

AD 709634

TRANSLATIONS OF FOUR FRENCH PAPERS  
ON OCEAN WAVE CLIMATE DISTRIBUTION FUNCTIONS

Translated by: D. D. Bidde  
Translation edited by: R. L. Wiegel

1. Probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 260, pp. 3125-3128, 15 Mars 1965, Groupe 10.
2. Nouvelles recherches sur la probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 265, pp. 434-436 (16 Août 1967), Série B.
3. Les phénomènes aléatoires et l'ingénieur: propriétés additives et lois de probabilités. By Jean Larras, Travaux, Fév. 1969, pp. 119-120.
4. Etude statistique des observations de vagues. By René Mayencon, Cahiers Oceanographiques, Vol. 21, Mai 1969, pp. 487-501.

Reproduced by the  
CLEARINGHOUSE  
for Federal Scientific & Technical  
Information Springfield Va. 22151

HYDRAULIC ENGINEERING LABORATORY  
COLLEGE OF ENGINEERING



UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
BERKELEY  
May 1970

This document has been approved  
for public release and sale; its  
distribution is unlimited

University of California  
Hydraulic Engineering Laboratory  
Wave Research Projects

Technical Report HEL 1-15

The translations herein were made with the partial support of  
Contract DACW 72-68-C-0016 with the Coastal Engineering Research Center,  
Corps of Engineers, U. S. Army.

TRANSLATIONS OF FOUR FRENCH PAPERS  
ON OCEAN WAVE CLIMATE DISTRIBUTION FUNCTIONS

Translated by: D. D. Bidde

Translation edited by: R. L. Wiegel

1. Probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 260, pp. 3125-3128, 15 Mars 1965, Groupe 10.
2. Nouvelles recherches sur la probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 265, pp. 434-436 (16 Août 1967), Série B.
3. Les phénomènes aléatoires et l'ingénieur: propriétés additives et lois de probabilités. By Jean Larras, Travaux, Fév. 1969, pp. 119-120.
4. Etude statistique des observations de vagues. By René Mayencon, Cahiers Oceanographiques, Vol. 21, Mai 1969, pp. 487-501.

Berkeley, California

May 1970

## TABLE OF CONTENTS

<u>Paper</u>	<u>Translations</u>	<u>Page</u>
1. Probability of appearance of waves with amplitude greater than a given value. By Jean Larras . . . . .		1
2. New research on the probability of appearance of waves with amplitude surpassing a given value. By Jean Larras . . . . .		6
3. Random phenomena and the engineer: additive properties and the probability laws. By Jean Larras . . . . .		11
4. Statistical study of wave observations. By René Mayencon . . . . .		19
<u>Originals</u>		
1. Probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras. . . . .		36
2. Nouvelles recherches sur la probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. By Jean Larras. . . . .		40
3. Les phénomènes aléatoires et l'ingénieur: propriétés additives et lois de probabilités. By Jean Larras. . . . .		43
4. Etude statistique des observations de vagues. By René Mayencon . . . . .		45

C.R. Acad. of Sciences, Paris, t. 260, pp. 3125-3128 (15 March 1965). Group 10.

PHYSICAL OCEANOGRAPHY - *Probability of appearance of waves with amplitude greater than a given value* - Paper\* of Jean Larras, presented by Andre Gougenheim.

The reasoning presented herein leads one to think that during a period of  $N$  days the number  $n$  of days in which ocean waves exceed a wave height  $h_N$  is proportional to  $\text{Log } n/N$ . The analysis of a series of long observations at a dozen ports confirms this, and the extrapolation of these curves to large values of  $N$  agree well with what is believed to be known of the strength of exceptional storms at the same places.

1. The always difficult execution of sea works would be less risky and hazardous if one knew the maximum height of waves that could occur at each location, or at least the probability,  $p$ , with which the wave can surpass a given height,  $h$ , during the useful life of the construction works. However, one usually has wave measurements which have been made only for a small number of years, and thus one must transform the measured percentages of occurrences of these wave heights to the probability of occurrence of higher waves over much longer periods of time in the future. Extrapolation becomes necessary, although it is less reliable because it is concerned with the extension of a curve of purely empirical origin into regions of small probabilities. The risk of having large extrapolation errors is decreased if the empirical curves through the raw observations can be replaced by mathematical relationships which have some theoretical justification, and which fit the observational data sufficiently well. The present

---

\*Session of March 8, 1965

paper describes a first approach to the problem, using reasoning which is more expeditious than rigorous, but which leads to results which seem to be legitimate, "*a posteriori*."

2. For the needs of civil engineering works, one determines for each day, at the specified location, the maximum wave height,  $h$ . Operating in this fashion over a long period of time, one obtains a series  $h_1, h_2 \dots$  (for example 0, 1, 2, 3 m, ...), and one can then determine the number of days  $n_1, n_2$ , during which each of these heights have been surpassed. Dividing these numbers by the number  $N$  of the total interval of observations, one can consider that the quantities  $p_1 = n_1/N_1, p_2 = n_2/N_2, \dots$  define, with an approximation which increases in accuracy with increasing  $N$ , the probabilities of occurrence of a day during the course of which the heights  $h_1, h_2 \dots$  will be surpassed. For a height  $h$  related to  $N$  days of observation one can then associate a probability  $p$  of surpassing this height, and hence put  $h_N = f(p)$ .

On the other hand, in maritime hydraulics it is admitted that the wave height resulting from a superposition of two waves is practically equal to the sum of their individual heights

$$h = h_a + h_b$$

But, if the three waves are considered during a duration equal to  $N$ , and if the superposition of the two components takes place at random, the probability  $p$  related to the resultant is equal to the product of the individual probabilities  $p_a$  and  $p_b$  of the two components. Hence one has:

$$h_N(p_a p_b) = h_N(p_a) + h_N(p_b).$$

This relationship is verified only by the logarithmic function

$$h_N = A \text{ Log } p$$

where  $A$  is a constant which is dependent on the particular location.

Owing to this, the maximum height does not obey the Rayleigh law, and two distinct problems are involved in the question: we consider only the maximum heights in the course of successive periods and not continuous

waves. The relationship is represented graphically in the system of coordinates,  $x = \text{Log } p$ ,  $y = h$ , by a straight line starting from the point  $p = 1$ ,  $h = 0$ . As  $p = n/N$ , the relationship can also be written,

$$h_N = A \text{Log } \frac{n}{N};$$

which links the number of days,  $n$ , for which the wave height surpasses the value  $h_N$  during the total period  $N$ .

The daily maximum wave heights which occur in the ocean<sup>(1)</sup> confirm the validity of the preceding relationship, as can be seen from the figure given herein. The curves in this figure are based upon observations from the "Services des Travaux Publics" of Agadir (2915 days); Bayonne (2556 days); Boulogne (627 days); Casablanca (1350 days); Dieppe (876 days); Dunkerke (682 days); Fos I (888 days); Fos II (872 days); La Gironde (474 days); Le Havre (706 days); Nice (1145 days); and Pointe des Galets (1252 days).

But logarithmic distributions of the preceding type do not exist for more or less regular waves, such as the swell from distant storms which occurs along the western coast of Africa, the shorter components of which have been damped in the course of their propagation; however, this is what one finds, but on a smaller scale, for the Atlantic waves of the accompanying figure.

3. The highest wave which can occur in the course of one year corresponds to  $n = 1$ ,  $N = 365$ . It should be recalled that this, the so-called annual wave, is the one which results from  $h_a = A \text{Log } 1/365$ . In the same manner the decennial, centennial or millennial waves would have analogous definitions; dropping the constant  $A$ , one has

$$\text{Decennial wave} = \frac{\text{Log } 3,650}{\text{Log } 365} h_a = 1.39 \times \text{annual wave}$$

$$\text{Centennial wave} = \frac{\text{Log } 36,500}{\text{Log } 365} h_a = 1.78 \times \text{annual wave}$$

$$\text{Millennial wave} = \frac{\text{Log } 365,000}{\text{Log } 365} h_a = 2.17 \times \text{annual wave}$$

---

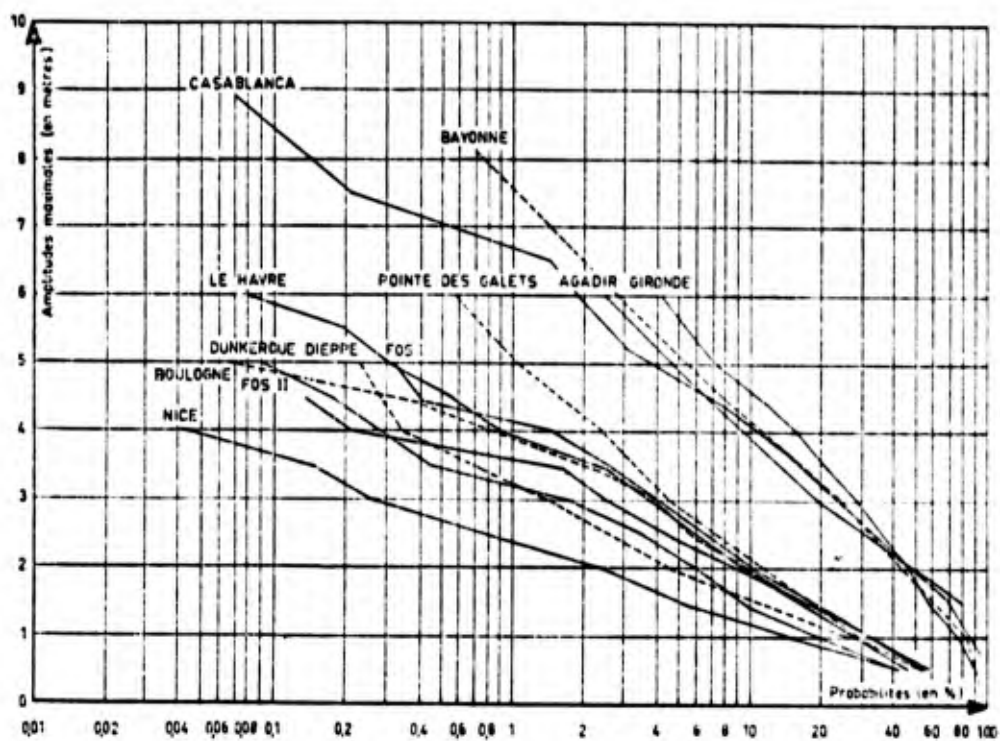
(1) Greatest height recorded on a hodograph during each 24 hours of the working period of the instrument.

