variable  $\wp$  (Equation 3) :

$$\wp = -\frac{dz}{dw}$$

On en déduit, en désignant par  $\bar{z}, \bar{t}, \bar{w}$  des points homologues des plans des  $z, t$  et  $w$  :

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{w}}^w -\mathcal{Y} dw = \int_{\bar{t}}^t \mathcal{Y} \frac{dw}{dt} dt \quad (11)$$

D'après l'équation 6, on a :

$$t = \frac{1}{2} [\mathcal{Y}' + \mathcal{Y}'''] = \frac{1}{2} [e^{Ln \mathcal{Y}'} + e^{-Ln \mathcal{Y}'}]$$

donc :

$$t = ch Ln \mathcal{Y}' \quad (11')$$

Pour inverser cette formule, il faut se rappeler que, dans le domaine représentant le jet dans le plan des  $\mathcal{Y}'$ , on a constamment :  $|\mathcal{Y}'| \leq 1$ . Il faut donc prendre :

$$\mathcal{Y}' = e^{(v.p.) [-Arc ch t]} \quad (12)$$

où  $(v.p.) [-Arc ch t]$  représente la valeur principale de cette fonction, c'est à dire celle dont l'argument est compris entre 0 et  $\pi$ .

On a donc enfin :

$$\mathcal{Y} = e^{-\frac{2}{\pi} Arc ch t} \quad (13)$$

L'équation II s'écrit alors, en tenant compte des équations 10 et 13 :

$$z - \bar{z} = \frac{d}{\pi} \int_{\bar{t}}^t e^{-\frac{2}{\pi} Arc ch t} \frac{t_0 - t_0}{(t_0 - t_0)(t_0 - t_0)} dt \quad (14)$$

Comme les points critiques de la fonction à intégrer sont sur la frontière ( ce sont  $t_0$  et  $t_0$  ) et que cette fonction tend, en module, plus vite vers zéro que  $|t|^{-1}$  quand  $|t|$  augmente indéfiniment, l'intégration peut se faire suivant n'importe quel chemin à condition d'appliquer le théorème des résidus au voisinage des points critiques si l'on atteint la frontière.

Pour effectuer l'intégration, il est plus commode de revenir à la variable  $\mathcal{Y}'$ . On a donc :

$$t = \frac{1}{2} [\mathcal{Y}' + \mathcal{Y}'^{-1}] \quad \text{donc} \quad dt = \frac{1}{2} [1 - \mathcal{Y}'^{-2}] d\mathcal{Y}'$$

D'autre part, il est commode de prendre  $\bar{z} = 0$  c'est à dire de se placer en A dans le plan physique. On est alors en  $A_0$  dans le plan des  $t$  (Figure 5) et

$|\bar{t}| = \infty$  ; on est donc en  $A_0$  dans le plan des  $\mathcal{Y}'$  et  $\bar{\mathcal{Y}}' = 0$ . L'équation 14 s'écrit donc :

$$z = \frac{d}{\pi} \int_0^{\mathcal{Y}'} (t_0 - t_0) \mathcal{Y}' \frac{2 (\mathcal{Y}'^2 - 1) d\mathcal{Y}'}{[\mathcal{Y}'^2 - 2t_0 \mathcal{Y}' + 1][\mathcal{Y}'^2 - 2t_0 \mathcal{Y}' + 1]} \quad (15)$$

11.

From this we deduce, designating as  $\bar{z}, \bar{t}, \bar{w}$  homologous points in the  $z, t$  and  $w$  planes

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{w}}^w \rho dw = \int_{\bar{t}}^t -\rho \frac{dw}{dt} dt \quad (11)$$

According to equation 6, we have :

$$t = \frac{1}{2} [\rho' + \rho'^{-1}] = \frac{1}{2} [e^{\text{Ln } \rho'} + e^{-\text{Ln } \rho'}]$$

hence :  $t = ch \text{ Ln } \rho'$  (6')

To reverse this formula, we must remember that in the domain representing the jet in the  $\rho'$  plane, we have all the time :  $|\rho'| \leq 1$ . We must therefore take :

$$\rho' = e^{-(v.p) [-\text{Arc } ch t]} \quad (12)$$

where  $(v.p) [-\text{Arc } ch t]$  represents the principal value of this function, that is to say the one whose argument is included between 0 and  $\pi$

Thus we finally have :

$$\rho' = e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arc } ch t} \quad (13)$$

Equation 11 can then be written, taking into account equations 10 and 13 :

$$z - \bar{z} = \frac{d}{\pi} \int_{\bar{t}}^t e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arc } ch t} \frac{t_1 - t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} dt \quad (14)$$

Since the critical points of the function to be integrated are on the boundary (they are  $t_0$  and  $t_1$ ) and this function tends in module more rapidly towards zero than  $|t|^{-1}$  when  $|t|$  increases indefinitely, integration can be accomplished by following any path provided that the calculus of residues is applied in the neighborhood of the critical points if the boundary is reached.

To effect the integration it is more convenient to return to the variable  $\rho'$ .

We then have :

$$t = \frac{1}{2} [\rho' + \rho'^{-1}] \quad \text{hence} \quad dt = \frac{1}{2} [1 - \rho'^{-2}] d\rho'$$

Further, it is convenient to take  $\bar{z} = 0$ , i.e. to place ourselves at  $A$  in the physical plane. Then we are at  $A_3$  in the  $t$  plane (Fig. 5) and  $t/\bar{t} = \infty$  : we are at  $A_4$  in the  $\rho'$  plane and  $\rho' = 0$ . Equation 14 is therefore written :

$$z = \frac{d}{\pi} \int_0^{\rho'} (t_1 - t_0) \frac{\rho'^{\frac{\alpha}{\pi}} 2 (\rho'^2 - 1) d\rho'}{[\rho'^2 - 2t_0 \rho' + 1][\rho'^2 - 2t_1 \rho' + 1]} \quad (15)$$

Les zéros du dénominateur de la fonction à intégrer sont :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= t_0 \cdot \sqrt{t_0^2 - 1} & \gamma_3 &= t_0 \cdot \sqrt{t_0^2 - 1} \\ \gamma_2 &= t_0 \cdot \sqrt{t_0^2 - 1} & \gamma_4 &= t_0 \cdot \sqrt{t_0^2 - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Remarquons bien que l'on a entre ces valeurs les relations :

$$\begin{aligned} \gamma_1 \gamma_2 &= 1 & \gamma_3 \gamma_4 &= 1 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= 2t_0 & \gamma_3 + \gamma_4 &= 2t_0 \end{aligned} \quad (17)$$

On peut décomposer la fraction rationnelle sous le signe somme en éléments simples.

Posons :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'^2 - 1}{[\gamma'^2 - 2t_0 \gamma' + 1][\gamma'^2 - 2t_0 \gamma' + 1]} &= \frac{\gamma'^2 - 1}{(\gamma' - \gamma_1)(\gamma' - \gamma_2)(\gamma' - \gamma_3)(\gamma' - \gamma_4)} \\ &= \frac{A}{\gamma' - \gamma_1} + \frac{B}{\gamma' - \gamma_2} + \frac{C}{\gamma' - \gamma_3} + \frac{D}{\gamma' - \gamma_4} \end{aligned}$$

On a, pour déterminer  $A$ , l'équation :

$$A = \frac{\gamma'^2 - 1}{(\gamma' - \gamma_2)(\gamma' - \gamma_3)(\gamma' - \gamma_4)}$$

En utilisant les relations 17, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\gamma'^2 - \gamma_1 \gamma_2}{(\gamma' - \gamma_2)(\gamma' - \gamma_3)(\gamma' - \gamma_4)} = \frac{\gamma_1}{(\gamma' - \gamma_3)(\gamma' - \gamma_4)} \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma'^2 - 2t_0 \gamma' + 1} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 2t_0} = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 2t_0} = \frac{1}{2(t_0 - t_0)} \end{aligned}$$

Des calculs analogues permettent de calculer ainsi  $B, C, D$ . On obtient finalement :

$$A = B = \frac{1}{2(t_0 - t_0)} \quad C = D = \frac{1}{2(t_0 - t_0)}$$

La formule 15 s'écrit donc :

$$z = \frac{d}{\pi} \left[ - \int_0^{\gamma'} \frac{\gamma'^{\frac{1}{2}} d\gamma'}{\gamma' - \gamma_1} - \int_0^{\gamma'} \frac{\gamma'^{\frac{1}{2}} d\gamma'}{\gamma' - \gamma_2} + \int_0^{\gamma'} \frac{\gamma'^{\frac{1}{2}} d\gamma'}{\gamma' - \gamma_3} + \int_0^{\gamma'} \frac{\gamma'^{\frac{1}{2}} d\gamma'}{\gamma' - \gamma_4} \right] \quad (18)$$

Pour éviter toute confusion entre  $\gamma'$  : borne d'intégration et  $\gamma'$  : variable d'intégration, nous remplacerons  $\gamma'$  , variable d'intégration, par  $\lambda$  .

The zeros of the denominator of the function to be integrated are :

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= t_0 + \sqrt{t_0^2 - 1} & \varphi'_3 &= t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1} \\ \varphi'_2 &= t_0 - \sqrt{t_0^2 - 1} & \varphi'_4 &= t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} \end{aligned} \quad (16)$$

Let us note that the relations between these values are :

$$\begin{aligned} \varphi'_1 \varphi'_2 &= 1 & \varphi'_3 \varphi'_4 &= 1 \\ \varphi'_1 + \varphi'_2 &= 2t_0 & \varphi'_3 + \varphi'_4 &= 2t_1 \end{aligned} \quad (17)$$

We can decompose the rational fraction under the sign of integration into simple elements : Let us take :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi'^2 - 1}{[\varphi'^2 - 2t_0 \varphi' + 1][\varphi'^2 - 2t_1 \varphi' + 1]} &= \frac{\varphi'^2 - 1}{(\varphi' - \varphi'_1)(\varphi' - \varphi'_2)(\varphi' - \varphi'_3)(\varphi' - \varphi'_4)} \\ &= \frac{A}{\varphi' - \varphi'_1} + \frac{B}{\varphi' - \varphi'_2} + \frac{C}{\varphi' - \varphi'_3} + \frac{D}{\varphi' - \varphi'_4} \end{aligned}$$

To determine  $A$ , we have the equation :

$$A = \frac{\varphi_1'^2 - 1}{(\varphi'_1 - \varphi'_2)(\varphi'_1 - \varphi'_3)(\varphi'_1 - \varphi'_4)}$$

Using the relations shown in 17, we obtain successively :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\varphi_1'^2 - \varphi'_1 \varphi'_2}{(\varphi'_1 - \varphi'_2)(\varphi'_1 - \varphi'_3)(\varphi'_1 - \varphi'_4)} = \frac{\varphi'_1}{(\varphi'_1 - \varphi'_3)(\varphi'_1 - \varphi'_4)} \\ &= \frac{\varphi'_1}{\varphi_1'^2 - 2t_1 \varphi'_1 + 1} = \frac{1}{\varphi'_1 + \varphi_1'^{-1} - 2t_1} = \frac{1}{\varphi'_1 + \varphi'_2 - 2t_1} = \frac{1}{2(t_0 - t_1)} \end{aligned}$$

Analogous calculations allow us to work out  $B, C, D$  in this way. We finally obtain :

$$A = B = \frac{1}{2(t_0 - t_1)} \quad C = D = \frac{1}{2(t_1 - t_0)}$$

Hence formula 15 can be written :

$$z = \frac{d}{\varphi'} \left[ - \int_0^{\varphi'_1} \frac{\varphi'^{\frac{1}{2}} d\varphi'}{\varphi' - \varphi'_1} - \int_0^{\varphi'_2} \frac{\varphi'^{\frac{1}{2}} d\varphi'}{\varphi' - \varphi'_2} + \int_0^{\varphi'_3} \frac{\varphi'^{\frac{1}{2}} d\varphi'}{\varphi' - \varphi'_3} + \int_0^{\varphi'_4} \frac{\varphi'^{\frac{1}{2}} d\varphi'}{\varphi' - \varphi'_4} \right] \quad (15')$$

To avoid all confusion between  $\varphi'$ , integration limit and  $\varphi'$  integration variable, we shall replace the integration variable  $\varphi'$  by  $s$ .

On a alors :

$$z = \frac{d}{\pi} \left[ - \int_0^{S_1'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_1} - \int_0^{S_2'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_2} - \int_0^{S_3'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_3} + \int_0^{S_4'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_4} \right] \quad (18)$$

Pour ramener les bornes d'intégration à 0 et 1, nous ferons le changement de variable :  $S = S_0' u$   $dS = S_0' du$

On a alors, en appelant  $k$  un indice variant entre 1 et 4 :

$$\int_0^{S_k'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_k} = \int_0^1 \frac{S_0'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1} u^{\frac{\alpha}{\pi}}}{S_0' u - A_k} S_0' du = - \frac{S_0'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{A_k} \int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha}{\pi}} du}{1 - \frac{S_0'}{A_k} u} \quad (19)$$

Pour achever l'intégration, il est alors nécessaire d'introduire la fonction hypergéométrique de Gauss. On sait que celle-ci peut notamment se définir sous forme d'intégrale par :<sup>(1)</sup>

$$F(\lambda, \mu, \nu, z) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu-\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-\mu-1} (1-tz)^{-\lambda} dt \quad (20)$$

En identifiant les équations 19 et 20, on obtient :

$$\int_0^{S_k'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_k} = - \frac{S_0'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{A_k} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{\pi}) \Gamma(1)}{\Gamma(2 + \frac{\alpha}{\pi})} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{S_0'}{A_k}\right)$$

Mais, d'après la théorie des fonctions Euleriennes, on sait que :

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{\pi}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

On a donc finalement :

$$\int_0^{S_k'} \frac{S^{\frac{\alpha}{\pi}} dS}{S - A_k} = - \frac{S_0'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{\frac{\alpha}{\pi} + 1} \frac{1}{A_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{S_0'}{A_k}\right)$$

L'équation 18 s'écrit donc enfin :

$$z = \frac{d}{\pi} \frac{S_0'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{\frac{\alpha}{\pi} + 1} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{A_k} F\left[1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{S_0'}{A_k}\right] - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{A_k} F\left[1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{S_0'}{A_k}\right] \right] \quad (21)$$

avec :  $A_1, A_2 = S_1', S_2' = t_0 \pm \sqrt{t_0^2 - 1}$   $A_3, A_4 = S_3', S_4' = t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1}$

L'équation 21 jointe aux équations 7 et 9 résoud complètement le problème. Il ne reste plus qu'à déterminer les constantes  $t_0, t_1, d$ , c'est à dire déterminer les homologues dans le plan  $t$  des points  $B, B'$  et  $D, D'$  dans le plan physique et à calculer l'épaisseur du jet à l'infini aval.

Then we have :

$$z = \frac{d}{\pi} \left[ - \int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_1} - \int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_2} + \int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_3} + \int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_4} \right] \quad (18)$$

To reduce the limits of integration to 0 and 1, we shall make a change in the variable :  $s = \varphi' u$   $ds = \varphi' du$

We then have, denoting by  $k$  an index varying between 1 and 4 :

$$\int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_k} = \int_0^1 \frac{\varphi'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1} u^{\frac{\alpha}{\pi}}}{\varphi' u - s_k} \varphi' du = - \frac{\varphi'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{s_k} \int_0^1 \frac{u^{\frac{\alpha}{\pi}} du}{1 - \frac{\varphi' u}{s_k}} \quad (19)$$

To complete the integration it is then necessary to introduce Gauss's hypergeometrical function. We know that this can be defined in the form of an integral by <sup>①</sup>

$$F(\lambda, \mu, \nu, x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu-\mu)} \int_0^1 t^{\mu-1} (1-t)^{\nu-\mu-1} (1-tx)^{-\lambda} dt \quad (20)$$

Identifying equations 19 and 20, we obtain :

$$\int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_k} = - \frac{\varphi'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{s_k} \frac{\Gamma(1 + \frac{\alpha}{\pi}) \Gamma(1)}{\Gamma(2 + \frac{\alpha}{\pi})} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{s_k}\right)$$

However, according to the theory of Eulerian functions, we know that :

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(2 + \frac{\alpha}{\pi}\right) = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\right)$$

Thus we finally have :

$$\int_0^{\varphi'} \frac{s^{\frac{\alpha}{\pi}} ds}{s - s_k} = - \frac{\varphi'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{\frac{\alpha}{\pi} + 1} \frac{1}{s_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{s_k}\right)$$

Equation 18 can therefore be written :

$$z = \frac{d}{\pi} \frac{\varphi'^{\frac{\alpha}{\pi} + 1}}{\frac{\alpha}{\pi} + 1} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{s_k} F\left[1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{s_k}\right] - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{s_k} F\left[1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{s_k}\right] \right]$$

$$\text{with : } s_1, s_2 = \varphi'_1, \varphi'_2 = t_0 \pm \sqrt{t_0^2 - 1} \quad s_3, s_4 = \varphi'_3, \varphi'_4 = t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1} \quad (21)$$

Equation 21 together with equations 7 and 9 completely solves the problem. The only thing left to do is to determine the constants  $t_0, t_1, d$  that is to say to determine the homologues in the  $t$  plane of the points  $B, B'$  and  $D, D'$  in the physical plane and calculate the thickness of the jet at infinity downstream.

IX. DETERMINATION DES CONSTANTES  $t_0$ ,  $t_1$ ,  $d$  A L'AIDE DES DONNEES GEOMETRIQUES.

Avant de passer à la détermination de ces constantes, il nous faut faire quelques remarques pour éviter toute confusion par la suite :

- a) Nous n'avons pas exprimé le théorème fondamental de conservation de la masse d'une façon explicite (car il est exprimé implicitement dans la définition de la fonction de courant). L'application de ce théorème d'une façon globale à une section du jet est particulièrement simple lorsque l'écoulement est uniforme ; c'est le cas à l'infini amont et à l'infini aval de l'écoulement. On obtient l'équation supplémentaire suivante, traduisant une égalité de débits :

$$bv_1 = dv_0 = d \quad (22)$$

Nous retrouverons cette équation analytiquement par la suite.

- b)  $t_1$  représente l'abscisse de  $B_1$ ,  $B'_1$  donc correspond au point  $B_1, B'_1$  du plan des  $\zeta$ , point parfaitement déterminé par la donnée de la vitesse  $v_1$ . Connaissant  $v_1$ , on connaît  $B_1$  donc  $t_1$  par la formule (et réciproquement) et on atteint  $d$  par la formule 22. Le nombre de constantes à déterminer se réduit donc à deux :  $t_0$ ,  $t_1$ . La vitesse  $v_1$  reste un paramètre du problème tandis que  $d$  est parfaitement déterminé dès que l'on s'est fixé  $b$ .
- c) Nous avons provisoirement supposé que le jet adhère au volet  $AC$  (§ II). En fait, cette hypothèse restrictive peut être abandonnée. Nous sommes en mesure de résoudre l'un des problèmes suivants :
- le volet déflecteur étant de longueur infinie, déterminer, pour des valeurs de  $a, b, \alpha$  et  $v_1$  données, la direction finale du jet et la distance  $L$  du point de décollement  $C$  du jet à l'arête  $A$ .
  - étant donnés  $a, b, L, \alpha$ , déterminer la valeur à donner à  $v_1$  pour que le jet ne décolle pas du volet et la direction finale du jet.
  - étant donnés  $v_1, b, \alpha$ , déterminer  $a$  et la longueur  $L$  du volet pour que le jet ait une direction finale parallèle au volet.
  - etc ....

Ces remarques étant faites, nous pouvons déterminer  $t_0$  et  $t_1$  par la formule 21 en donnant à  $z$  des valeurs telles que les valeurs correspondantes de  $\zeta'$  (donc de la vitesse) soient connues. Il apparaît immédiatement que les seules valeurs possibles sont les valeurs de  $z$  en  $A'$  et  $C$  dans le plan réel.

En  $C$  on a  $z = L e^{-i\alpha}$  ; la vitesse dirigée suivant le volet vaut  $v_0 = 1$  et donc  $\zeta' = e^{-i\pi}$  ; d'où :

$$L e^{-i\alpha} = \frac{d}{\pi} \frac{(e^{-i\pi})^{\frac{a}{\pi} + 1}}{\frac{a}{\pi} + 1} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1, \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta_k}\right) - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1, \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta_k}\right) \right]$$

IX. DETERMINATION OF THE CONSTANTS  $t_0, t_1, d$  WITH THE HELP OF GEOMETRICAL DATA.

Before going on to the determination of these constants, we must make a few remarks in order to avoid confusion later :

- a) We have not expressed explicitly the fundamental theorem of the conservation of mass (for it is expressed implicitly in the definition of the stream function). The application of this theorem in an overall way to a section of the jet is particularly simple when the flow is uniform.: this is the case at infinity upstream and at infinity downstream of the flow. We obtain the following supplementary equation, revealing an equal output:  $b v_1 = d v_0 = d$  (22)

We shall find this equation again analytically later.

- b)  $t_1$  represents the abscissa of  $B_3, B'_3$  and thus corresponds to the point  $B_2, B'_2$  of the  $\mathcal{Y}$  plane, point which is perfectly determined by the given velocity  $v_1$ . Knowing  $v_1$ , we know  $B_2$  and therefore  $t_1$  by formula 7 (and vice versa) and we find  $d$  by means of formula 22. The number of constants to be determined is thus reduced to two :  $t_0, t_1$ . The velocity  $v_1$  remains a parameter of the problem whereas  $d$  is perfectly determined as soon as we have fixed  $b$
- c) We assumed provisionally that the jet adhered to the flap  $AC$  (§ II). Actually, this restrictive hypothesis can be abandoned. We are in a position to solve one of the following problems :
- the deflecting flap being of infinite length, to determine, for given values of  $a, b, \alpha$  and  $v_1$ , the final direction of the jet and the distance  $L$  of the point  $C$  at which the jet breaks away from the flap, from the edge  $A$ .
  - for given values of  $a, b, L, \alpha$ , to determine the value to be given to  $v_1$ , so that the jet shall not break away from the flap, and the final direction of the jet.
  - for given values of  $v_1, b, \alpha$  to determine  $a$  and the length  $L$  of the flap so that the final direction of the jet may be parallel to the flap.
  - etc ...

Having made these remarks, we can determine  $t_0$  and  $t_1$  by means of formula 21 and giving to  $z$  values such that the corresponding values of  $\mathcal{Y}'$  (hence of the velocity) are known. It is immediately obvious that the only possible values are those of  $z$  at  $A'$  and  $C$  in the real plane.

At  $C$  we have  $z = L e^{-i\alpha}$ ; the velocity oriented along the flap is  $v_0 = 1$  and thus  $\mathcal{Y}' = e^{-i\pi}$ ; from which we have :

$$L e^{-i\alpha} = \frac{d}{\pi} \frac{(e^{-i\pi})^{\frac{\pi}{\alpha} + 1}}{\frac{\pi}{\alpha} + 1} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\pi}{\alpha}, 2 + \frac{\pi}{\alpha}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta k}\right) - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\pi}{\alpha}, 2 + \frac{\pi}{\alpha}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta k}\right) \right]$$

soit après simplifications :

$$L = - \frac{d}{\alpha + \pi} \left[ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta_k}\right) - \sum_{k=3}^{k_1} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta_k}\right) \right] \quad (23)$$

En  $A'$  on a  $z = a + ib$  ; la vitesse parallèle à l'axe du canal vaut  $v_0 = 1$  et on a donc  $\gamma' = 1$  ; d'où :

$$a + ib = \frac{d}{\alpha + \pi} \left[ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{1}{\Delta_k}\right) - \sum_{k=3}^{k_1} \frac{1}{\Delta_k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{1}{\Delta_k}\right) \right] \quad (24)$$

Les équations 23 et 24 déterminent  $t_0$  et  $t_1$  en fonction des données géométriques du problème, à savoir  $a, b, L, \alpha$

Pour rendre les formules 21, 23, 24, utilisables pratiquement, il est commode d'introduire les développements en séries de la fonction hypergéométrique de Gauss. Il est essentiel de rappeler que :

" - La fonction hypergéométrique de Gauss:  $F(\lambda, \mu, \nu, z)$  présente le point " " critique  $z=1$ . Il sera donc possible de développer  $F(\lambda, \mu, \nu, z)$  soit au voisi-" " nage de l'origine et le développement ne sera valable que pour  $|z| < 1$  ; soit " " au voisinage de l'infini et le développement ne sera valable que pour  $|z| > 1$  . "

Dans notre cas, on aura donc :

$$F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\gamma'}{\Delta_k}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha + \pi}{\alpha + (n+1)\pi} \left(\frac{\gamma'}{\Delta_k}\right)^n \quad \text{si } \left|\frac{\gamma'}{\Delta_k}\right| < 1 \quad (25)$$

$$F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\gamma'}{\Delta_k}\right) = \frac{\alpha + \pi}{\gamma'} \frac{\Delta_k}{\gamma'} \left[ \frac{\pi}{\sin \alpha} \left(\frac{\Delta_k}{\gamma'}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-i\alpha} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\Delta_k}{\gamma'}\right)^n \frac{1}{n + \frac{\alpha}{\pi}} \right] \quad (26)$$

si  $\left|\frac{\gamma'}{\Delta_k}\right| > 1$

Pour appliquer ces deux développements à la formule générale 21, il sera nécessaire pour chaque valeur de  $\gamma'$  de discuter les valeurs de  $\left|\frac{\gamma'}{\Delta_k}\right|$ . On peut d'ailleurs remarquer que :

-  $|\Delta_k| < 1$  et  $t_0$  est réel. Il s'ensuit que  $t_0^2 - 1$  est négatif et les formules I6 montrent que  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  c.a.d.  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont imaginaires conjugués et sont en module égaux à 1. Donc, il existe un angle  $\gamma_0$  tel que :  $0 < \gamma_0 < \pi$  et tel que :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= t_0 + i\sqrt{1-t_0^2} = e^{i\gamma_0} \\ \Delta_2 &= t_0 - i\sqrt{1-t_0^2} = e^{-i\gamma_0} \end{aligned} \quad (27)$$

that is, after simplification :

$$L = -\frac{d}{\alpha + \pi} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta k}\right) - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{e^{-i\pi}}{\Delta k}\right) \right] \quad (23)$$

At  $A'$  we have  $z = a + ib$  ; the velocity parallel to the axis of the channel is  $v_0 = 1$  and we therefore have  $f' = 1$  ; from which :

$$a + ib = \frac{d}{\alpha + \pi} \left[ \sum_{k=1}^{k=2} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{1}{\Delta k}\right) - \sum_{k=3}^{k=4} \frac{1}{\Delta k} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{1}{\Delta k}\right) \right] \quad (24)$$

Equations 23 and 24 determine  $t_0$  and  $t$ , as function of the geometrical data of the problem, i.e.  $a, b, L, \alpha$

To render formulae 21, 23 and 24 practicable for use, it is convenient to introduce the developments in series of Gauss's hypergeometrical function. It is essential to remember that :

" Gauss's hypergeometrical function :  $F(\lambda, \mu, \nu, z)$  presents the critical point "

"  $z = 1$  . Thus it will be possible to develop  $F(\lambda, \mu, \nu, z)$  either in the neigh- "

" borhood of the origin where the development will only be valid for  $|z| < 1$  ; or "

" in the neighborhood of infinity in which case it will only be valid for  $|z| > 1$  ."

In our case, we shall then have :

$$F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{f'}{\Delta k}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha + \pi}{\alpha + (n+1)\pi} \left(\frac{f'}{\Delta k}\right)^n \quad \text{for } \left|\frac{f'}{\Delta k}\right| < 1 \quad (25)$$

$$F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{f'}{\Delta k}\right) = \frac{\alpha + \pi}{f'} \frac{\Delta k}{f'} \left[ \frac{\pi}{\sin \alpha} \left(\frac{\Delta k}{f'}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{\Delta k}{f'}\right)^n \frac{1}{n - \frac{\alpha}{\pi}} \right] \quad (26)$$

for  $\left|\frac{f'}{\Delta k}\right| > 1$

To apply these two developments to the general formula 21, it will be necessary, for each value of  $f'$  to discuss the values of  $\left|\frac{f'}{\Delta k}\right|$  . Incidentally it may be noted that :

-  $|t_0| < 1$  and  $t_0$  is real. It follows that  $t_0^2 - 1$  is negative and formulae 16 show that  $\varphi'_1$  and  $\varphi'_2$  i.e.  $s_1$  and  $s_2$  are imaginary and conjugate and are in module equal to 1 . Therefore an angle  $\varphi_0$  exists such that :  $0 < \varphi_0 < \pi$  and such that :

$$\begin{aligned} s_1 &= t_0 + i\sqrt{1-t_0^2} &= e^{i\varphi_0} \\ s_2 &= t_0 - i\sqrt{1-t_0^2} &= e^{-i\varphi_0} \end{aligned} \quad (27)$$

-  $t_1 > 1$  et  $t_1$  est réel, donc les formules 16 montrent que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  c.a.d.  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont réels et tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1} > 1 \\ \mathcal{A}_2 &= t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} < 1 \end{aligned} \quad (28)$$

Pour appliquer les formules 25 et 26 aux formules 23 et 24, il suffit alors de remarquer que dans les deux cas on a :  $|\mathcal{S}| = 1$ . Donc, pour  $k = 1, 2, 3$ , il faudra développer au voisinage de l'origine (formule 25) tandis que pour  $k = 4$ , il faudra développer au voisinage de l'infini (formule 26). Le calcul est immédiat et donne après simplification :

$$\begin{aligned} L &= d \left[ \frac{1}{e^{i\varphi_0}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{e^{i\varphi_0}} \right)^n + \frac{1}{e^{-i\varphi_0}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{e^{-i\varphi_0}} \right)^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mathcal{A}_1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{\mathcal{A}_1} \right)^n - \frac{1}{e^{-i\pi}} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \mathcal{A}_2^{\frac{\alpha}{\pi}} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \left( \frac{\mathcal{A}_2}{e^{-i\pi}} \right)^n \frac{1}{\pi n - \alpha} \right\} \right] \\ a + ib &= d \left[ \frac{1}{e^{i\varphi_0}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{e^{i\varphi_0}} \right)^n + \frac{1}{e^{-i\varphi_0}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{e^{-i\varphi_0}} \right)^n - \frac{1}{\mathcal{A}_1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} \right)^n \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \mathcal{A}_2^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathcal{A}_2^n \frac{1}{n\pi - \alpha} \right\} \right] \end{aligned}$$

La séparation des parties réelles et imaginaires dans cette dernière équation est immédiate : il suffit en effet de remarquer que la somme des deux premières séries est réelle (série de cosinus), les deux autres séries sont réelles et le terme restant se décompose en :

$$\frac{1}{\mathcal{A}_1} \frac{1}{\sin \alpha} \mathcal{A}_2^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} = \mathcal{A}_2^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[ \cotg \alpha - i \right]$$

On obtient finalement, en remplaçant  $\mathcal{A}_1$  par  $\mathcal{A}_2^{-1}$  (formules 17) :

-  $t_1 > 1$  and  $t_1$  is real, hence formulae 16 show that  $\gamma_3'$  and  $\gamma_4'$  i.e.  $\Delta_3$  and  $\Delta_4$  are real and such that :

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1} > 1 \\ \Delta_4 &= t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} < 1 \end{aligned} \quad (20)$$

To apply formulae 25 and 26 to formulae 23 and 24, one need only note that in both cases we have :  $|\gamma'| = 1$ . Therefore, for  $k = 1, 2, 3$  we must develop in the neighborhood of the origin (formula 25) whereas for  $k = 4$  we must develop in the neighborhood of infinity (formula 26).

The calculation can be done immediately and gives us, after simplification :

$$\begin{aligned} L &= -d \left[ \frac{1}{e^{i\gamma_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{e^{i\gamma_0}} \right)^n + \frac{1}{e^{-i\gamma_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{e^{-i\gamma_0}} \right)^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{e^{-i\pi}}{\Delta_3} \right)^n - \frac{1}{e^{-i\pi}} \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \Delta_4^{\frac{\alpha}{\pi}} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta_4}{e^{-i\pi}} \right)^n \frac{1}{\pi n - \alpha} \right\} \right] \\ a + ib &= d \left[ \frac{1}{e^{i\gamma_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{e^{i\gamma_0}} \right)^n + \frac{1}{e^{-i\gamma_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{e^{-i\gamma_0}} \right)^n - \frac{1}{\Delta_3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{1}{\Delta_3} \right)^n \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \Delta_4^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_4^n \frac{1}{\pi n - \alpha} \right\} \right] \end{aligned}$$

The separation of the real and the imaginary parts in this last equation can be effected immediately : it is sufficient to note that the sum of the two first series is real (cosine series) the two other series are real and the remaining term can be decomposed into :

$$\Delta_4^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1}{\sin \alpha} e^{-i\alpha} = \Delta_4^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[ \cot \alpha - i \right]$$

Finally we obtain, replacing  $\Delta_3$  by  $\Delta_4^{-1}$  (formulae 17) :

$$L = d \left[ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)(\gamma_0 + \pi)}}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)(\gamma_0 - \pi)}}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\pi}}{a + (n+1)\pi} \right. \\ \left. - \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i\pi} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\pi}}{n\pi - a} \right] \quad (29)$$

$$a = d \left[ \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\gamma_0}}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\gamma_0}}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\pi}}{a + (n+1)\pi} \right. \\ \left. - e^{-i\frac{\pi}{2}} \cot \gamma_0 - \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-i(n+1)\pi}}{n\pi - a} \right] \quad (30)$$

$$b = d e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (31)$$

Ces trois équations jointes aux formules 27 et 28 déterminent les constantes  $t_0, t, d$ . Le problème est donc résolu.

#### X. ELIMINATION DES CONSTANTES $t_0, t, \gamma_0$ A L'AIDE DES DONNÉES CINÉMATIQUES.

Il est possible d'éliminer la variable  $t$  dans les équations 21, 29, 30, 31, à l'aide de la vitesse  $v$  à l'infini amont et de la direction  $\theta_0$  du jet à l'infini aval.

Dans le plan des  $\mathcal{S}$  on a donc, pour  $D_2, D_2'$

$$\mathcal{S}_0 = e^{-i\theta_0} = e^{-\frac{\pi}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{ch} t_0}$$

On en déduit :

$$i\theta_0 = -\frac{\pi}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{ch} t_0$$

soit :

$$t_0 = \operatorname{ch} \left( -i\frac{\pi}{2} \theta_0 \right) = \cos \left( -\frac{\pi}{2} \theta_0 \right) = \cos \frac{\pi}{2} \theta_0$$

Mais d'après les formules 17, on a :

$$s_1 + s_2 = 2t_0$$

et les formules 27 donnent donc :

$$t_0 = \frac{e^{i\gamma_0} + e^{-i\gamma_0}}{2} = \cos \gamma_0$$

d'où :

$$\cos \gamma_0 = \cos \frac{\pi}{2} \theta_0 \quad \text{et} \quad \gamma_0 = \pm \frac{\pi}{2} \theta_0$$

L'ambiguïté du double signe peut être levée en remarquant que l'on a pris  $\gamma_0$  tel que :  $0 \leq \gamma_0 \leq \pi$  et que l'on doit avoir :  $-\pi \leq \theta_0 \leq 0$ . On a donc :

$$\gamma_0 = -\frac{\pi}{2} \theta_0 \quad \text{ou} \quad \theta_0 = -\frac{\pi}{2} \gamma_0 \quad (32)$$

D'autre part, on sait que  $t$  est réel et supérieur à 1. A  $t$ , du plan des  $t$  correspond  $B_2'$  du plan des  $\mathcal{S}$  c.a.d. :  $\mathcal{S} = \frac{1}{v} < 1$

$$L = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)(\varphi_0 + \pi)}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)(\varphi_0 - \pi)}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_4^{n+1} e^{-i(n+1)\pi}}{\alpha + (n+1)\pi} - \frac{\Delta_4 \frac{\pi}{\sin \alpha}}{\sin \alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_4^n e^{in\pi}}{n\pi - \alpha} \right] \quad (29)$$

$$a = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)\varphi_0}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)\varphi_0}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_4^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} - \Delta_4 \frac{\pi}{\pi} \cot \alpha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_4^n}{n\pi - \alpha} \right] \quad (30)$$

$$b = d \Delta_4 \frac{\pi}{\pi} \quad (31)$$

These three equations combined with formulae 27 and 28 determine the constants  $t_0, t_1, d$ . The problem is therefore solved.

#### X. ELIMINATION OF THE CONSTANTS $t_0, t_1, \varphi_0$ WITH THE AID OF THE KINEMATIC DATA.

It is possible to eliminate the variable  $t$  in the equations 21, 29, 30, 31, with the aid of the velocity  $v_1$  at infinity upstream and the direction  $\theta_0$  of the jet at infinity downstream.

In the  $\varphi$  plane we thus have, for  $D_2, D'_2$

$$\varphi_0 = e^{i\theta_0} = e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arc ch } t_0}$$

From this we deduce :

$$i\theta_0 = -\frac{\alpha}{\pi} \text{Arc ch } t_0$$

i.e. :

$$t_0 = \text{ch} \left( -i\frac{\pi}{\alpha} \theta_0 \right) = \cos \left( -\frac{\pi}{\alpha} \theta_0 \right) = \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta_0$$

But according to formulae 17, we have :

$$t_1 + t_2 = 2t_0$$

and formulae 27 therefore give us :

$$t_0 = \frac{e^{i\varphi_0} + e^{-i\varphi_0}}{2} = \cos \varphi_0$$

from which :

$$\cos \varphi_0 = \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta_0 \quad \text{and} \quad \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{\alpha} \theta_0$$

The ambiguity of the double sign can be removed by noting that we have taken  $\varphi_0$  such that :  $0 < \varphi_0 < \pi$  and that we must have :  $-\alpha < \theta_0 < 0$ . We therefore have:

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{\alpha} \theta_0 \quad \text{or} \quad \theta_0 = -\frac{\alpha}{\pi} \varphi_0 \quad (32)$$

On the other hand, we know that  $t$  is real and greater than 1. In the  $t$  plane  $t_1$  corresponds to  $\theta'_2$  of the  $\varphi$  plane, i.e. :  $\varphi = \frac{\pi}{v_1} < 1$

D'après l'équation 7, on a :

$$t_1 = \frac{1}{2} \left[ v_1^{\frac{\pi}{a}} + v_1^{-\frac{\pi}{a}} \right]$$

Donc  $v_1^{\frac{\pi}{a}}$  est solution de :

$$\left( v_1^{\frac{\pi}{a}} \right)^2 - 2t_1 v_1^{\frac{\pi}{a}} + 1 = 0$$

La somme des racines de cette équation est :  $2t_1 > 0$

Le produit des racines est :  $1 > 0$

Donc, les deux racines sont positives mais une seule est supérieure à 1.

On en déduit :

$$v_1^{\frac{\pi}{a}} = t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1} = \left[ t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} \right]^{-1} \quad (33)$$

$$\text{et } \beta_3 = v_1^{\frac{\pi}{a}} \quad \beta_4 = v_1^{-\frac{\pi}{a}}$$

En reportant ces valeurs dans les équations 2I, 29, 30, 3I, on obtient :

$$z = \frac{1}{\pi d} \frac{y^{\frac{\pi}{a} + 1}}{\frac{\pi}{a} + 1} \left[ \frac{1}{e^{i \frac{\pi}{a} \theta_0}} F\left(1, 1 + \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{y'}{e^{i \frac{\pi}{a} \theta_0}}\right) + \frac{1}{e^{-i \frac{\pi}{a} \theta_0}} F\left(1, 1 + \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{y'}{e^{-i \frac{\pi}{a} \theta_0}}\right) - \frac{1}{v_1^{\frac{\pi}{a}}} F\left(1, 1 + \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{y'}{v_1^{\frac{\pi}{a}}}\right) - \frac{1}{v_1^{-\frac{\pi}{a}}} F\left(1, 1 + \frac{a}{\pi}, 2 + \frac{a}{\pi}, \frac{y'}{v_1^{-\frac{\pi}{a}}}\right) \right] \quad (34)$$

$$L = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)\left(\pi - \frac{\pi}{a} \theta_0\right)}}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)\left(\pi + \frac{\pi}{a} \theta_0\right)}}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(v_1^{-\frac{\pi}{a}}\right)^{n+1} e^{-i(n+1)\pi}}{a + (n+1)\pi} - \frac{v_1^{-1}}{\sin \alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(v_1^{-\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{i n \pi}}{n\pi - a} \right] \quad (35)$$

$$a = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{a} \theta_0}}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)\frac{\pi}{a} \theta_0}}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(v_1^{-\frac{\pi}{a}}\right)^{n+1}}{a + (n+1)\pi} - v_1^{-1} \cot \alpha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(v_1^{-\frac{\pi}{a}}\right)^n}{n\pi - a} \right] \quad (36)$$

$$b = d v_1^{-1} \quad (37)$$

Remarquons que l'équation 37 n'est autre que l'équation 22 déjà trouvée au paragraphe IX.

According to equation 7, we have :

$$t_1 = \frac{1}{2} \left[ v_1 \frac{\pi}{\alpha} + v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha} \right]$$

Therefore  $v_1 \frac{\pi}{\alpha}$  is the solution of :

$$\left( v_1 \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 2t_1 v_1 \frac{\pi}{\alpha} + 1 = 0$$

The sum of the roots of this equation are :  $2t_1 > 0$

The product of the roots is :  $1 > 0$

Hence the two roots are positive but only one of them is greater than 1.

From this we deduce :

$$v_1 \frac{\pi}{\alpha} = t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1} = \left[ t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1} \right]^{-1} \quad (33)$$

$$\text{and } v_3 = v_1 \frac{\pi}{\alpha} \quad v_4 = v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha}$$

Inserting these values into equations 2I, 29, 30, 3I, we obtain :

$$z = \frac{d}{\pi} \frac{\varphi' \frac{\pi}{\alpha} + 1}{\frac{\pi}{\alpha} + 1} \left[ \frac{1}{e^{i \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{e^{i \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}}\right) + \frac{1}{e^{-i \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{e^{-i \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}}\right) \right. \\ \left. - \frac{1}{v_1 \frac{\pi}{\alpha}} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{v_1 \frac{\pi}{\alpha}}\right) - \frac{1}{v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha}} F\left(1, 1 + \frac{\alpha}{\pi}, 2 + \frac{\alpha}{\pi}, \frac{\varphi'}{v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha}}\right) \right] \quad (34)$$

$$L = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)(\pi - \frac{\pi}{\alpha} \theta_0)}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1)(\pi + \frac{\pi}{\alpha} \theta_0)}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha})^{n+1} e^{-i(n+1)\pi}}{\alpha + (n+1)\pi} \right. \\ \left. - \frac{v_1^{-1}}{\sin \alpha} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha})^n e^{i n \pi}}{n\pi - \alpha} \right] \quad (35)$$

$$a = d \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-i(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha})^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} \right. \\ \left. - v_1^{-1} \cot \alpha - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(v_1^{-1} \frac{\pi}{\alpha})^n}{n\pi - \alpha} \right] \quad (36)$$

$$b = d v_1^{-1} \quad (37)$$

Let us note that equation 37 is nothing other than equation 22 which we already found in paragraph K.

### XI. DISCUSSION DU RÉGIME :

Précisons rapidement les paramètres et leurs limites :

- $a$  varie de moins l'infini à plus l'infini, c.a.d. que la paroi supérieure du canal peut s'arrêter soit en amont, soit en aval de l'arête.
- $b$  est strictement positif (sinon il n'y aurait pas d'écoulement).
- $L$  est positif ou nul.
- $\alpha$  varie entre  $0$  et  $\pi$ .
- $\theta$  varie entre  $0$  et  $-\alpha$ .
- $v$  est supérieur ou au moins égal à  $1$ .

Il s'ensuit immédiatement que :

- $d$  est supérieur ou égal à  $b$ . L'équation 37 montre que  $d$  varie dans le même sens que  $b$  pour  $v_i = C^{1/\alpha}$  et dans le même sens que  $v_i$  pour  $b = C^{1/\alpha}$ .
- $t_i$  est supérieur ou égal à  $1$ . De l'équation 7, on déduit :

$$t_i = \frac{1}{2} \left[ v_i^{\frac{\pi}{\alpha}} + v_i^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right]$$

et donc :

$$\frac{dt_i}{dv_i} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \left[ \frac{v_i^{\frac{2\pi}{\alpha}-1}}{v_i^{\frac{\pi}{\alpha}+1}} - 1 \right] > 0 \quad (38)$$

Donc,  $t_i$  et  $v_i$  varient dans le même sens.