Owing to the relative short durations of the observations, it is not possible to attribute a very precise value to the extrapolations which lead to the centennial wave and the millennial wave.

In extending the mean straight lines drawn through the slightly irregular waves in the accompanying figure, one obtains the following values for the decennial and centennial waves:

	Decennial (m)	Centennial (m)
Nice	4.25	5.45
Dunkirk	5.75	7.30
Fos II	5.80	7.40
Dieppe	6.00	7.70
Boulogne	6.50	8.30
Le Havre	7.10	9.10
Fos I	7.25	9.30
Pointe des galets	9.55	12.40
Casablanca	10.25	12.75
Bayonne	12.70	16.00
Gironde	14.05	17.70

The extrapolation for the centennial waves is less reliable, but the heights for the decennial waves agree well with what is believed to be known about the strength of exceptional storms at these locations, and justify as a consequence, within certain limits, the extrapolation of the proposed logarithmic distributions.



C. R. Academy of Sciences, Paris t. 265, pp. 434-436, (16 Aug. 1967), Series B

Physical oceanography - New research on the probability of appearance of waves with amplitude surpassing a given value. Paper<sup>(\*)</sup> of M. Jean Larras, presented by M. Andre Gougenheim.

"Generalization of the logarithmic distribution law to the case of large oceans, or better, to a very narrow frequency spectra."

1. In a preceding paper we have shown<sup>(1)</sup> that during a period of  $N$  days the number  $n$  of days in which the waves of the ocean surface surpass the amplitude  $h_N$  is proportional to  $\text{Log } n/N$  when the waves are perfectly random. This relationship is represented graphically by a straight line which starts from the point  $p = 1, h_N = 0$  in a system of coordinates  $x = \text{Log } p, y = h_N$ , where  $p$  is the probability of occurrence for  $n/N$ . It is particularly valid for seas of limited extent, where the waves are random, but it does not apply entirely to seas covering large areas. At some point of their extension these seas are in effect more or less the center of storms which are remote in space and time from a particular site, so that a "background" wave action exists in addition to locally generated waves. As a result, the straight line which represents  $h_N$  as a function of  $p$  should not start from the point  $p = 1, h_N = 0$ , but from a point with coordinates  $p = 1, h_N = a$  where  $a$  is the mean amplitude of the "background" wave action at each particular location. This is verified by the figure in our previous paper for the Atlantic Ocean.

Bayonne, Gironde .....  $a \approx 0.70$  m

Agadir, Casablanca ..... 1.25

It is equally verified for La Jolla, Mission Bay, Tamatave and weather ships (frigates) I and J, in the three largest oceans of the earth, in Figure 1 of the present paper<sup>(2)</sup>:

La Jolla, California .....	a = 0.45 m
Mission Bay, California .....	1.0
Tamatave .....	1.25
Metero. Frigate (Weather Ships) I and J .....	2.50

2. The logarithmic relationship is no longer valid because without infringing on the fundamental principle of energy conservation there is no means to represent the amplitude of the wavy ocean surface by the sum of the amplitudes of the component waves, and because consequently there is no means of representing the probability distributions of one by the probability distribution of the other (as we had admitted in our first paper together with most of the authors). This is namely the case of oceans where the storm waves have a particularly narrow frequency spectrum. A classical calculation by Rayleigh showed that the probability distribution of the amplitude of the free surface time history is the same as the distribution of the sum of component wave amplitudes, and in the same way the probability distribution is the same for the square of the surface time history as for the sum of the squares of the components. Now, the square of the amplitude of a component wave is proportional to the energy of the wave per unit surface area, and the total energy of the waves is the sum of the energies of the component waves. One can therefore use here the same reasoning--based on additive properties--as in our first paper, but using the squares of the surface waves instead of the amplitude of the waves themselves; thus, in the course of a period of

$N$  days the number  $n$  of days in which the square of the surface waves surpass the value  $(h_N)^2$  should be proportional to  $\text{Log } N/n$  for storm waves which have a particularly narrow frequency spectrum.

Now, such a narrow spectrum exists for the case of breaking waves, and especially for the case of the Benin coast, where it has been found that effectively a linear relationship exists between the values of  $(h_N)^2$  and  $\text{Log } n/N$ <sup>(3)</sup> (Fig. 2). Experience confirms, therefore, the reasoning that we have just stated, and one can conclude, as Longuet-Higgins and Miche<sup>(4)</sup> did, by a totally different way, that the wave amplitude spectrum conforms to the Poisson probability law when the frequency spectrum is particularly narrow. The relationship which we have just developed amounts in effect to

$$h_N^2 = H^2 \text{Log} \int_{h_N}^{\infty} \pi(h_N) dh_N, \text{ and consequently}$$

$$\pi(h_N) = -\frac{2h_N}{H^2} \exp(-h_N^2/H^2)$$

where  $\pi(h_N)$  is the probability of occurrence of a wave of amplitude  $h_N$  in the amplitude spectrum.

- (\*) Session of July 31, 1967.
- (1) Comptes rendus, 260, 1965, p. 3125.
- (2) F. P. Shepard and D. L. Inman, Beach Erosion Board, Technical Memorandum No. 26, Nov. 1951, p. 10; P. Bruun, Beach Erosion Board, Technical Memorandum No. 44, June 1954, p. 74; National Hydraulics Laboratory, Report B647, 10 May 1957, Figures 6 and 7; Darbyshire, The Dock and Harbour Authority, May 1956, p. 31-32.
- (3) J. A. Sitarz, Work of the Oceanographical Study and Research Center," 5, Parts II, III, IV, September 1963, p. 132 and 133; J. Darbyshire, The Dock and Harbour Authority, December 1957, p. 277.
- (4) M. S. Longuet-Higgins, J. Marine Res., 11, 1952, p. 245-266;  
R. Miche - Properties of Laboratory and Ocean Wave Trains,  
Publ. No. 135, Comm. Centr. Ocean. Ét. Cotes, Paris 1954.

(28, Argerson Boulevard,  
Neuilly-Sur-Seine,  
Hauts-de-Seine)

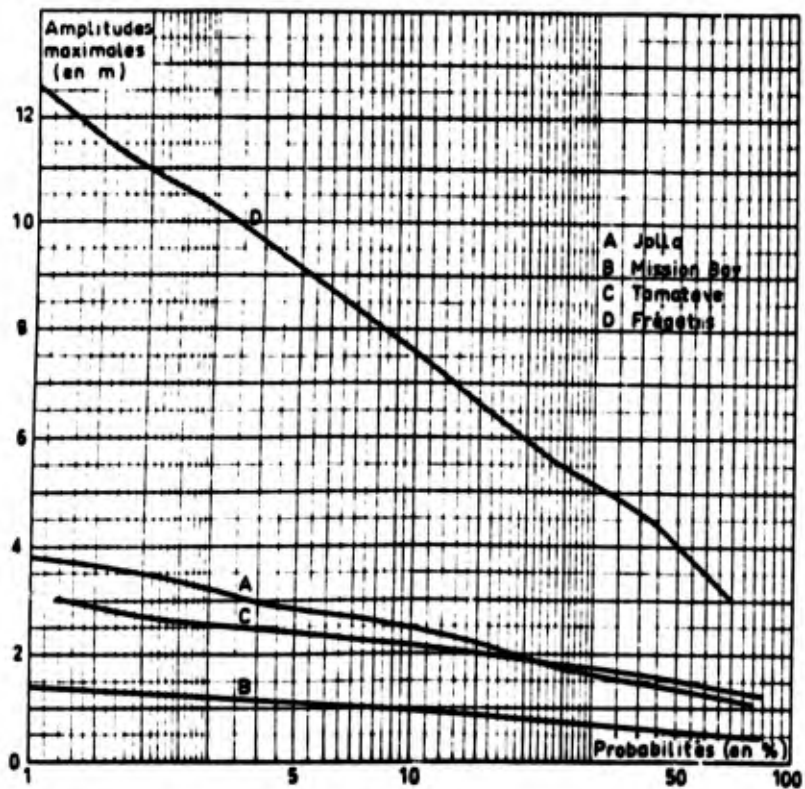


Fig. 1.

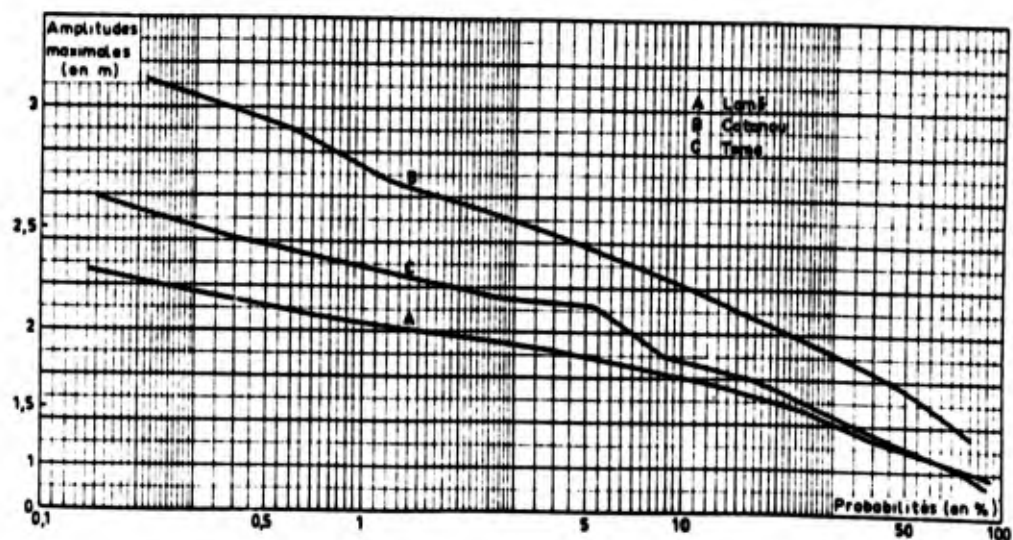


Fig. 2.

RANDOM PHENOMENA AND THE ENGINEER:  
ADDITIVE PROPERTIES AND THE PROBABILITY LAWS

By Jean Larras  
Inspecteur Général des  
Ponts et Chaussées

Relationships between the distribution function of a random variable and the additive properties of a certain function of this variable are discussed, together with applications and theories of the probability law which is most representative of a given physical random phenomenon. An example is given.

I - The engineer has at his disposal an extensive choice of probability laws which can be used to interpret, or to extrapolate given statistical material: Law of Cauchy, of Fischer & Tippet, of Fréchet, of Galton, of Gauss, of Gumbel, of E. Halphen, of Laplace, of Pearson, of Poisson, exponential functions, incomplete factorial functions, Markoff chains, etc. But it is very difficult to know which law should be adopted in a particular case, because generally one does not have an observation series of sufficient length; consequently, one cannot always draw much from direct comparisons of best fits. What is in question is the fundamental choice of a probability law to be used to determine extreme values, which sometimes are the only ones with which the engineer has to deal; thus, one finds the Fall floods of the Durance, at Archidiachre, of  $1,500 \text{ m}^3/\text{s}$  to be the decennial floods when one uses Gumbel's Law and to be the millennial flood when the Fréchet Law is used, using the daily gaugings made during the period of 1916-1965 in both the cases. It is therefore necessary to determine an indisputable criterion, of a type more mathematical than empirical, and

TRAVAUX  
February 1969

to adopt one probability law in preference to all others; we shall show that the additive properties of the phenomenon being studied could constitute a criterion of this kind.

II - Let us suppose that the phenomenon in question presents the additive characteristic for a certain function  $\phi$  of the variable  $x$ , the ensemble of values of which constitutes the statistical material under study:

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \phi(x_1) + \phi(x_2) \dots + \phi(x_n).$$

Let us designate by  $x_i = f(P_i)$ , the distribution function which defines the probability of occurrence  $P_i$  of a value  $x$  smaller than  $x_i$  when the phenomenon occurs only once.

Though the phenomenon occurs  $n$  times instead of once and is perfectly random, the probability of occurrence of a value of  $x$  smaller than  $x_1$ , of a value of  $x$  smaller than  $x_2$ , ... of a value of  $x$  smaller than  $x_n$  (in an absolutely arbitrary order) is nothing else but the product of the probabilities of occurrence of each of these  $n$  values of  $x$  taken separately.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1 \times P_2 \dots \times P_n$$

Hence one has:

$$\phi[f(P_1 \times P_2 \dots \times P_n)] = \phi[f(P_1)] + \phi[f(P_2)] + \dots + \phi[f(P_n)]$$

when the phenomenon has the additive characteristic which we have assumed and when the distribution of the  $n$  values is random in the interval between zero and  $x_n$ .<sup>(1)</sup>

Now, this relationship does not admit any other solution than:

$$\phi[f(P)] = h^2 \text{ Log } P$$

where  $h$  is a constant.

The additive characteristic of the function  $\phi$  means therefore that the probability of occurrence  $P(x_i)$  of a value  $x$  smaller than  $x_i$  in an ensemble

---

(1) It is to be understood that the value of  $x_n$  is the greatest of all  $x_i$ .

of the phenomenon being studied is such that one has:

$$\phi(x_i) = - h^2 \text{Log } P(x_i)$$

or more simply

$$P(x_i) = e^{-\phi(x_i)/h^2}$$

Here,  $P(x)$  is the distribution function of the random variable  $x$  whose statistical behavior is being studied.

III - The reciprocal is equally valid because if the function  $\phi(x_i)$  follows a Gaussian Law, the additive characteristic of the second order moments which characterize this type of law leads to:

$$[\phi(\sqrt{x_1, x_2, x_3, \dots})]^2 = [\phi(x_1)]^2 + [\phi(x_2)]^2 + [\phi(x_3)]^2 + \dots$$

and consequently:

$$\phi(x_1, x_2, x_3, \dots) = \phi(x_1) + \phi(x_2) + \phi(x_3) + \dots$$

IV - Daily maximum wave heights, daily rainfall, and the hourly number of vehicles on roads physically represent the sum of independent random variables, and very small ones, which add arithmetically at each observation site. Using the previous reasoning it can be stated that these phenomena can be represented by distribution functions of the type:

$$P(x) = e^{-x/h^2}$$

and that one can represent them by logarithmic diagrams of the type:

$$x = - h^2 \text{Log } P(x)$$

as has been verified in the field. (2)

V - One arrives at a distribution function of the Gaussian type:

$$P(x) = e^{-x^2/h^2}$$

when one is concerned with elements which physically represent the sum of

---

(2) Waves: J. Larras, C. R. Ac. Sc., March 15, 1965.  
Rainfall: R. Kayser and C. Heidenmann, Die Wasserwirtschaft, 4/1967, 12.170, Fig. 6.  
Vehicles: J. Larras, Rev. gén. routes et aérodromes, No 422, June 1967.

small independent random quantities, whose squares add arithmetically (at each observation site) as is the case for the amplitudes of ocean swell off the coast. (3)(4)

VI - Finally, one arrives at a distribution function which tends asymptotically to the law of Fréchet:

$$P(x) = x^{-K}$$

when the elements being studied physically represent a sum of small independent random quantities whose product at each observation site is of interest. (5) Because the logarithms of these elementary quantities add arithmetically and the relation  $\phi(x) = h^2 K \text{Log } x$  which expresses this additive characteristic (6) is identically equivalent to

$$x^{-K} = e^{-\phi(x)/h^2} = P(x)$$

But one arrives as well at Fréchet's law when the elements under study physically represent the sum of small independent random quantities, which are of the form  $K \log x$  or which have the same general behavior (as is the case with the variations of the physiological sensations as a function of excitation).

VII - The law of addition is nevertheless not necessarily the same for all the values of  $x$  in the ensemble of the material being studied.

---

(3) J. Larras, C. R. Ac. Sc., 1967.

(4) It is said that the Galton's Law is nothing else but Gauss Law in which  $x$  is replaced by  $\text{Log } x$ . The Galton Law corresponds therefore to the additive characteristic of independent random quantities of the form  $(\text{Log } x)^2$  or to functions of  $x$  which have the same general behavior.

(5) It is possible that this is the case for the discharges of certain rivers although one cannot actually find a physical explanation (J. Bernier, *Revue de Statistique Appliquée*, 1957, No. 2, Vol. 5).

(6) It is said that the Gumbel law is nothing else but the Fréchet Law in which  $x$  is substituted by  $e^x$ . One can therefore represent Gumbel's law asymptotically by the relation  $\phi(x) = h^2 K \text{Log } (e^x) = h^2 K x$ , and one ends up asymptotically to the same type of distribution law as in paragraph IV.

It is in this way that the small tributaries which form a river add purely and simply one to another in a very large river, whereas it is not possible for simple additions of this kind to occur when the river is not sufficiently large and they disturb each other <sup>(7)</sup> It is also the case when a part of phenomena is random and the other is not. <sup>(7)(8)</sup>

A convenient method that can be used to distinguish the sections of a curve which corresponds to one of the different laws of addition (and of probabilities) consists of plotting the distribution functions on the diagrams:

- using logarithmic ordinates for the types of law of paragraph IV.
- using Gaussian ordinates for the types of law of paragraph V.
- using both logarithmic abscissas and ordinates, for the types of law of paragraph VI.

The linear portions of the curves drawn on such graphs correspond in effect to the sections of the curves for which one can apply the corresponding laws, and nonlinear portions indicate sections of the curves where one cannot.

Although we have already given examples, <sup>(7)(8)</sup> it appears useful to give another example in the present study

VIII - The new example is concerned with 1768 compression resistance tests of a particularly carefully prepared concrete, for use in exceptional construction, which were subjected to four types of tests, using 125 separate samples (Table 1). <sup>(9)</sup>

---

\*Translator's note: Perhaps this means that when the river flow and its tributaries are low, one has one law, but that when they are all in flood, the flows may affect one another.

(7) J. Larras, *Terres et eaux*, No. 8, 1966.

(8) J. Larras, *Rev. gén. routes et aérodromes*, No. 422, June 1967.

(9) Experimental results supplied by "Laboratoire Central des Ponts et Chaussées."

The distribution function which corresponds to each type of tests follows the Gaussian Law (Henry's straight line) above the 20% level and the Fréchet Law below the 20% level (Figs. 1 and 2). This is perhaps due to the presence of empty pores in the less compact concrete samples, since they would not exist in the better made concrete; however, it is sufficient to ascertain the fact, and we shall see that it cannot have serious consequences.

The danger of occurrence of weak concrete seems in effect to become much greater when one evaluates this by extrapolation using the law of Fréchet (Figure 2) than by extrapolation using the law of Gauss (Henry's straight line) (Figure 1), as can be seen in Table II. This could modify certain evaluation methods of the resistance of concrete (especially from test cubes), if the new and longer test series should at some later time, confirm this observation.