- $t_o$  varie entre  $-1$  et  $+1$ . On a de même :

$$t_o = \frac{1}{2} \left[ e^{L \frac{\pi}{\alpha} \theta_o} + e^{-L \frac{\pi}{\alpha} \theta_o} \right] = \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta_o$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{dt_o}{d\theta_o} = -\frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta_o > 0 \quad (39)$$

Donc  $t_o$  et  $\theta_o$  varient dans le même sens.

Comme  $\varphi_o = -\frac{\pi}{\alpha} \theta_o$  (formule 32), on voit que  $t_o$  et  $\varphi_o$  varient en sens inverse.

Remarquons en outre que :

- le cas  $\alpha = 0$ ,  $L \neq 0$  est sans intérêt pour nous, les vitesses n'étant plus infinies en  $A$ .
- le cas  $\alpha = \pi$  est un cas particulier pour lequel certains termes sont infinis dans les formules 35 et 36. En fait, ce cas ne nécessite plus l'intervention des fonctions hypergéométriques pour l'intégration de la formule 15'. Nous le laisserons de côté.
- le cas  $L = 0$  est tel que  $\alpha$  est alors indéterminé.

### XI. DISCUSSION OF THE REGIME :

Let us briefly specify the parameters and their limits :

- $a$  varies from minus infinity to plus infinity, that is to say that the upper wall of the channel can end either upstream or downstream of the edge (point of articulation).
- $b$  is strictly positive (otherwise there would be no flow).
- $L$  is positive or zero.
- $\alpha$  varies between  $0$  and  $\pi$ .
- $\theta$  varies between  $0$  and  $-\alpha$ .
- $v_1$  is greater than or at least equal to  $1$ .

From this it follows immediately that :

- $d$  is greater than or equal to  $b$ . Equation 37 shows that  $d$  varies in the same sense as  $b$  for  $v_1 = \text{constant}$  and in the same sense as  $v_1$  for  $b = \text{constant}$ .
- $t_1$  is greater than or equal to  $1$ . From equation 7 we deduce :

$$t_1 = \frac{1}{2} \left[ v_1^{\frac{\pi}{\alpha}} + v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}} \right]$$

and thus :

$$\frac{dt_1}{dv_1} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \left[ \frac{v_1^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}{v_1^{\frac{\pi}{\alpha}}+1} \right] > 0 \quad (38)$$

Thus,  $t_1$  and  $v_1$  vary in the same direction.

- $t_0$  varies between  $-1$  and  $+1$ . In the same way we have :

$$t_0 = \frac{1}{2} \left[ e^{i\frac{\pi}{\alpha}\theta_0} + e^{-i\frac{\pi}{\alpha}\theta_0} \right] = \cos \frac{\pi}{\alpha} \theta_0$$

from which :

$$\frac{dt_0}{d\theta_0} = -\frac{\pi}{\alpha} \sin \frac{\pi}{\alpha} \theta_0 > 0 \quad (39)$$

Hence  $t_0$  and  $\theta_0$  vary in the same direction.

As  $\varphi_0 = -\frac{\pi}{\alpha} \theta_0$  (formula 32), we see that  $t_0$  and  $\varphi_0$  vary in opposite directions.

Let us note in addition that :

- the case of  $\alpha=0, L \neq 0$  is of no interest to us, since the velocities are no longer infinite at A
- the case of  $\alpha=\pi$  is a particular case in which certain terms are infinite in formulae 35 and 36. In fact, this case no longer requires the intervention of the hypergeometrical functions for the integration of formula 15'. We shall leave it aside.
- the case of  $L=0$  is such that  $\alpha$  is then indeterminate.

Pour discuter le régime, nous partirons des équations 35 et 36 que nous exprimerons sous leur forme non intégrée à l'aide de l'équation 14.

Pour l'équation 35, on se place en  $C$  dans le plan physique donc :  $z = L e^{-ct}$ . La borne d'intégration supérieure est alors  $t_2 = 1$ . La borne d'intégration inférieure doit être telle que  $|t| \rightarrow \infty$ . On peut la prendre :  $t_1 = -\infty$  de façon à intégrer le long de l'axe réel  $t_2$ . On a donc :

$$L e^{-ct} = \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{t_1 - t_0}{(t - t_0)(t - t_1)} dt$$

Faisons le changement de variable d'intégration :  $u = t$

Comme on a désigné par  $(vp)[\text{Arc ch } t]$  la valeur principale de cette fonction, c.a.d. celle dont l'argument varie entre 0 et  $\pi$ , on doit remplacer :

$$e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \quad \text{par} \quad e^{-\frac{a}{\pi} (i\pi + \text{Arc ch } u)} = e^{-i a} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u}$$

d'où, en remplaçant  $d$  par  $bv$  (équation 37) :

$$\frac{L}{b} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{t_1 - t_0}{(t_0 + u)(u + t_1)} du$$

ou encore :

$$\frac{L}{b} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \left( \frac{1}{u + t_0} - \frac{1}{u + t_1} \right) du \quad (40)$$

Pour l'équation 36, on se place en  $A'$  dans le plan réel, donc :  $z = a + ib$

La borne d'intégration supérieure est donc  $+1$ .

En prenant  $t_1 = +\infty$  comme borne d'intégration inférieure, on intègre le long de l'axe réel  $t_2$  de  $+\infty$  à 1 et on évite le pôle  $t = t_0$  (sauf si  $t_0 = 1$ ).

On obtient donc :

$$a + ib = \frac{d}{\pi} \int_{\infty}^1 e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{t_1 - t_0}{(t - t_0)(t - t_1)} dt$$

Comme on intègre suivant l'axe réel, la seule partie imaginaire fournie par l'intégrale au second membre est due au pôle  $t = t_0$  et doit s'éliminer avec la partie imaginaire du premier membre. On vérifie en effet que le résidu de la fonction à intégrer vaut :

$$e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t_0}$$

c.a.d.  $\frac{1}{v_1}$  d'après la formule 13. La variation de l'intégrale au passage au pôle  $t = t_0$  vaut donc d'après la théorie des résidus :  $i\pi v_1^{-1}$  et le second

To discuss the regime, we shall start from equations 35 and 36 which we shall express in their non-integrated form with the aid of equation 14.

For equation 35, we place ourselves at  $C$  in the physical plane, then  $z = L e^{-i\alpha}$ . The upper limit of integration is then  $t = -1$ . The lower limit of integration must be such that  $|t| = \infty$ . We can take it as:  $t = -\infty$  so as to integrate along the real axis  $t_x$ . So we have:

$$L e^{-i\alpha} = \frac{d}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \frac{t_1 - t_0}{(t - t_0)(t - t_1)} dt$$

Let us change the integration variable:  $u = -t$

Since we denoted the principal value of this function i.e. that whose argument varies between 0 and  $\pi$ , by  $(vp)[\text{Archt}]$  we must replace:

$$e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \quad \text{by} \quad e^{-\frac{\alpha}{\pi} (i\pi + \text{Archu})} = e^{-i\alpha} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archu}}$$

from which, replacing  $d$  and  $bv_1$  (equation 37), we have:

$$\frac{L}{b} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archu}} \frac{t_1 - t_0}{(t_0 + u)(u + t_1)} du$$

or again:

$$\frac{L}{b} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archu}} \left( \frac{1}{u + t_0} - \frac{1}{u + t_1} \right) du \quad (40)$$

For equation 36, we place ourselves at  $A'$  in the real plane, thus:  $z = a + ib$

The upper limit of integration is therefore  $+1$ .

And taking  $t = +\infty$  as lower limit of integration, we integrate along the real axis  $t_x$  from  $+\infty$  to  $1$  and we avoid the pole  $t = t_0$  (except if  $t_0 = 1$ ).

Hence we obtain:

$$a + ib = \frac{d}{\pi} \int_{\infty}^1 e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \frac{t_1 - t_0}{(t - t_0)(t - t_1)} dt$$

As we integrate along the real axis, the only imaginary part provided by the integral in the second member is due to the pole  $t = t_0$ , and must be eliminated together with the imaginary part of the first member. Thus we find that the value of the residue of the function to be integrated is:

$$e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t_0}$$

that is to say  $\frac{1}{v_1}$  according to formula 13. The variation of the integral while passing through the pole  $t = t_0$ , therefore has, according to the theory of

membre augmente donc de :  $c \, d v_1$  c.s.d. de  $c \, b$  d'après la formule 37.  
En définitive, on peut donc écrire, en ne conservant que les parties réelles et en remplaçant  $d$  par  $b v_1$ .

$$\frac{a}{b} = \frac{v_1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{t_1-\epsilon}^{t_1+\epsilon} e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht} \frac{t_1 - t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} dt$$

soit, en décomposant la fraction rationnelle :

$$\frac{a}{b} = \frac{v_1}{\pi} \left\{ \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht} \frac{dt}{t-t_0} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_1^{t_1-\epsilon} e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht} \frac{dt}{t-t_1} + \int_{t_1+\epsilon}^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht} \frac{dt}{t-t_1} \right) \right\} \quad (41)$$

On peut interpréter les formules 40 et 41 comme définissant deux familles de courbes :

$$t_0 = f\left(t_1, \frac{t}{b}\right) \qquad t_0 = g\left(t_1, \frac{a}{b}\right)$$

c.s.d. puisque l'on a par la formule 13 :

$$v_1^{-1} = e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht_1} \qquad v_0^{-1} = e^{-\frac{a}{\pi} \operatorname{Arcc} ht_0}$$

deux familles de courbes :

$$v_0 = f_1\left(v_1, \frac{t}{b}\right) \qquad v_0 = g_1\left(v_1, \frac{a}{b}\right)$$

#### DISCUSSION EN FONCTION DU RAPPORT $\frac{t}{b}$

Considérons d'abord les cas limites  $L=0$  et  $L=\infty$

Si  $L=0$ , il faut annuler le second membre de 40 ce qui exige :

$$\frac{t_1 - t_0}{(t_1 - t_0)(t_1 + t_0)} = 0$$

Comme on a toujours  $t_0 \leq t_1$ , cette condition ne peut être réalisée que pour

$t_0 = t_1 = 1$ . Donc la courbe  $t_0 = f(t_1, 0)$  se réduit au point  $t_1 = t_0 = 1$

Si  $L=\infty$ , il faut rendre le second membre de 40 infini, ce qui exige soit que

l'intégrale diverge, donc que  $t_0 = -1$ , soit que le coefficient de l'intégrale

soit infini, donc que :  $v_1 = \infty$  c.s.d.  $t_1 = \infty$

Donc la courbe  $t_0 = f(t_1, \infty)$  est formée de la demi-droite  $t_0 = -1, 1 \leq t_1 \leq \infty$

et du segment :  $-1 \leq t_0 \leq +1, t_1 = \infty$

Il reste à examiner le cas général  $\frac{t}{b} = k$ ,  $k$  désignant une constante finie non nulle.

L'équation 40 montre que pour  $\frac{t}{b} = k$ , il existe une valeur de  $t_1$  telle

residues, the value  $i\pi v_1^{-1}$  and the second member thus increases by :  $i dv_1^{-1}$  21.  
 i.e. by  $ib$  according to formula 37.

We can therefore finally write, retaining only the real parts and replacing  $d$  by  $bu_1$

$$\frac{a}{b} = \frac{u_1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t_1 + \epsilon} + \int_{t_1 - \epsilon}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \frac{t_1 - t_0}{(t - t_0)(t - t_1)} dt$$

i.e. splitting up the rational fraction :

$$\frac{a}{b} = \frac{u_1}{\pi} \left\{ \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \frac{dt}{t - t_0} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_1^{t_1 - \epsilon} + \int_{t_1 + \epsilon}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t} \frac{dt}{t - t_1} \right) \right\} \quad (41)$$

We can interpret formulae 40 and 41 as defining two families of curves :

$$t_0 = f\left(t_1, \frac{L}{b}\right) \quad t_0 = g\left(t_1, \frac{a}{b}\right)$$

i.e., since we have, from formula 13 :

$$v_1^{-1} = e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t_1} \quad v_0^{-1} e^{i\theta_0} = e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Archt } t_0}$$

two families of curves :

$$v_0 = f_1\left(v_1, \frac{L}{b}\right) \quad v_0 = g_1\left(v_1, \frac{a}{b}\right)$$

#### ARGUMENT IN TERMS OF THE RATIO $\frac{L}{b}$

Let us first consider the limiting cases  $L=0$  and  $L=\infty$

If  $L=0$ , the second member of 40 must be annulled, which requires :

$$\frac{t_1 - t_0}{(u + t_0)(u + t_1)} = 0$$

Since in any case  $t_0 \leq t_1$ , this condition can only be realised for  $t_0 = t_1 = 1$

Hence, the curve  $t_0 = f(t_1, 0)$  is reduced to the point  $t_1 = t_0 = 1$ .

If  $L=\infty$ , the second member of 40 must be rendered infinite, which requires either that the integral should diverge, so that  $t_0 = -1$ , or that the coefficient of the integral should be infinite, so that :  $v_1 = \infty$  i.e.  $t_1 = \infty$

Therefore, the curve  $t_0 = f(t_1, \infty)$  is formed by the half straight line  $t_0 = -1, 1 \leq t_1 < \infty$  and the "segment" :  $-1 \leq t_0 \leq +1, t_1 = \infty$

It remains for us to examine the general case  $\frac{L}{b} = k$ ,  $k$  denoting a finite constant which is not zero.

Equation 40 shows that for  $\frac{L}{b} = k$ , a value of  $t_1$  exists such that  $t_0 = f(t_1, k) = 1$ , but there is no value of  $t_1$  such that  $t_0 = f(t_1, k) = -1$

que  $f(t, \frac{L}{b}) = 1$ , mais qu'il n'existe pas de valeur de  $t$ , telle que  $t_0 = f(t, \frac{L}{b}) = 1$  car alors l'intégrale est divergente et l'on a plus  $\frac{L}{b} = 1$ .  
 Pour étudier la forme des courbes  $t_0 = f(t, \frac{L}{b})$ , nous allons différencier l'équation 40 en laissant  $\frac{L}{b}$  constant. D'où :

$$0 = -\frac{v_1}{\pi} dt_0 \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{du}{(u+t_0)^2} + dt_0 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{dv_1}{dt_0} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \left( \frac{1}{u+t_0} - \frac{1}{u-t_0} \right) du + \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{du}{(u+t_0)^2} \right\}$$

soit, après simplification :

$$\frac{dt_0}{dt_0} = \frac{\frac{L}{bv_1} \frac{dv_1}{dt_0} + \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{du}{(u+t_0)^2}}{\frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{du}{(u+t_0)^2}} \quad (42)$$

Comme  $\frac{dv_1}{dt_0}$  est positif (formule 38), on voit que  $\frac{dt_0}{dt_0}$  est positif.  
 Donc, quand  $\frac{L}{b} = C^{ste}$ ,  $t_0$  est une fonction croissante de  $t$ . On en déduit que chaque courbe de la famille  $t_0 = f(t, \frac{L}{b})$  part du segment  $t_0 = 1$   $-1 \leq t_0 \leq 1$  et se termine, après s'être toujours élevée, sur la droite  $t_0 = 1$ . Pour placer ces courbes, il suffit de différencier 40 en y laissant  $t$  constant, d'où :

$$d \frac{L}{b} = - dt_0 \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } u} \frac{du}{(u+t_0)^2} \quad (43)$$

Il est évident que  $d \frac{L}{b} / dt_0$  est négatif.

Donc les courbes  $t_0 = f(t, \frac{L}{b})$  sont en quelque sorte concentriques autour du point  $t_0 = t_0 = 1$ , les courbes les plus éloignées correspondant aux valeurs les plus élevées de  $\frac{L}{b}$ .

#### DISCUSSION EN FONCTION DU RAPPORT $\frac{a}{b}$

La discussion est assez délicate du fait que l'équation 41 comporte un passage à la limite. Nous utiliserons simultanément l'équation 41 et l'équation 36. Dans cette dernière, nous remplacerons  $d$  par  $bv_1$ , nous grouperons les deux premières séries dans une série unique de cosinus et nous mettrons à part le premier terme de la dernière série. On obtient ainsi :

for then the integral is divergent and we no longer have  $\frac{L}{b} = k$ .  
To study the form of the curves  $t_0 = f(t_1, k)$ , we shall differentiate equation 40, leaving  $k$  constant. From which :

$$0 = -\frac{U_1}{\pi} dt_0 \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \frac{du}{(u+t_0)^2} + dt_1 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{dv_1}{dt_1} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \left( \frac{1}{u+t_0} - \frac{1}{u+t_1} \right) du + \frac{U_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \frac{du}{(u+t_1)^2} \right\}$$

i.e., after simplification :

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{\frac{L}{b v_1} \frac{dv_1}{dt_1} + \frac{U_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \frac{du}{(u+t_1)^2}}{\frac{U_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \frac{du}{(u+t_0)^2}} \quad (42)$$

Since  $\frac{dv_1}{dt_1}$  is positive (formula 38), we see that  $\frac{dt_0}{dt_1}$  is positive. Therefore, when  $\frac{L}{b} = \text{constant}$ ,  $t_0$  is an increasing function of  $t_1$ . From which we deduce that each curve of the family  $t_0 = f(t_1, \frac{L}{b})$  starts from the segment  $t_0 = 1$   $-1 \leq t_0 \leq 1$  and finishes, after having risen all the time, on the straight line  $t_0 = 1$ . To place these curves, it is only necessary to differentiate 40, leaving  $t_1$  constant, which gives us :

$$\frac{d \frac{L}{b}}{dt_0} = - dt_0 \frac{U_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arcc}hu} \frac{du}{(u+t_0)^2} \quad (43)$$

It is evident that  $\frac{d \frac{L}{b}}{dt_0}$  is negative.

Thus the curves  $t_0 = f(t_1, \frac{L}{b})$  are so to speak concentric round the point  $t_0 = t_1 = 1$  those curves furthest away corresponding to the highest values of  $\frac{L}{b}$ .

#### ARGUMENT IN TERMS OF THE RATIO $\frac{a}{b}$

This argument is rather tricky due to the fact that equation 41 contains a passage at the limit. We shall make use of equations 41 and 36 simultaneously. In the latter, we shall replace  $d$  by  $b v_1$ , we shall group the two first series into a single cosine series and separate the first term of the last series.

Thus we obtain :

$$\frac{a}{b} + \cot \gamma = r \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{a} \theta_0}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(v_1 - \frac{\pi}{a}\right)^{n+1}}{a + (n+1)\pi} - \frac{1}{a} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(v_1 - \frac{\pi}{a}\right)^n}{n\pi - a} \right] \quad (36')$$

Pour étudier la forme des courbes  $t_0 = g(t, \frac{a}{b})$  il faut calculer  $\frac{dt_0}{dt}$ .  
 Nous rappellerons d'abord que  $\theta_0$  ne dépend que de  $t_0$  et que  $v_1$  ne dépend que de  $t_1$  (Voir § X). Donc dans l'équation 36' seule la série de cosinus dépend de  $t_0$  tandis que dans l'équation 41 seule la première intégrale dépend de  $t_0$ . Cette série et cette intégrale ne diffèrent donc que d'une constante et leurs différentielles en  $t_0$  sont donc égales. - On a donc :

$$\frac{d}{dt_0} \left\{ v_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{a} \theta_0}{a + (n+1)\pi} \right\} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{dt}{(t \cdot t_0)^2} \quad (46)$$

En différenciant 36' par rapport à  $t_0$  et  $v_1$  quand  $\frac{a}{b}$  est constant, on obtient grâce à 46 :

$$\begin{aligned} 0 = dt_0 \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{dt}{(t \cdot t_0)^2} + dv_1 \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{a} \theta_0}{a + (n+1)\pi} + \frac{1}{a} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ 1 - (n+1) \frac{\pi}{a} \right] \frac{v_1 \frac{-\pi(n+1)}{a}}{a + (n+1)\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ 1 - n \frac{\pi}{a} \right] \frac{v_1 \frac{-\pi n}{a}}{n\pi - a} \right\} \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{1}{a} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{a} \theta_0}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ (n+1) \frac{\pi}{a} - 1 \right] \frac{v_1 \frac{-\pi(n+1)}{a}}{a + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ n \frac{\pi}{a} - 1 \right] \frac{v_1 \frac{-\pi n}{a}}{n\pi - a} - \frac{dt_0}{dv_1} \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{dt}{(t \cdot t_0)^2} \quad (47)$$

Dans cette équation, la série des cosinus jointe au terme  $\frac{1}{a}$  est positive et définie sauf pour  $\theta_0 = 0$  et  $\theta_0 = \alpha$ . Toutes les autres séries sont positives et l'intégrale est de même positive. Donc  $\frac{dt_0}{dv_1}$  est négatif. D'après l'équation 38 on en déduit que :

$$\frac{a}{b} + \cotg \alpha = v_1 \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}})^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} + \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}})^n}{n\pi - \alpha} \right] \quad (36')$$

To study the shape of the curves  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  we must calculate  $\frac{dt_0}{dt_1}$ . Let us remember first that  $\theta_0$  only depends on  $t_0$  and that  $v_1$  only depends on  $t_1$  (See § X). Therefore in equation 36', only the cosine series depends on  $t_0$ . This series and this integral therefore only differ by a constant and their differentials at  $t_0$  are therefore equal. - Hence we have :

$$\frac{d}{dt_0} \left\{ v_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}{\alpha + (n+1)\pi} \right\} = \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arct} \text{cht}} \frac{dt}{(t-t_0)^2} \quad (46)$$

Differentiating 36' with respect to  $t_0$  and  $v_1$ , when  $\frac{a}{b}$  is constant, we obtain with the aid of 46 :

$$0 = dt_0 \frac{d}{dt_0} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arct} \text{cht}} \frac{dt}{(t-t_0)^2} + dv_1 \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}{\alpha + (n+1)\pi} + \frac{1}{\alpha} - \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ 1 - (n+1) \frac{\pi}{\alpha} \right] \frac{v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}(n+1)}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ 1 - n \frac{\pi}{\alpha} \right] \frac{v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}n}}{n\pi - \alpha} \right\}$$

from which :

$$\frac{dt_0}{dv_1} = \frac{\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cos(n+1) \frac{\pi}{\alpha} \theta_0}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ (n+1) \frac{\pi}{\alpha} - 1 \right] \frac{v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}(n+1)}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ n \frac{\pi}{\alpha} - 1 \right] \frac{v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}n}}{n\pi - \alpha}}{\frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\pi} \text{Arct} \text{cht}} \frac{dt}{(t-t_0)^2}} \quad (47)$$

In this equation the cosine series combined with the term  $\frac{1}{\alpha}$  is positive and defined except for  $\theta_0 = 0$  and  $\theta_0 = -\alpha$ . All the other series are positive and the integral is also positive. Therefore  $\frac{dt_0}{dv_1}$  is negative. According to equation 36, we deduce from this that :

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{dt_0}{dv_1} \frac{dv_1}{dt_1}$$

$$\frac{dt_0}{dt_1} = \frac{dt_0}{dv} \frac{dv}{dt_1}$$

est aussi négatif.

Les courbes  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  sont donc, pour  $\frac{a}{b}$  fixé, des fonctions décroissantes de  $t_1$ .

Pour placer les courbes  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$ , calculons  $\frac{d \frac{a}{b}}{dt_0}$ . D'après 41, on a :

$$\frac{d \frac{a}{b}}{dt_0} = dt_1 \frac{v_1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t} \frac{dt}{(t-t_0)^2}$$

Donc  $\frac{d \frac{a}{b}}{dt_0}$  est positif, c.a.d., puisque chaque courbe  $\frac{a}{b} = C^{st} e^{-\frac{a}{\pi} \text{Arc ch } t}$  est une fonction décroissante de  $t$ , que ces courbes sont situées les unes au-dessus des autres vers les  $t_1$  croissants, les courbes les plus hautes correspondant aux valeurs les plus élevées de  $\frac{a}{b}$ .

On peut aisément discuter les cas limites :

Pour  $t_0 = 1$  et  $t_1 > 1$ , on voit, dans l'équation 36', que la série des cosinus diverge et tend vers plus l'infini puisqu'alors  $\theta_0 = 0$  tandis que les deux autres séries restent finies puisque  $v_1$  est différent de l'unité. On a donc :  $\frac{a}{b} = +\infty$

La courbe  $t_0 = g(t_1, +\infty)$  est donc la demi-droite :  $t_0 = 1, t_1 > 1$

Pour  $t_0 = -1$  et  $-1 \leq t_1 < 1$ , au contraire, la série des cosinus converge tandis que les deux autres séries divergent et tendent, compte tenu du signe, vers moins l'infini. On a donc :  $\frac{a}{b} = -\infty$

La courbe  $t_0 = g(t_1, -\infty)$  est donc le segment :  $-1 \leq t_0 < 1, t_1 = 1$

Quand on a simultanément  $t_0 = 1, t_1 = 1$ , toutes les séries divergent mais la série des cosinus tend vers  $+\infty$  tandis que les deux autres, affectées de signes négatifs, tendent vers  $-\infty$ . Suivant la façon dont on fait tendre  $t_0$  et  $t_1$  vers 1 on peut obtenir n'importe quelle limite, positive ou négative, donc n'importe quelle valeur de  $\frac{a}{b}$ . Les séries de 36' convergent uniformément pour  $t_0$  et  $t_1$  différents de 1 donc représentent des fonctions continues de  $t_0$  et  $t_1$ . On voit donc, en faisant tendre  $t_0$  vers 1 par valeurs inférieures et  $t_1$  vers 1 par valeurs supérieures que toutes les courbes  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  convergent vers le point  $t_0 = t_1 = 1$

Pour mettre en place les courbes  $t_0 = f(t_1, \frac{b}{a})$  et  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$ , il faudrait commencer par préciser leur forme ce qui n'est pas possible étant donné la façon dont on les définit. Néanmoins, on peut les schématiser en faisant la remarque suivante : On vient de démontrer que les fonctions  $t_0 = f(t_1, \frac{b}{a})$  étaient strictement croissantes alors que les fonctions  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  étaient strictement décroissantes. Il est alors évident qu'une courbe d'un réseau ne peut rencontrer une courbe de l'autre réseau en plus d'un point (c.a.d. que pour  $\frac{b}{a}$  et  $\frac{a}{b}$  fixés,  $t_0$  et  $t_1$  sont parfaitement définis). Ceci permet de schématiser ces courbes comme nous l'avons fait sur la figure 8.

is also negative.

The curves  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  are therefore, for a fixed  $\frac{a}{b}$ , decreasing functions of  $t_1$ .

To place curves  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$ , let us calculate  $d \frac{a}{b} / dt_0$ . According to 41, we have :

$$d \frac{a}{b} = dt_0 \frac{v_1}{\pi} \int_1^{\infty} e^{-\frac{t}{t_0} \text{Arccosh} t} \frac{dt}{(t-t_0)^2}$$

Hence  $\frac{d \frac{a}{b}}{dt_0}$  is positive, that is to say, since each curve  $\frac{a}{b} = \text{constant}$  is a decreasing function of  $t_1$ , and the curves are situated one above the other towards the increasing  $t_1$ ; the highest curves correspond to the greatest values of  $\frac{a}{b}$ .

We can easily discuss the boundary cases :

For  $t_0 = 1$  and  $t_1 > 1$ , we see in equation 36' that the cosine series diverges and tends towards plus infinity, since then  $\theta_0 = 0$ , whereas the two other series remain finite since  $v_1$  is other than unity. We therefore have :  $\frac{a}{b} = +\infty$

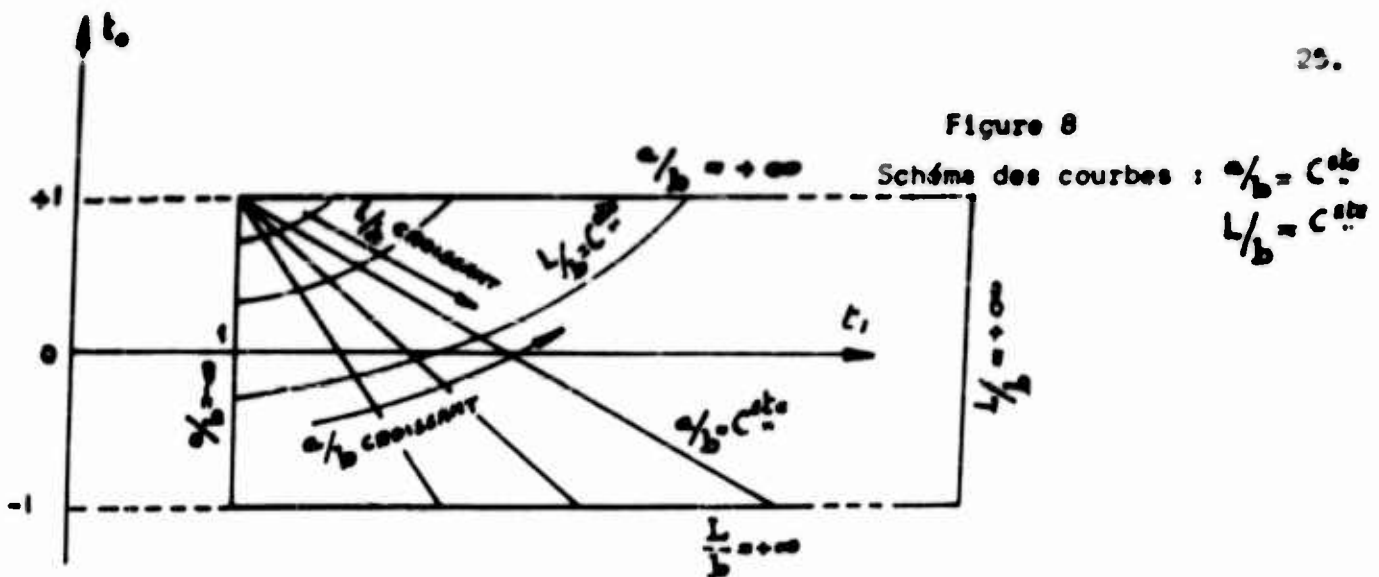
The curve  $t_0 = g(t_1, \infty)$  is therefore the half straight line :  $t_0 = 1, t_1 > 1$

For  $t_1 = 1$  and  $-1 < t_0 < 1$ , on the contrary, the cosine series converges whereas the two other series diverge and tend, in view of their sign, towards minus infinity. We therefore have :  $\frac{a}{b} = -\infty$

The curve  $t_0 = g(t_1, -\infty)$  is therefore the segment :  $-1 < t_0 < 1, t_1 = 1$

When we have simultaneously  $t_0 = 1, t_1 = 1$ , all the series diverge but the cosine series tends towards plus infinity whereas the two others, having negative signs, tend towards minus infinity. Depending on how one makes  $t_0$  and  $t_1$  tend towards 1 one can obtain any limit, positive or negative, hence any value of  $\frac{a}{b}$ . The series in 36' converge uniformly for  $t_0$  and  $t_1$  other than 1, therefore representing continuous functions of  $t_0$  and  $t_1$ . Thus we see that if we cause  $t_0$  to tend towards 1 through lower values and  $t_1$  to tend towards 1 through higher values, all the curves  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  converge towards the point  $t_0 = t_1 = 1$

To trace the curves  $t_0 = f(t_1, \frac{a}{b})$  and  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$ , we should start by determining their exact shape, but this is impossible owing to the way in which they have been defined. Nevertheless, they can be shown diagrammatically, taking into account the fact that we proved above that  $t_0 = f(t_1, \frac{a}{b})$  are strictly increasing functions whereas  $t_0 = g(t_1, \frac{a}{b})$  are strictly decreasing functions. This means that a curve of one group cannot meet a curve from the other group at more than one point (that is, for fixed  $\frac{a}{b}$  and  $\frac{b}{a}$ ,  $t_0$  and  $t_1$  are perfectly defined). This allows us to show the curves diagrammatically as we have done in figure 8.



#### INTERPRETATION CINEMATIQUE DE LA DISCUSSION :

Il est évidemment possible de graduer les axes  $t_1$  et  $t_0$  en fonction de  $v_1$  et  $\theta_0$ . Le schéma reste le même. Il montre que :

- pour  $\frac{a}{b}$  très grand et  $\frac{L}{b}$  moyen, le jet reste pratiquement dans l'axe du canal; quand  $\frac{a}{b}$  diminue le jet est de plus en plus dévié mais la vitesse  $v_1$  diminue si  $\frac{L}{b}$  demeure constant.

Quand  $\frac{a}{b}$  est négatif et très grand,  $v_1$  tend vers 1; la déviation n'atteint son maximum que si l'on a simultanément  $\frac{L}{b} = +\infty$

- pour  $\frac{L}{b}$  faible et  $\frac{a}{b}$  moyen,  $v_1$  est assez faible et la déviation reste moyenne.

Quand  $\frac{L}{b}$  augmente, la déviation augmente ainsi que  $v_1$ .

Pour  $\frac{L}{b}$  infiniment grand, la déviation est maximum sauf pour  $\frac{a}{b} = \infty$

Des calculs numériques ont montré que l'influence de  $\frac{a}{b}$  sur  $v_1$  était prépondérante alors que l'influence de  $\frac{L}{b}$  était rapidement négligeable.

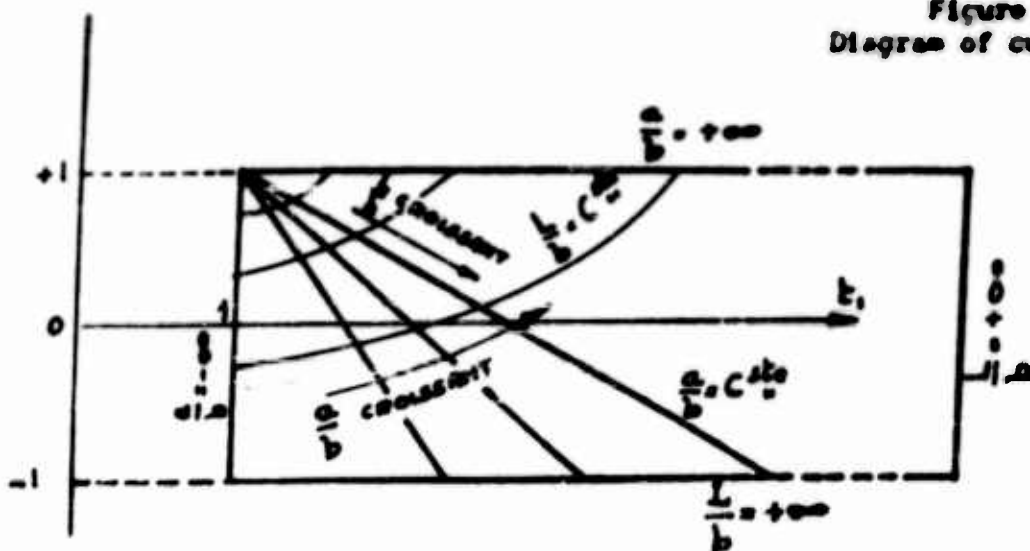
Pour des valeurs de  $\frac{a}{b}$  comprises entre - 0,5 et + 0,5, on a trouvé que la vitesse  $v_1$  et la déviation étaient pratiquement maximum dès que l'on a :  $\frac{L}{b} \geq 8$

#### XII. EQUIPOTENTIELLES ET LIGNES DE COURANT - ISOVITESSES ET ISOCLINES.

Pour déterminer ces différentes lignes, il faut partir des plans des  $w$  (Fig. 2) et des  $\mathcal{Y}$  (Fig. 3), passer par le plan des  $t$  (Fig. 5), puis dans le plan des  $z$  (Fig. 1). Le calcul analytique est toujours possible mais quelques remarques géométriques permettent de mieux les suivre.

Considérons d'abord le cas des lignes de courant et des équipotentiellés. Dans le plan des  $w$  ces lignes sont respectivement définies par  $\Psi = C^{ste}$  et  $\Phi = C^{ste}$ , donc forment un réseau de droites parallèles aux axes et par conséquent orthogonales.

Figure 8  
Diagram of curves :  $\frac{a}{b} = \text{constant}$   
 $\frac{l}{b} = \text{constant}$



KINEMATIC INTERPRETATION OF THE ARGUMENT :

It is of course possible to graduate the axes  $t_1$  and  $t_2$  in terms of  $v_1$  and  $\theta_0$ .

The diagram does not change. It shows that :

- for a very large  $\frac{a}{b}$  and a medium  $\frac{l}{b}$ , the jet remains practically in the axis of the channel; when  $\frac{a}{b}$  decreases the jet is deviated more and more but the velocity  $v_1$  diminishes if  $\frac{l}{b}$  remains constant.

When  $\frac{a}{b}$  is negative and very large,  $v_1$  tends towards 1; the deviation only attains its maximum if we have at the same time  $\frac{l}{b} = +\infty$

- for a small  $\frac{l}{b}$  and a medium  $\frac{a}{b}$ ,  $v_1$  is quite low and there is only medium deviation.

When  $\frac{l}{b}$  increases, the deviation increases, as well as  $v_1$ . For an infinitely great  $\frac{l}{b}$ , there is maximum deviation except for  $\frac{a}{b} = \infty$

Numerical calculus has shown that the influence of  $\frac{a}{b}$  on  $v_1$  is preponderant whereas the influence of  $\frac{l}{b}$  rapidly becomes negligible. For values of  $\frac{a}{b}$  lying between -0.5 and +0.5 it has been found that the velocity  $v_1$  and the deviation are practically at their maximum as soon as one has :  $\frac{l}{b} \gg 8$ .

XII. EQUIPOTENTIAL AND STREAM LINES - EQUIVELOCITY AND ISOCLINIC LINES.

To determine these different lines we must start from the  $w$  and  $\psi$  planes (Fig. 2 and 3), pass through the  $t$  plane (Fig. 5) and into the  $Z$  plane (Fig. 1). Analytical calculus is always possible but a few geometrical remarks will make it easier to follow.

Let us begin by considering the case of stream lines and equipotential lines. In the  $w$  plane these lines are defined respectively by  $\psi = \text{constant}$  and  $\phi = \text{constant}$ , thus forming a set of straight lines parallel to the axes and consequently orthogonal.

Le passage du plan des  $t$  se fait par la formule 9 :

$$w = \phi + i\psi = -\frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t-t_0}{t-t_1} + \frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t-1}{1-t_0} + i\frac{d}{2} \quad (9)$$

Les lignes de courant seront donc définies par  $\psi = C^{1^{\text{te}}}$ , soit :

$$\text{Argument} \left\{ \frac{t-t_1}{t-t_0} \right\} = C^{1^{\text{te}}}$$

et les équipotentiels par  $\phi = C^{2^{\text{de}}}$ , soit :

$$\operatorname{Ln} \left| \frac{t-t_1}{t-t_0} \right| = C^{2^{\text{de}}}$$

On reconnaît là la définition des cercles de Steiner<sup>(7)</sup> admettant pour points de base  $t_0$  et  $t_1$ . Donc, dans le plan des  $t$ , les lignes de courant forment une famille de cercles passant par les points  $t_0$  et  $t_1$  et centrés sur l'axe  $t_x = \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$  tandis que les équipotentiels forment une famille de cercles orthogonaux aux précédents centrés sur l'axe  $t_y = 0$ . Dans les deux cas, seule la partie des cercles située dans le demi-plan  $t_y \geq 0$  est à conserver. Pour avoir l'expression analytique de ces cercles, il suffit d'inverser la formule 9. On a successivement :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} \frac{\frac{t-t_1}{t-t_0}}{\frac{t-1}{1-t_0}} &= \frac{\pi}{d} \left[ i\frac{d}{2} - \phi - i\psi \right] \\ \frac{t-t_1}{t-t_0} &= \frac{t-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} \left[ i\frac{d}{2} - \phi - i\psi \right]} \\ t &= \frac{t_1 - t_0 \frac{t-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} \left[ i\frac{d}{2} - \phi - i\psi \right]}}{1 - \frac{t-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} \left[ i\frac{d}{2} - \phi - i\psi \right]}} \quad (48) \end{aligned}$$

On obtient alors des lignes de courant en laissant  $\psi$  constant et en faisant varier  $\phi$  de  $-\infty$  à  $+\infty$  et les équipotentiels en gardant  $\phi$  constant et en faisant varier  $\psi$  de  $-\frac{d}{2}$  à  $+\frac{d}{2}$ .  
Considérons maintenant les isovitesses et les isoclines. Dans le plan des  $S$  les isovitesses (lignes le long desquelles la vitesse garde un module constant) sont définies par  $v = C^{1^{\text{te}}}$  ; ce sont donc des cercles concentriques tandis que les isoclines (lignes le long desquelles la vitesse garde une direction constante) sont définies par  $\theta = C^{2^{\text{de}}}$  ; ce sont des droites issues de l'origine. Quand on passe du plan des  $S$  au plan des  $S'$  par la transformation :

$$S' = S^{\pi/d}$$

We pass through the  $t$  plane by means of Formula 9 :

$$W = \Phi + i\Psi = -\frac{d}{\pi} L_n \frac{t-t_1}{t-t_0} + \frac{d}{\pi} L_n \frac{t_1-1}{1-t_0} + i\frac{d}{2} \quad (9)$$

The stream lines will thus be defined by  $\Psi = \text{constant}$ , i.e.

$$\text{Argument} \left\{ \frac{t-t_1}{t-t_0} \right\} = c \text{ ste}$$

and the equipotential lines by  $\Phi = \text{constant}$ , i.e.

$$L_n \left| \frac{t-t_1}{t-t_0} \right| = c \text{ ste}$$

Here we recognize the definition of Steiner  $\odot$  circles, assuming  $t_0$  and  $t_1$  as the limit points. Therefore, in the  $t$  plane the stream lines form a family of circles passing through the points  $t_0$  and  $t_1$  and centred on the axis  $t_x = \frac{1}{2}(t_0+t_1)$  whereas the equipotential lines form a family of circles orthogonal to the former and centred on the axis  $t_y = 0$ . In both cases we retain only that part of the circles which lies in the half plane  $t_y \geq 0$ .

To obtain the analytical expression of these circles, we need only reverse Formula 9.

We have, successively :

$$\begin{aligned} L_n \frac{t-t_1}{t-t_0} &= \frac{\pi}{d} \left[ i\frac{d}{2} - \Phi - i\Psi \right] \\ \frac{t-t_1}{t-t_0} &= \frac{t_1-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} [i\frac{d}{2} - \Phi - i\Psi]} \\ t_1 - t_0 \frac{t_1-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} [i\frac{d}{2} - \Phi - i\Psi]} \\ t &= \frac{\quad}{1 - \frac{t_1-1}{1-t_0} e^{\frac{\pi}{d} [i\frac{d}{2} - \Phi - i\Psi]}} \quad (40) \end{aligned}$$

Then we obtain stream lines by letting  $\Psi$  remain constant and making  $\Phi$  vary from  $-\infty$  to  $\infty$  and equipotential lines by keeping  $\Phi$  constant and making  $\Psi$  vary from  $-\frac{d}{2}t_0 + \frac{d}{2}$

Let us now consider the equivelocity lines and isoclines. In the  $\zeta$  plane the equivelocity lines (lines along which the velocity maintains a constant module) are defined by  $v = \text{constant}$ ; they are thus concentric circles, whereas the isoclines (lines along which the velocity maintains a constant direction) are defined by  $\theta = \text{constant}$ ; these are straight lines issuing from the origin. When we pass from the  $\zeta$  plane to the  $\zeta'$  plane by the transformation :

$$\zeta' = \zeta \frac{\pi}{d}$$

La forme des courbes est évidemment conservée et on a encore dans le plan des  $\mathcal{Z}$  un réseau orthogonal de droites et de cercles pour les isoclines et les isovitesse-ses. Pour passer du plan des  $\mathcal{S}$  au plan des  $t$ , on a la transformation de Joukovsky :

$$t = \frac{1}{2} [ \mathcal{S}' + \mathcal{S}'^{-1} ] \quad (6)$$

On sait <sup>③</sup> que cette transformation transforme des cercles concentriques et des droites rayonnant de l'origine en un réseau orthogonal d'ellipses et d'hyperboles admettant même centre (à l'origine) et mêmes axes. Donc, dans le plan des  $t$ , les isovitesse-ses et les isoclines forment un réseau orthogonal d'ellipses et d'hyperboles centrées à l'origine et de foyers situés sur l'axe  $t_x \cdot 0$ . Naturellement, seule la partie de ces courbes situées dans le demi-plan  $t_y \geq 0$  est à conserver.

Pour avoir l'expression analytique de ces coniques, il suffit de partir de la formule 6 en remplaçant  $\mathcal{S}'$  par sa forme polaire :

$$\mathcal{S}' = \nu e^{i\lambda}$$

d'où :

$$t = t_x + i t_y = \frac{\nu^2 + 1}{2\nu} \cos \lambda + i \frac{\nu^2 - 1}{2\nu} \sin \lambda$$

Séparons les parties réelles et imaginaires :

$$t_x = \frac{\nu^2 + 1}{2\nu} \cos \lambda \quad t_y = \frac{\nu^2 - 1}{2\nu} \sin \lambda$$

On obtient les isovitesse-ses en éliminant  $\lambda$  :

$$\left( \frac{t_x}{\frac{\nu^2 + 1}{2\nu}} \right)^2 + \left( \frac{t_y}{\frac{\nu^2 - 1}{2\nu}} \right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{t_x^2}{\frac{1}{4} [\nu^2 + 1]^2} + \frac{t_y^2}{\frac{1}{4} [\nu^2 - 1]^2} = 1 \quad (49)$$

et les isoclines en éliminant  $\nu$  :

$$\left( \frac{t_x}{\cos \lambda} \right)^2 - \left( \frac{t_y}{\sin \lambda} \right)^2 = 1 \quad \text{soit} \quad \frac{t_x^2}{\cos^2 \lambda} - \frac{t_y^2}{\sin^2 \lambda} = 1 \quad (50)$$

Pour obtenir ces différentes courbes dans le plan des  $z$  il suffit de reporter les valeurs de  $t$  données par 48, 49 ou 50 dans la formule générale 14. En fait, il sera plus commode de passer par la formule 21 donnant  $z$  en fonction de  $\mathcal{S}'$ . Il va donc être nécessaire d'exprimer  $\mathcal{S}'$  en fonction de  $t$ . Pour avoir une expression se prêtant mieux aux calculs que la formule 12, nous inverserons la formule 6 :

$$t = \frac{1}{2} [ \mathcal{S}' + \mathcal{S}'^{-1} ]$$

the shape of the curves of course remains the same and we also have in the  $\zeta'$  plane an orthogonal network of straight lines and circles for the isoclinic and equivelocity lines. To pass from the  $\zeta'$  plane to the  $t$  plane, we have Joukowski's transformation :

$$t = \frac{1}{2} [\zeta' + \zeta'^{-1}] \quad (6)$$

We know  $\odot$  that this transformation transforms concentric circles and straight lines radiating from the origin into an orthogonal network of ellipses and hyperbolas having the same centre (at the origin) and the same axes. Thus in the  $t$  plane the equivelocity lines and isoclines form an orthogonal network of ellipses and hyperbolas centred at the origin and of foci lying on the axis  $t_y = 0$ . Naturally, we only retain that part of the curves which lies in the half plane  $t_y \geq 0$ .

To obtain the analytical expression of these conics, we need only take Formula 6, replacing  $\zeta'$  by its polar form :

$$\zeta' = \mu e^{i\lambda}$$

from which :

$$t = t_x + it_y = \frac{\mu^2 + 1}{2\mu} \cos \lambda + i \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \sin \lambda$$

Separating the real and imaginary parts :

$$t_x = \frac{\mu^2 + 1}{2\mu} \cos \lambda \quad t_y = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \sin \lambda$$

The equivelocity lines are obtained by eliminating  $\lambda$  :

$$\left( \frac{t_x}{\frac{\mu^2 + 1}{2\mu}} \right)^2 + \left( \frac{t_y}{\frac{\mu^2 - 1}{2\mu}} \right)^2 = 1 \quad \text{i.e.,} \quad \frac{t_x^2}{\frac{1}{4} \left[ v^{\frac{\pi}{2}} + v^{-\frac{\pi}{2}} \right]^2} + \frac{t_y^2}{\frac{1}{4} \left[ -v^{\frac{\pi}{2}} + v^{-\frac{\pi}{2}} \right]^2} = 1 \quad (49)$$

and the isoclines by eliminating  $\mu$  :

$$\left( \frac{t_x}{\cos \lambda} \right)^2 - \left( \frac{t_y}{\sin \lambda} \right)^2 = 1 \quad \text{i.e.,} \quad \frac{t_x^2}{\cos^2 \frac{\pi}{2} \theta} - \frac{t_y^2}{\sin^2 \frac{\pi}{2} \theta} = 1 \quad (50)$$

To obtain these different curves in the  $Z$  plane we need only insert the values of  $t$  given by 48, 49 or 50 into the general formula 14. Actually, it is more convenient to proceed via Formula 21 giving  $Z$  in the terms of  $\zeta'$ . It will therefore be necessary to express  $\zeta'$  in terms of  $t$ . In order to have an expression which lends itself more easily to our calculations than Formula 12, we shall reverse Formula 6 :

$$t = \frac{1}{2} [\zeta' + \zeta'^{-1}]$$

**UNCLASSIFIED**

**A  
D 204073**

**Armed Services Technical Information Agency**

**ARLINGTON HALL STATION  
ARLINGTON 12 VIRGINIA**

**FOR  
MICRO-CARD  
CONTROL ONLY**

**3 OF 5**

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**UNCLASSIFIED**

d'où :

$$y' = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

et :

$$y' = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

On lève l'indétermination relative au double signe en se rappelant que  $y'$  doit avoir une partie imaginaire négative, alors que  $t$  est toujours positif. Donc :

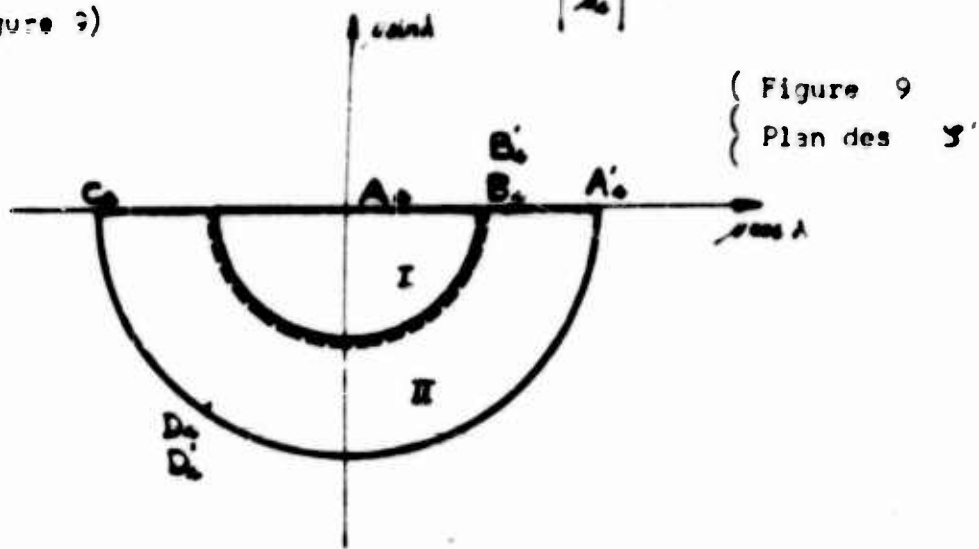
$$y' = t - \sqrt{t^2 - 1} = \left[ t + \sqrt{t^2 - 1} \right]^{-1} \quad (31)$$

Enfin, l'utilisation des développements en série des fonctions hypergéométriques de Gauss (formules 25 et 26) nécessite la discussion de la valeur de  $\left| \frac{y'}{A_0} \right|$ . Mais on sait que  $|y'| < 1$ . Donc d'après les formules 27 et 28, pour  $k = 1, 2, 3$ , on sera toujours dans le cas d'application de la formule 25.

Pour  $k = 4$ , on sait que :

$$A_4 = t - \sqrt{t^2 - 1} \quad (32)$$

D'après 31, on voit que  $A_4$  est l'homologue dans le plan des  $y'$  du point  $t$  dans le plan des  $t$ . C'est donc le point  $B_4, B_4'$  dans le plan des  $y'$  et on peut ramener la discussion de la condition  $\left| \frac{y'}{A_4} \right| < 1$  à une discussion géométrique (Figure 9)



Si  $y'$  est situé dans la région I (demi-cercle avec ses frontières) on est dans le cas d'application de la formule 25.

Si  $y'$  est situé dans la région II (demi-couronne avec une partie de ses frontières) on est dans le cas d'application de la formule 26.

La formule 21 prend finalement une des deux formes suivantes :

- si  $y'$  est dans la région I, on a :

$$z = d y'^k \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d \cdot (n+1)\pi} \left( \frac{y'}{A_4} \right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d \cdot (n+1)\pi} \left( \frac{y'}{B_4} \right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d \cdot (n+1)\pi} \left( \frac{y'}{B_4'} \right)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d \cdot (n+1)\pi} \left( \frac{y'}{A_4} \right)^{n+1} \right] \quad (32)$$

From which :

$$\zeta'^2 - 2t\zeta' + 1 = 0$$

and :

$$\zeta' = t \pm \sqrt{t^2 - 1}$$

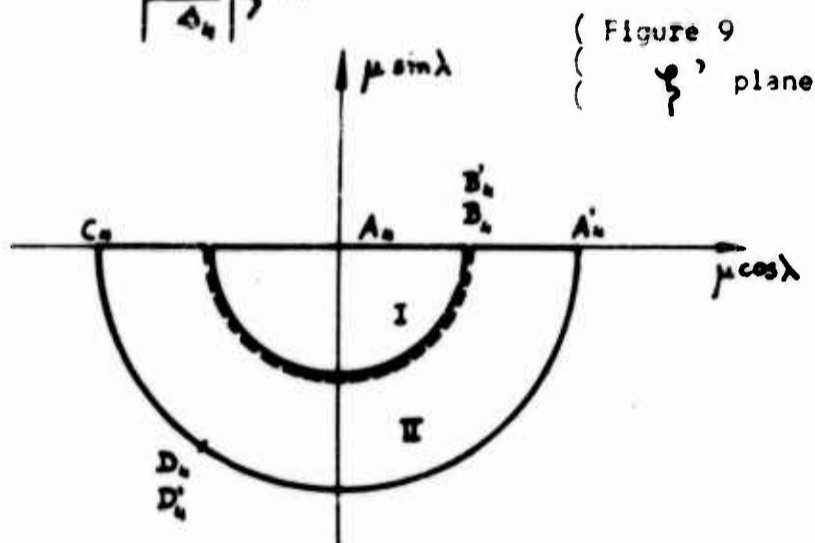
We remove the ambiguity of the double sign by remembering that  $\zeta'$  must have an imaginary part which is negative whereas  $t$  is always positive. Hence :

$$\zeta' = t - \sqrt{t^2 - 1} = \left[ t + \sqrt{t^2 - 1} \right]^{-1} \quad (51)$$

Finally, since we are going to use the developments in series of the hypergeometrical functions of Gauss (Formula 25 and 26) the value of  $\left| \frac{\zeta'}{\Delta_k} \right|$  must be discussed. But we know that  $|\zeta'| < 1$ . Hence, according to Formulae 27 and 28, for  $k = 1, 2, 3$ , we shall be in the sphere of application of Formula 25.

For  $k = 4$ , we know that :  $\Delta_4 = t_1 - \sqrt{t_1^2 - 1}$  (28)

From 51 we see that  $\Delta_4$  is the homologue in the  $\zeta'$  plane of the point  $t_1$  in the  $t$  plane. It is thus the point  $B_4, B_4'$  in the  $\zeta'$  plane and we can reduce our discussion of the condition  $\left| \frac{\zeta'}{\Delta_4} \right| < 1$  to a geometrical discussion (Figure 9).



If  $\zeta'$  is situated in region I (semicircle with its boundaries), Formula 25 can be applied.

If  $\zeta'$  is situated in region II (semi-annulus with part of its boundaries) we have to apply Formula 26.

Formula 21 finally takes one of the two following forms :

- if  $\zeta'$  is in region I, we have :

$$z = d \zeta'^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha + (n+1)\pi} \left( \frac{\zeta'}{\Delta_1} \right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\zeta'}{\Delta_2} \right)^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\zeta'}{\Delta_3} \right)^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\zeta'}{\Delta_4} \right)^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} \right] \quad (52)$$

- si  $y'$  est dans la région II, on a :

$$z = d y'^{\frac{1}{2}} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y'}{d_1}\right)^{n+1}}{\alpha \cdot (n+1) \pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y'}{d_2}\right)^{n+1}}{\alpha \cdot (n+1) \pi} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{y'}{d_3}\right)^{n+1}}{\alpha \cdot (n+1) \pi} - \left\{ \frac{1}{d_{100}} \left(\frac{d_1}{y'}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\alpha} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{d_1}{y'}\right)^n}{n \pi - \alpha} \right\} \right] \quad (53)$$

avec, rappelons le :

$$d_1 | d_2 = k_0 \pm \sqrt{k_0^2 - 1} \quad ; \quad e = \pm \frac{\pi}{\alpha} \quad ; \quad d_3 | d_4 = k_1 \pm \sqrt{k_1^2 - 1} \quad ; \quad \frac{\pi}{\alpha}$$

### XIII. EXPLOITATION DE LA SOLUTION PAR DES SERIES LOGARITHMIQUES FINIES :

Même quand on développe les fonctions hypergéométriques de Gauss en série, les formules qui résolvent le problème, à savoir :

- les formules générales de passage du plan des  $t$  au plan des  $z$  : 52 et 53,
- les formules déterminant les constantes : 34, 35, 36,

ne sont pas utilisables pratiquement pour une étude numérique plus poussée du problème parce que les séries hypergéométriques de Gauss convergent lentement et se prêtent mal à des approximations.

Mais il est évident que l'écoulement varie continuellement quand on fait varier l'angle  $\alpha$  d'une façon continue (sauf peut-être pour  $\alpha$  voisin de 0 car quand on passe de  $\alpha = 0$  à  $\alpha$  différent de 0 la vitesse à l'arête devient infinie). Or, on sait que tout nombre réel peut être approximé, avec une précision aussi grande que l'on veut, par une fraction rationnelle.

On peut donc, dans notre problème, remplacer  $\frac{\alpha}{\pi}$  par une fraction rationnelle  $\frac{p}{q}$  en commettant une erreur aussi faible que l'on veut, donc en changeant l'écoulement aussi peu que l'on veut.

Il apparaît immédiatement sur l'équation 15 que le problème se simplifie donc considérablement, car on a alors à calculer une intégrale de fraction rationnelle. Néanmoins, il sera quand même plus simple, comme nous allons le voir, d'intégrer à l'aide des fonctions hypergéométriques de Gauss, puis de développer celles-ci en séries infinies et enfin de transformer ces dernières en séries finies de logarithmes.

En effet, dans les formules 52 et 53, il apparaît deux types simples de séries de la forme :

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha \cdot (n+1) \pi} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A^n}{n \pi - \alpha}$$

- If  $\zeta'$  is in region II, we have :

$$z = d\zeta'^{\frac{\alpha}{\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta'}{\Delta_1}\right)^{n\alpha}}{\alpha + (n+1)\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta'}{\Delta_2}\right)^{n\alpha}}{\alpha + (n+1)\pi} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta'}{\Delta_3}\right)^{n\alpha}}{\alpha + (n+1)\pi} - \left\{ \frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\Delta_3}{\zeta'}\right)^{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-i\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\Delta_3}{\zeta'}\right)^{n\alpha}}{n\pi - \alpha} \right\} \right] \quad (53)$$

with, let us remember :

$$\Delta_1 | \Delta_2 = t_0 \pm \sqrt{t_0^2 - 1} = e^{\pm i \frac{\pi}{\alpha} \theta_0} \quad ; \quad \Delta_3 | \Delta_4 = t_1 \pm \sqrt{t_1^2 - 1} = \sigma_1 \pm \frac{\pi}{\alpha}$$

### XIII. DEVELOPMENT OF THE SOLUTION BY MEANS OF FINITE LOGARITHMIC SERIES.

Even if we develop Gauss's hypergeometrical functions in series, the formulae which solve the problem, i.e. :

- the general formulae used to pass from the  $t$  plane to the  $Z$  plane : 52 and 53,
- the formulae which determine the constants : 34, 35, 36,

are impracticable for use in a more thorough numerical study of the problem because Gauss's hypergeometrical series converge slowly and do not lend themselves well to approximations.

However, it is evident that the flow varies continuously when the angle  $\alpha$  is made to vary continuously (except perhaps for  $\alpha$  close to 0, for when we pass from  $\alpha = 0$  to  $\alpha$  other than 0 the velocity at the edge becomes infinite). Now we know that every real number can be approximated to a rational fraction with whatever precision we may desire.

We can therefore, in our problem, replace  $\frac{\alpha}{\pi}$  by a rational fraction  $\frac{p}{q}$ , with as small an error as we like, thus changing the flow as little as we like.

From equation 15 it may be seen at once that the problem is then greatly simplified, for we then have to calculate an integral of a rational fraction. Nevertheless, it will still be simpler, as we shall see, to integrate with the aid of Gauss's hypergeometrical functions and then to develop these in infinite series, finally transforming these into finite logarithmic series.

In Formulae 52 and 53 we have two simple types of series of the following type :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha}$$

Considérons d'abord la première série.

Elle s'écrit successivement, en remplaçant  $\frac{a}{q}$  par  $\frac{p}{q}$  :

$$\sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^{n+1}}{a+(n+1)\pi} = -\frac{1}{a} + \sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^n}{a+n\pi} = -\frac{1}{a} + \sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{q}{\pi} \frac{A^n}{nq+p}$$

Pour exprimer  $q$ , on peut utiliser la formule <sup>①</sup> :

$$\sum_{k=0}^{k=q-1} e^{z k (\mu - z) \frac{\pi}{q}} = \begin{cases} q & \text{si } z = p + nq \\ 0 & \text{si } z \neq p + nq \end{cases} \quad (54)$$

Donc, en posant :  $nq + p = z$  c.à.d.  $n = \frac{1}{q}(z - p)$  on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^{n+1}}{a+(n+1)\pi} = -\frac{1}{a} + \sum_{z=p}^{z=\infty} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{z k (\mu - z) \frac{\pi}{q}} \right] \frac{1}{\pi} \frac{A^{\frac{z-p}{q}}}{z} \right\}$$

Si  $\frac{p}{q}$  est une fraction réduite, il n'existe pas de valeur de  $z$  telle que  $z = p + nq$  pour  $0 < z < p$  et on peut donc remplacer la sommation pour  $p \leq z < \infty$  par une sommation pour  $1 \leq z < \infty$  puisque pour  $1 \leq z < p$  la série en  $k$  sera nulle. On aura donc :

$$\sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^{n+1}}{a+(n+1)\pi} = -\frac{1}{a} + \sum_{z=1}^{z=\infty} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{z k (\mu - z) \frac{\pi}{q}} \right] \frac{1}{\pi} \frac{A^{\frac{z-p}{q}}}{z} \right\}$$

Comme  $\frac{A^{\frac{z-p}{q}}}{z}$  ne dépend pas de  $k$ , on peut supprimer la parenthèse intérieure. Puis on intervertit les signes de sommation et on sort du signe  $\sum$  en  $z$  les termes ne dépendant pas de  $z$ . On obtient :

$$\sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^{n+1}}{a+(n+1)\pi} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k=q-1} \left\{ e^{z k \frac{\pi p}{q}} A^{-\frac{p}{q}} \left[ \sum_{z=1}^{z=\infty} e^{-z k \pi \frac{1}{q}} \frac{A^{\frac{z-p}{q}}}{z} \right] \right\}$$

En se rappelant que  $L_n(1-z)$  admet le développement :

$$L_n(1-z) = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{z^n}{n}$$

on obtient finalement :

$$\sum_{n=0}^{n \leq p} \frac{A^{n+1}}{a+(n+1)\pi} = -\frac{1}{a} - \frac{A^{-\frac{p}{q}}}{\pi} \sum_{k=0}^{k=q-1} \left\{ e^{z k \frac{\pi p}{q}} L_n \left[ 1 - e^{-z k \frac{\pi}{q}} A^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \quad (55)$$

Let us start by considering the first series.

It is written, replacing  $\frac{\alpha}{\pi}$  by  $\frac{p}{q}$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} = -\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\alpha + n\pi} = -\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q}{\pi} \frac{A^n}{nq+p}$$

To express  $q$  we can use the formula (4)

$$\sum_{k=0}^{h,q-1} e^{\pm i2k(p-\tau)\frac{\pi}{q}} = \begin{cases} q & \text{if } \tau = p + nq \\ 0 & \text{if } \tau \neq p + nq \end{cases} \quad (54)$$

Thus, taking :  $nq + p = \tau$  i.e.  $n = \frac{1}{q}(\tau - p)$  we can write :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} = -\frac{1}{\alpha} + \sum_{\tau=p}^{\infty} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{h,q-1} e^{i2k(p-\tau)\frac{\pi}{q}} \right] \frac{1}{\pi} \frac{A^{\frac{\tau-p}{q}}}{\tau} \right\}$$

If  $\frac{p}{q}$  is a reduced fraction, there is no value of  $\tau$  such that  $\tau = p + nq$  for  $0 < \tau < p$  and we can therefore replace the summation for  $p \leq \tau < \infty$  by a summation for  $1 \leq \tau < \infty$  since for  $1 \leq \tau < p$  the  $k$  index series will be zero. Thus we shall have :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} = -\frac{1}{\alpha} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \left\{ \left[ \sum_{k=0}^{h,q-1} e^{2ik(p-\tau)\frac{\pi}{q}} \right] \frac{1}{\pi} \frac{A^{\frac{\tau-p}{q}}}{\tau} \right\}$$

Since  $\frac{A^{\frac{\tau-p}{q}}}{\tau}$  does not depend on  $k$ , we can do away with the inner bracket. Then we reverse the summation signs and take out of the  $\sum$  sign in  $\tau$  the terms which do not depend on  $\tau$ . We obtain :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{h,q-1} \left\{ e^{2ik\frac{\pi p}{q}} A^{-\frac{p}{q}} \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} e^{-2ik\pi\frac{\tau}{q}} \frac{A^{\frac{\tau}{q}}}{\tau} \right] \right\}$$

Remembering that  $L_n(1-z)$  can be developed as follows :

$$L_n(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

we finally obtain :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{\alpha + (n+1)\pi} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{A^{-\frac{p}{q}}}{\pi} \sum_{k=0}^{h,q-1} \left\{ e^{2ik\pi\frac{p}{q}} L_n \left[ 1 - e^{-2ik\pi\frac{1}{q}} A^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \quad (55)$$

Considérons maintenant le 2<sup>ème</sup> type de série. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{A^n}{n - \frac{\alpha}{\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q}{\pi} \frac{A^n}{nq - p}$$

Pour exprimer  $q$  nous utiliserons la formule <sup>①</sup> :

$$\sum_{k=0}^{q-1} e^{i2k(\mu-b)\frac{\pi}{q}} = \begin{cases} q & \text{si } z = qn - p \\ 0 & \text{si } z \neq qn - p \end{cases} \quad (56)$$

Donc, en posant  $nq - p = z$  c.a.d.  $n = \frac{z+p}{q}$ , on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = \sum_{z=-p}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{q-1} e^{i2k(\mu-b)\frac{\pi}{q}} \right] \frac{A^{\frac{z+p}{q}}}{z} \right\}$$

Pour  $z = -p$ , la série en  $k$  a pour somme  $q$  et le terme correspondant de la série en  $z$  est égal à  $-\frac{1}{\alpha}$ . D'autre part pour  $-p < z < 1$ , il n'existe pas de valeur de  $z$  telle que  $z = qn - p$  et donc la série en  $k$  est toujours nulle. On peut donc, en mettant à part le terme correspondant à  $z = -p$  sommer non plus pour  $-p \leq z \leq \infty$  mais pour  $1 \leq z \leq \infty$ . On a donc comme précédemment :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ e^{i2k\pi\frac{p}{q}} A^{\frac{p}{q}} \left[ \sum_{z=1}^{\infty} \frac{e^{i2k\pi\frac{z}{q}} A^{\frac{z}{q}}}{z} \right] \right\}$$

soit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{A^{\frac{p}{q}}}{\pi} \sum_{k=0}^{q-1} \left\{ e^{i2k\pi\frac{p}{q}} L_n \left[ 1 - e^{i2k\pi\frac{z}{q}} A^{\frac{z}{q}} \right] \right\} \quad (57)$$

{ **REMARQUE** : Dans les formules 54 et 56, on a un double signe (l'un éliminant l'autre) mais quelque soit le signe adopté, on retrouve le même résultat. Ce double signe peut (et doit) être affecté à  $k$  et alors on peut dans les formules 55 et 57 changer  $k$  en  $-k$  sans aucun inconvénient. }

On peut alors utiliser les formules 55 et 57 pour transformer les formules 52 et 53. En remplaçant  $s, A_1, A_2, A_3$  par leur valeur, on obtient après des simplifications évidentes et en remplaçant  $d$  par  $b\pi$  :

Let us now consider the second type of series. We have :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{A^n}{n - \frac{\alpha}{\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q}{\pi} \frac{A^n}{nq - p}$$

To express  $\frac{q}{\pi}$  we shall use the formula (4) :

$$\sum_{k=0}^{h=q-1} e^{\pm i2k(p-\alpha)\frac{\pi}{q}} = \begin{cases} q & \text{if } \alpha = qn - p \\ 0 & \text{if } \alpha \neq qn - p \end{cases} \quad (56)$$

Thus, taking  $nq - p = \tau$  i.e.  $n = \frac{1}{q}(\tau + p)$ , we obtain :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = \sum_{\tau=-p}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\pi} \left[ \sum_{k=0}^{h=q-1} e^{i2k(p+\alpha)\frac{\pi}{q}} \right] \frac{A^{\frac{\tau+p}{q}}}{\tau} \right\}$$

For  $\tau = -p$ , the sum of the  $k$  index series is  $q$  and the corresponding term of the  $\tau$  index series is  $-\frac{1}{\alpha}$ . On the other hand for  $-p < \tau < \infty$ , there is no value of  $\tau$  such that  $\tau = qn - p$  and therefore the  $k$  index series is always zero. We can therefore, setting apart the term corresponding to  $\tau = -p$ , calculate the sum, not for  $-p < \tau < \infty$  but for  $1 < \tau < \infty$ . Thus we have, as before :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{h=q-1} \left\{ e^{2ik\pi\frac{p}{q}} A^{\frac{p}{q}} \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{e^{2ik\pi\frac{\tau}{q}} A^{\frac{\tau}{q}}}{\tau} \right] \right\}$$

i.e.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n\pi - \alpha} = -\frac{1}{\alpha} - \frac{A^{\frac{p}{q}}}{\pi} \sum_{k=0}^{h=q-1} \left\{ e^{2ik\alpha} \operatorname{Ln} \left[ 1 - e^{2ik\frac{\pi}{q}} A^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \quad (57)$$

**NOTE :** In formulae 54 and 56 there is a double sign (one excluding the other) but whichever sign is taken, the result is the same. This double sign can (and must) be assigned to  $k$  and we can therefore, in formulae 55 and 57, perfectly well change  $k$  to  $-k$ .

We can then make use of Formulae 55 and 57 to transform Formulae 52 and 53.

Replacing  $A_1, A_2, A_3, A_n$  by their value, we obtain, after obvious simplifications and replacing  $d$  by  $bv_1$  :

- Si  $z'$  est dans la région I (Figure 9)

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{b} = & -\frac{\theta_0}{\pi} e^{-i\theta_0} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & - \frac{v_1}{\pi} e^{i\theta_0} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & + \frac{v_1}{\pi} z^{\beta} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} z'^{\frac{1}{q}} \right]
 \end{aligned} \tag{58}$$

- Si  $z'$  est dans la région II (Figure 9)

$$\begin{aligned}
 \frac{N}{b} = & -\frac{v_1}{\pi} e^{-i\theta_0} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & - \frac{v_1}{\pi} e^{i\theta_0} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & + \frac{v_1}{\pi} z^{\beta} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} z'^{\frac{1}{q}} \right] \\
 & - \frac{e^{i\alpha x}}{\sin \alpha x}
 \end{aligned} \tag{59}$$

Les formules 58 et 59 sont les nouvelles formules de base du problème. Comme précédemment, les constantes  $\theta_0$  et  $v_1$  sont déterminées en fonction des

- If  $\zeta_0'$  is in region I (Figure 9)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \quad (58)
 \end{aligned}$$

- If  $\zeta_0'$  is in region II (Figure 9)

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &+ \frac{1}{\sin \alpha} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\alpha n} e^{2i\alpha n} L_n \left[ 1 - e^{-2i\alpha \frac{\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{a} \frac{\zeta_0'}{a}} \right] \\
 &- \frac{e^{-i\alpha}}{\sin \alpha} \quad (59)
 \end{aligned}$$

Formulae 58 and 59 are the new fundamental formulae of the problem. As before, the constants  $\zeta_0$  and  $\zeta_1$  are determined in terms of the data and by means of

données en se plaçant en des points particuliers :

$$z = L e^{-ca} \quad \text{où l'on a } \mathcal{Y} = e^{-c\pi}$$

$$z = a + ib \quad \text{où l'on a } \mathcal{Y} = 1$$

Dans les deux cas, il faut appliquer la formule 59. On obtient, pour  $z = L e^{-ca}$

$$\begin{aligned} \frac{L}{b} e^{-ca} &= -\frac{v_1}{\pi} e^{-c\theta_0} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-c(2k+1)\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} \right] \\ &\quad - \frac{v_1}{\pi} e^{i\theta_0} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-c(2k+1)\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} \right] \\ &\quad + \frac{v_1}{\pi} e^{\alpha} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-c(2k+1)\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{c(2k+1)\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} \right] - \frac{e^{-ca}}{\sin \alpha} \quad (60) \end{aligned}$$

Pour  $z = a + ib$ , la partie réelle donne :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{b} &= -\frac{v_1}{\pi} e^{-i\theta_0} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} \right] \\ &\quad - \frac{v_1}{\pi} e^{i\theta_0} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{q}\frac{\theta_0}{\alpha}} \right] \\ &\quad + \frac{v_1}{\pi} e^{\alpha} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k=q-1} e^{2ck\alpha} L_n \left[ 1 - e^{2ck\frac{\pi}{q}} v_1^{-\frac{\pi}{\alpha}\frac{1}{q}} \right] \\ &= \cotg \alpha \quad (61) \end{aligned}$$

placing oneself at particular points :

$$z = L e^{-i\alpha} \quad \text{where we have} \quad \zeta' = e^{-i\alpha}$$

$$z = a + ib \quad \text{where we have} \quad \zeta' = 1$$

In both cases we must apply Formula 59. We obtain, for  $z = L e^{-i\alpha}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} e^{-i\alpha} &= -\frac{1}{\pi i} e^{-i\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{q}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i} e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{q}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i^2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-i(2k+1)\frac{\pi}{q}} \zeta_1^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{i(2k+1)\frac{\pi}{q}} \zeta_1^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{q}} \right] - \frac{e^{-i\alpha}}{\sin \alpha} \quad (60) \end{aligned}$$

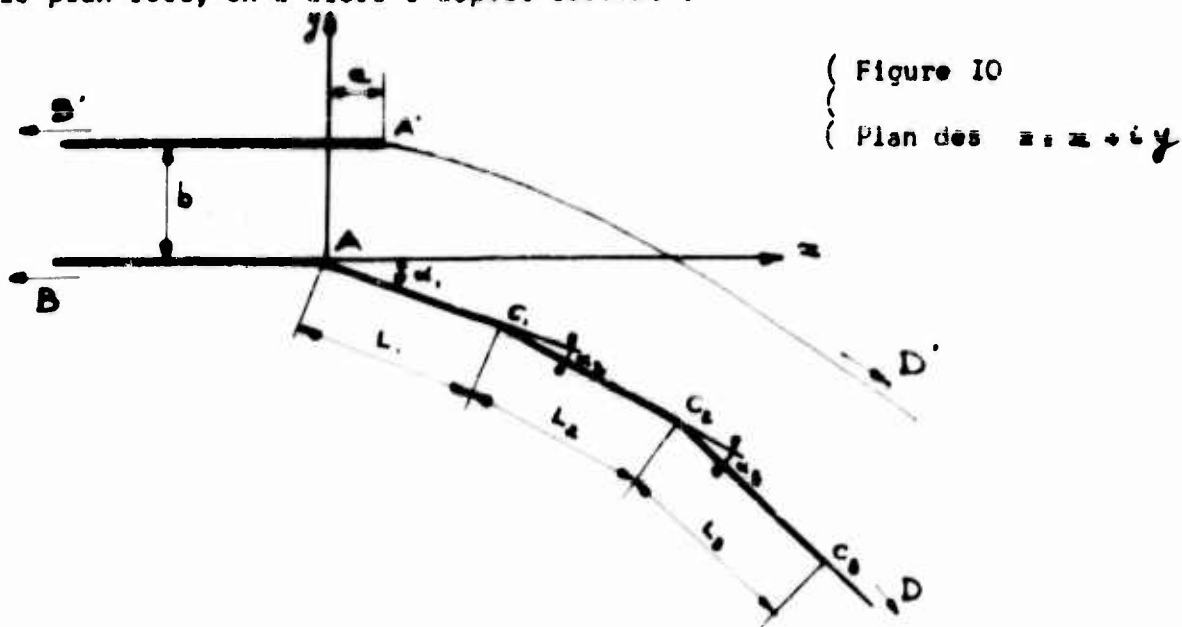
For  $z = a + ib$ , the real part gives us :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{1}{\pi i} e^{-i\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ik\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{2}\frac{q}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i} e^{i\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ik\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{2}\frac{q}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i^2} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{-2ik\frac{\pi}{q}} \zeta_1^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{q}} \right] \\ &+ \frac{1}{\pi i} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha} L_n \left[ 1 - e^{2ik\frac{\pi}{q}} \zeta_1^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{q}} \right] \\ &= \cot \alpha \quad (61) \end{aligned}$$

#### XIV. GENERALISATION DU PROBLEME :

On peut tenter de généraliser le problème en reprenant les mêmes hypothèses que précédemment, la seule différence consistant à considérer un canal terminé non plus par un seul volet déflecteur de longueur  $L$  faisant un angle  $-\alpha$  avec l'axe du canal mais par une succession de  $n+1$  volets de longueurs respectives  $L_1, L_2, \dots, L_{n+1}$ , le volet de longueur  $L_i$  faisant un angle  $-\alpha_i$  avec le volet de longueur  $L_{i-1}$ . Tout en continuant l'exposé dans le cas général, nous considérerons, pour les figures, le cas particulier  $n=2$ .

Dans le plan réel, on a alors l'aspect suivant :



La répartition des vitesses le long des frontières de l'écoulement diffère du cas précédent surtout le long des volets. En effet, à chaque arête d'articulation, en  $A, C_1, \dots, C_n$ , on aura une vitesse infinie. Entre deux arêtes successives, en des points  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ , a priori indéterminés, la vitesse passera par des maxima, eux aussi indéterminés a priori.

Dans le plan hodographique  $\mathcal{S} = \frac{1}{v} e^{i\theta}$ , on retrouve le même arc de cercle que précédemment, mais entaillé cette fois par  $n$  lacets rectilignes, issus de l'origine et de directions données par celles des  $n$  premières facettes. Les extrémités de ces facettes correspondent évidemment aux points  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ . Pour passer du plan des  $\mathcal{S}$  au plan des  $\mathcal{L}$ , nous ramènerons le contour formé d'arc de cercle et de droite à un contour polygonal par la transformation :

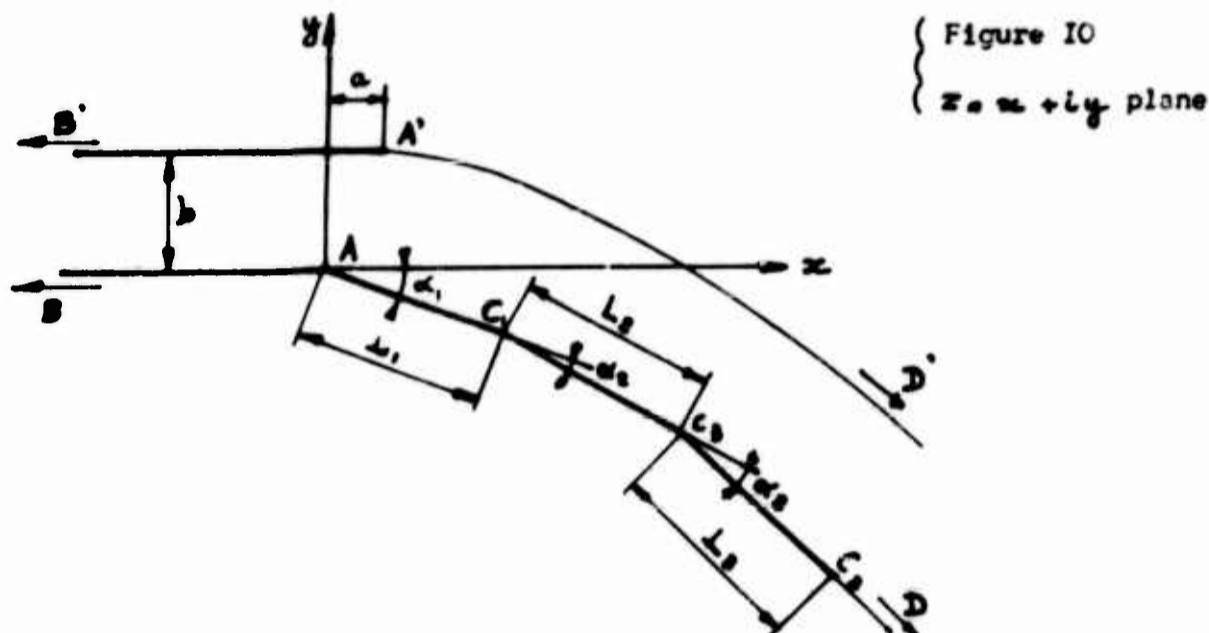
$$\mathcal{S}' = L_n \mathcal{S} = L_n \frac{1}{v} e^{i\theta}$$

On voit alors immédiatement que l'on obtient dans le plan des  $\mathcal{S}'$  le polygone de la figure 12.

#### XIV. GENERALISATION OF THE PROBLEM.

We can try to generalise the problem, reverting to the same hypotheses as before, with the only difference that we shall consider a channel ending no longer in a single deflecting flap of length  $L$  making an angle  $-\alpha$  with the axis of the channel, but in a succession of  $n$  flaps of length respectively  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ; the flap of length  $L_i$  making an angle of  $-\alpha_i$  with the flap of length  $L_{i-1}$ . While continuing our survey in the general case we shall, in the figures, consider the particular case  $n=2$ .

The real plane then appears as follows :

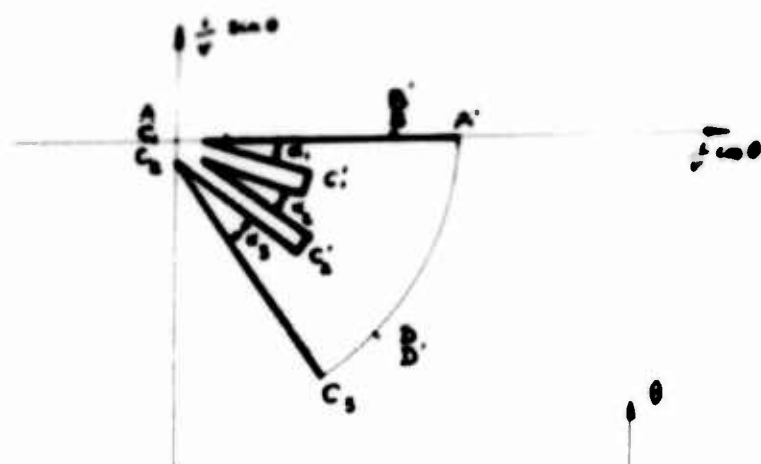


The distribution of velocities along the boundaries of the flow differs from the previous case especially along the flaps. At the edge formed by each articulation, at  $A, C_1, \dots, C_n$ , we shall have infinite velocity. Between two successive edges, at the points  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ , which are a priori indeterminate, the velocity will pass through a minimum, also a priori indeterminate.

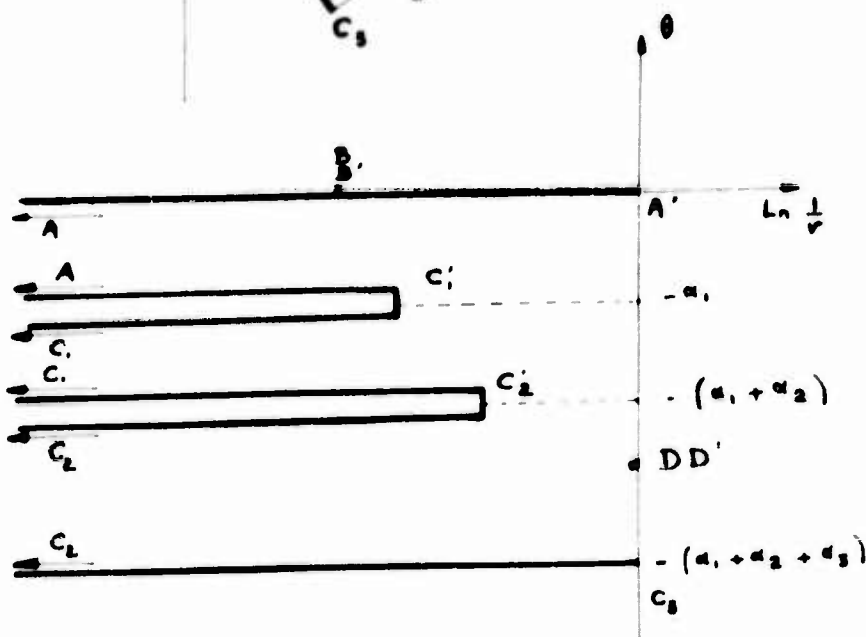
In the hodographic plane  $\zeta = \frac{1}{v} e^{i\theta}$ , we find again the same arc of a circle as before, but now cut into by  $n$  rectilinear paths, issuing from the origin, their directions being determined by those of the first  $n$  facets. The extremities of these paths naturally correspond to the points  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ . To pass from the  $\zeta$  plane to the  $\zeta'$  plane, we reduce the contour formed by the arc and the straight line to a polygonal contour by the transformation :

$$\zeta' = L_n \zeta = L_n \frac{1}{v} + i\theta$$

It is then immediately evident that in the  $\zeta'$  plane we obtain the polygon of Figure 12.