Table I - Observed Resistances

Data	Cylinders		Cubes	
	28 days	90 days	28 days	90 days
Median resistance (in bars)	430.5	477	522	615
Mean square deviation (in bars)	46	62	46	45
Mean square deviations (in % from the median)	10.7	12.9	8.8	7.3
Minimum resistance (of bars)	326	305.5	360	362
No. of essays	298	345	375	750

Table II - Computed Resistances

Probabilities	Cylinders		Cubes		
	28 days	90 days	28 days	90 days	
1/10	G	379	398	469	558
	F	370	402	463	547
1/100	G	334	333	425	515
	F	322	328	390	482
1/1000	G	299	283	392	481
	F	281	265	327	424
1/10000	G	266	235	360	449
	F	244	214	275	374

Resistance in bars: G = Law of Gauss    F = Law of Fréchet

Tableau I — Résistances observées

Données	Cylindres		Cubes	
	28 j.	90 j.	28 j.	90 j.
Résistances médianes (en bars)	430,5	477	522	615
Écart quadratique moyen (en bars)	46	62	46	45
Écart quadratique moyen (en % de la médiane)	10,7	12,9	8,3	7,3
Résistances minimales (en bars)	326	305,5	360	362
Nombre d'essais	298	345	375	750

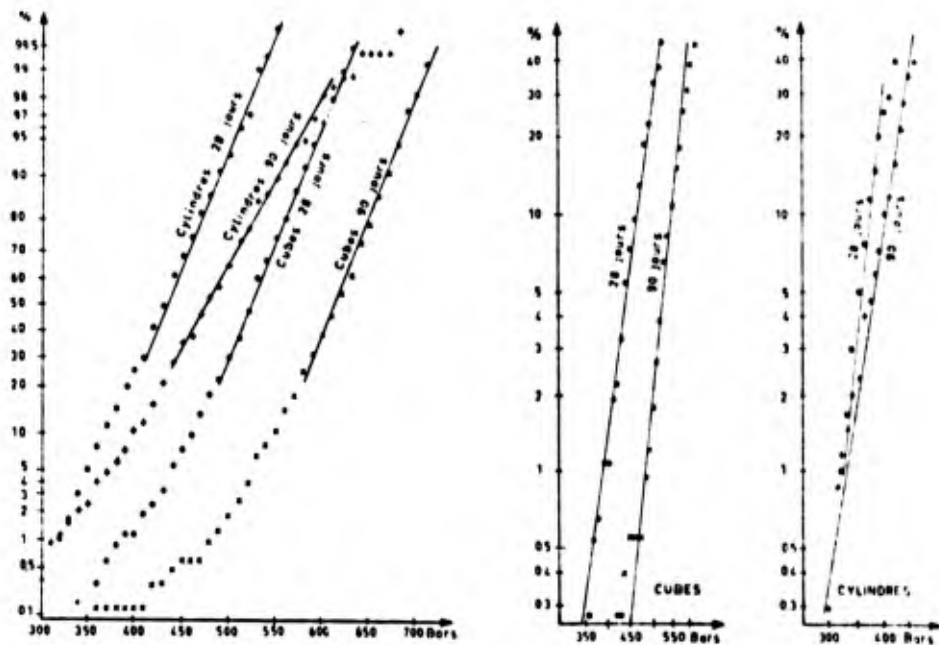


Fig. 1 et 2. — Résistance à la compression

Tableau II — Résistances calculées

Probabilités	Cylindres		Cubes	
	28 j.	90 j.	28 j.	90 j.
1/10 G	379	398	469	558
	370	402	463	547
1/100 G	334	333	425	515
	322	328	390	482
1/1 000 G	299	283	392	481
	281	265	327	424
1/10 000 G	266	235	360	449
	244	214	275	374

Résistances exprimées en bars : G — Loi de Gauss F — Loi de Fréchet.

STATISTICAL STUDY OF WAVE OBSERVATIONS\*

by

Rene Mayencon

Ingenieur des Travaux Meteorologiques

The British Meteorologic Service has recently published\*\* statistics of the visual observations of wind wave and swell made on board 500 ships during the eight years 1953 to 1961, for many regions of the oceans. A total of more than a million observations have been reported on punched cards. The purpose of this paper is to show certain important characteristics of the data, and to examine some of the conclusions that can be deduced from these data.

1. Criticism of the Data Homogeneity

The work of N. Hogben and F. E. Lumb furnishes statistics for 50 zones which encircle the major ocean shipping routes. We shall deal here only with zones 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12 and 17 (see Figure 1).

1.1 The total number of observations varies greatly from one zone to another. The number of observations depend upon the zone dimension and the number of ships crossing a given zone. Thus, one notes for zones 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12 and 18 that 33,146, 3,911, 7,646, 71,948, 46,547, 73,133, 90,702, and 60,570 wave observations, respectively, were made during the eight years. Furthermore, it is certain that the density of the geographical distribution of the observations within each zone is not uniformly distributed.

---

\* Manuscript received 24 February 1969.

\*\* "Ocean Wave Statistics," N. Hogben and F. E. Lumb (1967).

1.2 The graphical representation of the number of observations of wave heights for steps of 0.50 m is sufficient to show, for each zone, two considerable discontinuities which are surprising at first sight: one between 4.50 and 5.0 m, the other between 9.50 and 10 m (see Figure 2, for example, relative to zone 2).

These anomalies can be explained easily; they result from a lack of simplicity and homogeneity of the code used for reporting the wave observations\*. When the height exceeded 4.50 m it was necessary to add 50 to the number indicating the direction; furthermore, when the height was over 9.50 m it was necessary to write 9.50 m and add, clearly, the word "waves" followed clearly by the indication of the height. One can suspect that certain observers were waiting until the wave heights surpassed clearly 5 m to use a code relatively complicated: at one time they wrote 4.50 m (instead of 5 m or more), at another time they omitted in a certain number of cases, to mark the waves when they were having wave heights of 5 to 6 meters. As for waves higher than 9.50 m, they were often written 9.50 m without the group WAVES.

The first conclusion one can arrive at from a brief examination of these data is that the code should be made simple and homogeneous.

## 2. Probability for the Occurrence of Wave Heights

### 2.1 Putting a simple law in evidence

If one omits in the wave height data the values of 4.50 m, 5 m and 5.50 m, and the ones of 9 m, one notes that the number of observations, by steps of 50 cm, obeys in a remarkable way, as far as the wave heights greater than 2 m are concerned, an exponential law.

---

\* Since January 1968, an improved code has been in use.

If one plots as the ordinate the number of cases on a logarithmic scale and as the abscissa the wave heights (as they were estimated visually by the ship observers) on a linear scale, it can be seen that for the majority of cases the representative data points lie on a straight line.

By this procedure one can reconstitute easily the number of observations which would have probably been reported through the use of a better code for the wave heights of 4.5 m, 5 m, 5.50 m, 9.50 m and greater. Thus, for example, for zone 2 (Figure 3) one finds the values shown in brackets in Table 1, and which we have placed for inspection, raw values obviously affected by the faults of the code. What is particularly remarkable, is that the sum of the numbers of cases with wave heights greater than 9 m, reconstituted with the help of the straight line, proves to be close to the number of visual observations of wave heights 9.50 m or greater. This constitutes a confirmation of the validity of the exponential law which we have put in evidence graphically and in a very simple way.

Let us give now a mathematical expression to this law.

Let  $m$  be the slope of the straight line established previously; i.e., plotting as the ordinate the logarithm of the number of cases ( $\text{Log } n$ ) and the reported wave height ( $H$ ) by steps of 50 cm on the abscissa. Let  $b$  be the ordinate of the point of intersection of this straight line with the  $Oy$  axis. Let  $k$  be a number such that  $k = 10^b$ ;  $b = \log k$ . One has

$$\log n = mH + b$$

Hence

$$n = 10^{mH + \log k}$$

(taking, for height steps, the limits  $H - 0.25$  m and  $H + 0.25$  m,  $H$  being expressed in meters). For the zone 2:

$$n = 10^{-0.274H + 4.283}$$

We shall give later on the relative coefficients for other zones.

## 2.2 Calculation of the Number of Waves with Heights Equal or Greater Than a Given Value.

The number  $N$  of wave observations with height greater or equal to a given value  $H_1$  can be considered to be equal to two times the area included between the  $Ox$  axis and the curve established with the observations for steps of half a meter, this area being limited on the left by the straight line  $x = H_1$ .

This area is equal to  $\int_{H_1}^{\infty} 10^{mH + \log k} dH$ .

$m$  being negative,  $10^{mH}$  tends to zero when  $H$  tends to  $\infty$ .

Therefore:  $\int_{H_1}^{\infty} 10^{mH + \log k} dH = -\frac{m}{L10} 10^{mH_1 + \log k}$

Hence:

$$N = -\frac{2m}{L10} 10^{mH + \log k}$$

This is an exponential function, with a graphical representation in the same coordinate system as in the preceding (i.e.  $y = \log n$ ; here one takes  $y = \log N$ ) being a straight line parallel to  $y = mH + \log k$ , and with the point of intersection with the axis  $Oy$  having a greater ordinate (which we shall designate by  $\log K$ ) by  $\log \frac{2m}{L10}$  compared to the ordinate of intersection of the straight line  $y = mH + \log k$ .

2.3 It would be certainly interesting to know the percentage  $p_1$  of waves with height greater than or equal to a given value of  $H_1$ .

Let T be the number of observations made in a zone,

$$p_i = \frac{N_i \times 100}{T}$$

In the same coordinate system the function p is represented graphically by a straight line parallel to the one of the function N. One can then simply change the origin so that:

$$\log p = Y = y - \log \frac{100}{T}$$

Knowing that the number of observations made every three hours at a given fixed point is 2920, the probability  $P_i$  of the observation of a wave height equal or greater than  $H_i$ , with 8 observations a day, is:

$$P_i = \frac{p_i \times 2,920}{100}$$

Another change of origin will easily permit a graphical determination of the logarithm of this probability ( $p_i = 1$ ).

It should be mentioned that a probability, for example, of 0.1 means: on the average of once in the course of a period of 10 years; a probability P of 0.01, means on the average of once every 100 years; etc. The height corresponding to  $P = 0.1$  applies to a wave called the decennial. The one corresponding to  $P = 0.01$  to a wave called the centennial. The latter value is of great practical importance in establishing the characteristics of the sea in regard to structures which should last for many decades.

The results obtained for the different zones are given in Table 2. With the aid of the values T, m, and k, we have established the representative straight lines of the functions N shown in Figure 4, where, moreover, we represent the raw values of the cumulative number of real observations beginning with 9.50 m.