{ Figure 11  
{ Plan des  $\mathcal{S} = \frac{1}{\nu} e^{i\theta}$



{ Figure 12  
{ Plan des  $\mathcal{S}' = L_n \mathcal{S}$

Ce polygone a les angles aux sommets suivants :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} & \text{ en } A' \text{ et } C_{n+1} \\ 0 & \text{ en } A, C_1, C_2, \dots, C_n \\ 2\pi & \text{ en } C'_1, C'_2, \dots, C'_n \end{aligned}$$

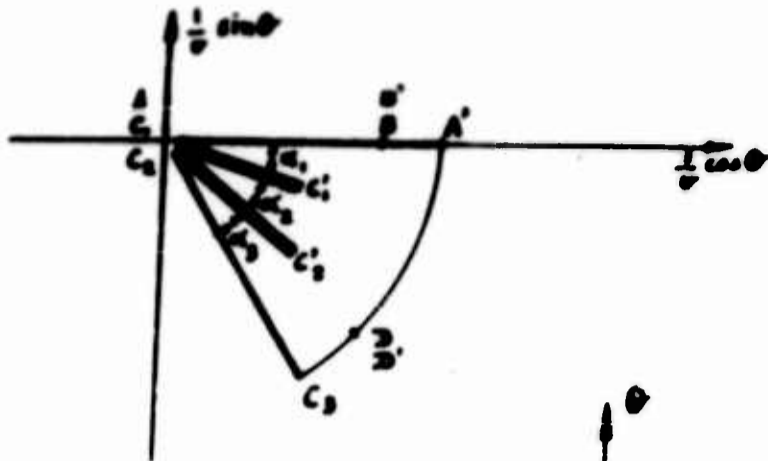
On peut lui appliquer la transformation de Schwartz de façon à l'appliquer sur le demi plan  $ty \geq 0$  en imposant les conditions :

$$\begin{aligned} t = -1 & \text{ comme homologue du point } C_{n+1} \\ t = +1 & \text{ comme homologue du point } A' \\ t = \pm \infty & \text{ comme homologue du point } C_n \end{aligned}$$

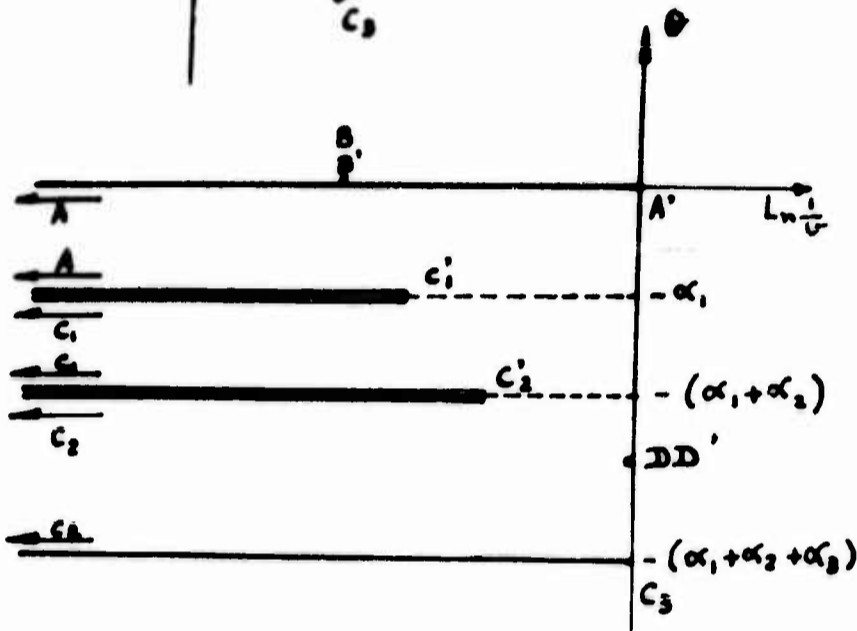
Nous appellerons en outre :

$$\begin{aligned} t_0 & \text{ l'homologue du point : } D, D' \\ t_1 & \text{ l'homologue du point : } B, B' \\ t_2, t_4, \dots, t_{2n} & \text{ les homologues des points : } A, C_1, C_2, \dots, C_{n-1} \\ t_3, t_5, \dots, t_{2n-1} & \text{ les homologues des points : } C'_1, C'_2, \dots, C'_n \end{aligned}$$

Par application du théorème de Schwartz, on trouve alors que le plan hodographique est relié au plan des  $t$  par la formule :



( Figure II  
(  $\zeta = \frac{1}{\sigma} e^{i\theta}$  plane



( Figure I  
(  $\zeta = L_n \zeta$  plane

This polygon has the following angles at the vertices :

- $\frac{\pi}{2}$  at  $A'$  and  $C_{n+1}$
- $0$  at  $A, C_1, C_2, \dots, C_n$
- $2\pi$  at  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$

We can apply Schwartz's transformation to it so as to map it in the half plane

$\zeta_y > 0$ , imposing the following conditions :

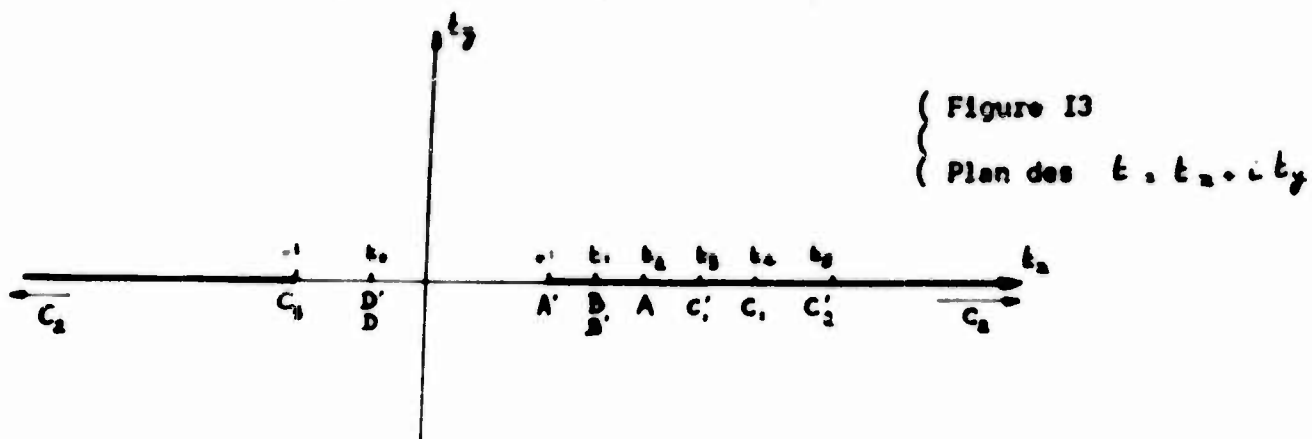
- $\zeta = -1$  to be the homologue of point  $C_{n+1}$
- $\zeta = +1$  to be the homologue of point  $A'$
- $\zeta = i\infty$  to be the homologue of point  $C_n$

In addition we shall denote by :

- $\zeta_0$  the homologue of point :  $D, D'$
- $\zeta_1$  the homologue of point :  $B, B'$
- $\zeta_2, \zeta_4, \dots, \zeta_{2n}$  the homologues of points :  $A, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$
- $\zeta_3, \zeta_5, \dots, \zeta_{2n-1}$  the homologues of points :  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$

By applying Schwartz's theorem we then find that the hodographic plane is related to the  $\zeta$  plane by the formula :

$$L_n \mathcal{Y} = K \int_1^t \frac{(t-t_3) \dots (t-t_{2n+1})}{(t-t_2) \dots (t-t_{2n})} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \quad (62)$$



La fraction rationnelle sous le signe somme se décompose en éléments simples. On peut écrire :

$$\frac{(t-t_3) \dots (t-t_{2n+1})}{(t-t_2) \dots (t-t_{2n})} = 1 + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{K_{2j}}{t-t_{2j}}$$

et on trouve immédiatement pour  $K_{2j}$  l'expression :

$$K_{2j} = \frac{(t_{2j} - t_3) \dots (t_{2j} - t_{2n+1})}{(t_{2j} - t_2) \dots (t_{2j} - t_{2j-2})(t_{2j} - t_{2j+2}) \dots (t_{2j} - t_{2n})}$$

Et la formule 62 prend la forme :

$$L_n \mathcal{Y} = K \int_1^t \left[ 1 + \sum_{j=1}^{j=n} \frac{K_{2j}}{t-t_{2j}} \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

Cette intégrale comporte  $n$  poles simples :  $t_2, t_4, \dots, t_{2n}$  de résidus respectifs :

$$\frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2 - 1}} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

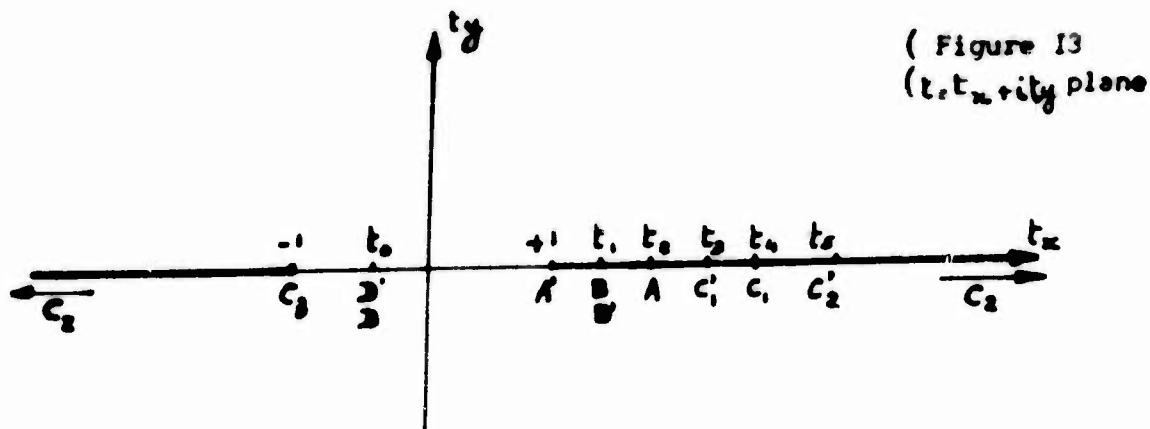
Le même raisonnement qu'au paragraphe VII montre alors, par application de la théorie des résidus, que, quand on passe de  $t_{2j} - \epsilon$  à  $t_{2j} + \epsilon$ ,  $\epsilon$  représentant une quantité tendant vers zéro, l'intégrale varie de :

$$-i\pi \frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2 - 1}}$$

tandis que le premier membre varie de :

$$-L_{2j}$$

$$L_n \mathcal{F} = K \int_1^t \frac{(t-t_2) \dots (t-t_{2n+1})}{(t-t_2) \dots (t-t_{2n})} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} \quad (62)$$



The rational fraction under the integral sign can be split up into simple elements.

We can write :

$$\frac{(t-t_2) \dots (t-t_{2n+1})}{(t-t_2) \dots (t-t_{2n})} = 1 + \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_{2j}}{t-t_{2j}}$$

and we immediately find for  $K_{2j}$  the expression :

$$K_{2j} = \frac{(t_{2j}-t_2) \dots (t_{2j}-t_{2n+1})}{(t_{2j}-t_2) \dots (t_{2j}-t_{2j-2})(t_{2j}-t_{2j+2}) \dots (t_{2j}-t_{2n})}$$

And formula 62 takes on the form :

$$L_n \mathcal{F} = K \int_1^t \left[ 1 + \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_{2j}}{t-t_{2j}} \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$$

This integral contains  $n$  simple poles :  $t_2, t_4, t_{2n}$  with the respective residues :

$$\frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2-1}} \quad j = 1, 2, \dots, n$$

The same reasoning as in paragraph VII then shows, by application of the theory of residues, that when we pass from  $t_{2j}-\epsilon$  to  $t_{2j}+\epsilon$ ,  $\epsilon$  representing a quantity which tends towards zero, the integral varies by :

$$-i\pi \frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2-1}}$$

while the first member varies by :  $-i\alpha_j$

On a donc :

37.

$$a_j = \pi \frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2 - 1}}$$

et l'intégrale prend la forme :

$$L_n \mathcal{S} = \int_1^t \left[ k + \sum_{j=1}^{2n} \sqrt{t_{2j}^2 - 1} \frac{a_j}{\pi} \frac{1}{t - t_{2j}} \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

On vérifie aisément que l'on a :

$$\int \frac{k dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = k L_n (t + \sqrt{t^2 - 1})$$

$$\int \frac{a_j \sqrt{t_{2j}^2 - 1}}{\pi} \frac{dt}{t - t_{2j} \sqrt{t^2 - 1}} = - \frac{a_j}{\pi} L_n \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right]$$

On a donc, en introduisant une constante d'intégration  $k'$  :

$$L_n \mathcal{S} = k L_n (t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j}{\pi} L_n \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right] + k'$$

On détermine  $k$  et  $k'$  en satisfaisant aux conditions suivantes :

- pour  $t = 1$ ,  $L_n \mathcal{S} = 0$

- pour  $t = -1$ ,  $L_n \mathcal{S} = -i \sum_{j=1}^{2n+1} a_j$

- pour  $1 \leq t \leq t_1$ , c.a.d. le long des parois du canal,  $L_n \mathcal{S}$  est réel.

On obtient finalement :

$$L_n \mathcal{S} = \frac{a_{n+1}}{\pi} L_n (t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sum_{j=1}^{2n} \frac{a_j}{\pi} L_n \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right] - i \sum_{j=1}^{2n+1} a_j \quad (63)$$

Dans le plan du potentiel complexe  $w, \zeta = i\psi$ , on a encore une bande formée des deux droites  $\psi = -\frac{d}{2}$  et  $\psi = +\frac{d}{2}$ . Comme précédemment, nous choisirons l'origine des axes du plan des  $w$  telle que à  $A'$  corresponde le point  $\zeta = 0, \psi = -\frac{d}{2}$ .

D'où la même figure qu'au paragraphe III :

We therefore have :

$$\alpha_j = \pi \frac{K K_{2j}}{\sqrt{t_{2j}^2 - 1}}$$

and the integral takes the form :

$$L_n \zeta = \int_1^t \left[ K + \sum_{j=1}^{j=n} \sqrt{t_{2j}^2 - 1} \frac{\alpha_j}{\pi} \frac{1}{t - t_{2j}} \right] \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$$

We can easily verify that we have :

$$\int \frac{K dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = K \operatorname{Ln} (t + \sqrt{t^2 - 1})$$

$$\int \frac{\alpha_j}{\pi} \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1}}{t - t_{2j}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = -\frac{\alpha_j}{\pi} \operatorname{Ln} \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right]$$

Hence, introducing an integration constant  $K'$ , we have :

$$L_n \zeta = K \operatorname{Ln} (t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\alpha_j}{\pi} \operatorname{Ln} \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right] + K'$$

We determine  $K$  and  $K'$ , by satisfying the following conditions :

- for  $t = 1$ ,  $L_n \zeta = 0$

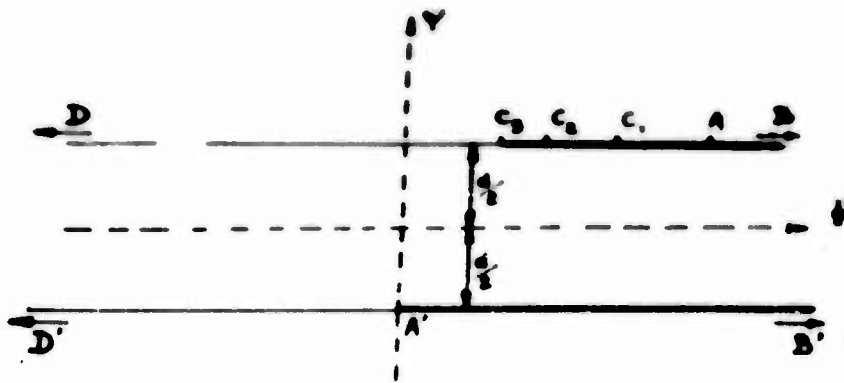
- for  $t = -1$ ,  $L_n \zeta = -i \sum_{j=1}^{j=n+1} \alpha_j$

- for  $1 < t < t$ , i.e. along the walls of the channel,  $L_n \zeta$  is real.

Finally we obtain :

$$L_n \zeta = \frac{\alpha_{n+1}}{\pi} \operatorname{Ln} (t + \sqrt{t^2 - 1}) - \sum_{j=1}^{j=n} \frac{\alpha_j}{\pi} \operatorname{Ln} \left[ \frac{t_{2j}^2 - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right] - i \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j \quad (63)$$

In the plane of the complex potential  $w = \phi + i\psi$  we again have a strip formed by the two straight lines  $\psi = -\frac{d}{2}$  and  $\psi = +\frac{d}{2}$ . As before, we choose the origin of the axes of the  $w$  plane such that the point corresponding to  $A'$  is  $\phi = 0$ ,  $\psi = -\frac{d}{2}$ . Which gives us the same figure as in paragraph III :



{ Figure 14  
Plan des  $w, t, Y$

Le passage du plan des  $w$  au plan des  $t$  se fait comme au paragraphe VII et donne les formules :

$$w = -\frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t-t_0}{t-t_1} + \frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t-1}{1-t_0} + i \frac{d}{2} \tag{9}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{d}{\pi} \frac{t-t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} \tag{10}$$

On peut alors aisément établir l'équation déterminant le passage du plan des  $z$  au plan des  $t$ . Comme au paragraphe VIII, on a :

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{t}}^t -\gamma \frac{dw}{dt} dt$$

Soit, en utilisant les formules 63 et 10 :

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{t}}^t (t + \sqrt{t^2 - 1})^{\frac{d_{21}}{\pi}} \prod_{j=1}^{j=n} \left[ \frac{t_{2j} - 1}{t - t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2 - 1} \sqrt{t^2 - 1}}{t - t_{2j}} \right]^{\alpha_j} e^{-i \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j} \frac{d}{\pi} \frac{t-t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} dt \tag{64}$$

On peut prendre  $\bar{t} = \infty$ . On voit alors d'après les Fig. 10 et 13 que l'on a :

$$\bar{z} = \sum_{j=1}^{j=n} L_j e^{-i \alpha_j}$$

Pour achever le calcul il faudrait déterminer:  $t_0, t_1$ ; les  $n$  constantes  $t_{2j}$ ; la largeur  $d$  du jet à l'infini aval.

On peut remarquer que quand on passe de  $t_0 - \epsilon$  à  $t_0 + \epsilon$  avec  $\epsilon$  tendant vers zéro, l'intégrale augmente, par application de la théorie des résidus, de la valeur :

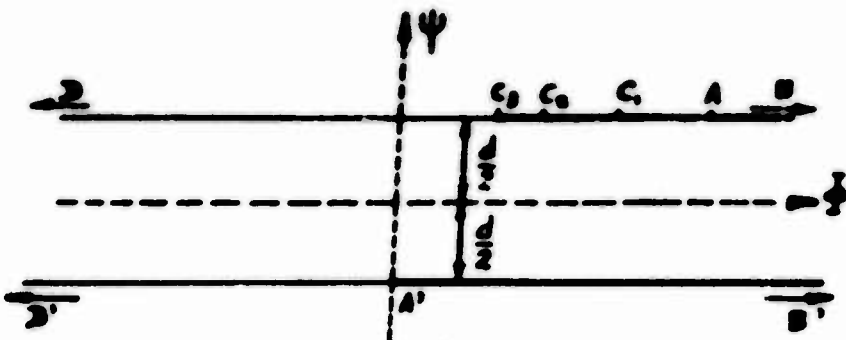
$$-i \sum_j d$$

$\gamma_j$  désignant la valeur de  $\gamma$  pour  $t = t_j$ . On a donc  $\gamma_j = \frac{1}{v_j}$ . D'autre part, quand on passe de  $t_0 - \epsilon$  à  $t_0 + \epsilon$  dans le plan des  $t$ , on passe de  $B'$  à  $B$  dans le plan des  $z$  et le premier membre de 64 varie de  $-ib$ . On a donc :

$$-ib = -i d \frac{1}{v} \quad \text{soit} \quad d = bv.$$

On retrouve l'équation de conservation de la masse.

Pour pousser plus loin l'analyse du problème, il faudrait, en raison de la forme compliquée des équations 63 et 64, recourir aux calculs numériques.



( Figure 14  
(w, phi, i, psi plane)

Passage from the  $w$  plane to the  $t$  plane is effected as in paragraph VII and gives the formulae :

$$w = -\frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t-t_1}{t-t_0} + \frac{d}{\pi} \operatorname{Ln} \frac{t_1-1}{1-t_0} + i \frac{d}{2} \tag{9}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{d}{\pi} \frac{t_1-t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} \tag{10}$$

It is then easy to find the equation which determines the passage from the  $z$  plane to the  $t$  plane. As in paragraph VIII, we have :

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{t}}^t \gamma \frac{dw}{dt} dt$$

i.e. using formulae 9 and 10 :

$$z - \bar{z} = \int_{\bar{t}}^t (t + \sqrt{t^2-1})^{\frac{\alpha_n+1}{\pi}} \prod_{j=1}^{j=n} \left[ \frac{t_{2j}^2-1}{t-t_{2j}} + t_{2j} + \frac{\sqrt{t_{2j}^2-1} \sqrt{t}}{t-t_{2j}} \right]^{\alpha_j} e^{-i \sum_{j=1}^{j=n} \alpha_j} \frac{d}{\pi} \frac{t_1-t_0}{(t-t_0)(t-t_1)} dt \tag{64}$$

We can take  $\bar{t} = \infty$ . Then we see from Figures 10 and 13 that we have :

$$\bar{z} = \sum_{j=1}^{j=n} L_j e^{-i \alpha_j}$$

To complete our calculations we should determine :  $t_0, t_1$  ; the  $n$  constants  $t_{2j}$  ; the width  $d$  of the jet at infinity downstream.

We may note that when we pass from  $t, -\epsilon$  to  $t, +\epsilon$  with  $\epsilon$  tending towards zero, the integral increases, by application of the theory of residues, by the value :

$$-i \gamma_1 d$$

$\gamma_1$  denoting the value of  $\gamma$  for  $t=t_1$ . Thus we have  $\gamma_1 = \frac{1}{d}$ . On the other hand when we pass from  $t, -\epsilon$  to  $t, +\epsilon$  in the  $t$  plane, we pass from  $B'$  to  $B$  in the  $z$  plane and the first member of 64 varies by  $-ib$ . Hence we have :

$$-ib = -id \frac{1}{d} \quad \text{i.e.} \quad d = b \nu_1$$

We come back to the equation for the conservation of mass.

In order to make a more thorough analysis of the problem it is necessary, in view of the complicated form of equations 63 and 64, to have recourse to numerical calculus.

XV. INTRODUCTION DE LA COMPRESSIBILITE - ETUDE EN SUPERSONIQUE.

L'état actuel des connaissances sur les écoulements permanents de fluides compressibles non visqueux ne permet pas l'étude approfondie d'un écoulement par un dispositif tel que celui que nous venons d'envisager au paragraphe XIV. La méthode du fluide fictif de Tchaplighine ne permet vraiment d'étudier que des écoulements de fluides compressibles en mouvement permanent, subsonique et quasi uniforme, et même dans ce cas elle conduit très rapidement à des calculs inextricables. La singularité que représente l'arête à la sortie du canal exclut donc ici l'application de cette méthode.

Mais à défaut de théorie analytique, on peut remarquer qu'en subsonique l'écoulement ne différera qu'en un point du cas incompressible, la vitesse à l'arête d'articulation restera finie, la vitesse infinie étant naturellement une impossibilité physique. Le phénomène n'en gardera pas moins le même aspect caractérisé par une déviation de la veine fluide le long des volets, avec forte dépression au voisinage de chaque arête.

Par contre, en écoulement supersonique on peut espérer, sinon résoudre le problème, du moins avoir une idée assez précise de l'écoulement grâce à la méthode de Prandtl - Busemann.<sup>(1)</sup>

Avant d'appliquer cette méthode, nous allons préciser les données du problème :

- Nous considérerons, comme au Paragraphe XIV un canal terminé par une succession de volets. Pour plus de clarté, nous supposerons que la paroi supérieure du canal se termine à la hauteur de la première arête d'articulation, c'est à dire que  $\alpha = 0$ .

- Nous supposons toujours le fluide non visqueux, le mouvement plan permanent irrotationnel et de plus isentropique. Le fluide s'écoule d'une région amont de pression d'arrêt  $P_r$  et de température d'arrêt  $T_r$  vers une région de pression  $P_0$ .

- Le canal peut être considéré comme le col d'une tuyère; l'écoulement y est donc uniforme et se fait à la vitesse critique  $c_c$  correspondant aux conditions  $P_r$  et  $T_r$ . Il en résulte que les perturbations aval ne peuvent remonter au-delà de la section de sortie du canal; l'écoulement est donc uniforme dans tout le canal jusqu'à la section de sortie  $AA'$

- En  $AA'$  se produisent deux détentes de Prandtl-Meyer qui vont interférer. On sait que dans le cas d'un écoulement plan de largeur infinie contourant une arête, la vitesse amont étant la vitesse critique  $c_c$  la répar-

#### XV. INTRODUCTION OF COMPRESSIBILITY - SUPERSONIC STUDY.

What is known today about the steady flow of compressible, non viscous fluids is not sufficient to allow a thorough study of flow through a device such as that described in paragraph XIV. By Tchaplignin's fictitious fluid method one can really only study the flow of compressible fluids in steady, subsonic and quasi uniform motion, and even in that case it very soon leads into inextricable calculations. The special feature constituted by the edge at the exit of the channel thus excludes the possibility of applying this method in the present case.

However, in the absence of an analytical theory we may note that in the subsonic regime the flow will only differ in one point from the incompressible case : the velocity at the edge will remain finite, infinite velocity being of course a physical impossibility. The phenomenon will nevertheless retain the same aspect, characterized by a deviation of the fluid stream along the flap, with a great depression in the neighborhood of each edge.

On the other hand, for a supersonic flow we can hope, if not to solve the problem at least to obtain a fairly clear idea of the flow by using the Prandtl-Busemann method. <sup>(1)</sup>

Before applying this method, let us state the data of the problem :

- We are considering, as in paragraph XIV, a channel ending in a succession of facets. For greater clarity we shall assume that the upper wall of the channel ends exactly above the first edge i.e. that  $\alpha = 0$  .

- We still assume that the fluid is inviscid, its motion plane, steady, irrotational and in addition isentropic. The fluid is flowing from an upstream region of stagnation pressure  $P_r$  and stagnation temperature  $T_r$  towards a pressure region  $P_0$  .

- The channel can be considered as the throat of a nozzle, hence the flow in it is uniform and proceeds at the critical velocity  $c_c$  which corresponds to the conditions  $T_r$  and  $T_r$  . As a result, disturbances occurring downstream cannot be propagated back beyond the exit section of the channel. There is therefore uniform flow in the whole channel up to the exit section  $AA'$  .

- At  $AA'$  two Prandtl-Meyer expansions will occur which will interfere. We know that in the case of plane flow of infinite width round an edge, the velocity upstream being the critical velocity  $c_c$  , the distribution of

titution des vitesses est donnée par la solution de Prandtl-Meyer :

$$v_r = W \sin \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \theta \quad v_\theta = W \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cos \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \theta$$

où  $v_r$  et  $v_\theta$  désignent les composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur et la normale au rayon vecteur,  $\theta$  l'angle polaire compté à partir de l'axe  $oy$ ,  $\gamma$  le rapport des chaleurs spécifiques, et  $W$  la vitesse qu'atteindrait le gaz pour une pression évanescence. (Figure 15).

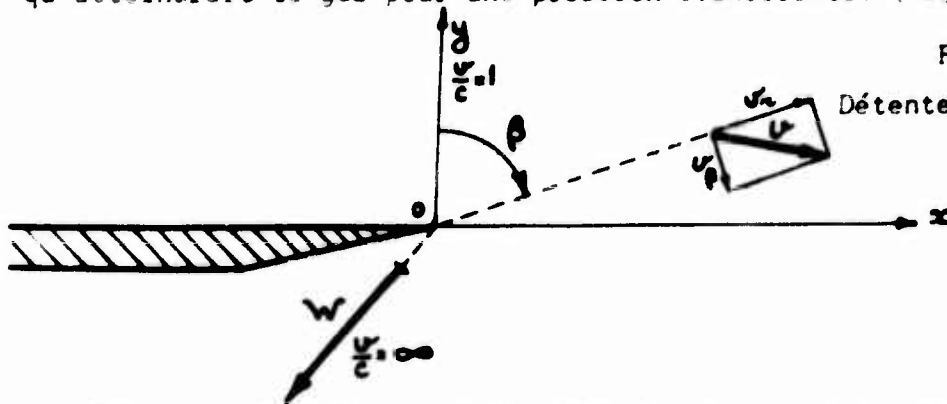


Figure 15.

Détente de Prandtl-Meyer.

Dans ce cas simple, une des familles de caractéristiques de l'écoulement est formée des droites  $\theta = C \text{ste}$

- Rappelons enfin que l'écoulement est régi dans le plan physique par un potentiel de vitesse  $\phi$  défini par l'équation aux dérivées partielles :

$$\left[1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{v_x v_y}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

à laquelle on associe dans le plan hodographique l'équation différentielle :

$$\left[1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right] dv_x^2 - 2 \frac{v_x v_y}{c^2} dv_x dv_y + \left[1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right] dv_y^2 = 0$$

équation dans laquelle  $c$  désigne la célérité locale du son.

Alors que les caractéristiques définies par cette dernière équation sont parfaitement connues (double réseau d'épicycloïdes limité par deux cercles concentriques de rayons respectivement égaux à la célérité critique  $c_c$  et à la vitesse limite  $W$  correspondant à la pression évanescence), les caractéristiques de la première équation ne peuvent être déterminées rigoureusement que dans des cas très simples. Mais on sait que les plans physique et hodographique sont liés par la propriété d'orthogonalité des caractéristiques en des points homologues.

velocities is given by the Prandtl-Meyer solution :

$$v_r = W \sin \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta+1}} \theta \quad v_\theta = W \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta+1}} \cos \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta+1}} \theta$$

where  $v_r$  and  $v_\theta$  denote the components of the velocity along the vector radius and perpendicular to the vector radius,  $\theta$  the polar angle with the axis  $oy$ ,  $\delta$  the ratio of specific heats, and  $W$  the velocity which would be attained by the gas at zero pressure. (Fig. I5)

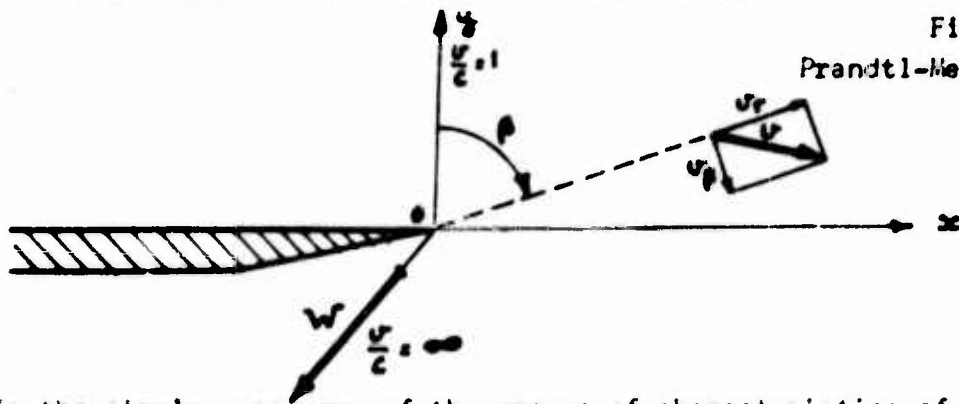


Figure I5.  
Prandtl-Meyer expansion.

In the simple case, one of the groups of characteristics of the flow consists of the straight lines  $\theta = \text{constant}$ .

- Finally let us remember that the flow is governed in the physical plane by a velocity potential  $\phi$  defined by the partial differential equation :

$$\left[1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{v_x v_y}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \left[1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

with which we associate, in the hodographic plane, the differential equation :

$$\left[1 - \frac{v_x^2}{c^2}\right] dv_x^2 - 2 \frac{v_x v_y}{c^2} dv_x dv_y + \left[1 - \frac{v_y^2}{c^2}\right] dv_y^2 = 0$$

in which equation  $c$  denotes the local sound speed.

Whereas the characteristics defined by this last equation are perfectly known (double set of epicycloids bounded by two concentric circles with radii equal to the critical velocity  $c_c$  and the maximum velocity  $W$  corresponding to zero pressure), the characteristics of the first equation can only be rigorously determined in very simple cases. But we know that the physical and hodographic planes are related by the orthogonality of their characteristics at homologous points.

Alors que l'étude analytique ne peut pas être poussée plus loin, cette dernière propriété a permis à Prandtl et Busemann de développer une théorie permettant de déterminer graphiquement un écoulement avec une précision aussi grande que l'on veut en travaillant simultanément dans les plans physique et hodographique. Nous n'avons pas jugé utile d'appliquer à fond cette méthode, mais seulement une première approximation qui consiste à confondre les caractéristiques du plan physique avec des droites. On sait que cette approximation est d'autant plus justifiée que la vitesse varie peu le long d'une caractéristique du plan physique. Cela ne sera pas toujours le cas dans le problème qui nous occupe, mais cette méthode nous permettra néanmoins d'avoir une première idée satisfaisante du phénomène.

Dans le canal, on a un écoulement uniforme. Il correspondra donc au canal, dans le plan physique, un seul point dans le plan hodographique (Fig. 16 et 17).

En  $A'$  il se produit une détente jusqu'à ce que la pression dans le jet soit égale à la pression  $P_0$ . On se déplacera donc dans le jet du cercle I correspondant à la pression critique au cercle II correspondant à la pression  $P_0$  (le cercle III correspondant à la pression évanescence) le long de l'épicycloïde  $A'A'$ . En  $A'$  dans le plan physique, on a donc un faisceau de détente dont les directions sont les normales à cette portion d'épicycloïde.

En  $A$  il se produit de même une détente jusqu'à ce que la vitesse soit parallèle au volet. Dans le plan hodographique on se déplace donc le long de l'épicycloïde  $AA$  dont les normales définissent les détentes se propageant à partir de  $A$  dans le plan physique.

Dans le plan physique en aval de  $A$  arrivent les caractéristiques issues de  $A'$  et propageant la détente suivant un faisceau d'ouverture  $\omega_{A'}$ . La pression va donc diminuer le long du volet jusqu'à l'arrivée de la dernière d'entre elles, la caractéristique  $A'\Sigma$ . Après, arriveront les caractéristiques issues de  $A$  propageant la détente suivant un faisceau d'ouverture  $\omega_A$  qui se sont réfléchies à la surface libre du jet. Si on se place dans le plan hodographique on peut suivre une telle caractéristique. On part d'un point  $F$  sur l'épicycloïde  $AA$ . On se déplace sur une épicycloïde jusqu'en  $G$  où l'on rencontre la dernière épicycloïde  $A'E$  propageant la détente en  $A'$ . Il faut alors rebrousser chemin jusqu'en  $H$  où se produit la réflexion à la surface libre du jet; on repart alors suivant l'épicycloïde  $H\dot{i}$  jusqu'à rencontrer la droite parallèle à la facette en  $\dot{i}$ . On voit donc qu'au-delà du

Whereas analytic study cannot be pursued any further, this latter property enabled Prandtl and Busemann to develop a theory which renders feasible the graphical determination of a flow with any desired degree of accuracy, working simultaneously in the physical and the hodographic planes.

We considered it unnecessary to apply the complete method, but only used a first approximation, assuming hypothetically that the characteristics of the physical plane are straight lines. We know that this approximation is only justified in cases where the velocity varies very little along a characteristic of the physical plane. This is not always the case in our present problem, but the method will nevertheless allow us to obtain a satisfactory preliminary idea of the phenomenon.

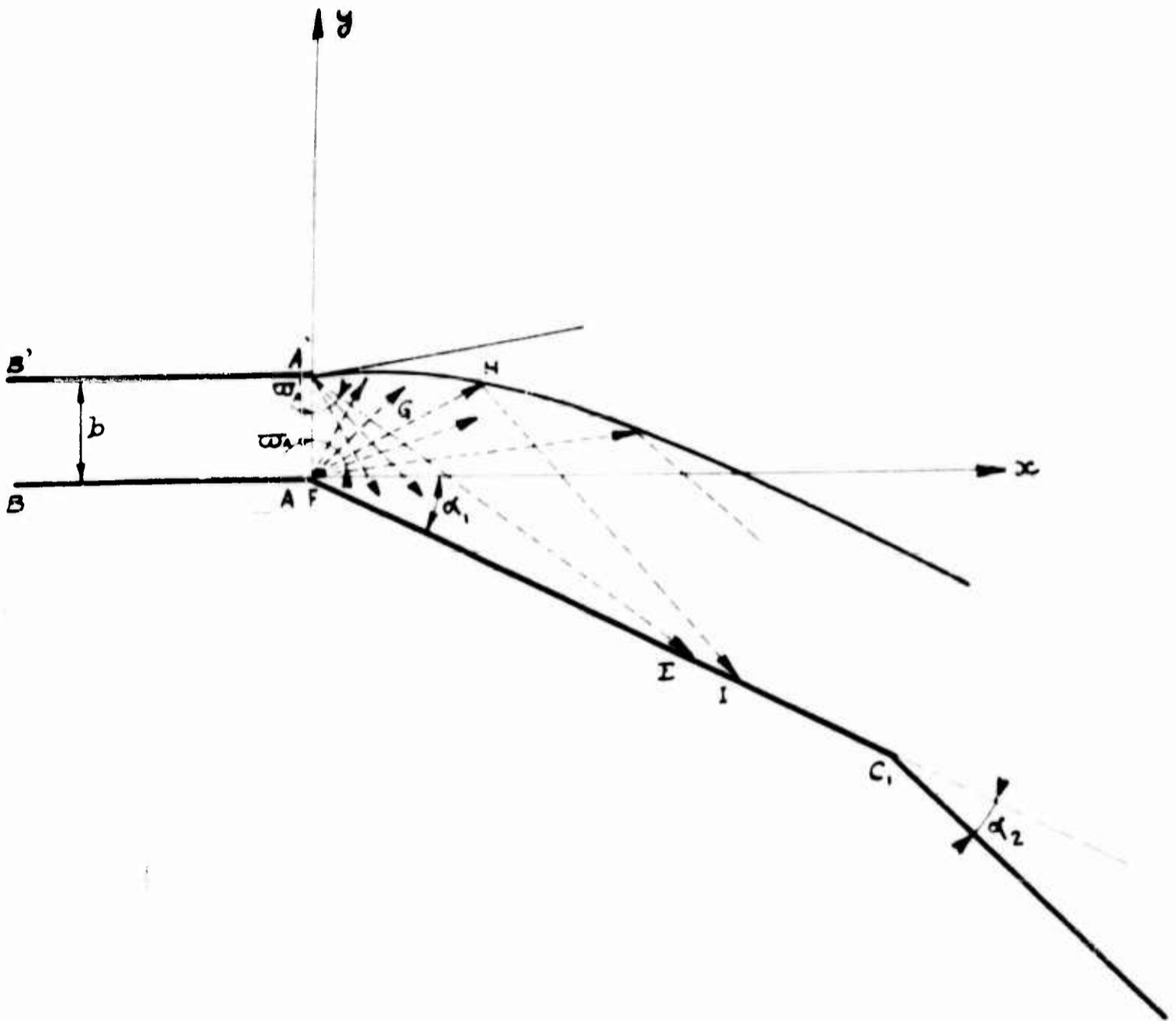
In the channel there is a uniform flow. The channel in the physical plane will therefore be represented by a single point in the hodographic plane (Figs. 15 and 16).

There will be an expansion at  $\cdot$  which will continue until the pressure in the jet becomes equal to the pressure  $P_0$ . We shall therefore follow the jet from circle I which corresponds to the critical pressure, up to circle II which corresponds to the pressure  $P_0$  (circle III corresponding to zero pressure) along the epicycloid  $AA'$ . At  $A'$  in the physical plane we therefore have a group of expansion characteristics whose directions are perpendicular to that portion of the epicycloid.

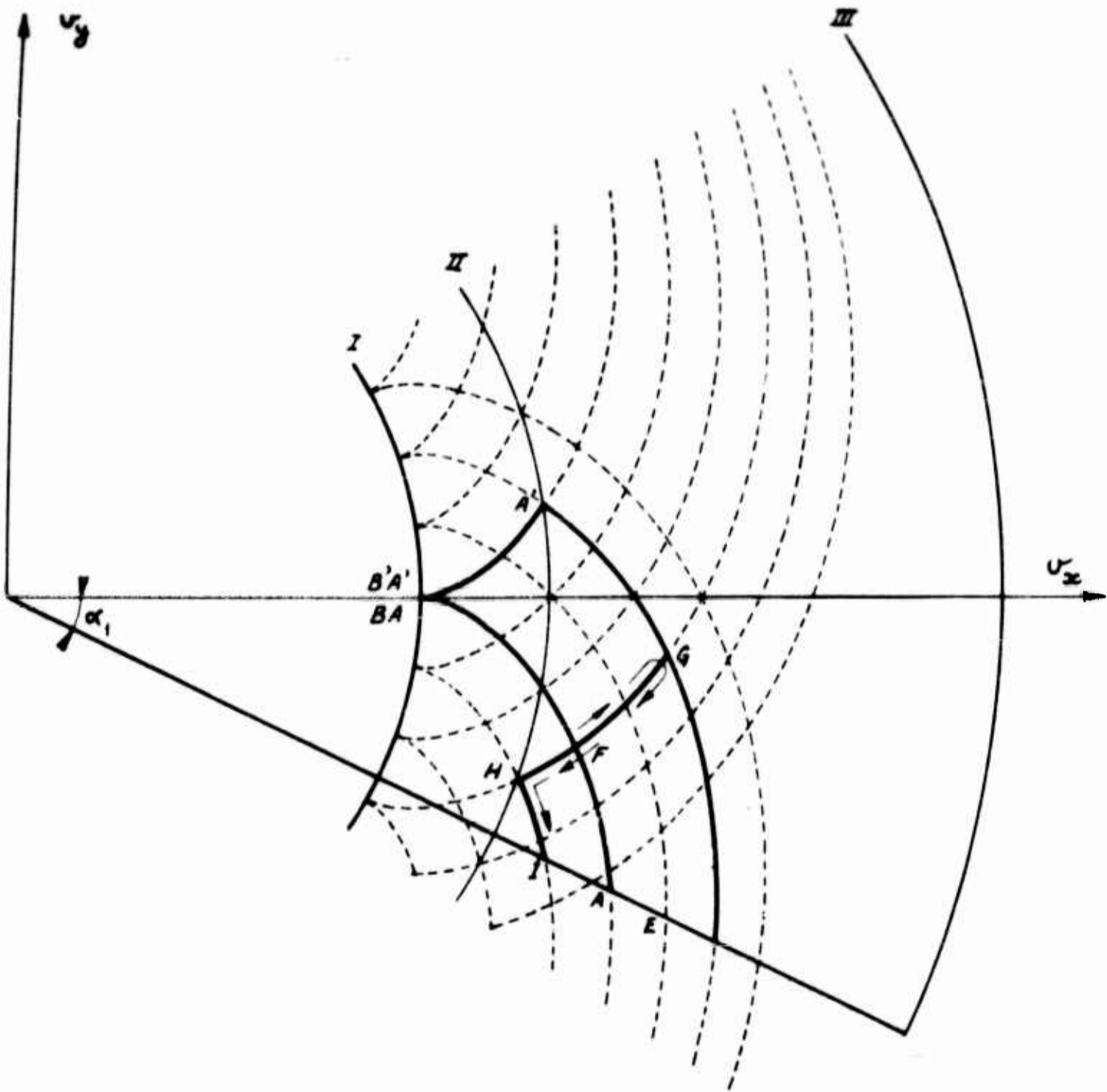
At  $A$  there will also be expansion until the velocity becomes parallel to the flap. In the hodographic plane therefore, we move along the epicycloid  $AA$ , whose normals define expansions being propagated from  $A$  in the physical plane.

The characteristics issuing from  $A'$  and propagating the expansion along a cone of opening  $\omega_{A'}$ , arrive downstream of  $A$  in the physical plane. The pressure will therefore decrease along the flap up to the point where the last characteristic,  $A'E$  arrives. After that will arrive the characteristics issuing from  $A$  and propagating the expansion along a cone of opening  $\omega_A$ , which have been reflected at the free surface of the jet. If we place ourselves in the hodographic plane we can follow one of these characteristics. We start from a point  $F$  on the epicycloid  $AA$ . We move along an epicycloid up to  $G$ , where we meet the last epicycloid  $A'E$  propagating the expansion from  $A'$ . We then have to retrace our steps as far as  $H$  where the reflection from the free surface of the jet occurs. We then start off again following the epicycloid  $Hi$  until we meet the straight line parallel to the flap at  $i$ . Thus we see that beyond point  $E$  the

Figure 16  
Plan physique



{ Figure 17  
 { Plan hodographique



point  $E$  la pression augmente le long du volet, puisque le point  $I$  du plan hodographique est situé à l'intérieur du cercle passant par  $E$ .

Ceci va constituer la différence essentielle entre le régime subsonique et supersonique. Alors qu'en subsonique la répartition de pression à la paroi est caractérisée par une forte dépression à chaque arête et un maximum de pression entre deux arêtes, au contraire en supersonique on aura des maxima de pression à chaque arête et des minima entre deux arêtes.

Notons que le raisonnement que nous venons de faire est rigoureux dans le plan hodographique et permet de calculer effectivement ces extréma de pression. Toute la difficulté consiste à placer dans le plan physique les points homologues de ceux du plan hodographique. On peut essayer de préciser la position du point  $E$  où la pression est minimum. On voit immédiatement sur la figure 16 que l'on aura :

$$AE = \frac{b \operatorname{tg} \alpha \omega_A}{\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha \omega_A}$$

En fait, les détentes en  $A$  et  $A'$  vont interférer et les caractéristiques issues de  $A'$  vont s'incurver, si bien que l'on peut seulement affirmer que :

$$AE < \frac{b \operatorname{tg} \alpha \omega_{A'}}{\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha \omega_{A'}}$$

- BIBLIOGRAPHIE -

- ① VALIRON, Equations fonctionnelles, Masson éd. pages 244 ....
- WHITTAKER and WATSON, Modern analysis, 3rd. édition 1920, pages 281-288.
- ② L.V. AHLFORS, Complex analysis, Mc Graw-Hill, Page 31.
- ③ M. GIQUEAUX, Mécanique des fluides théoriques, Librairie Polytechnique, Ch. Beranger, pages 123 - 124.
- ④ Cette égalité se passe de démonstration; on a, au premier membre, une somme finie de progression géométrique.
- ⑤ T. PRANDTL et A. BUSEMANN. Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit (Festschrift Professor Dr. A. Stodola zum 70 Geburtstag, p. 499-509, Zürich, 1929).

pressure increases along the flap, since point  $\bar{I}$  of the hodographic plane is situated inside the circle passing through  $\bar{E}$ .

This will constitute the essential difference between the subsonic and supersonic regimes. Whereas in the subsonic regime the distribution of pressure along the wall is characterized by a great depression at each edge and maximum pressure between two edges, in the supersonic on the contrary there will be maximum pressures at the edges and minimum pressures between two edges.

It should be noted that the above reasoning is rigorous in the hodographic plane and enables us effectively to calculate these extremes of pressure. The whole difficulty resides in finding the position in the physical plane of the points homologous to those of the hodographic plane. We can try to place point  $\bar{E}$  where the pressure is at a minimum. We see immediately from Figure I6 that we shall have :

$$AE = \frac{b \operatorname{tg} \alpha \omega_A'}{\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha \omega_A'}$$

In reality, there will be interference of the expansions at  $\bar{A}$  and  $\bar{A}'$  and the characteristics issuing from  $\bar{A}'$  will curve inwards, so that we can really only state that :

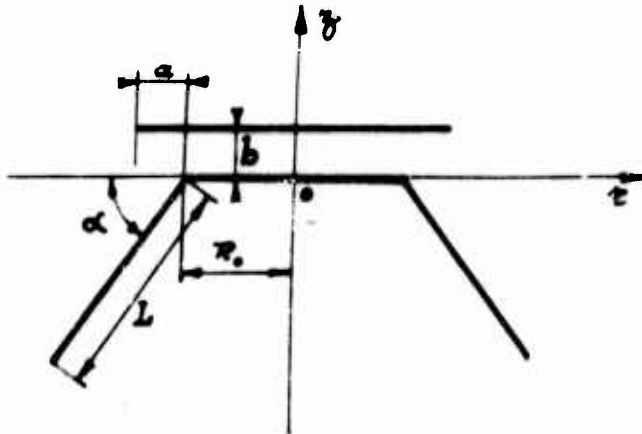
$$AE < \frac{b \operatorname{tg} \alpha \omega_A'}{\cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha \omega_A'}$$

- BIBLIOGRAPHY -

- ① VALIRON, Equations fonctionnelles, Masson éd. pages 244 ....
- ② WHITTAKER and WATSON, Modern analysis, 3rd édition 1920, pages 281-288.
- ③ L.V. AHLFORS, Complex analysis, Mc Graw-Hill, Page 31.
- ④ M. GIQUEAUX, Mécanique des fluides théoriques, Librairie Polytechnique, Ch. Beranger, pages 123 - 124.
- ⑤ This equation does not require further proof; we have, in the first member, a finite sum of terms of a geometrical progression.
- ⑥ T. PRANDTL and A. BUSEMANN. Näherungsverfahren zur zeichnerischen Ermittlung von ebenen Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit (Festschrift Professor Dr. A. Stodola zum 70 Geburtstag, p. 499-509, Zürich, 1929).

CONSIDERATIONS SUR L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL A SYMETRIE  
AXIALE ET RESULTATS D'ESSAIS DE CALCUL NUMERIQUE  
DES LIGNES DE COURANT.

Toutes les expériences réalisées ont d'abord porté, comme nous l'avons vu précédemment, sur des tuyères extérieures, présentant géométriquement et mécaniquement une symétrie axiale. Autrement dit, le phénomène physique envisagé fut un phénomène tridimensionnel à symétrie axiale, caractérisé comme l'indique la figure ci-dessous :



par une fente annulaire d'épaisseur  $b$  présentant un dépassement  $a$  de la lèvre supérieure, et sur le corps de la tuyère un volet conique de longueur d'arête  $L$ , les génératrices faisant un angle  $\alpha$  avec les plans de section droite. La figure donne la coupe par un plan diamétral; l'origine étant placée sur l'axe de symétrie  $oz$  au point où cet axe rencontre le plan de la lèvre inférieure de la tuyère, contenant l'axe  $or$ , du plan diamétral considéré, on appelle  $R_0$  le rayon inférieur de la tuyère annulaire.

On sait qu'en supposant le mouvement irrotationnel, le fluide étant parfait, les coordonnées cylindriques étant  $r, z$  et  $\theta$  (cette dernière caractérisant à partir d'un plan méridien origine la position d'un plan méridien quelconque) il existe un potentiel des vitesses  $\phi(r, \theta, z)$ , indépendant de  $\theta$ , et qui, harmonique en  $x, y, z$ , vérifie l'équation :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

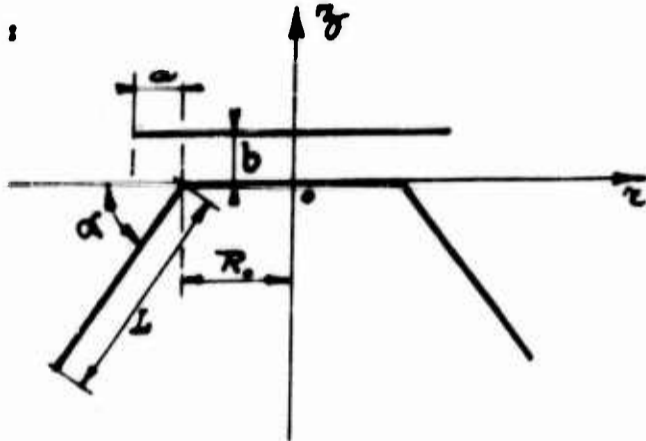
équation qui en coordonnées cylindriques devient :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

CONSIDERATIONS ON TRIDIMENSIONAL FLOW WITH AXIAL SYMMETRY

AND RESULTS OF EXPERIMENTAL NUMERICAL CALCULUS TO  
DETERMINE THE STREAM LINES.

In all the experiments performed hitherto, the nozzles used were, as already stated, of the external type and axially symmetrical both geometrically and mechanically. In other words, the physical phenomenon involved was a tri-dimensional one with axial symmetry, its characteristics being, as indicated in the following figure :



an annular slot of width  $b$  with its upper lip overlapping by a distance  $a$ , and on the body of the nozzle a conical flap, the generatrix of length  $L$  forming an angle of  $\alpha$  with the sectional area planes. The figure shows a section in the diametrical plane; the origin being placed on the axis of symmetry  $oz$  at the point where this axis meets the plane of the lower lip of the nozzle, containing the axis  $ox$  of the diametrical plane being considered, we denote by  $R_0$  the smaller radius of the annular nozzle.

We know that, assuming irrotational movement and that we have a perfect fluid, the cylindrical coordinates being  $r$ ,  $z$  and  $\theta$  (the latter defining the position of any meridian plane with respect to a meridian plane of origin) there exists a velocity potential  $\phi(r, \theta, z)$ , independent of  $\theta$  and which, being a harmonic function of  $x, y, z$ , satisfies the equation :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

which equation, in cylindrical coordinates, becomes :

$$(1) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

L'équation de continuité permet de même d'affirmer l'existence d'une fonction de courant  $\Psi(\tau, \theta, r)$ , elle même indépendante de  $\theta$  et vérifiant l'équation :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0$$

Mais alors que la solution des écoulements à deux dimensions est rendue possible par la considération des fonctions analytiques de variables complexes et l'application du théorème de Schwartz, on ne peut encore, même dans le cas simple des écoulements tridimensionnels à symétrie axiale résoudre complètement le problème.

Certes, H. Lamb (1) et R.T. Jones (2) ont permis son approche par la considération de sources sphériques sur l'axe, et l'un de nous a personnellement poursuivi des recherches tendant à substituer des sources cylindriques permettant par l'intervention de certaines fonctions intégrales de lier un écoulement à symétrie axiale à un écoulement plan. Mais ces travaux sont encore inachevés et ne donnent pas, de façon simple et utilisable, l'équation de la surface libre, c'est à dire celle du jet. Nous poursuivons ces recherches analytiques tout à fait générales.

•  
•

Mais nous nous sommes posé la question suivante : existe-t-il vraiment dans le cas particulier qui nous intéresse, une différence considérable entre l'écoulement plan et l'écoulement à symétrie axiale ?

Reprenant l'équation fondamentale des lignes de courant :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = 0$$

et rappelant que  $b$  est l'épaisseur de la fente, très faible vis à vis de  $R_0$ , donc vis à vis de  $\tau$  dans l'écoulement à la sortie du jet, nous faisons la transformation :

$$Z = \frac{r}{b} \quad R = \frac{\tau}{b}$$

L'équation (2) devient :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$$

Dans cette équation  $R$  représente la distance à l'axe par rapport à  $b$  ; donc  $R$  est très grand. D'autre part  $\frac{\partial \Psi}{\partial R}$  est un gradient qui au voisinage

The equation of continuity also allows us to assert the existence of a stream function  $\Psi(r, \theta, z)$ , itself independent of  $\theta$  and satisfying the equation :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

But whereas the solution for bidimensional flow is made possible by taking into account the analytical functions of complex variables and applying Schwartz's theorem, we still cannot completely solve the problem, even in the simple case of axially symmetric tridimensional flow.

It is true that H. Lamb (1) and R.T. Jones (2) have shown how it is possible to approach the problem by considering spherical sources on the axis, and one of us has personally done some research tending towards the substitution of cylindrical sources which make it possible, through the intervention of certain integral functions, to relate an axially symmetric flow to a plane flow. But this research is still incomplete and has not yet provided us with the equation of free surface of the jet in a simple and practical form. We are continuing these completely general analytical studies.

°°

However, we asked ourselves the following question : is there really, in the particular case with which we are dealing, very much difference between plane flow and axially symmetric flow ?

Let us go back to the fundamental equation of stream lines :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$$

and remembering that  $b$  is the width of the slot, very small by comparison with  $R_0$ , and therefore with  $r$  in the flow at the exit of the nozzle, we make the following transformation :

$$Z = \frac{z}{b} \quad R = \frac{r}{b}$$

Equation (2) becomes :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$$

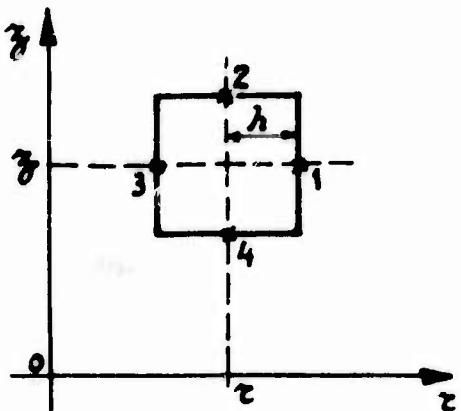
In this equation  $R$  represents the distance from the axis in terms of  $b$  ; therefore  $R$  is very large. On the other hand  $\frac{\partial \Psi}{\partial R}$  is a gradient which is

immédiat de l'arête est faible, vis à vis de  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$  et  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ , directement liés aux valeurs des dépressions en ce point. Le terme en  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  est donc faible vis à vis des dérivées secondes et le terme  $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$  vraisemblablement négligeable devant les deux premiers. Autrement dit, et compte tenu des conditions particulières du problème, l'écoulement dans un plan méridien doit différer très peu de l'écoulement plan correspondant.

°  
° °

Nous nous sommes posé un autre problème : peut-on par les procédés modernes de calcul, et spécialement grâce à l'utilisation de machines à calculer électroniques, déterminer les lignes de courant à l'intérieur d'un jet, connaissant seulement les lignes de surface libre.

Traçons dans un plan méridien de l'écoulement axial un quadrillage de maille  $h$  parallèle aux axes  $z$  et  $\bar{z}$  : soient  $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  les valeurs de  $\psi$  au centre et au milieu des côtés d'un carré de côté  $2h$ . En se plaçant au centre du carré et en développant en série, on a successivement :



$$\psi_1 = \psi + h \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_2 = \psi + h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \dots$$

$$\psi_3 = \psi - h \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_4 = \psi - h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \dots$$

soit par addition

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + h^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) + \dots$$

et d'après (2), et en négligeant le quatrième ordre :

$$(4) \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + h^2 \frac{1}{z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Mais en négligeant le troisième ordre

$$\psi_1 - \psi_3 = 2h \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

L'équation (4) devient donc :

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + \frac{h}{z} \cdot \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}$$

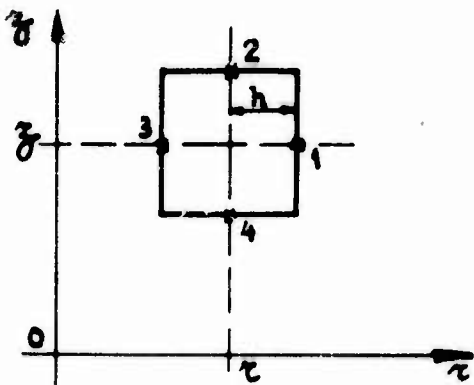
et par conséquent :

$$(5) \quad \psi = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) - \frac{h}{8z} (\psi_1 - \psi_3)$$

small in the immediate neighborhood of the edge, by comparison with  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$  and  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}$ , which are directly related to the underpressure values at that point. The term in  $\frac{\partial \psi}{\partial r}$  is thus small in comparison to the second derivatives and the term  $\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$  probably negligible in comparison to the two first. In other words, and taking into account the particular conditions of the problem, the flow in a meridian plane differs very little from the corresponding plane flow.

We set ourselves another problem: is it possible, by modern methods of calculation, and especially by the use of electronic calculating machines, to determine the stream lines in the interior of a jet, knowing only the free surface lines?

Let us trace a grid in the meridian plane of an axial flow, with squares of side  $h$  parallel to the axes  $r$  and  $z$  and let  $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  be the values of  $\psi$  in the centre and at the middle of the sides of a square of side  $2h$ . Placing oneself in the centre of the square and developing in series, we obtain successively:



i.e., by addition:

$$\psi_1 = \psi + h \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \dots$$

$$\psi_2 = \psi + h \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_3 = \psi - h \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \dots$$

$$\psi_4 = \psi - h \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \dots$$

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + h^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right) + \dots$$

and from (2), disregarding the fourth order:

$$(4) \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + h^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

But disregarding the third order:

$$\psi_1 - \psi_3 = 2h \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Equation (4) therefore becomes:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 = 4\psi + \frac{h}{r} \cdot \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}$$

and hence:

$$(5) \quad \psi = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4) - \frac{h}{8r} (\psi_1 - \psi_3)$$

Or pour que la méthode soit intéressante, il est nécessaire que ce quadrillage soit assez fin pour pouvoir déterminer  $\Psi$  jusque dans la fente :  $h$  doit donc être inférieur à la largeur de celle-ci. Dans ces conditions le dernier terme est négligeable et pratiquement  $\Psi$  est déterminé par :

$$(6) \quad \Psi = \frac{1}{4} (\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4)$$

Or nous aurions obtenu cette relation, sans approximation en partant de l'équation (2') suivante, au lieu de l'équation (2) :

$$(2') \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

c'est à dire de l'équation définissant la fonction de courant du problème plan de mêmes caractéristiques géométriques.

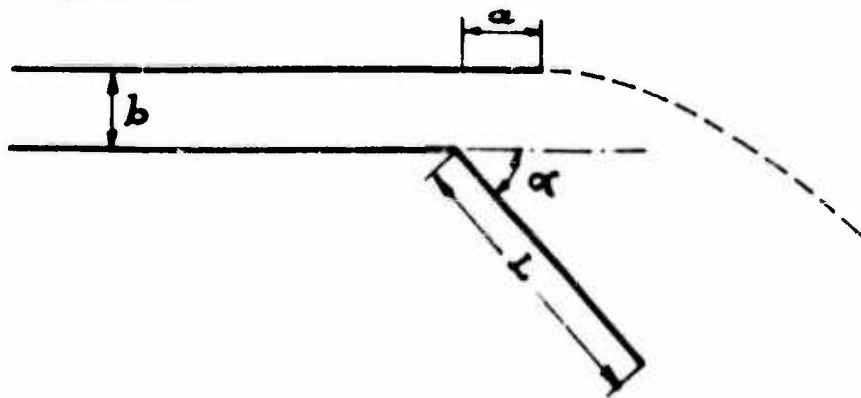
On arrive donc à la conclusion que si l'on part de la même trajectoire limite de jet dans le cas plan et le cas tridimensionnel on trouve sensiblement le même écoulement, sous les conditions géométriques particulières de notre problème.

Il était alors nécessaire de tenter la résolution numérique dans le cas bidimensionnel, c'est à dire d'essayer de déterminer numériquement les lignes de courant à l'intérieur d'un jet, en ne connaissant que les lignes de contour de ce jet.

°  
°

Le problème est, nous le rappelons, le suivant :

" Un fluide incompressible et sans viscosité s'écoule par un canal plan de longueur infinie et de largeur  $b$  , dont l'embouchure est munie d'un volet de longueur  $L$  incliné d'un angle  $\alpha$  sur l'axe du canal : la lèvre supérieure dépasse d'une longueur  $a$  " .



L'expérience montre que le fluide forme un jet qui est totalement dévié dans la direction du volet.

L'étude théorique du phénomène a été faite dans les pages précédentes.

If the method is really to be of advantage, the grid must be fine enough to allow determination of  $\Psi$  right up to inside the slot. Therefore  $h$  must be less than the width of the slot. In these conditions the last term is negligible and  $\Psi$  is really determined by :

$$(6) \quad \Psi = \frac{1}{4} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4)$$

Now we should have obtained this relationship, without approximation, if we had started from the following equation (2') instead of equation (2) :

$$(2') \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0$$

that is to say the equation defining the stream function of the plane problem with the same geometrical characteristics.

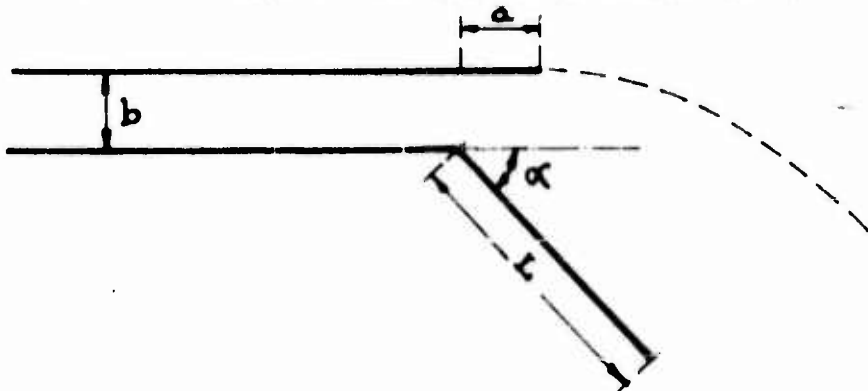
We thus reach the conclusion that if we start from the same jet boundary in both the plane and the tridimensional cases, we find the flow is practically the same in the particular geometrical conditions of our problem.

The next step required was to try to obtain a numerical solution in the bidimensional case, that is to say to try to determine numerically the stream lines inside the jet, while knowing only its contour lines.

°  
° °

Let us restate the problem, as follows :

- " An incompressible, inviscous fluid is flowing through a plane channel of
- " infinite length and of width  $b$  , at the mouth of which is a flap of
- " length  $L$  inclined at an angle of  $\alpha$  to the axis of the channel; the upper
- " lip extends beyond the edge of the flap by a length  $a$  ".



Experience shows that the whole jet is deviated in the direction of the flap. The preceding pages of this report contain the theoretical study of the phenomenon.

Nous nous sommes donné, pour le présent travail, les conditions suivantes :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad L \text{ infini} \quad b = 4 \text{ millimètres.}$$

La vitesse  $v_0$  du fluide à l'infini aval du jet a été prise égale à 1 et la vitesse  $v_1$  à l'intérieur du canal, à l'infini amont de l'arête égale à  $2v_0$ . La longueur  $\alpha$  est alors déterminée par les conditions de vitesse ainsi choisies.

### 1) TRAJECTOIRE LIMITE DU JET.

Nous en connaissons une représentation paramétrique d'après l'étude théorique précédente (3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{b} = \frac{v^2+1}{2\pi} \left[ 2 \operatorname{Ln} \frac{v_1+1}{v_1-1} - \operatorname{Ln} \frac{v_1+v_1^{-1}+4\cos\theta}{v_1+v_1^{-1}-4\cos\theta} \right] \\ \frac{y}{b} = 1 + \frac{v_1}{\pi} \left[ \operatorname{Ln} \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} - (v_1-v_1^{-1}) \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{2\sin\theta}{v_1-v_1^{-1}} \right] \end{array} \right.$$

soit, avec les valeurs numériques choisies :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7,3294 \operatorname{Log} 9 \cdot \frac{1-0,8\cos\theta}{1+0,8\cos\theta} + a \\ y = 4 + 3,8197 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{-4\sin\theta}{3} - 5,8633 \operatorname{Log} \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} \end{array} \right.$$

En donnant à  $\theta$  une suite de valeurs comprises entre 0 et 90°, nous avons construit par points la trajectoire.

Le tableau "I" indique la suite des calculs numériques à effectuer et la figure "I" fournit le tracé de cette ligne de jet.

### 2) CALCUL NUMÉRIQUE DE LA FONCTION DE COURANT A L'INTERIEUR DU JET.

Le fluide étant supposé incompressible et irrotationnel, on sait que la fonction de courant  $\Psi(x, y)$  vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\Delta \Psi = 0$$

Elle est constante et supposée nulle le long du bord inférieur du canal et le long du volet; elle est également constante et supposée égale à 100 le long du bord

For the task undertaken here we set ourselves the following conditions :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad L, \text{ infinite} \quad b = 4 \text{ millimeters}$$

The velocity  $u_0$  of the fluid at infinity downstream of the jet was taken as 1 and the velocity inside the channel at infinity upstream of the edge as :  $u_1 = 2u_0$ . The length  $a$  is then determined by the velocity conditions thus chosen.

### 1) FREE BOUNDARY OF THE JET.

In the preceding theoretical study this was represented in parametric form as follows (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-a}{b} = \frac{u^2+1}{2\pi} \left[ 2 \operatorname{Ln} \frac{u_1+1}{u_1-1} - \operatorname{Ln} \frac{u_1+u_1^{-1}+4 \cos \theta}{u_1+u_1^{-1}-4 \cos \theta} \right] \\ \frac{y}{b} = 1 + \frac{u_1}{\pi} \left[ \operatorname{Ln} \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta} - (u_1-u_1^{-1}) \operatorname{Arctg} \frac{2 \sin \theta}{u_1-u_1^{-1}} \right] \end{array} \right.$$

i.e., inserting the numerical values chosen :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 7,3294 \log 9 \cdot \frac{1-0,8 \cos \theta}{1+0,8 \cos \theta} + a \\ y = 4 + 3,8197 \operatorname{Arctg} \frac{4 \sin \theta}{3} - 5,8633 \log \frac{1-\sin \theta}{1+\sin \theta} \end{array} \right.$$

And giving  $\theta$  a series of values lying between  $0^\circ$  and  $90^\circ$ , we plotted the boundary line of the jet by points.

Table I shows the computations required and Figure I the plot of this line of the jet.

### 2) NUMERICAL CALCULUS OF THE STREAM FUNCTION INSIDE THE JET.

Since the fluid is assumed to be incompressible and irrotational, we know that the stream function  $\Psi(x, y)$  satisfies the partial differential equation :

$$\Delta \Psi = 0$$

It is constant and assumed to be zero along the lower lip of the channel and along the flap; it is also constant and assumed to be 100 along the upper lip

supérieur du canal prolongé par la ligne de jet.

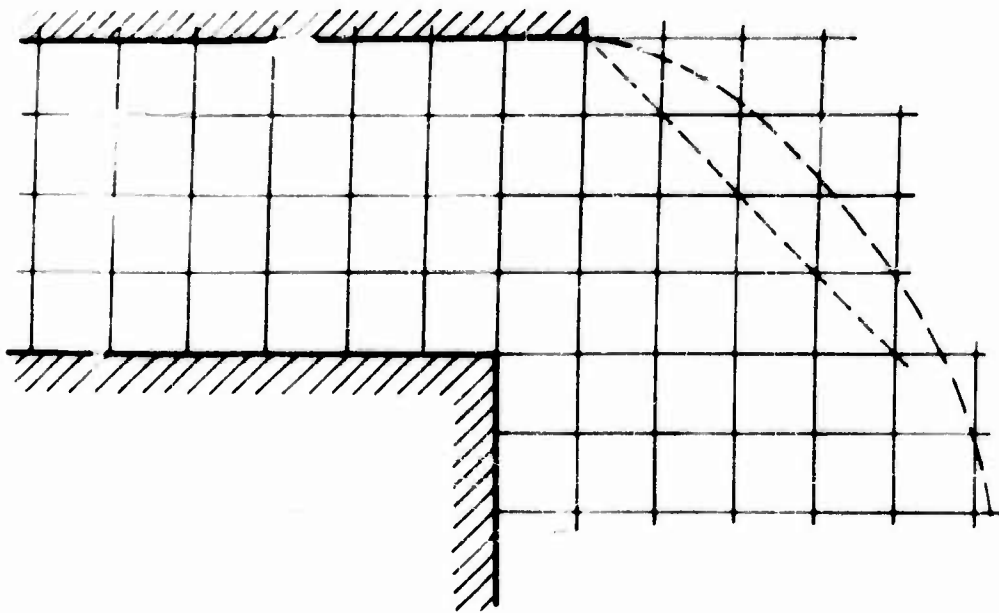
Pour déterminer cette fonction  $\Psi$  nous avons appliqué la méthode des différences finies.

Pour cela nous avons couvert le domaine fluide rempli par le jet au moyen d'un réseau à mailles carrées définies par les droites

$$x = \pm \lambda \times 1^{\text{mm}}$$

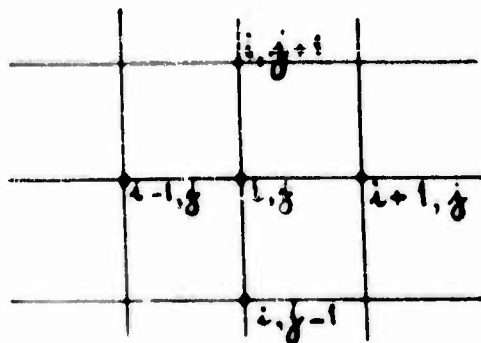
$$y = \pm \mu \times 1^{\text{mm}}$$

$$(\lambda, \mu : 1, 2, 3, \dots)$$



L'équation aux dérivées partielles est remplacée par l'équation aux différences finies, que nous avons établie plus haut (équation 6)

$$(6) \quad 4 \Psi_{ij} = \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}$$

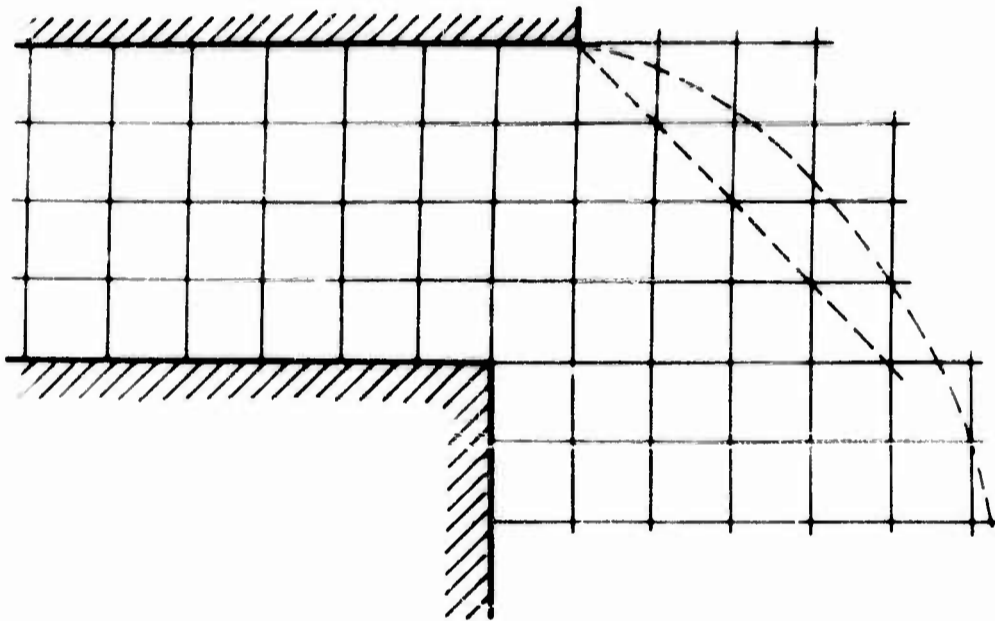


of the channel which is extended by the line of the jet.

To determine this function  $\Psi$ , we applied the method of finite differences.

To do this we traced a grid over the fluid domain filled by the jet, its squares being formed by the straight lines :

$$\begin{aligned} x &= \pm \lambda \times i^{\text{mm}} \\ y &= \pm \mu \times j^{\text{mm}} \\ (\lambda, \mu &: 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$



The partial differential equation is replaced by the equation containing finite differences which we established above (Equation (6)) :

$$(6) \quad 4 \Psi_{i,j} = \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1}$$



Dans un premier calcul, pour lequel nous nous sommes contentés d'une approximation assez grossière, nous avons remplacé la frontière constituée par la ligne de jet par un contour formé de brins du réseau et de diagonales s'écartant le moins possible de la ligne de jet, et nous avons attribué à la fonction  $\Psi$  en chaque sommet des valeurs approchées déterminées par interpolation graphique. Par exemple, les points O, A, M, H, B, N étant ceux indiqués sur la figure 2 on a pris :

$$\Psi_A = \frac{OA}{OM} \times 100$$

$$\Psi_B = \frac{HB}{HN} \times 100$$

Pour résoudre le système constitué par les équations (6) nous avons utilisé la méthode de relaxation (4).

Soit  $R_{i,j} = \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 4\Psi_{i,j}$  le résidu relatif au point  $i,j$ , et formé à partir de valeurs arbitraires des  $\Psi_{i,j}$ .

La méthode de relaxation consiste à corriger les valeurs des  $\Psi_{i,j}$  par retouches successives de façon à diminuer les résidus.

Il est évident que si on fait une relaxation  $\delta\Psi$  en un point, le résidu en ce point est diminué de  $4\delta\Psi$  et les résidus aux points voisins sont augmentés de  $\delta\Psi$ .

Nous avons écrit les valeurs de la fonction et les corrections apportées à chacune d'elles à gauche des différents noeuds du réseau, les résidus à droite.

Chaque fois que nous avons rencontré un résidu entouré lui-même de résidus de même signe nous avons usé très largement du procédé de "sur-relaxation" : Ce procédé consiste à anticiper la suite du calcul, en majorant très largement la correction que l'on est tenté de faire en certains noeuds en vue d'annuler le résidu. On obtient alors un résidu important de signe opposé qui sera réduit ultérieurement lorsqu'on pratiquera la relaxation aux noeuds voisins.

Les valeurs initiales ont été déterminées par interpolation linéaire le long de droites perpendiculaires au bord inférieur du canal et au volet.

En cours de calcul nous avons multiplié par 10 les valeurs de la fonction  $\Psi$  pour améliorer la précision de la méthode.

On sait en effet que la fonction  $\Psi$  n'est définie qu'à un facteur multiplicatif près; son amplification par le facteur 10 suivi d'une nouvelle relaxation permet d'obtenir un chiffre significatif de plus dans la solution.

Signalons que lors du passage d'un tableau au tableau suivant nous avons recalculé directement tous les résidus afin de déceler les erreurs qu'il est

For a first calculation, in which we contented ourselves with a very rough approximation, we replaced the boundary formed by the line of the jet by a contour consisting of sides of grid squares and diagonals lying as close as possible to the boundary line of the jet, and we attributed to the  $\Psi$  function at each vertex approximate values determined by graphical interpolation. For instance, the points J, A, M, N, B, N being those shown on Figure 2, we took :

$$\Psi_A = \frac{OA}{OM} \times 100$$

$$\Psi_B = \frac{NB}{NN} \times 100$$

To solve the system constituted by equations (6), we used the method of relaxation (4).

Taking  $R_{i,j} = \Psi_{i+1,j} + \Psi_{i-1,j} + \Psi_{i,j+1} + \Psi_{i,j-1} - 4\Psi_{i,j}$  as the residue relative to the point  $i, j$ , found on the basis of arbitrary values of  $\Psi_{i,j}$ ,

The method of relaxation consists in correcting the values of the  $\Psi_{i,j}$  by successive stages in which the residues are diminished.

It is obvious that if we make a relaxation correction  $\delta\Psi$  at one point, the residue at that point decreases by  $4\delta\Psi$  and the residues at the neighboring points increase by  $\delta\Psi$ .

The values of the function and their corrections have been written on the left of the various points of intersection of the grid lines, and the residues on the right.

Each time that we found a residue surrounded by residues of the same sign, we made free use of the procedure known as "over-relaxation". This procedure consists in anticipating what is to follow in a calculation, and making a very liberal increase in the correction which appears desirable at certain points, in order to reduce the residue to zero. In this way we obtain a large residue with the opposite sign, which is reduced later when we apply relaxation to the neighboring points.

The initial values were determined by linear interpolation along straight lines perpendicular to the lower lip of the channel and to the flap.

In the course of our computations we multiplied the values of the  $\Psi$  function by 10 in order to increase the precision of the method.

We know that, actually, the  $\Psi$  function is only defined to within a multiplicative factor; its multiplication by the factor 10, followed by another relaxation, gives us one more significant figure in the solution.

d'ailleurs inutile de corriger. Il suffit d'établir un nouveau tableau en utilisant comme valeurs initiales les valeurs ainsi obtenues.

Les résultats successifs sont ceux des Tableaux "2" et "3" et le Tableau "4" fournit le résultat final.

Nous avons alors tracé les lignes de courant  $\Psi = K$  pour 3 valeurs particulières de la constante  $K$  : 25, 50, 75. Ces lignes sont celles de la Figure 3.

### 3) VERIFICATION.

Nous avons alors calculé deux points de la ligne  $\Psi = 50$  au moyen des formules théoriques (5).

Le Tableau "5" permet de suivre la marche de ces opérations.

Les formules utilisées ont été :

$$\xi' + \eta' = 2t = a + bi$$

$$u = a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 8(2 + b^2 - a^2)}$$

$$\rho = \sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2}} \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho + \frac{1}{\rho}} \quad \sin \theta = \frac{b}{\rho + \frac{1}{\rho}}$$

$$\xi' = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = \frac{d}{\pi} \left[ 2i \operatorname{Ln} \frac{1 - i \xi'^{\frac{1}{2}}}{1 + i \xi'^{\frac{1}{2}}} + v_1 \operatorname{Ln} \frac{1 - \xi'^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}}{1 + \xi'^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}} + v_1^{-1} \operatorname{Ln} \frac{1 - \xi'^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}}{1 + \xi'^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}} \right] + \frac{id}{v_1}$$

$$\alpha = \xi'^{\frac{1}{2}} \quad \beta = \xi'^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha} \quad \rho_2 e^{i\theta_2} = \frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} \quad \rho_3 e^{i\theta_3} = \frac{2 - \beta}{2 + \beta}$$

$$x = \theta \left[ \frac{\operatorname{Ln} \rho_2^2}{\pi} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{Ln} \rho_3^2}{\pi} - \frac{2\theta_1}{\pi} \right]$$

$$y = \theta \left[ \frac{\operatorname{Ln} \rho_1^2}{\pi} + \frac{2\theta_2}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\theta_3}{\pi} + \frac{1}{2} \right]$$

8.

It may be noted that when passing from one table to the next we recalculated all the residues directly, in order to find any errors, which, incidentally, it is unnecessary to correct. It is sufficient to draw up the new table using as initial values those just obtained.

The successive results obtained are shown in Tables 2 and 3, and Table 4 gives the final results.

We then plotted the stream lines  $\Psi = K$  for three particular values of the constant  $K$  . 25, 50, 75 . These lines are those shown in Figure 3.

### 3) VERIFICATION.

We then calculated two points of the line  $\Psi = 50$  by means of theoretical formulae (5).

These operations can be followed on Table 5.

The formulae used were the following :

$$\xi + \xi^{-1} = 2t = a + bi$$

$$u = a^2 + b^2 + \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 8(b^2 - a^2)}$$

$$\rho = \frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2} \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho + \frac{1}{\rho}} \quad \sin \theta = \frac{b}{\rho + \frac{1}{\rho}}$$

$$\xi = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$Z = \frac{1}{\pi} \left[ 2i \operatorname{Ln} \frac{1 - i \xi^{\frac{1}{2}}}{1 + i \xi^{\frac{1}{2}}} + v_1 \operatorname{Ln} \frac{1 - \xi^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}}{1 + \xi^{\frac{1}{2}} v_1^{-1}} + v_1^{-1} \operatorname{Ln} \frac{1 - \xi^{-\frac{1}{2}} v_1^{-1}}{1 + \xi^{-\frac{1}{2}} v_1^{-1}} \right] + \frac{id}{v_1}$$

$$\alpha = \xi^{\frac{1}{2}} \quad \beta = \xi^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rho_1 e^{i\theta_1} = \frac{1 - i\alpha}{1 + i\alpha} \quad \rho_2 e^{i\theta_2} = \frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} \quad \rho_3 e^{i\theta_3} = \frac{2 - \beta}{2 + \beta}$$

$$x = 8 \left[ \frac{\operatorname{Ln} \rho_2^2}{\pi} + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{Ln} \rho_3^2}{\pi} - \frac{2\theta_1}{\pi} \right]$$

$$y = 8 \left[ \frac{\operatorname{Ln} \rho_1^2}{\pi} + \frac{2\theta_2}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\theta_3}{\pi} + \frac{1}{2} \right]$$

Les résultats sont en définitive les suivants :

	I	II
$t_x$	1,3739	1,0625
$t_y$	1,3553	1,4803
$x$	0,223	0,507
$y$	1,414	1,287

La Figure 3 permet d'avoir une idée précise de l'approximation.

#### 4) REMARQUES DIVERSES.

Les résultats obtenus par la méthode numérique sont donc très satisfaisants dans la partie médiane du jet. Il est à prévoir cependant qu'il n'en serait pas de même au voisinage immédiat de l'arête d'articulation du volet par suite de l'erreur systématique due à la méthode des différences finies. Pour améliorer la précision dans cette région on peut songer à serrer les mailles du réseau de manière à se rapprocher de la distribution continue théorique.

Il nous a paru intéressant d'expérimenter ce procédé sur un exemple d'écoulement pour lequel la connaissance précise de la fonction  $\Psi$  en un point quelconque du fluide, s'obtient par des calculs élémentaires.

Nous avons choisi le problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un angle constitué par des parois limitant la région occupée par le fluide.

On sait que le potentiel complexe est défini par la formule :

$$f(z) = Az^k$$

Si l'angle vaut  $225^\circ$ ,  $k = \frac{4}{5}$  et  $f(z) = Az^{\frac{4}{5}}$

D'où l'expression de la fonction de courant :

$$\varphi(\rho, \theta) = A\rho^{\frac{4}{5}} \sin \frac{4}{5} \theta$$

Nous nous sommes donnés arbitrairement  $A = 100$  et nous avons construit avec soin la ligne de courant  $\Psi = 400$ . Le Tableau "6" donne la succession des calculs et la Figure 4 caractérise la ligne de courant ainsi calculée.

Au point de vue de la recherche mathématique des fonctions de courant, le problème qui fait l'objet de nos préoccupations ne diffère pas sensiblement de celui du calcul de la fonction  $\Psi$  dans la région limitée par la paroi et la ligne

The final results are as follows :

	I	II
$t_x$	1,3739	1,0625
$t_y$	1,3353	1,4803
$x$	0,223	0,507
$y$	1,414	1,287

From Figure 3 one can gain a clear idea of the degree of approximation.

#### 4) REMARKS.

The results obtained by the numerical method are thus very satisfactory in the meridian portion of the jet. However, they are likely to be less so in the immediate neighborhood of the edge of the flap, owing to the systematic error arising out of the method of finite differences. To increase the accuracy in this region, one may reduce the size of the grid squares so as to approach closer to theoretical continuous distribution.

We thought it would be of interest to try out this procedure on a flow in which the  $\Psi$  function at any point in the fluid can be accurately determined by elementary calculus.

We chose the problem of a fluid flowing round an angle formed by walls bounding the region occupied by the fluid.

We know that the complex potential is defined by the formula :

$$f(z) = Az^k$$

If the angle is of  $225^\circ$ ,  $k = \frac{4}{5}$  and  $f(z) = Az^{\frac{4}{5}}$

from which we have the expression for the stream function :

$$\Psi(r, \theta) = Ar^{\frac{4}{5}} \sin \frac{4}{5} \theta$$

We took an arbitrary value  $A = 100$  and carefully plotted the stream line  $\Psi = 400$ . Table 6 shows the computations made and Figure 4 shows the stream line as calculated in this way.

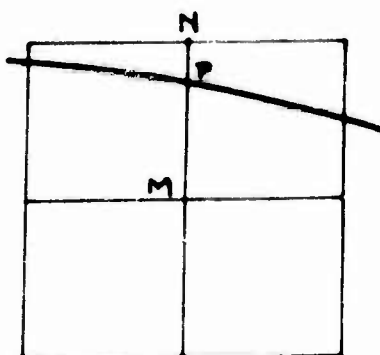
From the point of view of finding the stream functions mathematically, the problem with which we are occupied does not differ much from that of calculating the  $\Psi$  function in the region bounded by the wall and the stream line

de courant que nous avons déterminée. En effet, le sommet de l'angle présente ici la même singularité de vitesse que l'arête d'articulation du volet de notre problème d'écoulement.

Dans une première étape nous avons appliqué la méthode des différences finies en prenant un réseau assez lâche dont la largeur des mailles est l'unité choisie.

En vue d'améliorer les calculs de la fonction  $\Psi$  au voisinage de la ligne de courant (l'interpolation linéaire que nous avons faite dans les calculs précédents ne constitue, en effet, qu'une très grossière approximation), nous avons utilisé la remarque suivante :

- Supposons que la ligne de courant  $\Psi = 400$  coupe en  $P$  un brin  $MN$  du réseau, conformément à la figure ci-dessous :



Nous connaissons le rapport :

$$\frac{MP}{MN} = R$$

et la valeur de la fonction de courant au point  $P$  ( $\Psi = 400$ )

Ecrivons que, pour le petit intervalle  $MP$ , la fonction  $\Psi$  peut être approchée par une fonction linéaire, nous obtenons :

$$\frac{400 - \Psi_1}{R} = \Psi_3 - \Psi_1$$

d'où :

$$\Psi_3 = \frac{400}{R} - \frac{1-R}{R} \Psi_1$$

En portant dans la relation :

$$\Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 - 4\Psi_1 = 0,$$

il vient :

$$\Psi_2 + \Psi_4 + \Psi_5 - \left(4 + \frac{1-R}{R}\right) \Psi_1 + \frac{400}{R} = 0$$

Cette égalité remplace la relation habituelle dans le calcul du résidu au point  $M$  et elle fournit un nouveau coefficient de relaxation en ce point

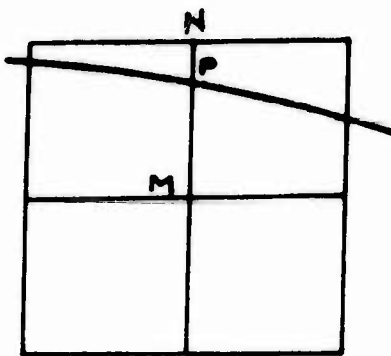
$$\left(4 + \frac{1-R}{R}\right)$$

which we have determined. The vertex of the angle actually presents the same velocity characteristic as the edge of the flap of our flow problem.

In the first stage we applied the method of finite differences, taking a fairly open grid in which the width of a square was the unit chosen.