In fact, the centennial wave which we have just defined does not correspond to the height of the greatest wave that might occur in the course of a century. In effect, H represents in principle, the mean height of three of the greatest waves from a group of 9 well formed waves. This is the "significant height": the one which should be marked by the marine observer. It is slightly higher than  $H_{1/3}$ . Let it be recalled that the greatest wave from a group of 1,000 has in average a height of  $H_{1/1000}$ ;  $H_{1/1000}$  being statistically almost double the height of  $H_{1/3}$ . Before going further, it is essential to know the real value, as precise as possible of the H observations.

### 3. Values of Visual Observations

#### 3.1 Comparison Between the Visual Observations and the Records From the TUCKER Wave Recorder, Carried Out Simultaneously on Board the Weather Ship "FRANCE II" From October 1966 to January 1967\*

This comparison shows that the visual observations were closest to  $H_{1/10}$  (see Figure 6). We have found the following linear relation (adjusted by the method of least squares):

$$H_{1/10} = 1.4 \text{ m} + 0.77 H_v \quad (H_v \text{ being the height in meters of the visual observations (see Figure 5)}).$$

This result is in disagreement with the one reported in "Wave Statistics"\*\*, which is:

$$H_{1/3} = 1.23 + 0.88 H_v$$

---

\* Note No. 240 of the Office of Meteorological Study and Research (Etablissement d'Etudes et de Recherches)

\*\* Moskowitz, L., Pierson, W. J. and Mehr E. Wave spectra estimated from wave records obtained by the O.W.S. Weather Explorer and O.W.S. Weather Reporter, Technical Reports, I, II and III. New York University College of Engineering, 1962-63.

Figure 6 permits one to note that the representative points of  $H_{1/3}$  to the straight line, derived from the statistical observations of selected ships ("Ocean Wave Statistics") for the winter in zone 7 (see Table 2), and which have the equation:

$$\text{Log } N = \log \frac{0.498}{L10} 10^{4.080 - 0.249 H} + \log \frac{152}{17,057}$$

Remarks: The relative short time observations and recordings were made aboard "FRANCE II" does not permit reliable final conclusions, especially in regard to the vaguely parabolic look of the curves which one could fit to the values taken from the wave gage records ( $H_{1/10}$  &  $H_{1/3}$ ) and which would lead one to think that the wave heights obey in part the law of Gauss (perhaps it is so for relatively short time intervals). Otherwise, it would seem that the observations of "FRANCE II" had a tendency to be an estimate of wave heights close to  $H_{1/10}$ , and therefore presented on average an exaggerated set of values as compared to the ensemble of the other ships (meteorologic or selected and voluntary).

3.2 Hogben and Lumb propose the following relation between the observations of the stations and meteorologic ships equipped with wave recorders ( $H_{o.w.s.}$ ) and the ones of voluntary ships ( $H_{v.o.s.}$ ):

$$H_{o.w.s.} = 0.85 + 0.93 H_{v.o.s.} \quad (2)$$

or as,

$$H_{1/3} = 1.23 + 0.88 H_{o.w.s.} \quad (1)$$

one can write:

$$H_{1/3} = 1.23 + 0.88 (0.85 + 0.93 H_{v.o.s.})$$

or

$$H_{1/3} = 2 + 0.82 H_{v.o.s} \quad (3)$$

It is this formula (3) that we shall use, being always aware that its validity is not guaranteed for wave heights clearly greater than 10 m.

4. Determination of the Probable Height of the Highest Observable Wave At a Point, During One Year, One Decade and One Century.

Having determined the annual, decennial and centennial  $H_{1/3}$  with the aid of Table 2 and Equation (3) (see Table 3), let us now calculate the height of greatest individual wave which could theoretically occur. For 1,000 waves the most probable value of the highest height (which we shall call  $H_{\max}$ ) is 1.86 times  $H_{1/3}$ . Adopting this coefficient, one would find that the "centennial waves" ( $H_{c.\max}$ ) would be greater than 35 m (Table 3). Let us remark that the ratio between  $H_{1/3}$  and the most probable value of  $H_{1/1000}$  (the value of 1.86 is after Longuet-Higgins) is theoretical, and is strictly valid only for narrow frequency spectrum, which is not the case in storms. The preceding results concerning  $H_{c.\max}$  are presented only as an indication, because we believe it is better to operate in the following manner.

Let us determine with the aid of Figure 4, the greatest height which would be observed in a year if the number of annual observations were no longer 2920 as was the case in the preceding (one observation every 3 hours), but 100 times greater, therefore: 292,000 (corresponding to one observation every 108 seconds, at each site). Under these conditions, the probability of observing the height  $H_c$  in Table 3 is no longer once in a century, but on an

average once per year. If it is admitted that about 10 waves pass by, on the average, in 108 seconds, the highest wave has in principle a height  $H_{1/10}$  that is 27% greater than  $H_{1/3}$ . (It is recalled that  $H_{1/3}$  is calculated starting from visual observations and using Equation (3).) We shall call  $H'$  the heights calculated from 292,000 observations per year.  $H'_{c,max}$  is theoretically the greatest height wave that might occur, or be surpassed at any point of each zone--but distant from the coast--once in a century (see Table 4). In fact, as the mean storm wave period is generally greater than 10.8 seconds, the probable height of the highest wave should be  $H_{1/8}$  or  $H_{1/7}$ , therefore, strictly speaking, a little smaller than  $H_{1/10}$ . Moreover, we ignore whether Equation (3) is valid for waves of 20 to 30 meters in height. It is therefore certain that the values of Table 4 are undoubtedly already more exact than the ones of Table 3, although not corresponding in a precise manner to reality; furthermore it is probable that they are a little exaggerated. Nonetheless, the order of magnitude should be correct.

To those who believe such dimensions excessive, we shall say that colossal waves have been observed on a number of occasions at different points of the globe. Let us recall here that DUMONT D'URVILLE reported having met a wave 30 meters in height near the Cape of Good Hope, and, that a sufficiently precise observation was made from the American Vessel "Ramapo" on February 6, 1933, in the Pacific: the calculations gave 33.6 m. In approaching the shallow water, especially near coasts, the wave dimensions are changed considerably and it is not possible to apply there the preceding results (valid at large in principle). Nevertheless, some

observed facts on the coasts given an idea of the huge heights which certain waves may achieve. Let us quote the following passages from the work of Rachel Carson, "The Sea Around Us":

"Then there is the often quoted story of the December storm at Trinidad Head Light on the coast of northern California. As the keeper watched the storm from his lantern 196 feet above high water, he could see the near-by Pilot Rock engulfed again and again by waves that swept over its hundred-foot crest. Then a wave, larger than the rest, struck the cliffs at the base of the light. It seemed to rise in a solid wall of water to the level of the lantern, and it hurled its spray completely over the tower. The shock of the blow stopped the revolving of the light."

"At Unst, the most northern of the Shetland Islands, a door in the lighthouse was broken open 195 feet above the sea. At the Bishop Rock Light, on the English Channel, a bell was torn away from its attachment 100 feet above high water during a winter gale. About the Bell Rock Light on the coast of Scotland one November day a heavy ground swell was running, although there was no wind. Suddenly one of the swells rose about the tower, mounted to the gilded ball atop the lantern, 117 feet above the rock, and tore away a ladder that was attached to the tower 86 feet above the water."

"Along a rocky coast, the waves of a severe storm are likely to be armed with stones and rock fragments, which greatly increase their destructive power. Once a rock weighing 135 pounds was hurled high above the lightkeeper's house on Tillamook Rock on the coast of Oregon, 100 feet above sea level. In falling, it tore a 20-foot hole through the roof. The same day showers of smaller rocks broke many panes of glass in the lantern, 132 feet above the sea."

## 5. Conclusion

The exponential laws which the wave heights observed from on board ships seem to follow have been established empirically, and no theoretical justification has been given.\* Undoubtedly, it would have been much more gratifying to see the heights - or the energies - obeying a Gaussian law; and one can certainly ask whether the exponential laws put in evidence are not artificial and do not contain the subjective characteristics of the observations which were used to establish them. Wave recorders will certainly furnish within some years sufficiently abundant objective data to permit one to banish the doubt on this subject and at least to complete and specify better the results at which we have arrived, and which should be considered only as temporary. Pending the utilization and interpretation of the statistical data presented by HOGBEN & LUMB, if subject to criticisms to which they could be, we appear to have presented results of interest.

---

\* At the time of writing of this paper, we were ignoring the works of M. Jean Larras and the explanations which he proposes (C.R. Acad. Sc. Paris, (265, 16 Aug. 1967: "New Research on the Probability of Appearance of Waves with Heights Surpassing a Given Value"). We note that the results to which we arrived independently from each other are in good agreement, at least what concerns the simple exponential form of the probability law of wave heights for the case of broad spectrum.