In order to obtain a more accurate calculation of the  $\Psi$  function in the neighborhood of the stream line, (the linear interpolation which we made use of in the preceding calculations representing only a very rough approximation), we made use of the following argument :

- We assume that the stream line  $\Psi = 400$  intersects the side MN of a grid square at a point P, as in the figure below :



We know the relation :  $\frac{M.P}{MN} = R$

and the value of the stream function at the point P ( $\Psi = 400$ )

Writing that, for the small distance MP, the  $\Psi$  function can be approximated to a linear function, we obtain :

$$\frac{400 - \Psi_1}{R} = \Psi_3 - \Psi_1$$

from which :

$$\Psi_3 = \frac{400}{R} - \frac{1-R}{R} \Psi_1$$

Introducing this into the relation :

$$\Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 - 4 \Psi_1 = 0$$

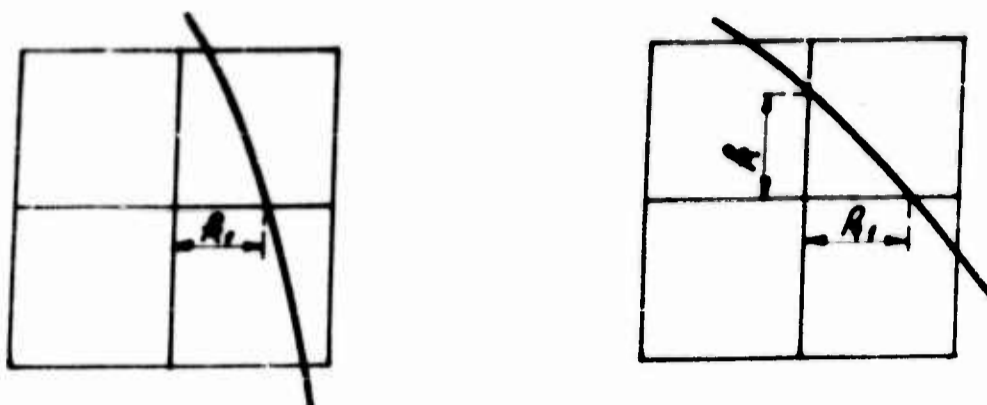
we obtain :

$$\Psi_2 + \Psi_4 + \Psi_5 - \left(4 + \frac{1-R}{R}\right) \Psi_1 + \frac{400}{R} = 0$$

This equation replaces the usual relation used in the calculus of residues at a point and it provides a new coefficient of relaxation at that point.

$$\left(4 + \frac{1-R}{R}\right)$$

On a de même deux autres cas de figure possibles :



Les relations correspondantes sont les suivantes :

$$\psi_3 + \psi_4 + \psi_5 - \left(4 + \frac{1-R_1}{R_1}\right) \psi_1 + \frac{400}{R_1} = 0$$

$$\psi_4 + \psi_5 - \left(4 + \frac{1-R_1}{R_1} + \frac{1-R_2}{R_2}\right) \psi_1 + \frac{400}{R_2} + \frac{400}{R_1} = 0$$

Nous avons alors remplacé la ligne de courant par un contour formé de brins du réseau entièrement extérieur à la région dans laquelle nous nous proposons de calculer la fonction  $\psi$  et nous avons classé les points intérieurs en deux catégories :

- a) Les points "ordinaires" pour lesquels :

$$\psi_2 + \psi_3 + \psi_4 + \psi_5 - 4\psi_1 = 0$$

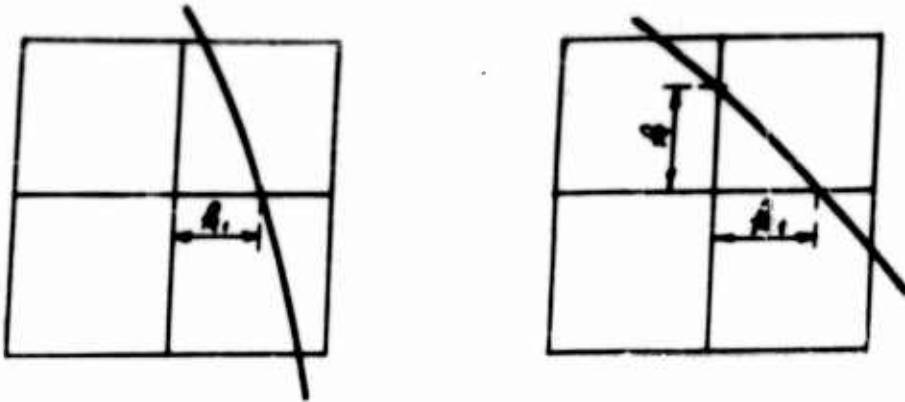
- b) Les points "singuliers" caractérisés par l'une des relations établies précédemment. (Il est clair qu'il en existe un, et un seul, sur chaque verticale du réseau : le point d'ordonnée maximum).

Ces points sont répartis comme il est indiqué sur la Figure 5.

Les calculs de relaxation font l'objet des Tableaux "7", "8", "9", "10". (Les valeurs initiales de la fonction  $\psi$  ont été construites par interpolation linéaire, comme dans le premier problème. En cours de calcul, nous avons également multiplié par 10 les valeurs de  $\psi$  pour avoir un chiffre significatif de plus dans les résultats).

Dans une deuxième étape de calcul nous nous sommes proposés de resserrer les mailles du réseau primitif. La méthode la plus simple consiste à diviser par 2 la largeur d'une maille.

There are also two other possible cases, shown in the figures :



The corresponding equations are :

$$\Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 - \left(4 + \frac{1-h_1}{h_1}\right) \Psi_1 + \frac{400}{h_1} = 0$$

$$\Psi_4 + \Psi_5 - \left(4 + \frac{1-h_1}{h_1} + \frac{1-h_2}{h_1}\right) \Psi_1 + \frac{400}{h_1} + \frac{400}{h_1} = 0$$

We then replaced the stream line by a contour formed by sides of grid squares entirely outside the region in which we intended to calculate the  $\Psi$  function, and we classified the points inside in two categories :

- a) the "ordinary" points, for which :

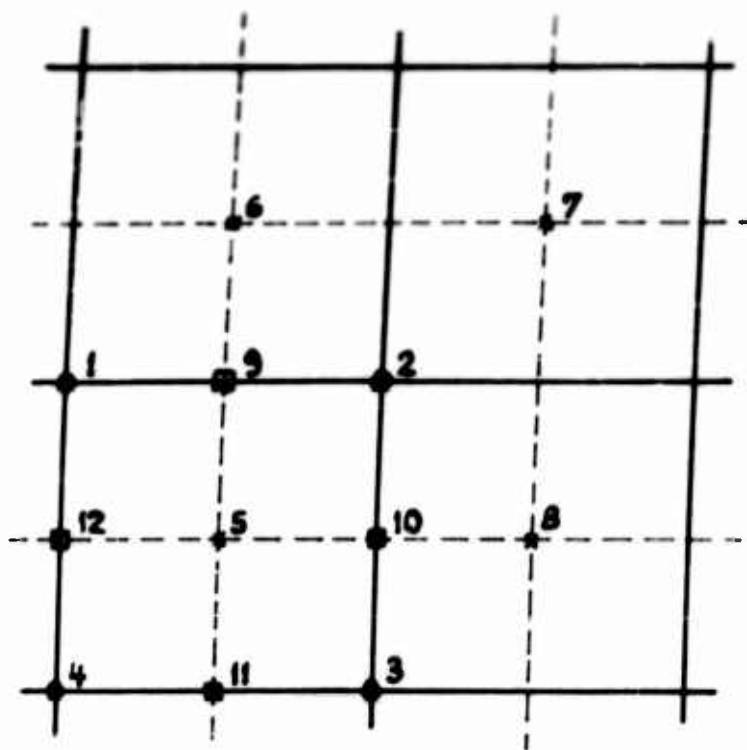
$$\Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 - 4\Psi_1 = 0$$

- b) the "extraneous" points, defined by one of the relations established above. (It is clear that there is one only on each vertical line of the grid : the highest ordinate point).

These points are distributed as shown in Figure 5.

The relaxation calculations are set out in Tables 7, 8, 9, 10. (The initial values of the  $\Psi$  function were established by linear interpolation, as in the first problem. In the course of the calculations, we again multiplied the values of  $\Psi$  by 10 to obtain one more significant figure in the results).

In a second stage of computation, we decided to use a grid with smaller squares. The simplest method consists in dividing the length of the side of one square by 2.



Les noeuds de la nouvelle grille sont alors, soit les noeuds, soit les centres de chaque maille, soit les milieux des brins du réseau initial.

Nous avons gardé les valeurs de la fonction  $\Psi$  aux noeuds de l'ancien réseau.

Au centre d'une maille, par exemple au point 5 de la figure, nous avons choisi :

$$\Psi_5 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4}{4}$$

Nous avons calculé ensuite :

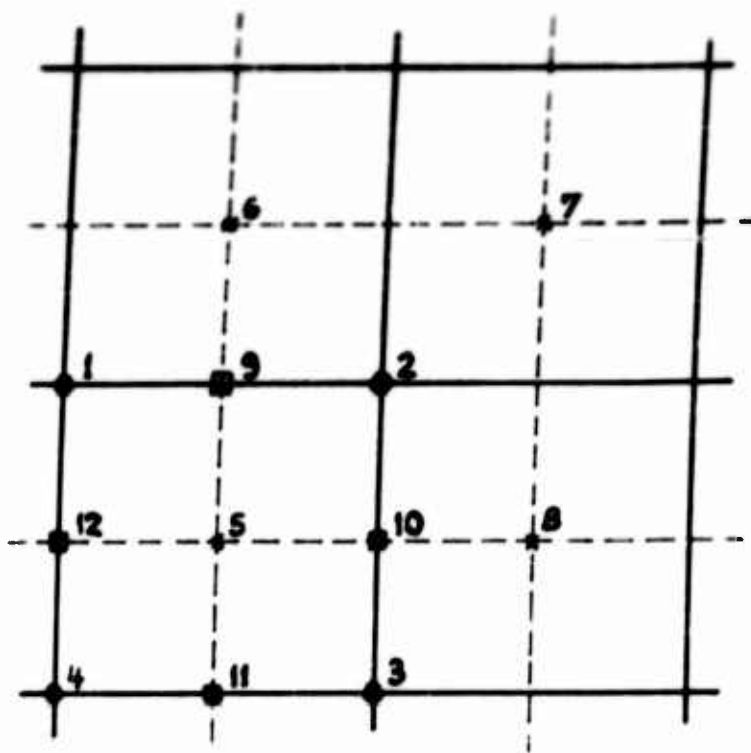
$$\Psi_9 = \frac{\Psi_2 + \Psi_6 + \Psi_1 + \Psi_5}{4}$$

et le reste de la division nous a fourni le résidu en ce point; nous avons continué les calculs pour  $\Psi_{10}$ ,  $\Psi_{11}$  etc...

Nous avons enfin déterminé les résidus aux points 5, 6 ..... et aux noeuds de l'ancien réseau 1, 2, ..... Ceci nous a conduit aux résultats du Tableau "II".

Par économie de temps, nous nous sommes limités à la région voisine du sommet de l'angle, région pour laquelle le calcul précédent a fait apparaître des résidus importants. (ce qui correspond au fait que nous n'avons qu'une approximation assez médiocre de la fonction  $\Psi$  dans cette zone).

Une nouvelle relaxation nous a permis de réduire ces résidus comme dans la première partie. C'est ce que manifestent très nettement les chiffres du Tableau "I2".



Les noeuds de la nouvelle grille sont alors, soit les noeuds, soit les centres de chaque maille, soit les milieux des brins du réseau initial.

Nous avons gardé les valeurs de la fonction  $\Psi$  aux noeuds de l'ancien réseau.

Au centre d'une maille, par exemple au point 5 de la figure, nous avons choisi :

$$\Psi_5 = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4}{4}$$

Nous avons calculé ensuite :

$$\Psi_9 = \frac{\Psi_2 + \Psi_6 + \Psi_1 + \Psi_5}{4}$$

et le reste de la division nous a fourni le résidu en ce point; nous avons continué les calculs pour  $\Psi_{10}$ ,  $\Psi_{11}$  etc...

Nous avons enfin déterminé les résidus aux points 5, 6 ..... et aux noeuds de l'ancien réseau 1, 2, ..... Ceci nous a conduit aux résultats du Tableau "II".

Par économie de temps, nous nous sommes limités à la région voisine du sommet de l'angle, région pour laquelle le calcul précédent a fait apparaître des résidus importants. (ce qui correspond au fait que nous n'avons qu'une approximation assez médiocre de la fonction  $\Psi$  dans cette zone).

Une nouvelle relaxation nous a permis de réduire ces résidus comme dans la première partie. C'est ce que manifestent très nettement les chiffres du Tableau "I2".

En comparant les résultats obtenus à quelques valeurs calculées au moyen de la formule :

$$\Psi(r, \theta) = 100r^3 \sin \frac{4}{5} \theta$$

on observe une amélioration très sensible de la précision qui justifie pleinement l'intérêt du procédé.

Les chiffres figurant aux noeuds du Tableau "I3" sont, de haut en bas : ceux de la première relaxation, ceux de la relaxation à maille en nombre double, et les chiffres du calcul théorique.

°  
° °

Que devons-nous conclure, sinon que le problème de la détermination des lignes de courant à l'intérieur d'un jet semble facile à résoudre numériquement lorsqu'on connaît avec précision les limites du jet.

Les calculs ont nécessité l'emploi de deux calculateurs. Les interpolations préliminaires et les calculs de résidus ont été réalisés avec une machine à calculer de bureau; la méthode de relaxation proprement dite a été appliquée à la main. Signalons que cette technique de calcul exige un certain doigté et il faut la patience de subir un bon entraînement avant de l'utiliser avec fruit.

Un tableau de relaxation demande une quinzaine d'heures de travail dans les conditions précédemment indiquées.

Nous avons envisagé de reprendre l'ensemble des calculs et de les compléter par une méthode d'itération qui semble mieux adaptée que la relaxation aux techniques du calcul électronique.

Cette méthode est la suivante : après avoir disposé une répartition arbitraire aussi vraisemblable que possible des  $\Psi$ , on remplace à chaque noeud la valeur de la fonction  $\Psi$  qui y figure par la moyenne arithmétique des  $\Psi$  de 4 noeuds voisins (compte tenu des relations modifiées au voisinage de la ligne de jet).

On répète un certain nombre de fois l'opération.

Ces approximations sont convergentes, nous l'avons constaté sur d'autres exemples. Mais la convergence est parfois très lente et dans le cas du problème qui nous occupe la méthode n'est exploitable qu'avec l'aide d'une calculatrice électronique.

Remarquons enfin que la méthode peut s'étendre au cas d'un écoulement de révolution, l'équation  $\Delta \Psi = 0$  étant remplacée par :  $\Delta \Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0$

Comparing the results obtained with certain values calculated by means of the formula :

$$\Psi(\rho, \theta) = 100\rho^{\frac{4}{3}} \sin \frac{4}{3}\theta$$

we note a very definite improvement in precision, which fully justifies the use of this procedure.

The figures shown at the intersections of the grid in Table I3 are, starting from the top : the results of the first relaxation, those of the relaxation for four times the number of squares, and the theoretically calculated figures.

°  
° °

What may we conclude, if not that the problem of determining the stream lines in the interior of a jet appears easy to solve numerically if we know the exact boundaries of the jet.

Two computers were required in order to carry out the calculations. The preliminary interpolations and the calculus of residues were carried out with the aid of a calculating machine; the actual method of relaxation was applied by hand. It should be mentioned that this computing technique demands a certain facility and one must have the patience to undergo a period of training before one can achieve useful results.

In the conditions indicated above, a relaxation table requires about fifteen hours work.

We intend to go over all the calculations once more and complete them by a method of iteration which would appear better adapted, that relaxation, to the techniques of electronic calculus.

This method is as follows : after making an arbitrary distribution of the most likely values of  $\Psi$ , we replace the value of the  $\Psi$  function figuring at each intersection of the grid by the arithmetic mean of the  $\Psi$  values at the four neighboring intersections (taking into account the modified relations in the neighborhood of the jet contour).

The operation is repeated a certain number of times.

As we have noted in other examples, these approximations converge. But the convergence is sometimes very slow and in the case of the problem with which we are dealing the method is only feasible with the aid of an electronic calculator.

Let us finally note that the method can be extended to the case of an axially symmetric flow, the equation  $\Delta\Psi = 0$  being replaced by :  $\Delta\Psi - \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0$

**UNCLASSIFIED**

**A  
D 204073**

**Armed Services Technical Information Agency**

**ARLINGTON HALL STATION  
ARLINGTON 12 VIRGINIA**

**FOR  
MICRO-CARD  
CONTROL ONLY**

**4 OF 5**

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**UNCLASSIFIED**

L'équation aux différences finies correspondante s'écrit (équation (5)) :

$$\Psi_1 \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) + \Psi_2 + \Psi_3 \left( 1 + \frac{1}{2\tau} \right) + \Psi_4 - 4\Psi = 0$$

Nous orientons actuellement nos recherches vers la détermination de la limite du jet dans le cas de l'écoulement de révolution.

---

#### B I B L I O G R A P H I E .

---

- ① H. LAMB, Hydrodynamics - Dover Publication, N.Y. 1945, Page II9.
- ② R.T. JONES, Theoretical determination of the minimum drag for air-foils at supersonic speeds - Journal of Aeronautical Science 1952, pages 813 to 822.
- ③ " a " est déterminé par l'équation 6I, § XIII de la théorie précédente. La représentation paramétrique de la trajectoire limite du jet se calcule par les équations 59 et 6I du § XIII.
- ④ O.R. HARTREE, FRS. Numerical Analysis (Oxford, Clarendon Press, 1952)  
  
LEGRAS, Technique de résolution des équations aux dérivées partielles (Dunod, Paris).
- ⑤ D'après les formules 48, 5I, 52, 53 § XII et application des formules du § XIII de la théorie précédente.

The corresponding equation containing finite differences will be written (Equation 5) :

$$\Psi_1 \left( 1 - \frac{1}{2\tau} \right) + \Psi_2 + \Psi_3 \left( 1 + \frac{1}{2\tau} \right) + \Psi_4 - 4\Psi = 0$$

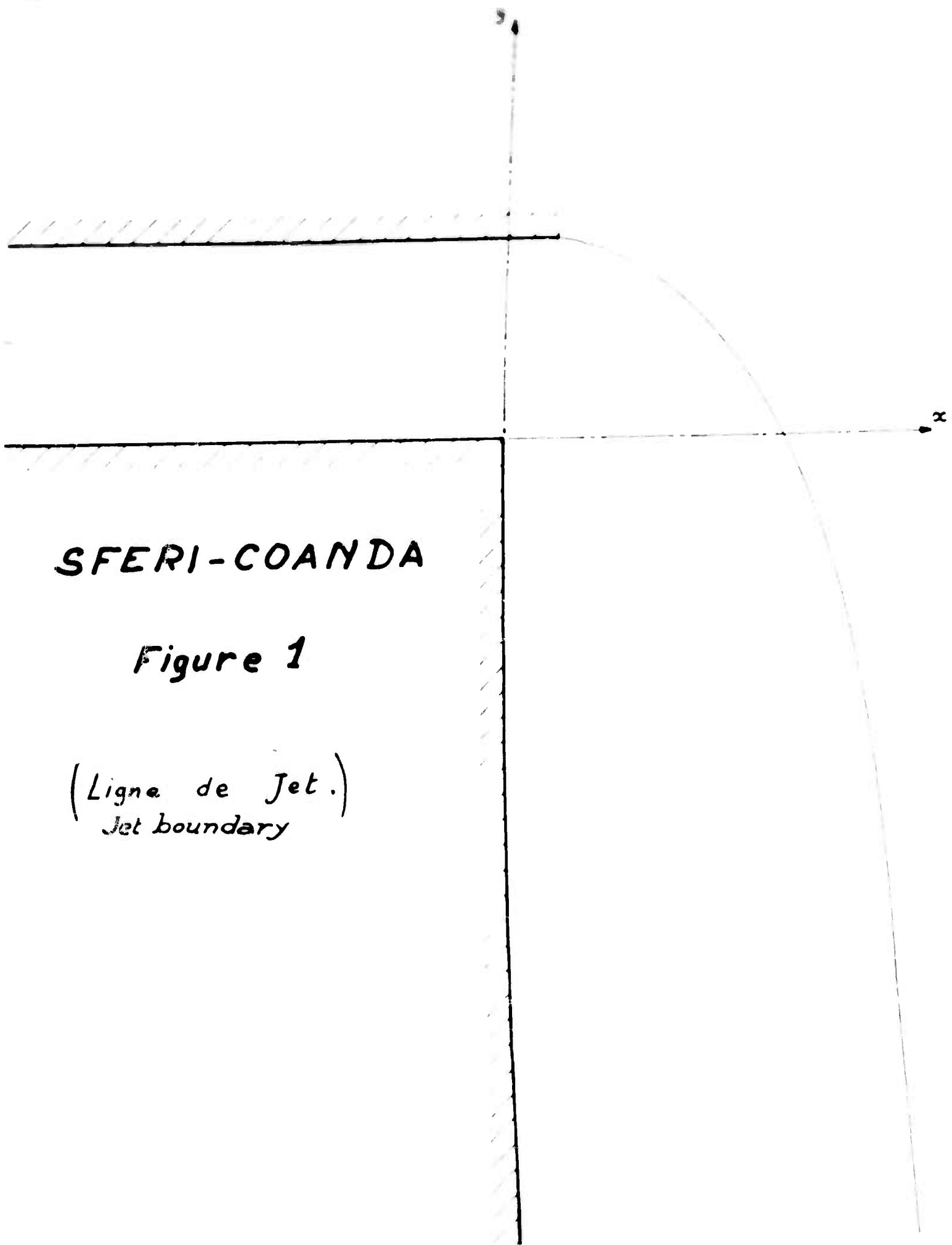
At present we are directing our research towards the determination of the free jet boundary in the case of an axially symmetric flow.

---

#### B I B L I O G R A P H Y .

---

- ① H. LAMB, Hydrodynamics - Dover Publication, N.Y. 1945, Page 119.
  - ② R.T. JONES, Theoretical determination of the minimum drag for airfoils at supersonic speeds - Journal of Aeronautical Science 1952, pages 813 to 822.
  - ③ " a " is determined by equation 6I, § XIII of the preceding mathematical theory. The parametric representation of the jet boundary is calculated by means of equations 59 and 6I of § XIII.
  - ④ O.R. HARTREE, FRS, Numerical Analysis (Oxford, Clarendon Press, 1952)  
LEGRAS, Technique de résolution des équations aux dérivées partielles (Dunod, Paris).
  - ⑤ According to the formulae 48, 51, 52, 53 of § XII and by application of the formulae of § XIII of the preceding mathematical theory.
-



**SFERI-COANDA**

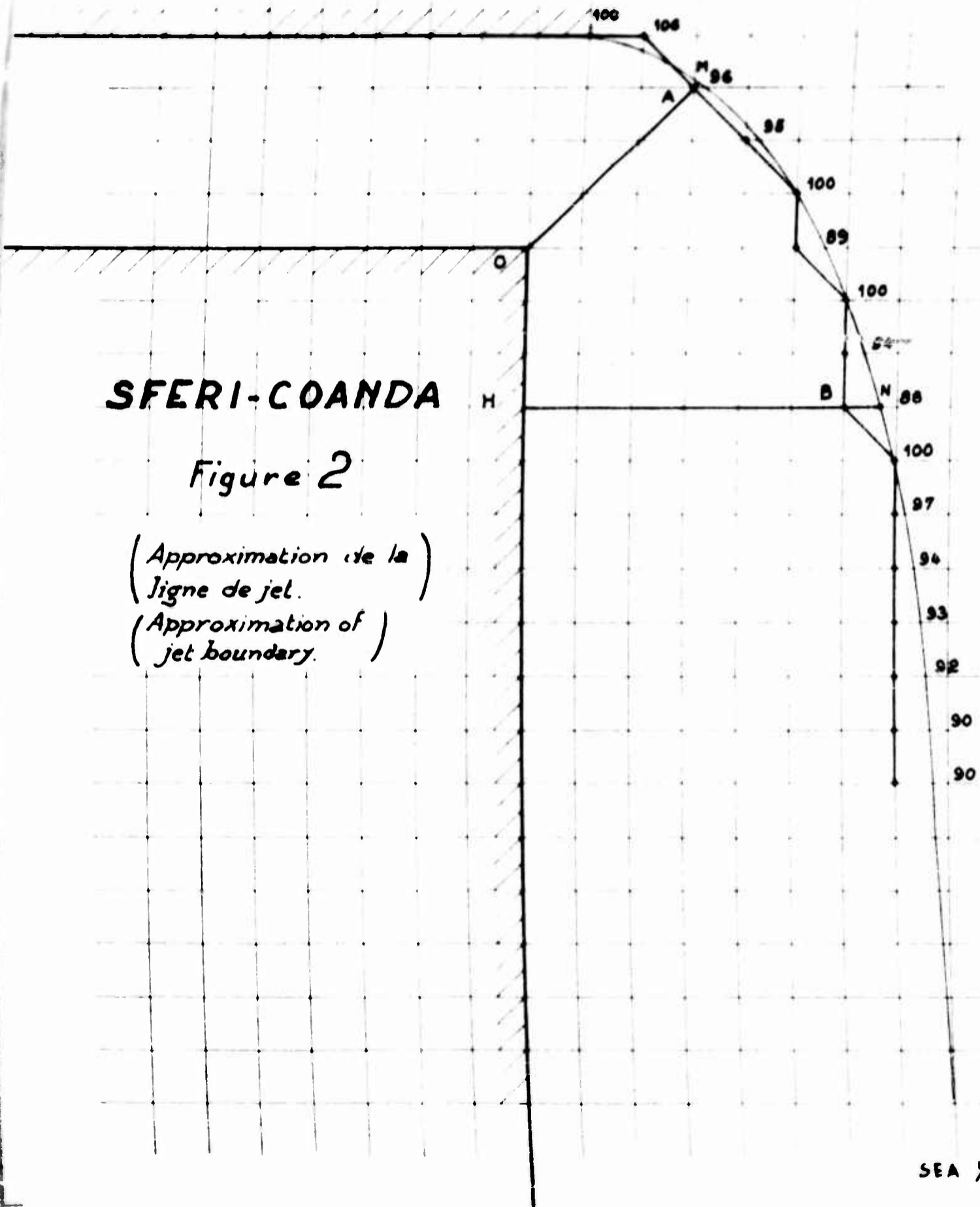
**Figure 1**

(Ligne de Jet.)  
Jet boundary

# SFERI-COANDA

Figure 2

(Approximation de la  
ligne de jet.)  
(Approximation of  
jet boundary.)



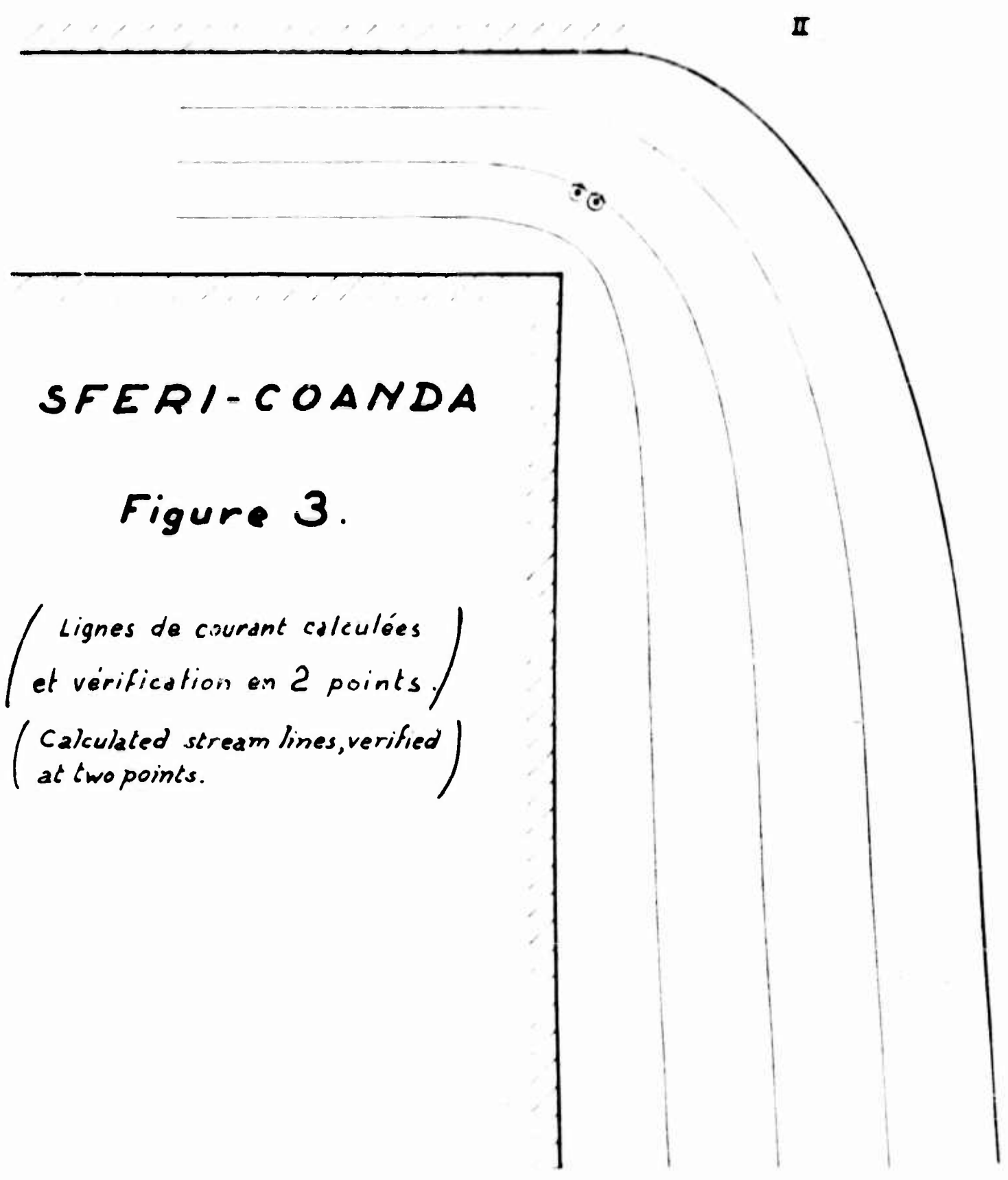
I

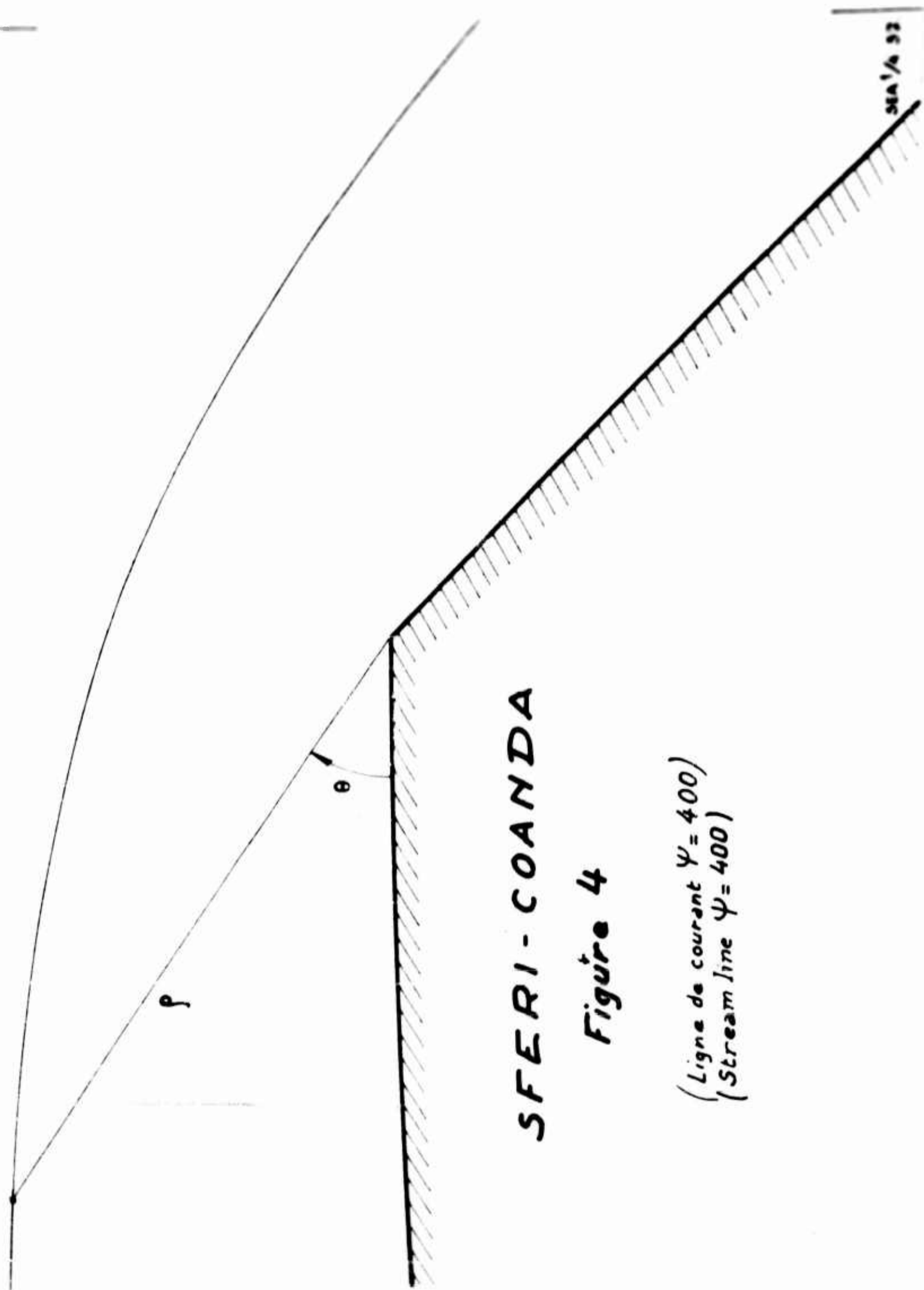
II

**SFERI-COANDA**

**Figure 3.**

( Lignes de courant calculées  
et vérification en 2 points. )  
( Calculated stream lines, verified  
at two points. )





SFERI - COANDA

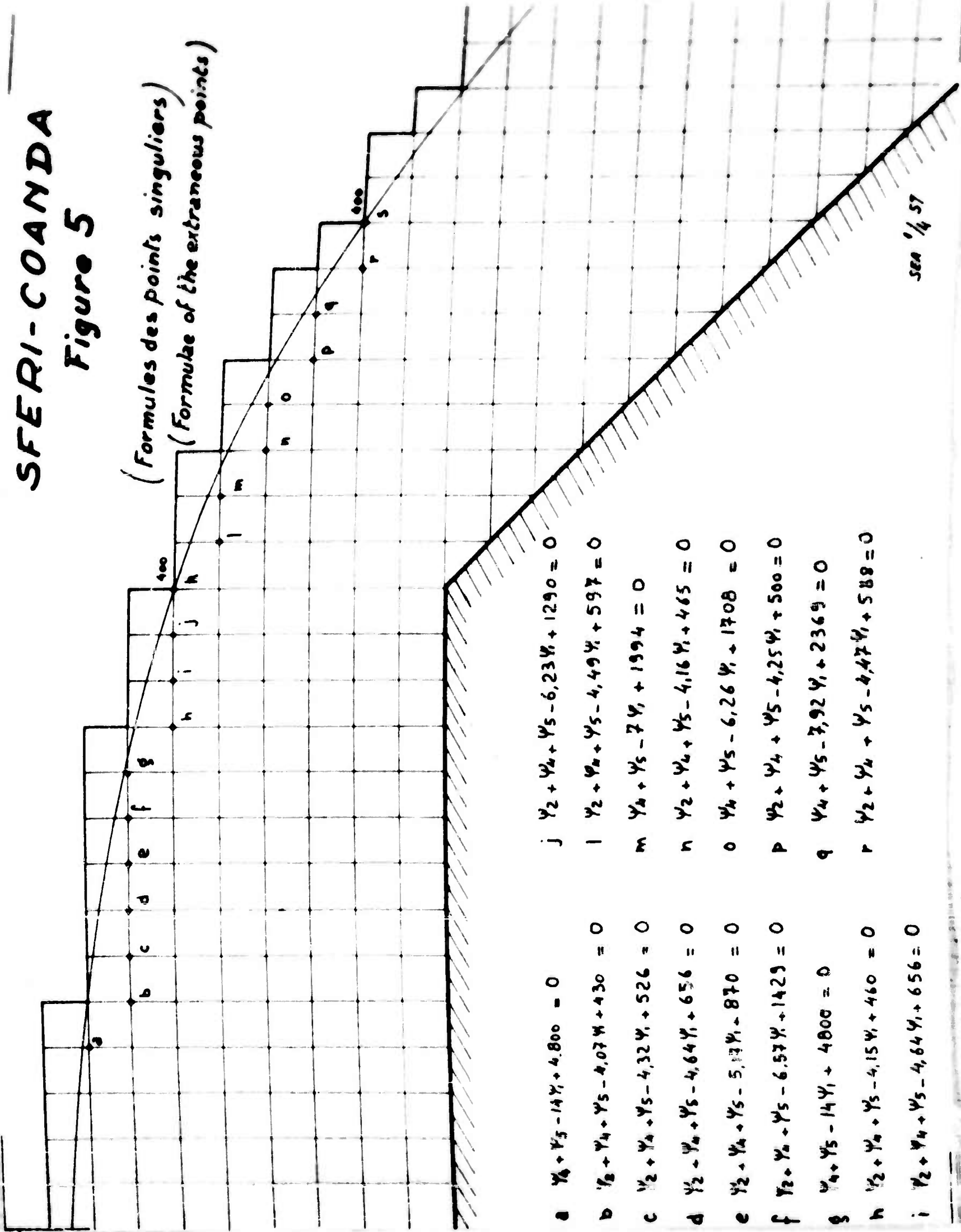
Figuro 4

(Ligne de courant  $\psi = 400$ )  
(Stream line  $\psi = 400$ )

# SFERI-COANDA

## Figure 5

(Formules des points singuliers)  
(Formulae of the extraneous points)



- a  $Y_4 + Y_5 - 14Y_1 + 4800 = 0$
- b  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,07Y_1 + 430 = 0$
- c  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,32Y_1 + 526 = 0$
- d  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,64Y_1 + 656 = 0$
- e  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 5,17Y_1 + 870 = 0$
- f  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 6,57Y_1 + 1429 = 0$
- g  $Y_4 + Y_5 - 14Y_1 + 4800 = 0$
- h  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,15Y_1 + 460 = 0$
- i  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,64Y_1 + 656 = 0$
- j  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 6,23Y_1 + 1290 = 0$
- l  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,49Y_1 + 597 = 0$
- m  $Y_4 + Y_5 - 7Y_1 + 1994 = 0$
- n  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,16Y_1 + 465 = 0$
- o  $Y_4 + Y_5 - 6,26Y_1 + 1708 = 0$
- p  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,25Y_1 + 500 = 0$
- q  $Y_4 + Y_5 - 7,92Y_1 + 2369 = 0$
- r  $Y_2 + Y_4 + Y_5 - 4,47Y_1 + 588 = 0$

SEA 1/4 ST

# SFERI-COANDA

# Tableau 1

$\theta$	$\cos \theta$	$0,8 \cos \theta$	$\frac{1-0,8 \cos \theta}{1+0,8 \cos \theta}$	$9 \frac{1-0,8 \cos \theta}{1+0,8 \cos \theta}$	$\log 9 \frac{1-0,8 \cos \theta}{1+0,8 \cos \theta}$	$x - a$	$\sin \theta$	$-\frac{4 \sin \theta}{3}$
0	1	0,8	0,11 111	1	0	0	0	0
- 10°	0,98 481	0,78 784	0,11 867	1,06 801	0,02 857	0,20 940	-0,17 365	0,23 153
- 20°	0,93 969	0,75 175	0,14 171	1,27 543	0,10 566	0,77 440	-0,34 202	0,45 603
- 30°	0,86 603	0,69 282	0,18 146	1,63 312	0,21 302	1,56 131	-0,5	0,66 667
- 40°	0,76 604	0,61 283	0,24 005	2,16 049	0,33 455	2,45 205	-0,64 279	0,85 705
- 45°	0,70 711	0,56 569	0,27 739	2,49 654	0,39 733	2,91 219	-0,70 711	0,94 281
- 50°	0,64 279	0,51 423	0,32 080	2,88 721	0,46 048	3,37 504	-0,76 604	1,02 139
- 60°	0,5	0,4	0,42 857	3,85 714	0,58 627	4,29 701	-0,86 603	1,15 471
- 70°	0,34 202	0,27 362	0,57 033	5,13 299	0,71 037	5,20 659	-0,93 969	1,25 292
- 80°	0,17 365	0,13 892	0,75 605	6,80 445	0,83 279	6,10 385	-0,98 481	1,31 308
- 84°	0,10 453	0,08 362	0,84 566	7,61 092	0,88 143	6,46 035	-0,99 452	1,32 603
- 87°	0,05 234	0,04 187	0,91 962	8,27 661	0,91 785	6,72 729	-0,99 863	1,33 151
- 90°	0	0	1	9	0,95 424	6,99 401	-1	1,33 333

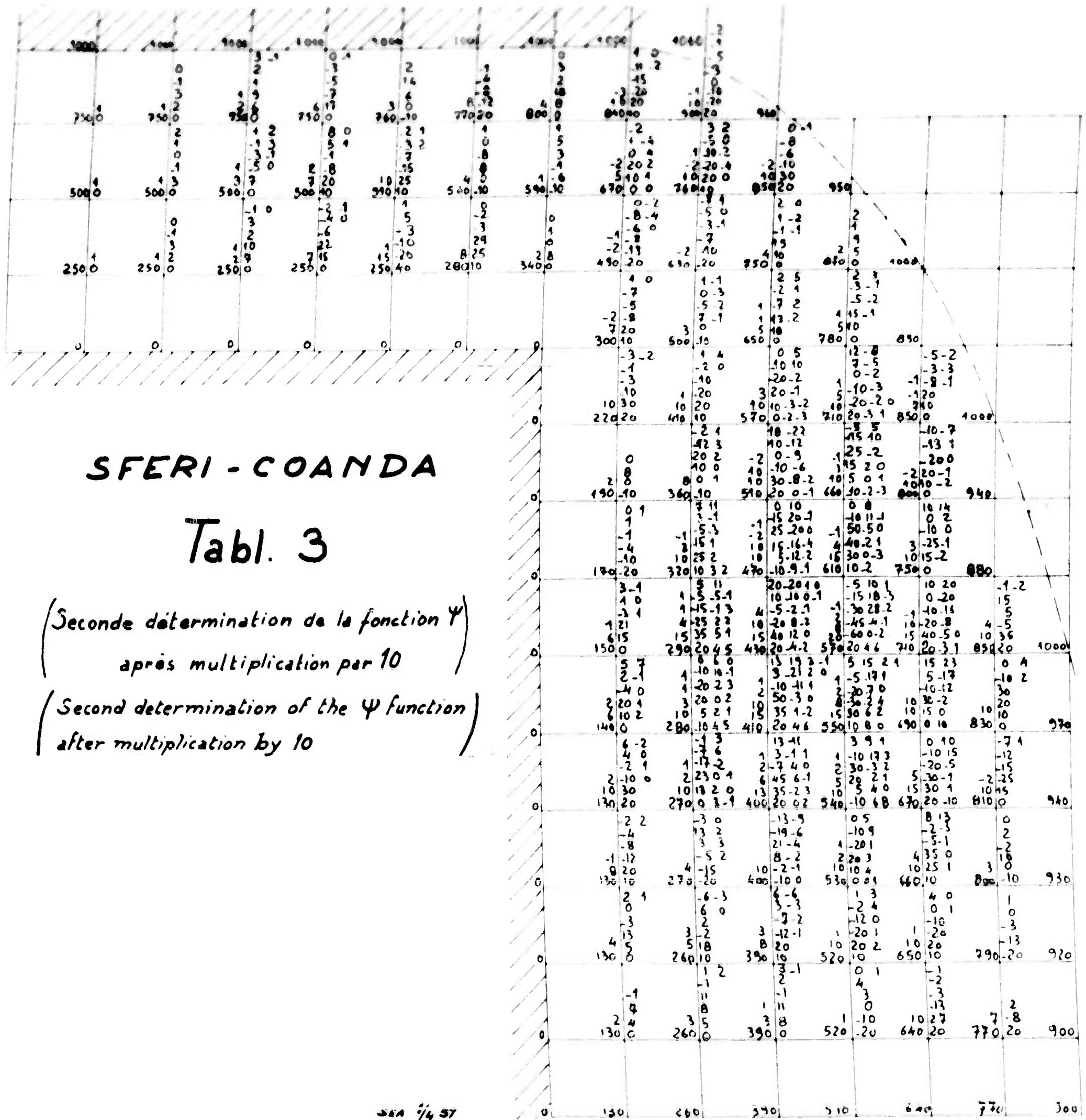
1

(Calcul de la ligne de Jet)  
(Calculation of the jet boundary)