TABLE 1

WAVE HEIGHTS (m)	NUMBER OF CASES (ZONE 2)	
	RAW VALUES EXTRACTED FROM "OCEAN WAVE STATISTICS"	VALUES TAKEN FROM FIG. 3
4	1463	(1463)
4.5	1461	(1090)
5	245	(780)
5.50	267	(575)
----	----	----
9	64	(64)
9.50	161	(46)
10	0	(34)
10.50		(25)
11	2	(18)
11.50		(14)
12	3	(10)
12.50		(8)
13	0	(6)
13.50		(5)
14	0	(4)
14.50		(3)
15	2	(2)
15.50		(1)
16	0	(1)

TABLE 2

ZONES	1	2	3	4	6	7	7 Winter	8	11	12 Winter	17
T	23,016	33,146	3,911	7,646	35,885	71,948	17,057	46,547	73,133	21,013	37,625
-m	0.265	0.274	0.376	0.375	0.286	0.279	0.249	0.351	0.345	0.398	0.480
log k	4.076	4.283	3.476	3.626	4.277	4.600	4.080	4.550	4.580	4.141	4.578
log K	4.570	4.784	3.841	3.996	4.759	5.095	4.623	4.944	4.983	4.480	4.836
Annual Wave (m) (P=1)	13.8	13.6	9.8	9.7	12.8	13.3	13.0	10.9	10.6	7.6	7.8
Decennial Wave (m) (P=0.1)	17.6	17.3	12.4	12.3	16.3	16.9	17.0	13.8	13.5	10.1	9.9
Centennial Wave (m) (P=0.01)	21.3	20.9	15.1	15.0	19.8	20.5	21.0	16.6	16.4	12.6	12.0

TABLE 3

WAVE HEIGHTS IN METERS (1 OBSERVATION EVERY 3 HOURS)

ZONES	1	2	3	4	6	7	8	11	12 Winter	17
$H_a (H_{1/3} \text{ annual})$	13.3	13.2	10.0	10.0	12.5	12.9	11.0	10.7	8.2	8.4
$H_d (H_{1/3} \text{ decenn})$	16.3	16.2	12.2	12.1	15.4	15.8	13.3	13.1	10.3	10.0
$H_c (H_{1/3} \text{ centen})$	19.4	19.1	14.4	14.3	18.2	18.8	15.6	15.4	12.3	11.8
$H_{c,max}$	36	36	27	27	34	36	29	29	23	22

TABLE 4

WAVE HEIGHTS IN METERS (1 OBSERVATION EVERY 108 SECONDS)

ZONES	1	2	3	4	6	7	8	11	12 Winter	17
$H'_a (H_{1/3} \text{ annual})$	19.4	19.1	14.1	14.3	18.2	18.8	15.6	15.4	12.3	11.8
$H'_{a,max} (H_{1/10} \text{ ann})$	24.7	24.3	17.9	18.2	23.1	23.9	19.8	19.6	15.6	15.0
$H'_c (H_{1/3} \text{ centen})$	25.7	25.1	18.7	18.7	24.0	24.7	20.3	20.2	16.4	15.3
$H'_{c,max}$	33	32	24	24	31	31	26	26	21	19

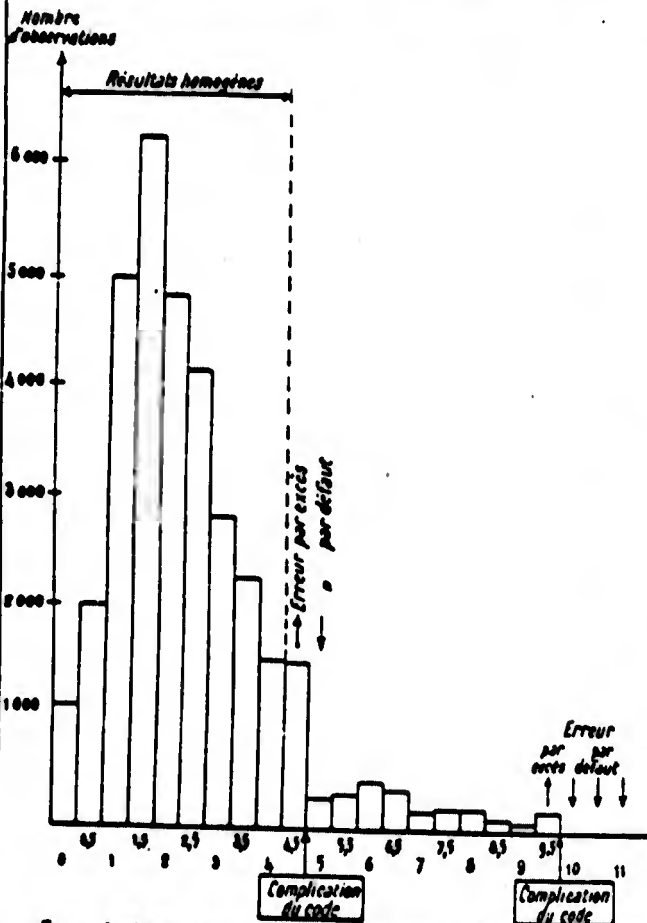
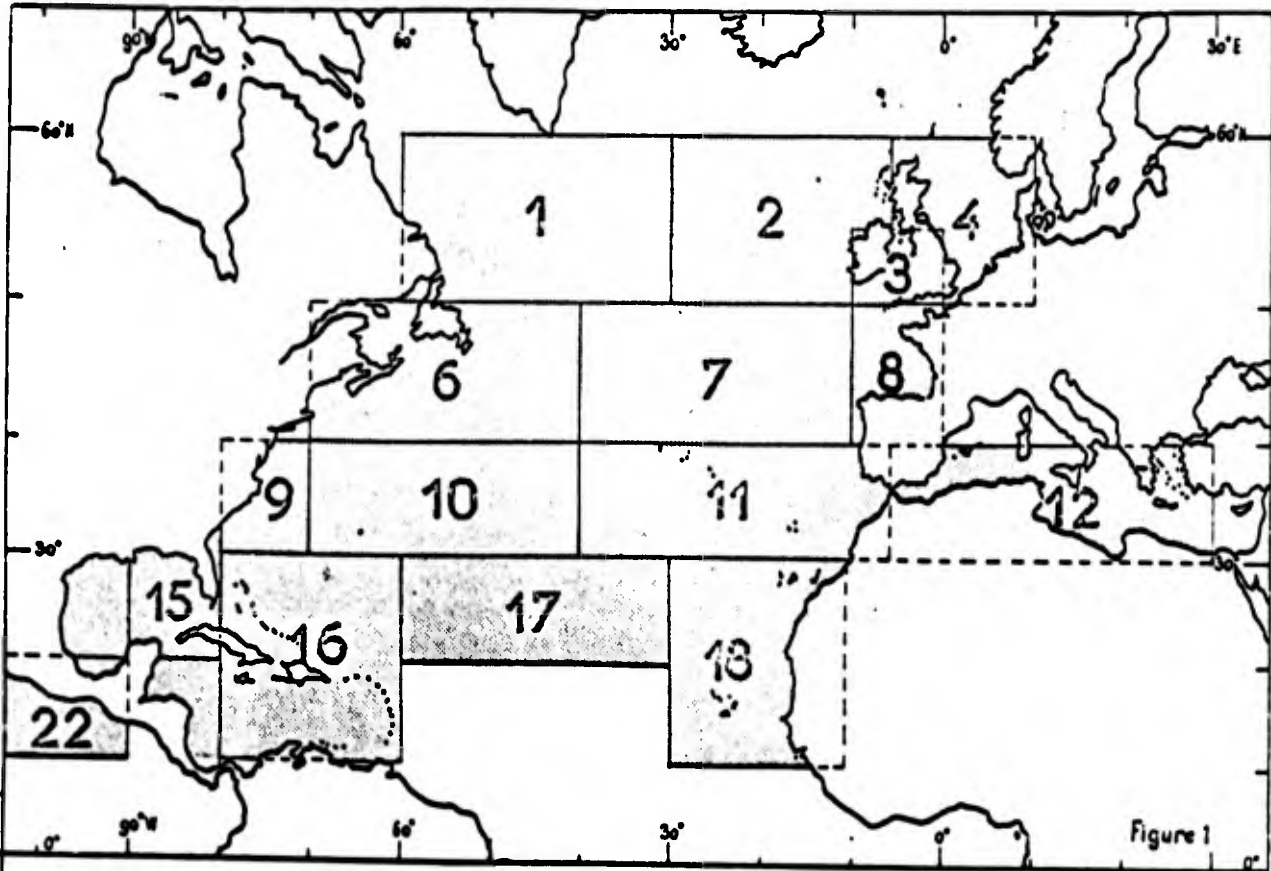


Figure 2. Nombre d'observations de hauteur des vagues (toutes directions, toutes saisons)