$\frac{-4 \sin \theta}{3}$	$\text{Arc tg} \left( \frac{-4 \sin \theta}{3} \right)$	$3,81972 \text{ Arc tg} (-)$	$\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$	$\log \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$	$5,8633 \log (-)$	x	y
0	0	0	1	0	0	1,006	4
0,23153	0,22707	0,86733	1,42028	0,15238	0,89348	1,215	3,974
0,45603	0,4279	1,63446	2,03961	0,30955	1,81505	1,780	3,819
0,66667	0,58799	2,24595	3	0,47712	2,79759	2,567	3,448
0,85705	0,70868	2,70696	4,59895	0,66266	3,88551	3,4585	2,821
0,94281	0,75600	2,88770	5,82850	0,76555	4,48832	3,918	2,399
0,98139	0,79579	3,03969	7,54847	0,87786	5,14733	4,381	1,892
0,99547	0,85704	3,27365	13,92872	1,14391	6,70732	5,303	0,566
0,99925	0,89682	3,42560	32,16199	1,50735	8,83832	6,2125	-1,413
0,99993	0,91993	3,51387	130,66556	2,11616	12,40810	7,1445	-4,894
0,99998	0,92479	3,53243	363,9635	2,56105	15,01672	7,466	-7,484
0,99999	0,92648	3,53889	1458,854	3,16391	18,55159	7,733	-11,013
0,99999	0,92743	3,54252	$\infty$	$\infty$	$\infty$	8	$-\infty$

SEA 1/4 57





SFERI - COANDA

Tabl. 3

(Seconde détermination de la fonction  $\Psi$   
après multiplication par 10)

(Second determination of the  $\Psi$  function  
after multiplication by 10)

	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1060						
750	750 1	751 0	753 -1	756 1	763 2	778 -1	804 0	847 -2	909 -2	960							
500	500 1	501 2	504 0	509 1	520 2	544 1	591 -1	673 0	767 0	858 -1	950						
250	250 1	251 0	253 0	257 0	266 1	288 0	342 -2	487 0	628 -1	754 -1	872 2	1000					
0	0	0	0	0	0	0	0	305 0	503 -1	657 -2	786 -1	890					

**SFERI-COANDA**

**Tableau 4.**

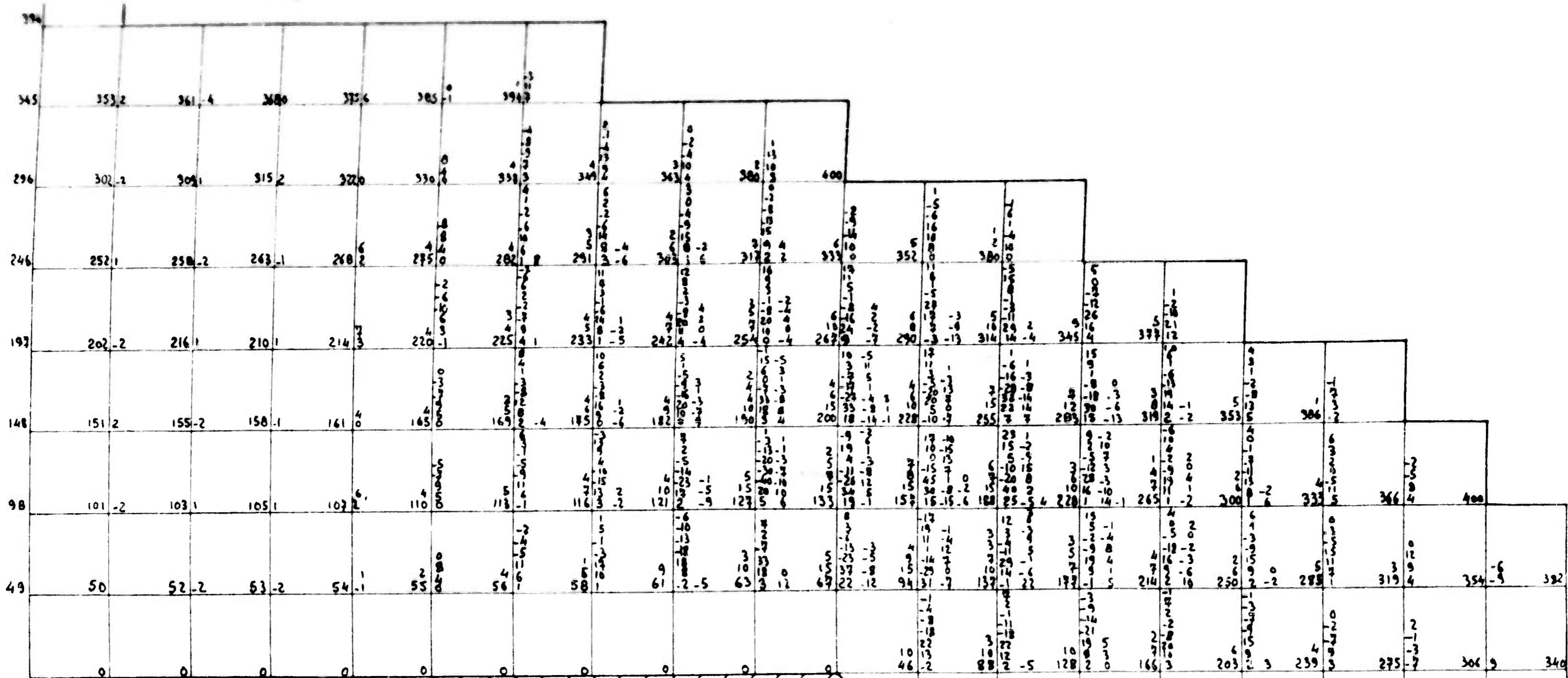
(Valeurs finales de la fonction  $\Psi$ )  
 (Final values of the  $\Psi$  function)

0	230 -2	421 0	583 -2	724 0	855 2	1000											
0	192 0	368 1	528 -2	672 0	808 -2	940											
0	170 1	332 0	487 -1	628 9	763 -2	880											
0	157 1	311 -1	459 -1	599 1	734 0	864 -2	1000										
0	148 2	295 0	438 0	576 1	710 0	840 2	970										
0	142 0	283 1	422 1	558 -1	690 0	818 1	940										
0	137 2	274 2	410 0	543 1	674 1	803 0	930										
0	134 1	268 0	401 -1	531 2	661 1	790 1	920										
0	132 -1	263 2	394 -1	521 1	650 -1	777 2	900										
0	130	260	390	510	640	770	900										

$x$	1,3839	1,0628	$\sin \frac{\theta}{2}$	-0,4081106	-0,40855100	$\frac{1}{\pi} \text{Log } p_1^2$	-0,298332	-0,208362
$y$	1,9553	1,4803	$\alpha = \xi - \frac{1}{\xi}$	0,4654605-i.0,2074696	0,45121205-i.0,25050361	$\frac{1}{\pi} \text{Log } p_2^2$	-0,246137	-0,214682
$a$	2,7478	2,1250	$\beta = \xi + \frac{1}{\xi}$	1,8923213-i.0,8988909	1,6938380-i.0,94068416	$-\frac{2\theta_1}{\pi}$	0,572299	0,565456
$b$	2,7606	2,9606	$1 - i\alpha$	0,8925384-i.0,4654605	0,84941639-i.0,45121205	$\frac{2\theta_2}{\pi}$	0,130998	0,166973
$a^2$	7,55040484	4,51562500	$1 + i\alpha$	1,2084696+i.0,4654605	1,25058361+i.0,45121205	$\frac{\theta_3}{2\pi}$	-0,242566	-0,239608
$b^2$	7,13210436	8,76515236	$\frac{1-i\alpha}{1+i\alpha}$	0,4420678-i.0,5558944	0,41504616-i.0,61055033	$-\left(\frac{1}{\pi} \text{Log } p_1^2 + \frac{1}{\pi} \text{Log } p_2^2 - \frac{2\theta_1}{\pi}\right)$	0,22264 $\approx$ 0,223	0,50729 $\approx$ 0,507
$a^2 + b^2$	14,68250920	13,28077736	$p_1^2$	0,504443	0,432925	$y = \left(\frac{1}{\pi} \text{Log } p_1^2 + \frac{2\theta_1}{\pi} + \frac{\theta_3}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\right)$	1,41375 $\approx$ 1,414	1,28703 $\approx$ 1,287
$(a^2 + b^2)^2$	215,576076408	176,379047286	$\text{tg } \theta_1$	-1,257486	-1,230105	<p style="text-align: center;"><b>SFERI-COANDA</b></p> <p style="text-align: center;"><b>Tableau 5</b></p> <p style="text-align: center;">(Calcul des 2 points de vérification)</p> <p style="text-align: center;">(Verification by calculation of two theoretical points.)</p>		
$2 + b^2 - a^2$	1,58169952	6,24952736	$\theta_1$	-51°, 50694	-50°, 89097			
$8(2 + b^2 - a^2)$	12,65359616	49,99621888	$2 - \alpha$	1,5345395+i.0,2074696	1,54878795+i.0,25050361			
$(a^2 + b^2)^2 + 8(2 + b^2 - a^2)$	228,229672568	226,375266166	$2 + \alpha$	2,4654605-i.0,2074696	2,45121205-i.0,25050361			
$\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 8(2 + b^2 - a^2)}$	15,1072722	15,0457724	$\frac{2-\alpha}{2+\alpha}$	0,6110069-i.0,1355669	0,61496828+i.0,16509570			
$u^1$	14,8948907	14,1622749	$p_2^2$	0,391708	0,405443			
$u^2$	221,857768965	200,598355893	$\text{tg } \theta_2$	0,221874	0,268462			
$\sqrt{u^2 - 4}$	14,7600057	14,0213536	$\theta_2$	12°, 50979	15°, 02750			
$\frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2}$	0,0674425	0,0709607	$2 - \beta$	0,2076787-i.0,7988909	0,3061620-i.0,94068416			
$p = \sqrt{\frac{u - \sqrt{u^2 - 4}}{2}}$	0,258697	0,266384	$2 + \beta$	3,7923213+i.0,9988909	3,6938380-i.0,94068416			
$\frac{1}{p}$	3,850641	3,753973	$\frac{2-\beta}{2+\beta}$	0,00994397-i.0,2127549	0,01693307-i.0,25097531			
$p + \frac{1}{p}$	4,110338	4,020357	$p_3^2$	0,0453635	0,0673549			
$p - \frac{1}{p}$	-3,590944	-3,484588	$\text{tg } \theta_3$	-21,395372	-15,294052			
$\cos \theta$	0,6685095	0,52856000	$\theta_3$	-87°, 32389	-86°, 25905			
$\sin \theta$	-0,7437042	-0,8488961	$\log p_1^2$	-0,297179	-0,363587			
$\sqrt{p}$	0,50960475	0,51612446	$\log p_2^2$	-0,407037	-0,392071			
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	1,96230510	1,93751741	$\log p_3^2$	-1,543293	-1,171630			
$\cos \frac{\theta}{2}$	+0,9133755	+0,8742311	$\frac{1}{\pi} \text{Log } p_1^2$	-0,217813	-0,266486			

**SFERI-COANDA**      **Tableau 6**       $\left( \begin{array}{l} \text{Détermination de la ligne} \\ \psi = 400 \end{array} \right)$   
*(Determination of the line  $\psi = 400$ )*

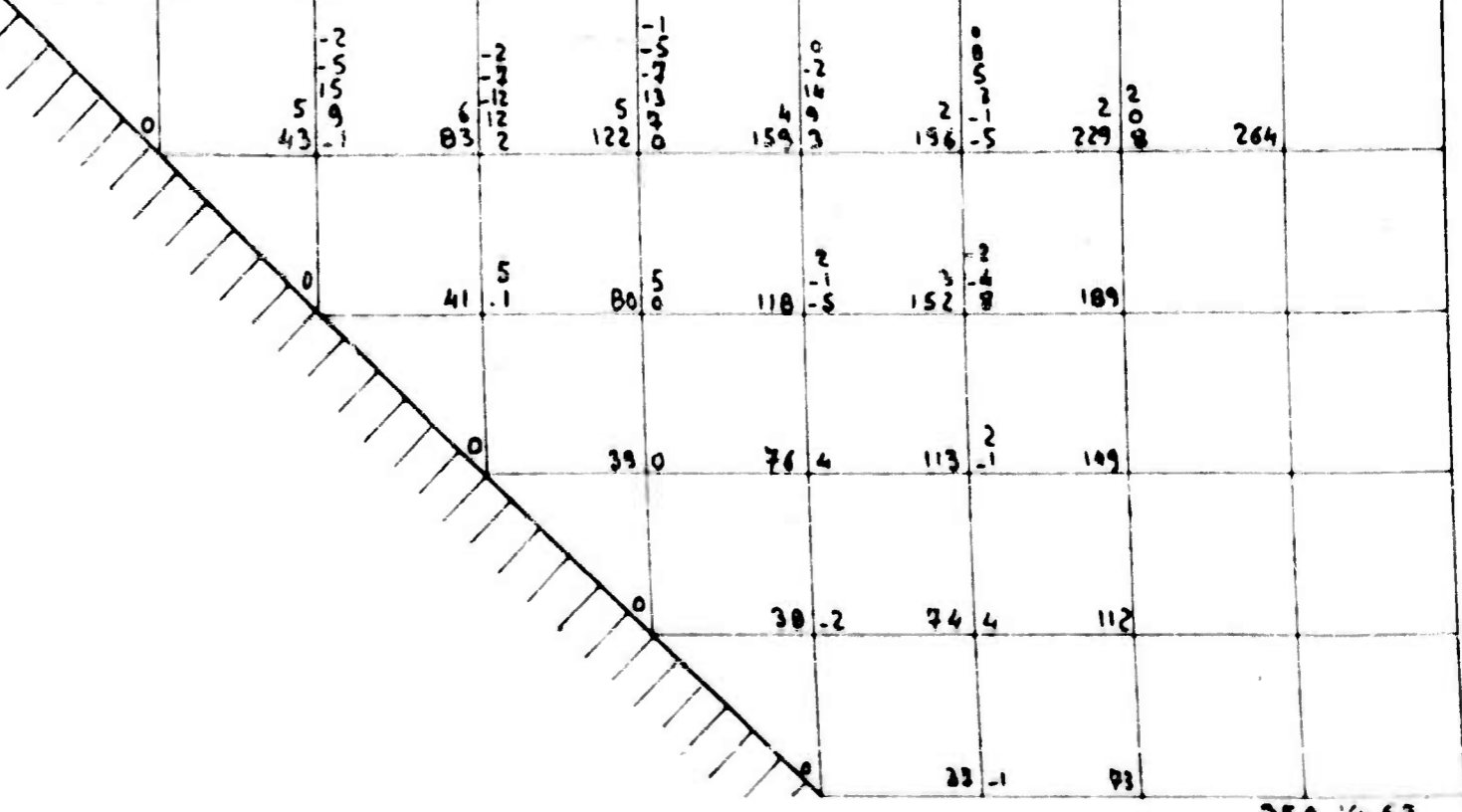
$\theta$	$\frac{4}{5} \theta$	Log sin $\frac{4}{5} \theta$	Colog sin $\frac{4}{5} \theta$	$\frac{3}{4}$ Colog sin $\frac{4}{5} \theta$	Log. p = $\frac{3}{4}$ Colog. sin $\frac{4}{5} \theta + \frac{3}{2} \log 4$	p
10°	8	1,09 807	0, 90 193	1,12 741	1,87 998	25, 854
20	16	1,39 566	0, 60 434	0,75 542	1,50 799	32, 21
30	24	1,56 569	0, 43 431	0,54 288	1,29 545	19, 74
40	32	1,68 283	0, 31 717	0,39 646	1,14 903	14, 09
50	40	1,76 922	0, 23 078	0,28 847	1,04 104	10, 99
60	48	1,83 540	0, 16 460	0,20 575	0,95 832	9, 085
70	56	1,88 678	0, 11 322	0,14 152	0,83 409	7, 835
80	64	1,92 651	0, 07 349	0,09 186	0,84 443	6, 989
90	72	1,95 657	0, 04 343	0,05 429	0,80 686	6, 410
100	80	1,97 821	0, 02 179	0,02 724	0,77 981	6, 023
110	88	1,99 224	0,00 776	0,00 970	0,76 227	5, 784
120	96	1,99 914	0,00 086	0,00 107	0,75 364	5, 670
125	100	0	0	0	0,75 257	5, 656



**SFERI-COANDA**

**Tableau 7**

( PREMIERE DETERMINATION DE LA FONCTION  $\psi$  )  
 ( FIRST DETERMINATION OF THE  $\psi$  FUNCTION )



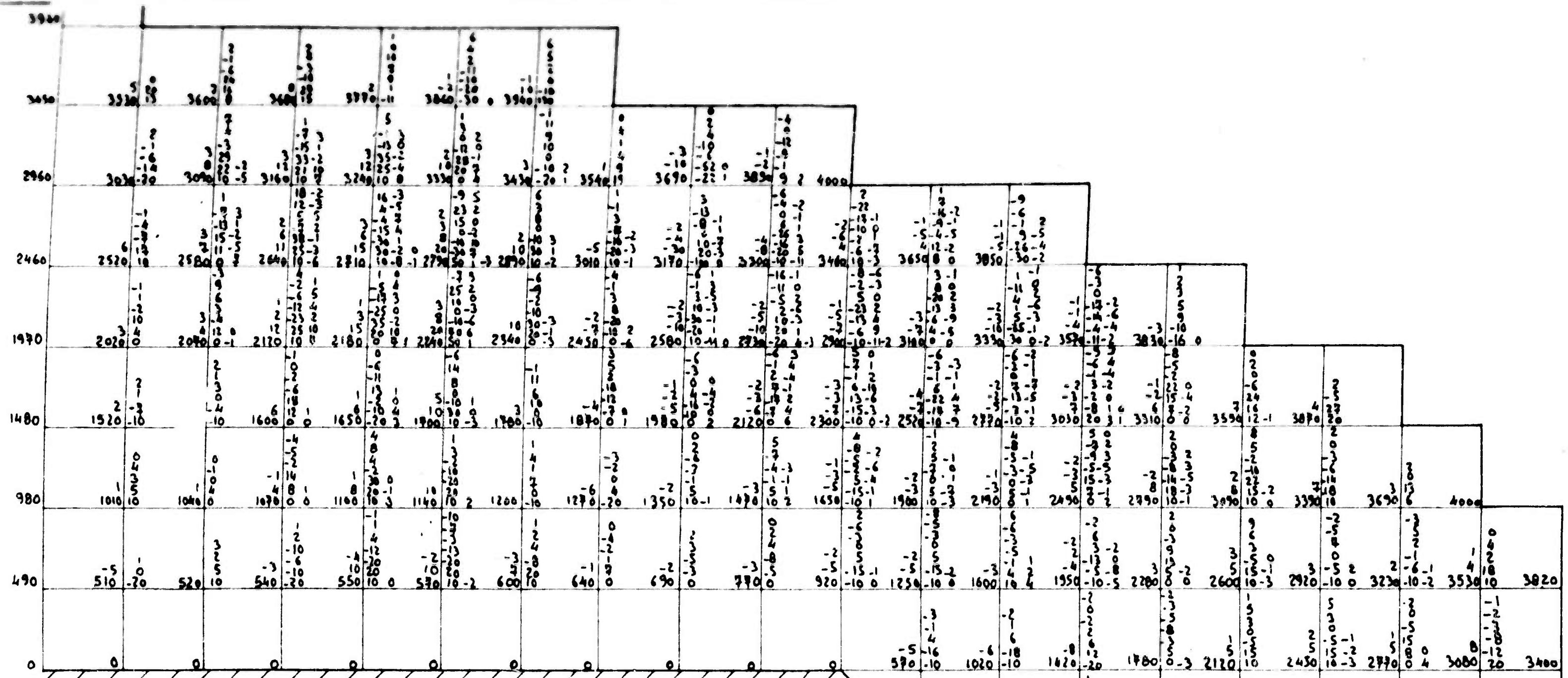
304	308	312	316	320	324	328	332	336	340	344	348	352	356	360	364	368	372	376	380	384	388	392	396	400
345	353	361	369	377	385	393	401	409	417	425	433	441	449	457	465	473	481	489	497	505	513	521	529	537
296	308	309	316	324	330	333	343	354	369	380	391	400	409	418	427	436	445	454	463	472	481	490	499	508
296	302	307	315	322	329	337	342	353	366	382	392	400	409	418	427	436	445	454	463	472	481	490	499	508
244	252	258	264	271	279	287	294	301	317	336	356	385	400	418	436	454	472	490	508	526	544	562	580	598
246	252	258	263	268	279	286	294	299	317	339	353	381	400	418	436	454	472	490	508	526	544	562	580	598
197	202	207	212	218	224	234	242	245	258	293	298	316	335	353	372	391	410	429	448	467	486	505	524	543
197	202	206	210	214	224	232	242	253	253	266	285	304	323	342	361	380	399	418	437	456	475	494	513	532
148	152	156	160	165	170	178	187	198	212	230	252	272	303	331	359	387	415	443	471	499	527	555	583	611
148	151	155	158	161	169	177	185	195	210	225	248	277	302	330	358	386	414	442	470	498	526	554	582	610
98	101	104	107	110	114	120	127	135	147	165	190	219	249	279	309	339	369	399	429	459	489	519	549	579
98	101	103	105	109	114	118	127	135	147	162	187	216	247	277	308	338	368	398	428	458	488	518	548	578
49	51	52	54	55	57	60	64	69	77	92	125	160	195	228	260	292	324	356	388	420	452	484	516	548
49	50	52	53	54	57	60	64	70	76	88	122	160	192	225	258	290	322	354	386	418	450	482	514	546
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56	101	138	178	212	245	277	308	322	336	350	364	378	392
											48	91	130	166	200	232	264	296	328	360	392	424	456	488
											40	89	127	163	198	231	264	296	328	360	392	424	456	488
											34	84	121	156	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											31	80	118	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											27	79	115	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											23	76	113	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											20	74	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											18	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											16	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											14	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											12	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											10	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											8	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											6	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											4	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											2	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478
											0	73	112	155	189	222	254	286	318	350	382	414	446	478

# SFERI-COANDA

## Tableau 8

(DEUXIEME DETERMINATION DE LA FONCTION  $\Psi$ )

(SECOND DETERMINATION OF THE  $\Psi$  FUNCTION)



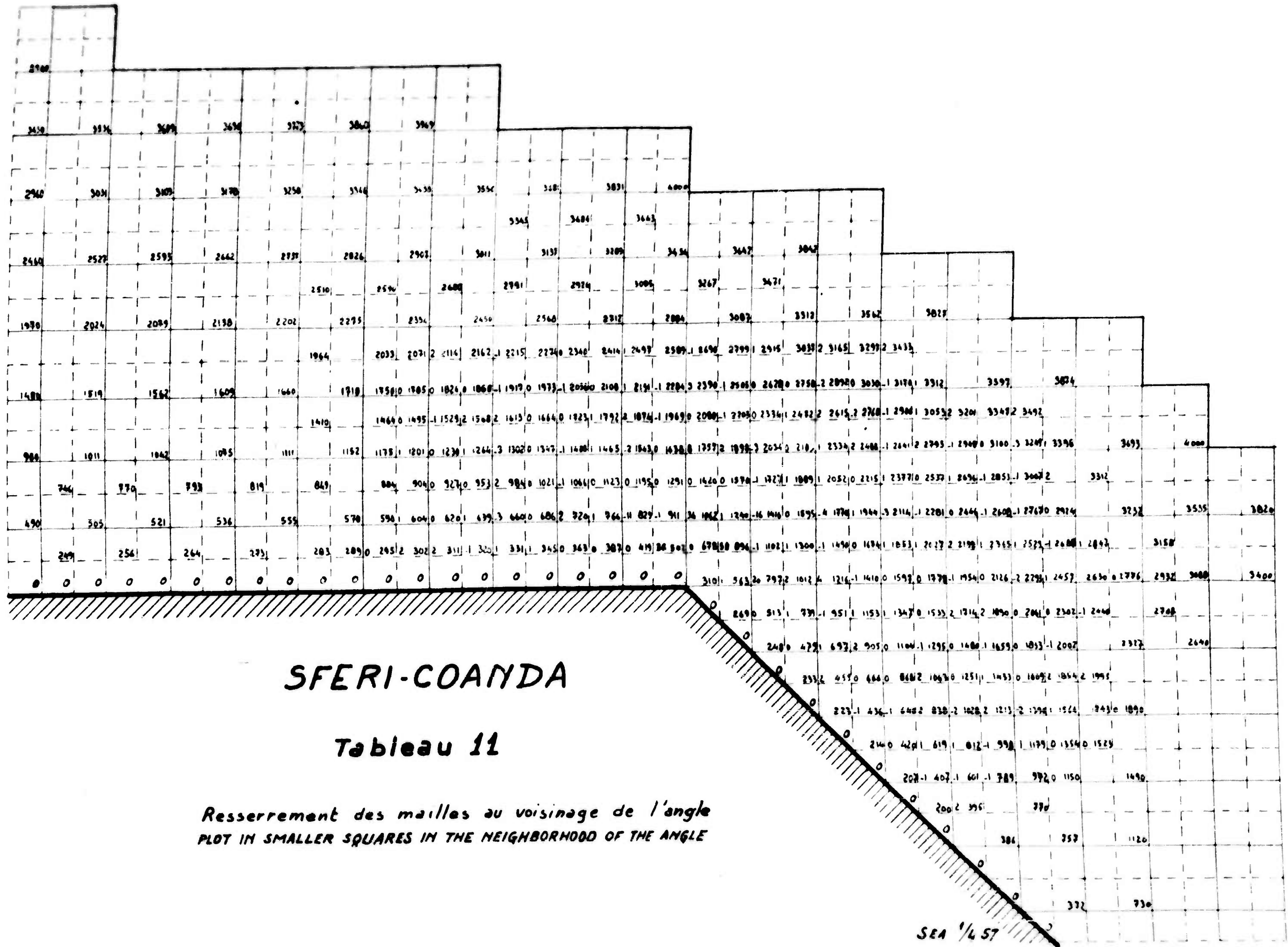
**SFERI-COANDA**

**Tableau 9**

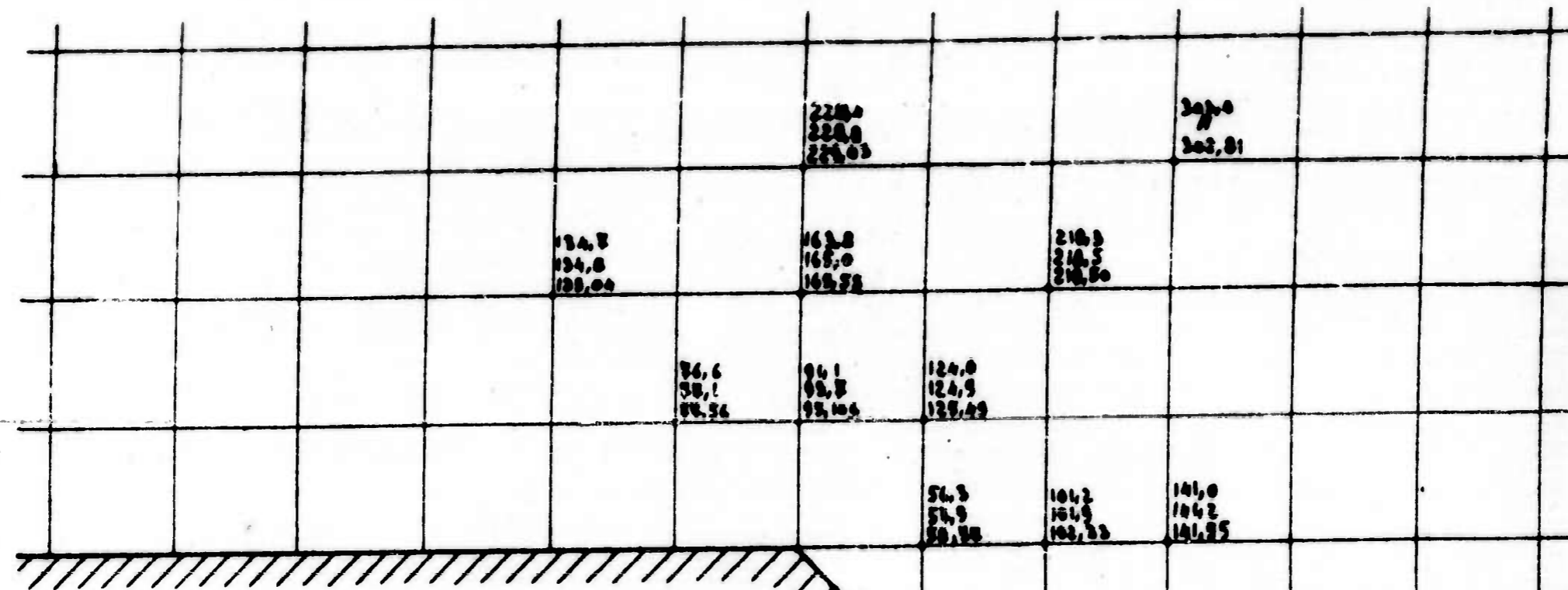
( TROISIEME DETERMINATION DE LA FONCTION  $\Psi$  APRES )  
 MULTIPLICATION PAR 10

( THIRD DETERMINATION OF THE  $\Psi$  FUNCTION )  
 AFTER MULTIPLICATION BY 10









**SFERI-COANDA**

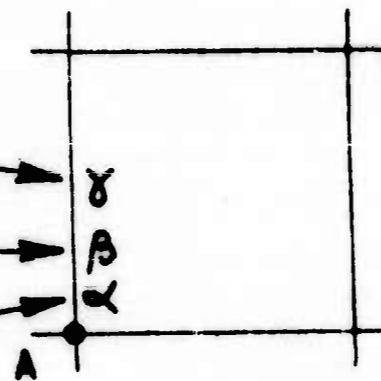
**Tableau 13**

(COMPARAISON DES RESULTATS -)  
(COMPARISON OF RESULTS)

RESULTAT DE LA 1<sup>re</sup> RELAXATION  
RESULT OF THE FIRST RELAXATION

RESULTAT DE L'ETUDE APPROFONDIE  
RESULT OF THE DETAILED STUDY

VALEUR REELLE  
REAL VALUE



## ROLE DE LA VISCOSITE

Dans la théorie mathématique précédente nous avons toujours supposé le fluide non visqueux. La conséquence immédiate de cette hypothèse est que le jet formait un domaine rigoureusement séparé du fluide dans lequel il débouchait et sans influence aucune sur celui-ci. Cette théorie ne peut donc nous donner qu'une idée assez précise de l'écoulement dans le jet.

Pour rendre compte de l'Effet COANDA d'une façon plus proche de la réalité, il faut donc analyser le rôle de la viscosité. Ce rôle sera double :

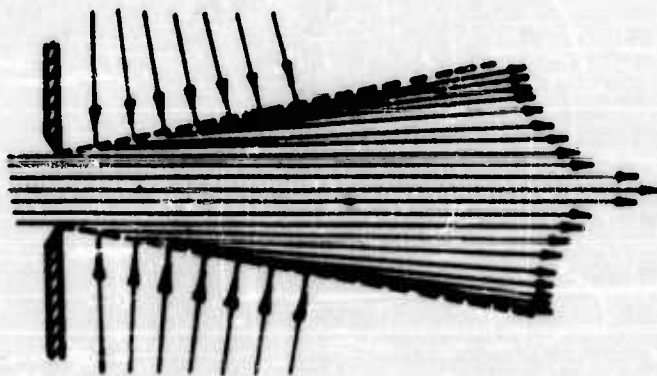
1°. - La viscosité va agir dans le jet en y créant une couche limite.

La vitesse au voisinage immédiat de la paroi sera nulle et augmentera très rapidement dans une section du jet. Cette couche limite laminaire deviendra très rapidement turbulente, ce qui aura pour conséquence d'homogénéiser la répartition de vitesse dans une section du jet. En même temps, le mouvement sera freiné et notamment en supersonique on repassera très rapidement du régime supersonique le long de la première facette à un régime subsonique le long des facettes suivantes.

2. - La viscosité va agir à la surface libre du jet d'une façon particulièrement intense et c'est là l'intérêt fondamental de l'Effet COANDA.

On sait que dans un jet débouchant par un orifice en mince paroi les lignes de courant sont parallèles, l'écoulement est très rapidement uniforme et la viscosité intervient peu à l'intérieur du jet, mais la surface libre du jet constitue une surface de discontinuité des vitesses et le mouvement y devient immédiatement tourbillonnaire.

Le fluide ambiant est alors aspiré dans le jet qui se gonfle régulièrement. La viscosité donne donc dans ce cas naissance à un mouvement secondaire : l'aspiration du fluide ambiant à la surface libre du jet crée une dépression attirant le fluide autour du jet selon le schéma suivant :



## THE ROLE OF VISCOSITY

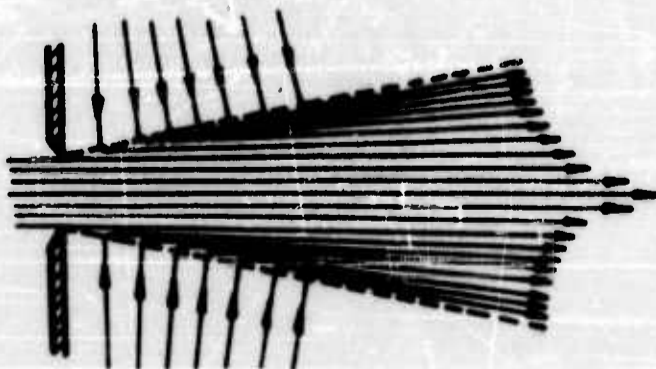
In the preceding mathematical theory we always assumed that the fluid was non viscous. The immediate consequence of this hypothesis was that the jet formed a domain rigorously separate from the fluid into which it emerged, and having no influence whatsoever on this fluid. Hence this theory can only give us a fairly clear idea of the flow pattern in the jet itself.

To describe the COANDA Effect in a manner which corresponds more exactly to reality, we must therefore analyse the part played by viscosity. The latter plays a double role :

1°. - The effect of viscosity within the jet is to create a boundary layer. The velocity next to the wall is zero and increases very rapidly in a cross-section of the jet. This laminar boundary layer very rapidly becomes turbulent, the result of which is to homogenize the distribution of velocities in a cross-section of the jet. At the same time, the flow is slowed down and, especially in the supersonic regime, there is a rapid drop from supersonic flow along the first facet to subsonic flow along the following facets.

2°. - At the free surface of the jet, viscosity has a particularly strong effect and this is where the fundamental importance of the COANDA Effect comes in. We know that in a jet emerging from a thin-wall orifice the stream lines are parallel, the flow very rapidly becomes uniform and viscosity has little effect inside the jet, but the free surface of the jet constitutes a surface of discontinuity of velocities and turbulence is immediately set up there.

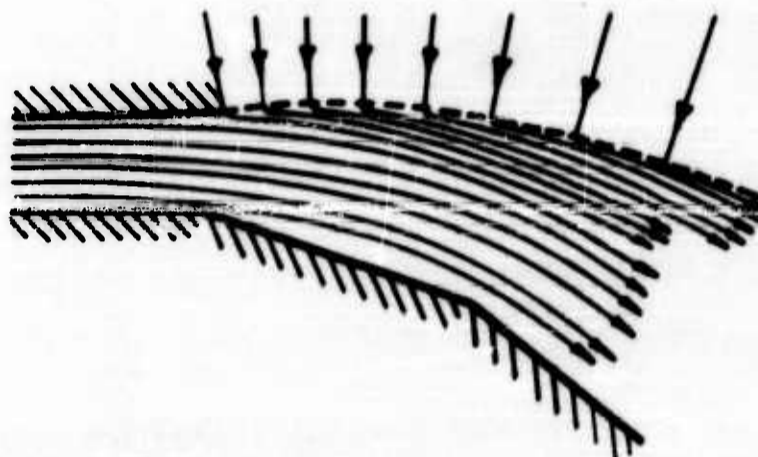
The surrounding fluid is then induced into the jet which shows a regular expansion. In this case therefore, viscosity gives rise to a secondary flow : the induction of surrounding fluid at the free surface of the jet produces a depression which attracts the fluid surrounding the jet, in the manner shown in the following diagram :



Dans le cas du jet débouchant d'une fente suivie d'un ou plusieurs volets, on va naturellement retrouver le même effet de mouvement secondaire, mais considérablement accentué parce que :

- l'écoulement n'est plus uniforme dans le jet, le gradient de pression élevé va créer une turbulence beaucoup plus forte à la surface.
- pour un même débit masse que dans un jet par orifice en mince paroi la surface du jet est beaucoup plus grande parce que le jet est beaucoup plus étalé.

Le mouvement général se fera donc selon le schéma suivant :



C'est bien ce que l'on vérifie sur la photographie de la torche présentée au début de ce rapport.

•  
••

Sur le plan physique, les caractéristiques essentielles de l'Effet COANDA seront donc :

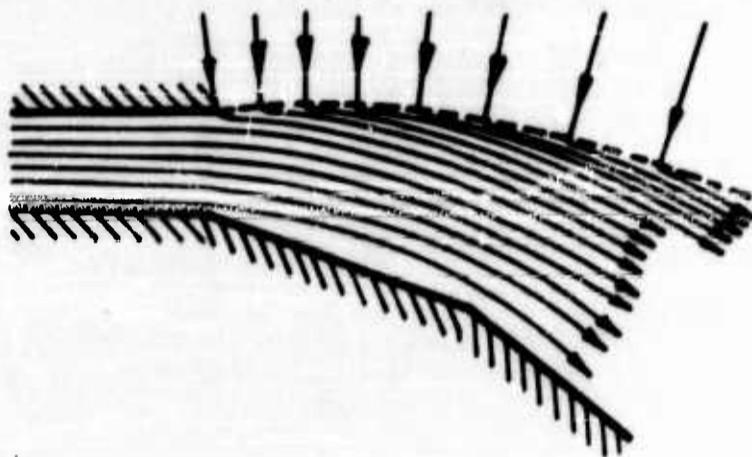
- déviation du jet dans une direction très différente de la direction initiale.
- mouvement secondaire intense, c'est à dire transfert de l'énergie cinétique du jet à une grande masse de fluide secondaire.
- le résultat de ces deux premières conséquences étant la création d'une quantité de mouvement (donc d'une poussée) beaucoup plus importante que dans le cas du jet par orifice en mince paroi.

Ce sont ces propriétés qui vont permettre les applications que nous avons envisagées.

In the case of a jet emerging from a slot followed by one or several facets, the same secondary flow is observed, but strongly accentuated because :

- the flow in the jet is no longer uniform and the steep pressure gradient produces much greater turbulence at the surface.
- for the same mass flow as in a jet issuing from a thinwall orifice, the surface of the jet is much greater because the jet is more spread.

The general motion will therefore be as shown in the following diagram :



This is in fact what we see in the photograph with the smoke-torch, shown at the beginning of this report.

••

Thus in the physical plane the essential characteristics of the COANDA Effet are :

- deviation of the jet in a direction quite different from its initial direction.
- very strong secondary flow, transposing the kinetic energy of the jet to a large mass of secondary fluid.
- the result of these two first phenomena being the creation of a momentum (and hence of a thrust) much greater than would be the case with a jet through a thin-wall orifice.

These are the features which will enable us to realize the applications we have planned.

CONSIDERATIONS SUR LA REACTION DIRECTE ET SA  
COMPARAISON AVEC LA REACTION CONSECUTIVE A L'EFFET COANDA .

Nous avons précédemment souligné que le phénomène physique essentiel permettant le vol d'un "plus lourd que l'air" résidait dans la création au sein du fluide ambiant d'une quantité de mouvement orientée vers le bas et dont la valeur devait être au moins égale au poids de l'engin.

Les deux solutions actuelles de ce problème sont :

- l'aérodyne à aile, celle-ci créant le flux de quantité de mouvement :  
soit par translation, ce qui constitue l'avion classique,  
soit par rotation, et c'est l'hélicoptère.
- la fusée.

C'est à cette dernière solution que dans les lignes qui suivent nous allons nous attacher, en montrant qu'on peut l'améliorer par l'Effet COANDA.

En effet, la fusée emmène avec elle la majeure partie de la masse qui crée ce flux de quantité de mouvement, cette masse possédant au départ une énergie potentielle considérable que l'on transforme, pendant la durée du vol, en énergie cinétique, créant ainsi le flux de quantité de mouvement désiré.

Nous allons montrer que s'il était possible de transmettre intégralement cette énergie cinétique, provoquée par une faible masse ayant une grande vitesse, à une grande masse d'air animée d'une vitesse plus faible, le gain de quantité de mouvement, donc de sustentation, serait considérable. Or, c'est précisément ce que permet l'Effet COANDA.

°  
° °

- Appelons :
- F** la force ascensionnelle totale de l'engin.
  - M** la masse d'air mise en mouvement pendant l'unité de temps.
  - V** la vitesse de cet air orientée vers le bas.
  - $\pi$**  le poids total de l'engin.
  - f** la force qui permet l'ascension de l'engin.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit pour le système :

$$MV = F = \pi + f$$

soit en appelant **g** l'accélération de la pesanteur et **k** un coefficient ayant

les dimensions d'une accélération :  $MV = \pi \left[ 1 + \frac{k}{g} \right]$

CONSIDERATIONS ON DIRECT REACTION AND ITS COMPARISON  
WITH THE REACTION RESULTING FROM THE COANDA EFFECT.

---

We have already stressed the fact that the essential physical phenomenon that renders possible the flight of a machine which is heavier than air is the creation in the surrounding fluid of a downward momentum whose value must be at least equal to the weight of the machine concerned.

The two solutions of this problem at present in use are :

- winged aircraft, in which the wings produce the momentum flux, either by translation as in the classical airplane, or by rotation as in the helicopter;
- rockets.

In the following lines we are going to devote our attention to the latter solution, showing how it may be improved by the COANDA Effect.

Actually the rocket carries up with it the larger part of the mass which produces the momentum flux, this mass having at the start considerable potential energy which is transformed into kinetic energy during flight, thus creating the desired momentum flux.

We are going to show that if it were possible to transpose the whole of this kinetic energy, produced by a small mass having great velocity, to a large mass of air having a smaller velocity, the gain in momentum flux, and therefore in lift, would be considerable. And it is precisely this which is rendered possible by the COANDA Effect.

•  
•

Let us take :  $F$  total lifting power of the machine,  
 $M$  mass of air set in motion in unit time,  
 $V$  downward velocity of this air,  
 $\pi$  total weight of the machine,  
 $f$  power required to lift the machine.

The fundamental dynamics equation for the system is :

$$MV = F = \pi + f$$

i.e. denoting by  $g$  the acceleration of gravity and  $k$  a coefficient having the dimensions of an acceleration :  $MV = \pi \left[ 1 + \frac{k}{g} \right]$

Admettons que l'on ait pu faire en sorte que l'énergie cinétique d'une petite masse de gaz  $m_1$ , sortant par unité de temps d'une tuyère fixée sur l'appareil soit transposée dans son intégralité à la masse d'air  $M$  beaucoup plus considérable : cette hypothèse s'écrit :

$$(2) \quad M V^2 = m_1 v_1^2$$

de (1) et (2) nous déduisons :

$$(M V)^2 = M (M V^2) = M (m_1 v_1^2) = \pi^2 \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2$$

soit :

$$(3) \quad M = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2$$

De même (1) fournit :

$$V = \frac{\pi}{M} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right] = \frac{m_1 v_1^2}{\pi^2} \times \frac{1}{\left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2} = \pi \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]$$

soit :

$$(4) \quad V = \frac{m_1 v_1^2}{\pi} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{h}{g} \right]}$$

Considérons alors la section fictive  $S$  de passage de la masse unitaire d'air de densité  $d$  : On a à chaque instant :

$$M = S \cdot V \cdot \frac{d}{g} \quad \text{soit} \quad S = \frac{M}{V} \frac{g}{d}$$

c'est à dire d'après (3) et (4) :

$$(5) \quad S = \frac{\pi^3 \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^3}{(m_1 v_1^2)^2} \times \frac{g}{d}$$

Enfin le débit volumique :  $D = S V = M \frac{g}{d}$  s'écrit :

$$(6) \quad D = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2 \times \frac{g}{d}$$

Supposons alors qu'il s'agisse simplement d'équilibrer la pesanteur : il suffit dans les équations (3) (4) (5) et (6) de faire  $h = 0$  et l'on a aussitôt :

$$(3') \quad M = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2}$$

$$(5') \quad S = \frac{\pi^3}{(m_1 v_1^2)^2} \cdot \frac{g}{d}$$

$$(4') \quad V = \frac{m_1 v_1^2}{\pi}$$

$$(6') \quad D = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \cdot \frac{g}{d}$$

If we assume that we have been able to transpose the entire kinetic energy of a small mass of gas  $m_1$ , emerging in unit time from a nozzle fixed to the machine, to the much greater mass of air  $M$ , this hypothesis can be written :

$$(2) \quad M V^2 = m_1 v_1^2$$

From (1) and (2) we deduce :

$$(M V)^2 = M (M V^2) = M (m_1 v_1^2) = \pi^2 \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2$$

i.e. :

$$(3) \quad M = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2$$

(1) also gives us :

$$V = \frac{\pi}{M} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right] = \frac{m_1 v_1^2}{\pi^2} \times \frac{1}{\left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2} \times \pi \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]$$

i.e. :

$$(4) \quad V = \frac{m_1 v_1^2}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{h}{g}}$$

Let us now consider the fictitious section  $S$  of passage of the unit mass of air whose density is  $d$  ; We have all the time :

$$M = S \cdot V \cdot \frac{d}{g} \qquad S = \frac{M}{V} \frac{g}{d}$$

so that according to (3) and (4) :

$$(5) \quad S = \frac{\pi^3 \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^3}{(m_1 v_1^2)^2} \times \frac{g}{d}$$

Finally, the flow by volume :  $D = S V = M \frac{g}{d}$  will be written :

$$(6) \quad D = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \left[ 1 + \frac{h}{g} \right]^2 \times \frac{g}{d}$$

Let us assume first that we only wish to balance the force of gravity ; in equations (3), (4), (5) and (6) we need only make  $R=0$  and we then have :

$$(3') \quad M = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2}$$

$$(5') \quad S = \frac{\pi^3}{(m_1 v_1^2)^2} \cdot \frac{g}{d}$$

$$(4') \quad V = \frac{m_1 v_1^2}{\pi}$$

$$(6') \quad D = \frac{\pi^2}{m_1 v_1^2} \cdot \frac{g}{d}$$

Ce que l'on peut exprimer ainsi :

- I. " La masse totale  $M$  de gaz à mettre par seconde en mouvement vers le  
" bas pour équilibrer un poids  $\Pi$  , est égale au carré de ce poids, di-  
" visé par la force vive du gaz primaire utilisé."
- II. " La vitesse du souffle de gaz total, primaire et secondaire, est alors  
" proportionnelle à la force vive du gaz primaire et inversement propor-  
" tionnelle au poids de l'engin".
- III. " La section de passage de l'air total est proportionnelle au cube du  
" poids de l'engin et inversement proportionnelle au carré de la force  
" vive du gaz primaire."
- IV. " Le débit volumique de l'air total est proportionnel au carré du poids  
" de l'engin et inversement proportionnel à la force vive du gaz pri-  
" maire.