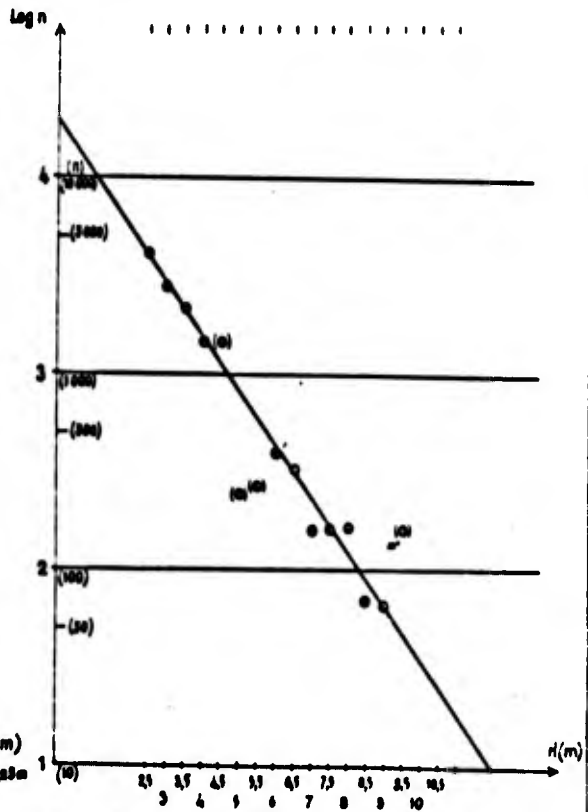
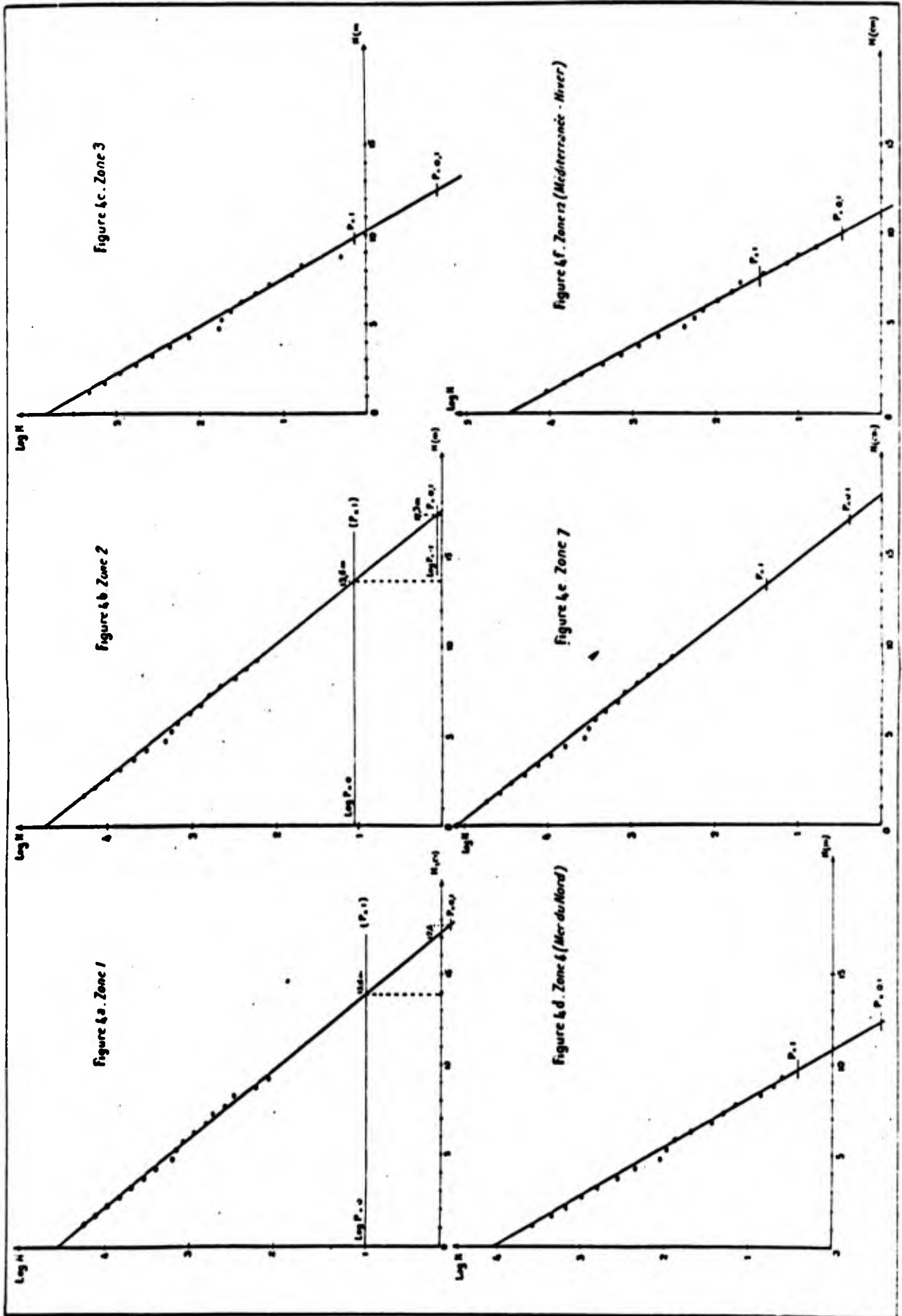
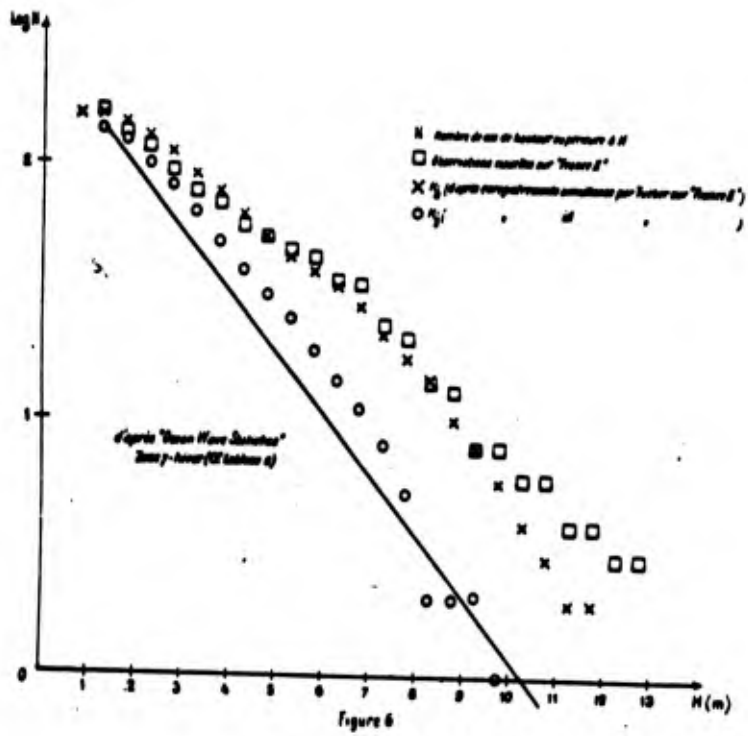
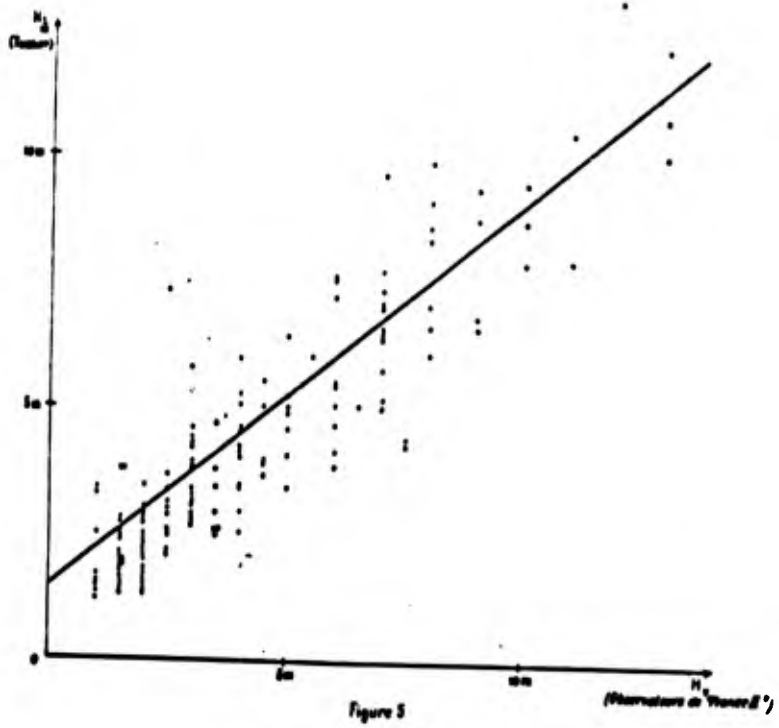


Figure 3. Zone 2, toutes saisons.

n = nombre d'observations de hauteur de vagues.



Figures 4a-f



Océanographie Physique. — Probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée. Note (\*) de M. JEAN LAMMAS, présentée par M. André Gougenheim.

Le raisonnement conduit à penser que le nombre  $n$  de journées où la houle dépasse l'amplitude  $h_s$ , au cours d'une période de  $N$  journées, est proportionnel à  $\text{Log } n/N$ . L'analyse de séries d'observations prolongées provenant d'une douzaine de ports le confirme et l'extrapolation des courbes obtenues pour les grandes valeurs de  $N$  concorde bien avec ce qu'on croit savoir de la force des tempêtes exceptionnelles aux mêmes lieux.

1. L'exécution, toujours difficile, d'ouvrages à la mer comporterait moins de risques et d'aléas si l'on connaissait l'amplitude maximale que pourrait atteindre la houle à leur emplacement, ou tout au moins la probabilité  $p$  pour laquelle la houle peut dépasser une amplitude donnée  $h$  pendant le délai assez long durant lequel l'ouvrage sera vraisemblablement utilisé. Mais on ne dispose généralement que de mesures d'amplitude portant sur un petit nombre d'années, et l'on doit transformer les pourcentages mesurés d'apparition de diverses amplitudes dans le passé, en probabilités d'apparition d'une amplitude supérieure, sur de plus longues périodes à venir. Il y faut une extrapolation, et c'est un genre d'opération particulièrement peu sûr lorsqu'il s'agit de prolonger une courbe d'origine purement empirique vers des zones de faible probabilité.

Le risque s'atténue lorsqu'on peut remplacer les courbes empiriques des résultats d'observation bruts par des relations mathématiques qui comportent une certaine justification théorique, et qui s'ajustent suffisamment bien aux résultats d'observation pour éviter de trop grosses erreurs d'extrapolation.

La présente Note expose une première approche du problème dans cette voie, par un raisonnement plus expéditif que parfaitement rigoureux, mais dont les résultats obtenus semblent pouvoir légitimer *a posteriori* l'emploi.

2. Pour les besoins des travaux de génie civil, on détermine pour chaque jour, au point considéré, l'amplitude maximale  $h$  atteinte par la houle. En opérant ainsi sur une longue période on peut déterminer pour une série de hauteurs données  $h_1, h_2, \dots$  (par exemple 0, 1, 2, 3 m, ...) le nombre de jours  $n_1, n_2$  pour lesquels chacune de ces hauteurs est dépassée.