°  
°

Remarquons, avant de poursuivre, que de l'égalité (2) :

$$MV^2 = m_1 v_1^2$$

on déduit que si  $M = 10 m_1$ , par exemple,

$$V = \frac{v_1}{\sqrt{10}}$$

Donc :

$$MV = \sqrt{10} m_1 v_1$$

La quantité de mouvement du fluide primaire (donc la sustentation) est multipliée par  $\sqrt{10}$  et d'une façon générale par la racine carrée du rapport des masses totale et primaire.

°  
°

Dans les pages qui suivent, pour fixer les idées et pour avoir une base de comparaison avec les résultats expérimentaux, nous avons calculé quelques tableaux de résultats théoriques.

Nous avons considéré un gaz parfait, non visqueux, passant d'un état de repos (indice I), caractérisé par sa pression  $P_1$  et sa température absolue  $T_1$ , à un état de mouvement (indice 0) caractérisé par sa pression  $P_0$  que nous prenons égale à 1 Kg./cm<sup>2</sup> (c'est à dire sensiblement la pression atmosphérique). Ce passage de l'état de repos à l'état de mouvement se fait d'une façon absolument réversible. Nous considérons donc une détente isentropique.

Which can be expressed as follows :

- I. " The total mass  $M$  of gas which must be set in motion downwards in order to balance a weight  $\Pi$  , is equal to the square of this weight divided by the kinetic energy of the primary gas used."
- II. " The velocity of the total gas flow, primary and secondary, is then directly proportional to the kinetic energy of the primary gas and in inverse proportion to the weight of the machine."
- III. " The section of passage of the total air is directly proportional to the cube of the weight of the machine and in inverse proportion to the square of the kinetic energy of the primary gas."
- IV. " The flow by volume of the total air is directly proportional to the square of the weight of the machine and in inverse proportion to the kinetic energy of the primary gas."

°  
° °

Let us note, before continuing, that from equation (2) :

$$MV^2 = m_1 u_1^2$$

we deduce that if  $M = 10m_1$  , for example,

$$V = \frac{u_1}{\sqrt{10}}$$

Hence :

$$MV = \sqrt{10} m_1 u_1$$

The momentum of the primary fluid (hence the lift) is multiplied by  $\sqrt{10}$  and in general by the square root of the ratio of the total and primary masses.

°  
° °

In the following pages, to give a clear idea and have a basis of comparison with experimental results, we have calculated some tables of theoretical results.

We considered a perfect gas, non viscous, passing from a state of rest (index I), characterized by its pressure  $P_1$  and its absolute temperature  $T_1$ , to a state of motion (index O) characterized by its pressure  $P_0$  which we take as 1 Kg./cm<sup>2</sup> (i.e. approximately atmospheric pressure). This passage from the state of rest to a state of motion is completely reversible. We are therefore considering an isentropic expansion.

- Dans le Tableau "I", nous avons calculé les vitesses  $V_0$  atteintes par le gaz après une telle détente pour différentes valeurs de  $P_1$  et  $T_1$ . Pour ces mêmes valeurs de  $P_1$  nous avons aussi calculé le rapport  $\frac{T_1}{T_0}$  des températures finales et initiales.

On sait que la vitesse  $V_0$  est égale, d'après la loi de Saint-Venant, à :

$$V_0 = \sqrt{2c_p T_1 \left[ 1 - \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

tandis que :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Nous avons pris pour chaleur spécifique à pression constante la valeur moyenne pour l'air, soit :

$$c_p = 1.003 \text{ Joules / Kg}^\circ\text{C}$$

et pour rapport des chaleurs spécifiques :

$$\gamma = 1,4$$

- Dans le Tableau "II", nous avons calculé la chute de température correspondant à cette détente pour les mêmes valeurs de  $P_1$  et  $T_1$ .

Ayant calculé  $\frac{T_1}{T_0}$  et connaissant  $T_1$ , on a immédiatement :

$$T_1 - T_0 = T_1 \left[ 1 - \frac{1}{\frac{T_1}{T_0}} \right]$$

Le Tableau "II" se déduit donc du Tableau "I".

- Dans le Tableau "III", nous avons voulu calculer le débit masse  $M$  de l'air ainsi mis en mouvement. Pour cela, il fallait une donnée supplémentaire et nous nous sommes imposés un flux d'énergie cinétique  $E$  égal à 1 CV par seconde, soit 75 Kgm./s. pour le gaz à l'état 0.

De l'égalité :

$$E = \frac{1}{2} M V_0^2$$

on déduit immédiatement :

$$M = \frac{2E}{V_0^2}$$

Le Tableau "III" se déduit donc du Tableau "I".

- In Table I, we have calculated the velocities  $V_0$  attained by the gas after such an expansion, for different values of  $P_1$  and  $T_1$ . For these same values of  $P_1$ , we have also calculated the ratio  $\frac{T_1}{T_0}$  of the final and initial temperatures.

We know that the velocity  $V_0$  is, according to Saint-Venant's law :

$$V_0 = \sqrt{2 c_p T_1 \left[ 1 - \left( \frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

whereas :

$$\frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

For the specific heat at constant pressure we took the mean value for air, which is :

$$c_p = 1.003 \text{ Joules/Kg} \cdot \text{C}$$

and as ratio of specific heats :

$$\gamma = 1,4$$

- In Table II, we have calculated the drop in temperature corresponding to this expansion for the same values of  $P_1$  and  $T_1$ . Having calculated  $\frac{T_1}{T_0}$  and knowing  $T_1$ , we immediately have :

$$T_1 - T_0 = T_1 \left[ 1 - \frac{1}{\frac{T_1}{T_0}} \right]$$

Table II can therefore be deduced from Table I.

- In Table III, we wished to calculate the mass flow  $M$  of the air thus set in motion. To do this, we needed an additional datum and we took a kinetic energy flux  $E$  equal to 1 hp per second, i.e. 75 Kgm./s. for the gas in the 0 state.

From the equation : 
$$E = \frac{1}{2} M V_0^2$$

we immediately deduce :

$$M = \frac{2E}{V_0^2}$$

Table III is therefore deduced from Table I.

- Dans le Tableau "IV", nous avons alors calculé le débit poids  $P$  correspondant au débit masse  $M$ . On a évidemment :

$$P = M g$$

Nous avons pris  $g$ , accélération de la pesanteur, =  $9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Le Tableau "IV" se déduit donc du Tableau "III".

- Dans le Tableau "V", nous avons alors calculé le flux par seconde de quantité de mouvement du gaz à l'état 0 pour des conditions  $P_1$  et  $T_1$  données et correspondant au flux d'énergie cinétique  $E$  déjà introduit (1 CV par seconde). D'après le théorème des quantités de mouvement, ce flux est égal à la poussée  $F$  due à la détente des gaz dans les conditions considérées. On a donc :

$$F = M V_0 = \frac{2E}{V_0}$$

Le Tableau "V" se déduit donc du Tableau "I".

- Dans le Tableau "VI", nous avons rapporté la poussée  $F$  ainsi obtenue au débit poids unité. Nous avons donc calculé le rapport  $\frac{F}{P}$ .

D'après les formules précédentes, on a :

$$\frac{F}{P} = \frac{2E}{V_0} \times \frac{V_0^2}{2E} \times \frac{1}{g} = \frac{V_0}{g}$$

On voit donc que la poussée rapportée au débit poids unité ne dépend plus que de la vitesse atteinte par le gaz, donc des conditions  $P_1, T_1$ .

Ce Tableau pourra servir de base de comparaison avec les résultats expérimentaux.

Le Tableau "VI" se déduit donc du Tableau "I".

- Dans le Tableau "VII", nous avons fait un calcul inverse de celui fait pour le Tableau "III", c'est à dire qu'au lieu de se fixer  $E$  et d'en déduire  $M$ , nous nous sommes imposés un débit poids  $P'$  unitaire et nous en avons déduit le flux d'énergie cinétique  $E'$  de l'air mis en mouvement pour des conditions  $P_1, T_1$  données.

On a évidemment :

$$E' = \frac{1}{2} \frac{P'}{g} V_0^2$$

Le Tableau "VII" se déduit du Tableau "I".

- In Table IV, we have calculated the weight rate of flow  $P$  corresponding to the mass flow  $M$ . We have of course :

$$P = M g$$

We took  $g$ , the gravitational constant, =  $9,81 \text{ m.s}^2$

Table IV is therefore deduced from Table III.

- In Table V, we then calculated the momentum flux per second of the gas in the  $O$  state for given  $P_1$  and  $T_1$  conditions and corresponding to the kinetic energy flux  $E$  already introduced (1 hp per second). According to the momentum theorem, this flux is equal to the thrust  $F$  due to the expansion of the gases in the given conditions. We therefore have :

$$F = M V_0 = \frac{2E}{V_0}$$

Table V is therefore deduced from Table I.

- In Table VI, we have shown the thrust  $F$  thus obtained for unit weight of flow. Thus we calculated the ratio  $\frac{F}{P}$ .

According to the preceding formulae we have :

$$\frac{F}{P} = \frac{2E}{V_0} \times \frac{V_0^2}{2E} \times \frac{1}{g} = \frac{V_0}{g}$$

So we see that the thrust in terms of unit weight of flow only depends of the velocity attained by the gas, that is to say on the conditions  $P_1$  and  $T_1$ .

This Table will be able to serve as basis of comparison with the experimental results.

Table VI is deduced from Table I.

- In Table VII, we made the reverse calculation of that made in Table III, i.e. in stead of fixing  $E$  and deducing  $M$  from that, we took a unit weight of flow  $P'$  and deduced from that the kinetic energy flux  $E'$  of the air set in motion for the given  $P_1$  and  $T_1$  conditions.

Of course we have :

$$E' = \frac{1}{2} \frac{P'}{g} V_0^2$$

Table VII is deduced from Table I.

- Dans le Tableau "VIII", nous avons, pour fixer les idées, calculé les poussées que l'on obtiendrait soit en utilisant un faible débit masse à grande vitesse, soit un débit masse de plus en plus grand à vitesse de plus en plus faible, de telle sorte que le flux d'énergie cinétique correspondant reste constant.

Pour établir ce Tableau, nous nous sommes donné, pour  $T_1$  fixé, un flux d'énergie cinétique  $E'_4$  tel que pour  $P_1 = 4$  Kgs./cm<sup>2</sup> manométriques le débit masse  $M'_4$  correspondant soit de 1 Kg. Nous avons alors calculé les poussées  $F'$  obtenues à partir de cette énergie cinétique  $E'_4$  pour différentes valeurs de  $P_1$ , c'est à dire de  $V_0$ .

De l'équation :

$$E'_4 = \frac{1}{2} M'_4 V_0^2$$

on déduit :

$$F' = M'_4 V_0 = \frac{2E'_4}{V_0}$$

Le Tableau "VIII" se déduit des Tableaux "I" et "VII".

∴

- In Table VIII, to illustrate our point, we have calculated the thrust which would be obtained by using either a low mass flow at high velocity, or a gradually increasing mass flow at gradually decreasing velocity, such that the corresponding kinetic energy flux always remains constant.

In drawing up this Table, we took, for a fixed  $T_1$ , a kinetic energy flux  $E'_4$  such that for  $P_1 = 4 \text{ Kgs./cm}^2$  gauge pressure the corresponding mass flow  $M_4$  is 1 Kg. We then calculated the thrust  $F'$  obtained from this kinetic energy  $E'_4$ , for different values of  $P_1$ , that is of  $V_0$ .

From the equation :

$$E'_4 = \frac{1}{2} M'V_0^2$$

we deduce :

$$F' = M'V_0 = \frac{2E'_4}{V_0}$$

Table VIII is deduced from Tables I and VII.

°  
° °

$\frac{P_1}{P_0}$	$P_1 - P_0$ Kg/cm <sup>2</sup>	$T_1 : ^\circ K$						$\frac{T_1}{T_0}$
		273	290	307	324	341	358	
5	4	449,3	463,1	476,4	489,5	502,1	514,5	1,5838
4,5	3,5	437,4	450,8	463,8	476,5	488,8	500,9	1,5368
4	3	423,2	436	448,8	461	473	484,6	1,4860
3	2	384,1	395,9	407,3	418,4	429,3	439,8	1,3687
2,5	1,5	355,2	366	376,6	386,9	396,9	406,7	1,2993
2	1	313,7	323,4	332,7	341,8	350,6	359,3	1,2191
1,5	0,5	244,1	251,6	258,9	265,9	272,8	279,6	1,1221
1,4	0,4	224	230,9	237,6	244	250,4	256,6	1,1009
1,3	0,3	198,9	205	210,9	216,6	222,2	227,7	1,0778
1,2	0,2	165,4	170,5	175,4	180,2	184,9	189,4	1,0526
1,1	0,1	121,3	125	128,6	132,1	135,5	138,9	1,0276
1,05	0,05	88	90,7	93,3	95,8	98,3	100,7	1,0143
1,04	0,04	78,1	80,5	82,8	85,1	87,3	89,4	1,0113
1,03	0,03	67,9	70	72	73,9	75,8	77,7	1,0085
1,02	0,02	55,6	57,3	58,9	60,5	62,1	63,6	1,0057
1,01	0,01	39,4	40,6	41,8	43	44,1	45,2	1,0029
1,0066	0,0066	32,2	33,2	34,1	35	36	36,8	1,0019
1,0033	0,0033	22,7	23,4	24,1	24,7	25,4	26	1,0099
		$V_0 : m/s$						

TABLEAU " I "

- Vitesses atteintes après détente  
isentropique en fonction de :

$$P, T, P_0$$

Rapport des températures ini-  
tiales et finales.

TABLE " I "

- Velocities attained after isentropic  
expansion, for different values of :

$$P, T, P_0$$

Initial and final temperatures ratio.

$P_1 - P_0$ kg/cm <sup>2</sup>	$T_1 : ^\circ K$					
	273	290	307	324	341	358
4	100,6	106,9	113,7	119,4	125,7	132
3,5	95,4	101,3	107,2	113,2	119,1	125,1
3	89,3	94,8	100,4	106	111,5	117,1
2	73,5	78,1	82,7	87,3	91,9	96,4
1,5	62,9	66,8	70,7	74,6	78,5	82,5
1	49,1	52,6	55,2	58,2	61,3	64,3
0,5	29,7	31,6	33,4	35,3	37,1	39
0,4	25	26,6	28,1	29,7	31,3	32,8
0,3	19,7	20,9	22,2	23,4	24,6	25,9
0,2	13,6	14,5	15,3	16,2	17	17,9
0,1	7,33	7,79	8,25	8,70	9,16	9,62
0,05	3,86	4,10	4,34	4,58	4,82	5,06
0,04	3,04	3,23	3,42	3,61	3,80	3,99
0,03	2,30	2,44	2,58	2,72	2,87	3,01
0,02	1,54	1,64	1,73	1,83	1,92	2,02
0,01	0,775	0,824	0,872	0,920	0,968	1,02
0,0066	0,516	0,548	0,580	0,612	0,644	0,677
0,0033	0,257	0,273	0,289	0,305	0,321	0,337
	$T_1 - T_0 : ^\circ C$					

TABLEAU "II"

TABLE "II"

- Chute de température après détente  
isentropique en fonction de :

$$P_1, T_1, P_0$$

- Drop in temperature after isentropic  
expansion, for different values of :

$$P_1, T_1, P_0$$

$P_1 - P_0$ Kg/cm <sup>2</sup>	$T, : P K.$					
	273	290	307	324	341	358
4	0,000743	0,000704	0,000661	0,000626	0,000595	0,000567
3,5	0,000784	0,000738	0,000697	0,000661	0,000628	0,000598
3	0,000838	0,000789	0,000745	0,000706	0,000670	0,000639
2	0,001017	0,000957	0,000904	0,000857	0,000814	0,000775
1,5	0,001189	0,001120	0,001058	0,001002	0,000952	0,000907
1	0,001524	0,001434	0,001355	0,001284	0,001220	0,001162
0,5	0,002517	0,002370	0,002238	0,002122	0,002016	0,001919
0,4	0,002989	0,002814	0,002657	0,002519	0,002392	0,002278
0,3	0,003792	0,003569	0,003372	0,003197	0,003038	0,002893
0,2	0,005483	0,005160	0,004876	0,004619	0,004388	0,004182
0,1	0,01020	0,009600	0,009071	0,008596	0,008170	0,007775
0,05	0,01937	0,01823	0,01723	0,01634	0,01552	0,01479
0,04	0,02459	0,02315	0,02188	0,02071	0,01968	0,01877
0,03	0,03254	0,03061	0,02894	0,02747	0,02611	0,02485
0,02	0,04852	0,04569	0,04324	0,04098	0,03890	0,03658
0,01	0,09663	0,09100	0,08585	0,08112	0,07713	0,07342
0,0066	0,1447	0,1361	0,1290	0,1224	0,1157	0,1108
0,0033	0,2911	0,2739	0,2583	0,2459	0,2325	0,2219
<i>Mass Flow Unity MKpS</i>						

TABLEAU "III"

Débit masse correspondant à  
un flux d'énergie cinétique  
de : 75 Kgm./s.

TABLE "III"

Mass flow corresponding to  
a kinetic energy flux of :  
75 Kgm./s.

$P_i - P_0$ Kg/cm <sup>2</sup>	$T_i : ^\circ K.$					
	273	290	307	324	341	358
4	0,00729	0,00691	0,00648	0,00614	0,00584	0,00556
3,5	0,00769	0,00724	0,00684	0,00648	0,00616	0,00587
3	0,00822	0,00774	0,00731	0,00693	0,00657	0,00627
2	0,00998	0,00939	0,00887	0,00841	0,00799	0,00760
1,5	0,01166	0,01099	0,01038	0,00983	0,00934	0,00890
1	0,01495	0,01407	0,01329	0,01260	0,01197	0,01140
0,5	0,02469	0,02325	0,02195	0,02082	0,01978	0,01883
0,4	0,02932	0,02761	0,02607	0,02471	0,02347	0,02233
0,3	0,03720	0,03501	0,03308	0,03136	0,02980	0,02838
0,2	0,05379	0,05062	0,04783	0,04532	0,04305	0,04103
0,1	0,1001	0,09418	0,08899	0,08433	0,08015	0,07627
0,05	0,1900	0,1788	0,1690	0,1603	0,1523	0,1451
0,04	0,2412	0,2271	0,2146	0,2032	0,1931	0,1841
0,03	0,3192	0,3003	0,2839	0,2695	0,2561	0,2438
0,02	0,4760	0,4482	0,4242	0,4020	0,3816	0,3626
0,01	0,9479	0,8927	0,8422	0,7958	0,7566	0,7203
0,0066	1,420	0,1335	1,265	1,201	1,135	1,087
0,0033	2,856	2,687	2,534	2,412	2,281	2,177
$P : Kg$						

TABLEAU " IV "

Débit poids correspondant à un  
flux d'énergie cinétique de :

75 Km./s.

TABLE " IV "

Weight rate of flow corresponding to  
a kinetic energy flux of :

75 Km./s.

$P_1 - P_0$ kg/cm <sup>2</sup>	$T_1 : ^\circ K$					
	273	290	307	324	341	358
4	0,334	0,324	0,315	0,306	0,299	0,292
3,5	0,343	0,333	0,323	0,315	0,307	0,299
3	0,354	0,344	0,334	0,325	0,317	0,310
2	0,391	0,379	0,368	0,359	0,349	0,341
1,5	0,422	0,410	0,398	0,388	0,378	0,369
1	0,478	0,464	0,451	0,439	0,428	0,418
0,5	0,615	0,596	0,579	0,564	0,550	0,536
0,4	0,670	0,650	0,631	0,615	0,599	0,585
0,3	0,754	0,732	0,711	0,693	0,675	0,659
0,2	0,907	0,880	0,855	0,832	0,811	0,792
0,1	1,24	1,20	1,17	1,14	1,11	1,08
0,05	1,70	1,65	1,61	1,57	1,53	1,49
0,04	1,92	1,86	1,81	1,76	1,72	1,68
0,03	2,21	2,14	2,08	2,03	1,98	1,93
0,02	2,70	2,62	2,55	2,48	2,42	2,36
0,01	3,81	3,69	3,59	3,49	3,40	3,32
0,0066	4,66	4,52	4,40	4,29	4,17	4,08
0,0033	6,61	6,41	6,22	6,07	5,91	5,77
$F : Kg$						

TABLEAU "V"

Poussée correspondant à un flux  
d'énergie cinétique de :

75 Kgm./s.

TABLE "V"

Thrust corresponding to a kinetic  
energy flux of :

75 Kgm./s.

$P_1 - P_0$	$T_1 : ^\circ K$					
$Kg/cm^2$	273	290	307	324	341	358
4	45,80	47,21	48,56	49,90	51,18	52,45
3,5	44,59	45,95	47,28	48,57	49,83	51,06
3	43,14	44,44	45,75	46,99	48,22	49,40
2	39,15	40,36	41,52	42,65	43,76	44,83
1,5	36,21	37,31	38,39	39,44	40,46	41,46
1	31,98	32,97	33,91	34,84	35,74	36,63
0,5	24,88	25,65	26,39	27,10	27,81	28,50
0,4	22,83	23,54	24,22	24,87	25,52	26,16
0,3	20,28	20,90	21,50	22,08	22,65	23,21
0,2	16,86	17,38	17,88	18,37	18,85	19,31
0,1	12,36	12,74	13,11	13,47	13,81	14,16
0,05	8,970	9,246	9,511	9,766	10,02	10,27
0,04	7,961	8,206	8,440	8,675	8,899	9,113
0,03	6,922	7,136	7,339	7,553	7,727	7,920
0,02	5,668	5,841	6,096	6,167	6,330	6,483
0,01	4,016	4,139	4,261	4,383	4,495	4,608
0,0066	3,282	3,384	3,476	4,468	3,670	3,751
0,0033	2,314	2,385	2,457	2,518	2,589	2,650
$F/P$						

TABLEAU " VI "

Poussée rapportée au débit  
poids.

TABLE " VI "

Thrust in terms of weight rate  
of flow.

$P_1 - P_0$ Kg/cm <sup>2</sup>	$T_1$ : °K.					
	273	290	307	324	341	358
4	137,2	145,7	154,2	162,8	171,3	179,9
3,5	130	138,1	146,2	154,3	162,4	170,5
3	121,7	129,2	136,9	144,4	152	159,6
2	100,3	106,5	112,7	119	125,2	131,4
1,5	85,74	91,03	96,38	101,7	107,1	112,4
1	66,88	71,07	77,22	79,39	83,53	87,73
0,5	40,49	43,02	45,55	48,05	50,57	53,13
0,4	34,10	36,23	38,36	40,46	42,61	44,75
0,3	26,88	28,56	30,23	31,88	33,55	35,23
0,2	18,59	19,76	20,91	22,07	23,23	24,38
0,1	9,999	10,62	11,24	11,86	12,48	13,11
0,05	5,263	5,591	5,916	6,237	6,567	6,891
0,04	4,145	4,404	4,659	4,922	5,179	5,431
0,03	3,133	3,330	3,523	3,711	3,905	4,103
0,02	2,101	2,231	2,358	2,487	2,621	2,749
0,01	1,055	1,120	1,187	1,257	1,322	1,388
0,0066	0,705	0,749	0,790	0,832	0,881	0,920
0,0033	0,350	0,372	0,395	0,415	0,438	0,459
	$E' : \text{Kg. m/s}$					

TABLEAU "VII"

Flux d'énergie cinétique correspondant à un débit poids de 1 Kg.

TABLE "VII"

Kinetic energy flux corresponding to a weight rate of flow of 1 Kg.

$P_1 - P_2$ Kg/cm <sup>2</sup>	$T_1 : ^\circ K.$					
	273	290	307	324	341	358
4	45,8	47,2	48,6	49,9	51,2	52,4
3,5	47	48,5	49,9	51,3	52,6	53,9
3	48,6	50,1	51,5	53	54,3	55,7
2	53,6	55,2	56,8	58,4	59,9	61,4
1,5	57,9	59,7	61,4	63,1	64,8	66,3
1	65,6	67,6	69,5	71,5	73,3	75,1
0,5	84,3	86,9	89,4	91,7	94,2	96,5
0,4	91,9	94,7	97,4	100	103	105
0,3	103	107	110	113	116	119
0,2	124	128	132	136	139	142
0,1	170	175	180	185	190	194
0,05	234	241	248	255	261	268
0,04	263	272	279	287	294	302
0,03	303	312	321	331	339	347
0,02	370	382	393	404	414	424
0,01	522	538	553	568	583	597
0,0066	639	658	678	698	714	733
0,0033	907	934	960	989	1011	1038
$F' : Kg$						

TABLEAU " VIII "

Transposition de l'énergie cinétique disponible pour un débit poids égal à 1 Kg. quand :

$$P_1 = 4 \text{ Kg./cm}^2 \text{ manométrique.}$$

TABLE " VIII "

Transposition of kinetic energy available with a weight rate of flow equal to 1 Kg. when :

$$P_1 = 4 \text{ Kg./cm}^2 \text{ gauge pressure.}$$

**UNCLASSIFIED**

**A  
D 204073**

**Armed Services Technical Information Agency**

**ARLINGTON HALL STATION  
ARLINGTON 12 VIRGINIA**

**FOR  
MICRO-CARD  
CONTROL ONLY**

**5 OF 5**

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER; AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**UNCLASSIFIED**

Nous constatons que toutes les valeurs des Tableaux précédents sont fonction de la vitesse d'écoulement. Du Tableau VIII, plus particulièrement, nous déduisons que les tractions pour une énergie donnée sont d'autant plus importantes que les écarts entre les pressions en amont et aval de l'écoulement sont faibles.

Il paraît logique, par conséquent, de chercher les moyens qui permettraient une augmentation de la vitesse d'écoulement pour une pression amont déterminée. C'est ici qu'intervient l'application de l'Effet COANDA.

D'après nos expériences et nos mesures, notamment sur des Tuyères "L.A.", il résulte, par exemple, qu'en partant d'une pression absolue de 5 Kgs. par cm<sup>2</sup> (pression manométrique 4 Kgs. par cm<sup>2</sup>) on peut, dans certains cas, obtenir à l'embouchure de la sortie du jet, et le long de la première facette, une dépression de l'ordre de 7 mètres d'eau, c'est à dire que la pression absolue restante à cet endroit ne serait plus que de 0,3 Kg. par cm<sup>2</sup>. A cet endroit, c'est à dire juste au ras de la facette, le rapport des pressions entre l'amont et l'aval serait de  $\frac{P_1}{P_2} = \frac{5}{0,3} = 17$  au lieu de 5.

En admettant que dans le jet à cet endroit, c'est à dire au voisinage du maximum de dépression, la détente de l'air soit isentropique, la chute de température locale correspondant à ce rapport de pression serait  $\frac{T_1}{T_2} = 2,247$ , et la différence de température se trouverait, si la température avant la détente avait été par exemple de 290° absolu, de  $T_1 - T_2 = 161^\circ C$ . Ce qui fait que la vitesse d'écoulement de cette portion du jet atteindrait théoriquement une vitesse de 568,5 m. au lieu de 463,1 m./sec. correspondant à la détente isentropique sur la surface libre du jet.

En supposant une répartition linéaire des vitesses dans le jet, on peut donc admettre qu'il y a dans celui-ci une vitesse moyenne se situant aux environs de 515,0 m./sec.

En d'autres termes, si l'on admettait le même débit masse de gaz par seconde par élément différentiel de surface dans un jet COANDA que dans un jet par orifice en mince paroi, l'énergie cinétique est multipliée par  $\left(\frac{515,0}{463,1}\right)^2 = 1,242$ , l'augmentation se faisant aux dépens de l'enthalpie.

L'expérience ayant montré que le jet ne givrait pas, malgré un très haut degré hygrométrique de l'air (or  $T_1 - T_2 = 161^\circ$  théoriques, soit  $T_2 = -144^\circ C$ ), il y a eu nécessairement apport d'énergie.

Cette énergie supplémentaire n'a pu être prise qu'à l'air ambiant dont la température doit alors baisser au voisinage immédiat du jet.

We note that all the values shown in the preceding tables are a function of the flow velocity. From Table VIII, in particular, we deduce that the smaller the difference between the pressure upstream and the pressure downstream of the flow, the greater the thrust produced for a given energy.

Consequently it would appear logical to seek a means of increasing the flow velocity for a fixed pressure upstream. This is where the application of the COANDA Effect comes in.

Our experiments and measurements, especially with the "L.A." nozzles, show for instance that starting from an absolute pressure of 5 Kgs. per cm<sup>2</sup> (gauge pressure 4 Kgs./cm<sup>2</sup>) one can, in certain cases, obtain a depression at the exit orifice of the jet and along the first facet, of the order of 7 meters of water, that is to say that the absolute pressure remaining in that area is only 0.3 Kg. per cm<sup>2</sup>. In that area, which is right next to the facet, the ratio of upstream and downstream pressures is then  $\frac{P_1}{P_0} = \frac{5}{0.3} = 17$  instead of 5.

Assuming that the expansion of the air in the jet in that area, that is, in the neighborhood of the maximum depression, is isentropic, the local drop in temperature corresponding to this ratio will be  $\frac{T_1}{T_0} = 2.247$  and, if the temperature before expansion was, for instance, 290° abs., the difference of temperature  $T_1 - T_0$  will be 161°C. This means that the flow velocity of that portion of the jet will theoretically attain 568.5 m./sec., instead of 463.1 m./sec. which corresponds to the isentropic expansion of the free surface of the jet.

Assuming a linear distribution of velocities in the jet, we can therefore take its mean velocity as being approximately 515.8 m./sec.

In other words, if we assume that the mass flow of gas per second per differential surface element of a COANDA jet is the same as in a jet issuing from an orifice in a thin wall, the kinetic energy is multiplied by .....  $\left(\frac{515.8}{463.1}\right)^2 = 1.242$ , this increase occurring at the cost of enthalpy.

Experience having shown that the jet does not freeze in spite of a very high degree of humidity in the air (theoretically  $T_1 - T_0 = 161^\circ$ , i.e.  $T_0 = -144^\circ$  C), additional energy must have been provided.

This additional energy can only have been taken from the surrounding air, whose temperature must therefore fall in the immediate proximity of the jet.

Le rapport théorique des pressions pour cette vitesse de 513,8 m./sec. correspondrait à :

$\frac{P_0}{P_1} = 8,4$  et comme  $P_1 = 5$ , on voit que le jet se comporterait comme un jet libre ayant une pression moyenne absolue de 0,595.

Ainsi, l'air ambiant se trouverait, sous ces hypothèses, devant une source froide à moindre pression.

Pour  $P_0 = 0,595$

et pour  $P_1 = 1$

$$\text{on a : } \frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1,16$$

ce qui, en admettant que la température ambiante fut au départ de 290°K donnerait :  $T_1 - T_0 = 40^\circ\text{C}$ .

Sous de telles hypothèses, il est normal de considérer la possibilité pour l'air ambiant de se précipiter vers le jet avec une vitesse de 283m./sec. correspondant à une détente isentropique de 40°C.

Faisons une hypothèse supplémentaire : "La moitié environ de l'énergie cinétique de cet air aspiré correspond à celle d'une quantité de mouvement de cet air aspiré orientée dans la même direction que celle du jet".

Dans ce cas, si le pourcentage d'augmentation d'énergie totale était comme nous l'avons admis de 1,242 - 1 = 0,242, le pourcentage de l'augmentation de l'énergie cinétique pourrait être envisagé comme correspondant à 0,12, le solde, soit 0,122, étant dissipé par les phénomènes de chocs et de turbulence.

Dans ce cas, le poids de l'air ambiant ainsi mis en mouvement dans la même direction que le jet pourrait se déduire de l'équation :

$$\frac{1}{2g} \pi' V'^2 = 0,12 \pi_1 \frac{V_1^2}{2g}$$

où :

$\pi'$  est le poids par seconde de l'air ambiant mis en mouvement,

$V'$  est sa vitesse de déplacement,

$\pi_1$  est le poids par seconde du gaz du jet,

$V_1$  est la vitesse théorique de l'écoulement normal du jet.

Il en résulte que :

$$\frac{\pi'}{\pi_1} = \left( \frac{V_1}{V'} \right)^2 \cdot 0,12$$

The theoretical pressure ratio for this velocity of 813,8 m./sec. corresponds to :

$\frac{P_2}{P_0} = 8,4$  and since  $P_1 = 5$ , we see that the jet behaves like a free jet having a mean absolute pressure of 0.595.

The surrounding air will therefore, according to this hypothesis, find itself in the presence of a cold source at a lower pressure.

$$\text{For } P_0 = 0.595$$

$$\text{and for } P_1 = 1$$

$$\text{we have : } \frac{T_1}{T_0} = \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1,16$$

which, if the surrounding temperature was 290°K to start with, gives us :  
 $T_1 - T_0 = 40^\circ\text{C}.$

Under these hypotheses, the surrounding air can naturally be expected to rush in towards the jet at a velocity of 283m./sec., corresponding to an isentropic expansion of 40° C.

Let us make an additional hypothesis : "Approximately half of the kinetic energy of this induced air corresponds to the kinetic energy due to the momentum of this induced air oriented in the same direction as the jet".

In that case, if the percentage of increase of total energy is, as we assumed,  $I.242 - I = 0.242$ , the increase percent of kinetic energy can be taken as corresponding to 0.12, the remainder, 0.122, being dissipated by collision and turbulence phenomena.

This being so, the weight of surrounding air thus set in motion in the same direction as the jet could be deduced from the equation :

$$\frac{1}{2g} \pi' V'^2 = 0,12 \pi_1 \frac{V_1^2}{2g}$$

in which :  $\pi'$  is the weight of surrounding air set in motion per second,

$V'$  is its velocity,

$\pi_1$  is the weight of jet gas per second,

$V_1$  is the theoretical normal flow velocity of the jet.

Consequently :

$$\frac{\pi'}{\pi_1} = \left( \frac{V_1}{V'} \right)^2 \cdot 0,12$$

donc en partant de nos différentes hypothèses on trouve :

$$\frac{\pi'}{\pi_1} = \left( \frac{463,1}{283} \right)^2 \cdot 0,12 \approx \text{en chiffre rond} : 0,32.$$

Nous prendrons la valeur de 0,3.

Etant donné que la traction rapportée au débit poids unitaire est égale à  $\frac{V}{g}$  nous avons pour le jet  $\frac{518,8}{g} = 52,56$ , et pour l'air qui se précipite vers le jet  $\frac{283}{g} = 28,85$ , la traction totale que l'on devrait mesurer dans un jet fonctionnant à travers un dispositif utilisant l'Effet COANDA devrait être :

$$52,56 + 0,3 \times 28,85 = 61,21$$

contre :

$$47,21 \text{ (d'après le Tableau 6),}$$

soit environ 1,3 fois plus, ce qui correspond d'une façon très suggestive, quant à nos hypothèses, à certains essais que nous avons faits.

Pendant nos essais les mesures d'air induit nous ont prouvé que les masses d'air entraînées atteignaient souvent bien plus que 15 fois l'air primaire (certains essais ont même atteint des taux d'induction de plus de 30 pour 1), avec des vitesses au passage du col des tuyères assez élevées, ce qui par rapport à la traction théorique pour l'air primaire de masse unitaire donnait des valeurs du même ordre de grandeur que ce qui est dit plus haut. (Nous prenons les vitesses au col de la tuyère car après le divergent et suivant ses dimensions on peut beaucoup réduire les vitesses, puisque l'on y transpose l'énergie cinétique en énergie potentielle).

Il est, pensons-nous, logique de prévoir maintenant toutes sortes de possibilités d'utilisation des tuyères appliquant l'Effet COANDA, notamment en agissant par étage, afin de transposer à de très grandes masses d'air l'énergie qui se trouvait dans de faibles masses pour arriver ainsi à des quantités de mouvement très importantes dirigées vers le bas, ce qui est le but final de tous nos travaux.

-----

hence, on the basis of our different hypotheses, we find :

$$\frac{\pi'}{\pi_1} = \left( \frac{463.1}{283} \right)^2 \cdot 0,12 \approx \text{in round figures : } 0.32$$

We shall take the value 0.3.

Since the ratio of thrust to unit weight of flow is equal to  $\frac{V}{g}$ , we have  $\frac{518.8}{g} = 52.56$  for the jet and  $\frac{283}{g} = 28.85$  for the air rushing towards the jet, so that the total thrust measured in a jet issuing from a device in which the COANDA Effect is used should be :

$$52.56 + 0.3 \times 28.85 = 61.21$$

against :

$$47.21 \text{ (according to Table VI),}$$

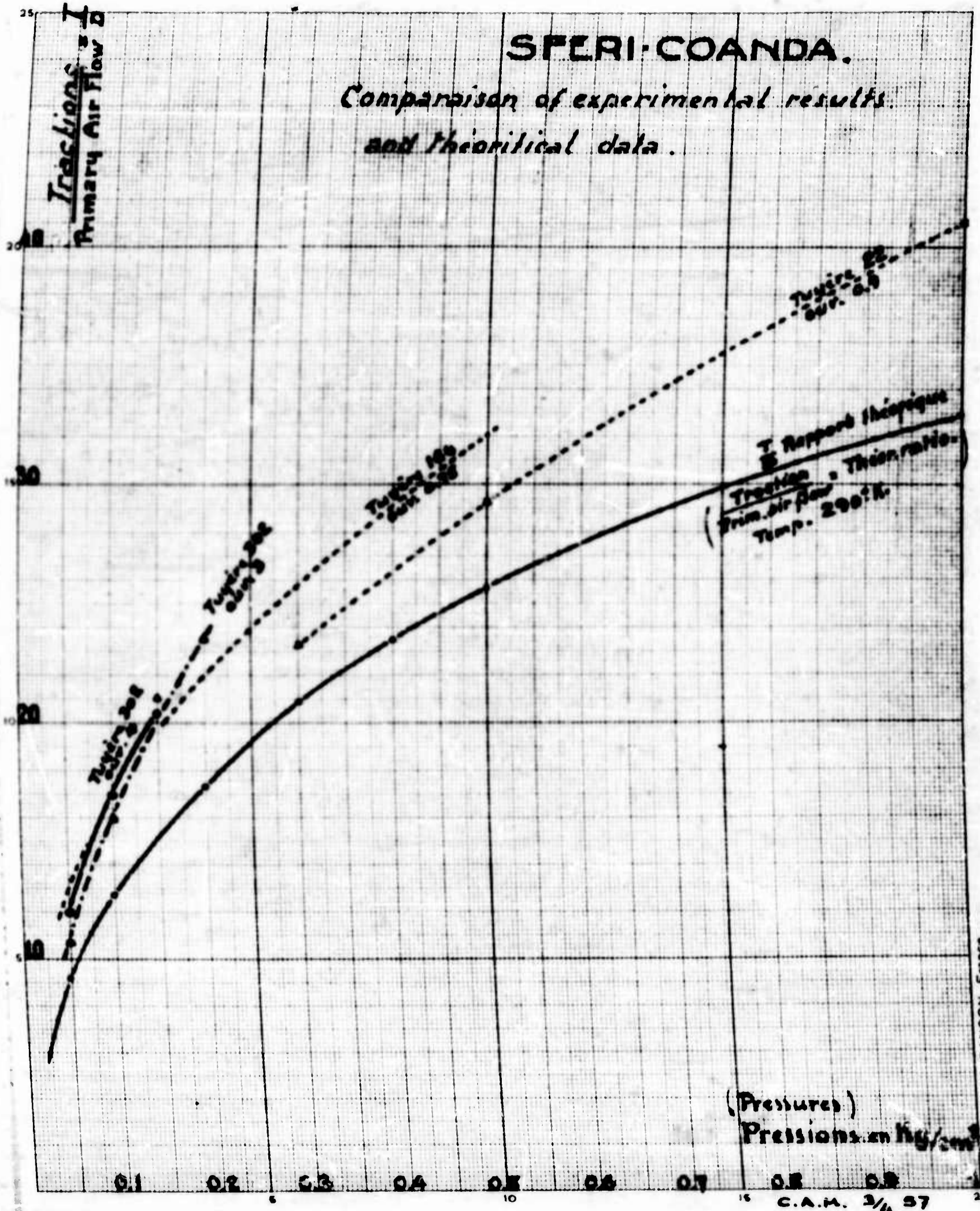
i.e. approximately 1.3 times as much, which corresponds in a very significant manner, as far as our hypotheses are concerned, to certain tests which we made.

During the tests, our measurements of induced air proved that this mass of air was in many cases more than 15 times that of the primary air (in certain tests the rate of induction even rose to more than 30 to 1), for relatively high velocities at the throat of the nozzles. This, compared with the theoretical thrust per unit mass of primary air, gave values of the same order of magnitude as those mentioned above. (We take the velocities at the throat of the nozzle because, after the divergent and depending on its dimensions, the velocities can be greatly reduced, since the kinetic energy involved is converted into potential energy).

We believe that one may now logically conceive many different possibilities of utilization of nozzles applying the COANDA Effect, proceeding by stages in order to transpose the energy contained in small masses of air to very much greater masses, so as to attain very great momenta oriented downwards, which is the ultimate goal of all our research.

# SPERI-COANDA.

Comparison of experimental results  
and theoretical data.



T Report théorique  
Traction / Prim. Air flow  
Temp. 290°K.

(Pressures)  
Pressions en kg/cm²

**UNCLASSIFIED**

**A  
D 204073**

**Armed Services Technical Information Agency**

**ARLINGTON HALL STATION  
ARLINGTON 12 VIRGINIA**

**FOR  
MICRO-CARD  
CONTROL ONLY**

**5 OF 5**

**NOTICE: WHEN GOVERNMENT OR OTHER DRAWINGS, SPECIFICATIONS OR OTHER DATA ARE USED FOR ANY PURPOSE OTHER THAN IN CONNECTION WITH A DEFINITELY RELATED GOVERNMENT PROCUREMENT OPERATION, THE U. S. GOVERNMENT THEREBY INCURS NO RESPONSIBILITY, NOR ANY OBLIGATION WHATSOEVER, AND THE FACT THAT THE GOVERNMENT MAY HAVE FORMULATED, FURNISHED, OR IN ANY WAY SUPPLIED THE SAID DRAWINGS, SPECIFICATIONS, OR OTHER DATA IS NOT TO BE REGARDED BY IMPLICATION OR OTHERWISE AS IN ANY MANNER LICENSING THE HOLDER OR ANY OTHER PERSON OR CORPORATION, OR CONVEYING ANY RIGHTS OR PERMISSION TO MANUFACTURE, USE OR SELL ANY PATENTED INVENTION THAT MAY IN ANY WAY BE RELATED THERETO.**

**UNCLASSIFIED**