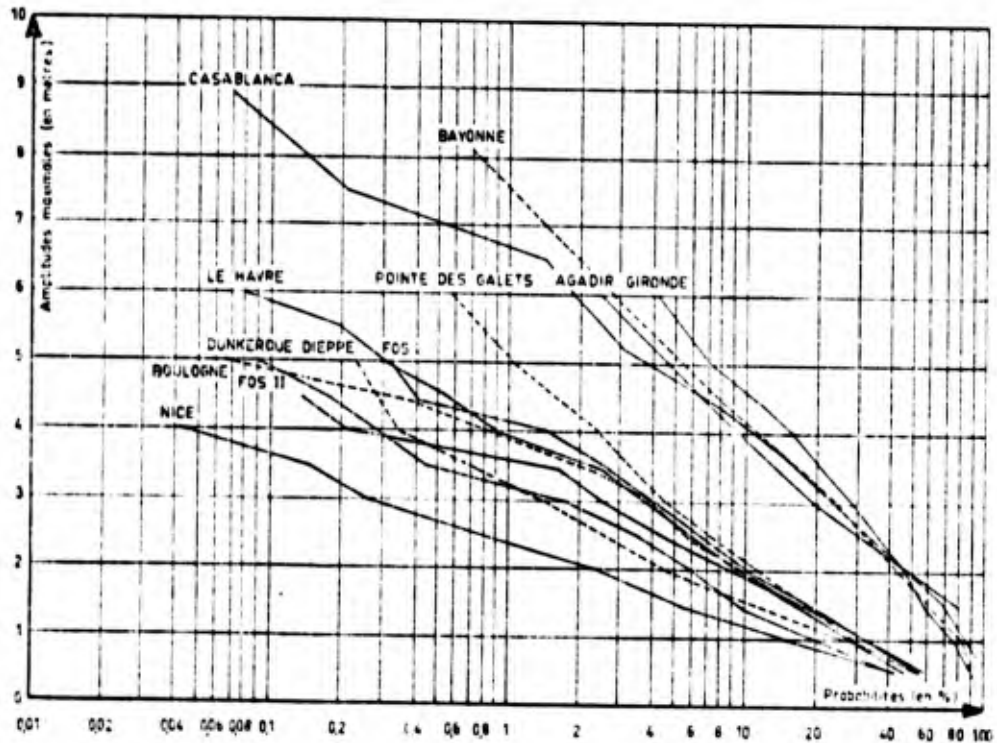
En divisant ces nombres par le nombre de jours  $N$  de la période, on peut considérer que les quantités  $p_1 = n_1/N_1, p_2 = n_2/N_2, \dots$  définissent,

FILE COPY  
WAVE RESEARCH PROJECTS  
Hydraulic Engineering Laboratory  
412 O'Brien Hall  
University of California  
Berkeley, California 94720

( 2 )

avec une approximation d'autant meilleure que  $N$  est plus grand, les probabilités d'apparition d'une journée au cours de laquelle les hauteurs  $h_1, h_2, \dots$  seront dépassées.

A une hauteur  $h$  relative à  $N$  jours d'observation, on peut donc associer une probabilité  $p$  de dépassement de cette hauteur et poser, par suite,  $h_N = f(p)$ .



D'un autre côté, on admet en hydraulique maritime que l'amplitude de la houle qui résulte de la superposition de deux autres est pratiquement égale à la somme de leurs amplitudes;

$$h = h_a + h_b.$$

Mais, si les trois houles sont considérées pendant des durées équivalentes  $N$  et si la superposition des deux composantes ne dépend que du jeu parfaitement libre du hasard, la probabilité  $p$  relative à la résultante est égale au produit des probabilités individuelles  $p_a$  et  $p_b$  des deux composantes. On a donc

$$h_N(p_a p_b) = h_N(p_a) + h_N(p_b),$$

relation vérifiée par la seule fonction logarithmique

$$h_N = A \text{ Log } p,$$

où  $A$  est une constante dépendant du lieu considéré.

( 3 )

L'amplitude maximale n'obéit donc pas ici à une loi de Rayleigh; il s'agit en effet de deux problèmes distincts : nous considérons seulement les amplitudes maximales relevées au cours de périodes successives et non un ensemble continu de vagues.

La relation est représentée graphiquement dans un système de coordonnées  $x = \text{Log } p$ ,  $y = h$  par une droite issue du point  $p = 1$ ,  $h = 0$ .

D'un autre côté, comme  $p = n/N$ , la relation s'écrit aussi

$$h_n = A \text{Log } \frac{n}{N};$$

elle rattache à la durée  $N$  de la période le nombre  $n$  de journées où l'amplitude de la houle dépasse la valeur  $h_n$ .

Les amplitudes maximales journalières qu'on relève effectivement à la mer (1) confirment la validité de la relation précédente, comme il résulte de la figure jointe. Celle-ci groupe l'ensemble des observations provenant des Services des Travaux Publics d'Agadir (2915 jours), Bayonne (2556 jours), Boulogne (627 jours), Casablanca (1350 jours), Dieppe (876 jours), Dunkerque (682 jours), Fos I (888 jours), Fos II (872 jours), la Gironde (474 jours), Le Havre (708 jours), Nice (1145 jours) et Pointe des Galets (1252 jours).

Mais il n'existe pas de distributions logarithmiques du type précédent pour les houles plus organisées qu'aléatoires, comme la « barre » de la côte occidentale d'Afrique qui provient de houles lointaines privées de leurs plus petites composantes amorties au cours de la propagation; c'est ce qu'on retrouve d'ailleurs, mais dans une moindre mesure, pour les houles atlantiques de la figure jointe.

3. La plus grande houle qui peut survenir au cours d'une année correspond à  $n = 1$ ,  $N = 365$ . On appellera donc houle annuelle  $h_n$  celle qui répond à la relation  $h_n = A \text{Log } 1/365$ .

De même pour les houles décennales, centennales, millénaires on aurait des définitions analogues, de sorte que, en éliminant la constante  $A$ , il reste

$$\text{Houle décennale} = \frac{\text{Log } 3650}{\text{Log } 365} \quad h_n = 1,39 \text{ houle annuelle};$$

$$\text{Houle centenaire} = \frac{\text{Log } 36500}{\text{Log } 365} \quad h_n = 1,78 \text{ houle annuelle};$$

$$\text{Houle millénaire} = \frac{\text{Log } 365000}{\text{Log } 365} \quad h_n = 2,17 \text{ houle annuelle}.$$

Toutefois, étant donné les durées pratiques des observations, il ne faut pas attribuer une valeur trop précise aux extrapolations conduisant aux houles centennales et plus encore aux houles millénaires.

( 4 )

En prolongeant les courbes moyennes des tracés légèrement anguleux de la figure jointe, on obtient les valeurs suivantes pour les houles décennales et centenaires :

	Décennales (m).	Centenaires (m).
Nice.....	4,25	5,45
Dunkerque.....	5,75	7,30
Fos II.....	5,80	7,40
Dieppe.....	6,00	7,70
Boulogne.....	6,50	8,30
Le Havre.....	7,10	9,10
Fos I.....	7,25	9,30
Pointe des galets.....	9,55	13,40
Casablanca.....	10,25	13,75
Bayonne.....	13,70	16,00
Gironde.....	14,05	17,70

L'extrapolation pour les houles centenaires est un peu hasardeuse, mais pour les houles décennales les non-décades obtenus concordent bien avec ce qu'on croit savoir de la force des tempêtes exceptionnelles en ces lieux, et justifient par suite dans une certaine mesure les extrapolations de la distribution logarithmique proposée.

(\*) Séance du 8 mars 1965.

(<sup>1</sup>) Plus grande amplitude mesurée sur houlographe enregistreur au cours de périodes de fonctionnement de l'appareil s'étendant régulièrement sur 24 h.

(28, boulevard d'Argenson, Neuilly-sur-Seine.)

Océanographie Physique. — *Nouvelles recherches sur la probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée.*  
Note (\*) de M. JEAN LARRAS, présentée par M. André Gougenheim.

Généralisation de la loi de distribution logarithmique dans le cas des océans très étendus ou bien à spectres de fréquences de houle particulièrement étroits.

1. Nous avons montré, dans une Note précédente (1), que le nombre  $n$  de journées où les dénivellations de la surface libre des lames dépassent l'amplitude  $h_N$  au cours d'une période de  $N$  journées est proportionnel à  $\text{Log} n/N$ , quand la houle ne dépend que du jeu parfaitement libre du hasard. Cette relation est représentée graphiquement par une droite issue du point  $p=1, h_N=0$  dans un système de coordonnées  $x = \text{Log} p, y = h_N$  où l'on désigne par  $p$  la probabilité d'apparition  $n/N$ .

Elle est surtout vraie dans les mers de faible étendue, où la houle ne dépend réellement que du jeu parfaitement libre du hasard, mais elle ne s'applique plus tout à fait aux mers qui couvrent de larges surfaces. Ces mers sont en effet toujours plus ou moins le siège, en quelque point de leur étendue, de tempêtes dont l'action doublement lointaine dans l'espace et dans le temps maintient un peu partout une agitation moyenne à laquelle le jeu des hasards locaux vient ajouter ensuite ses effets.

Tout se passe alors comme si la droite qui représente la fonction  $h_N$  en fonction de  $p$  n'était pas issue du point  $p=1, h_N=0$ , mais d'un point de coordonnées  $p=1, h_N=a$ , en désignant par  $a$  l'amplitude moyenne de l'agitation permanente de la mer devant la station considérée. Et c'est bien ce qu'on constate pour l'Océan Atlantique sur la figure de notre première Note :

Bayonne, Gironde.....	$a = 0,70$ m
Agadir, Casablanca.....	1,25

C'est ce qu'on constate également pour La Jolla, Mission Bay, Tamatave et les frégates météorologiques I et J, dans les trois plus grands océans du globe, sur la figure 1 de la présente Note (2) :

La Jolla.....	$a = 0,45$ m
Mission Bay.....	1,00
Tamatave.....	1,25
Frégates météo I et J.....	2,50

2. La relation logarithmique n'est également plus vraie lorsqu'il n'y a plus moyen de représenter l'amplitude des dénivellations de la surface libre par la somme des dénivellations des ondes composantes sans enfreindre le principe fondamental de la conservation de l'énergie, et

BIBLIOTHÈQUE MUSEUM HISTORICAL  
UNIVERSITY OF CALIFORNIA  
LIBRARY

( 2 )

lorsqu'il n'y a, par suite, plus moyen de représenter la distribution des probabilités de l'une par la distribution des probabilités de l'autre (comme nous l'avions admis dans notre première Note avec la quasi-totalité des auteurs). C'est notamment le cas des océans dont les lames de tempête comportent un spectre de fréquences particulièrement étroit.

Mais il résulte d'un calcul classique de Rayleigh que la distribution des probabilités est alors la même pour l'amplitude des dénivellations

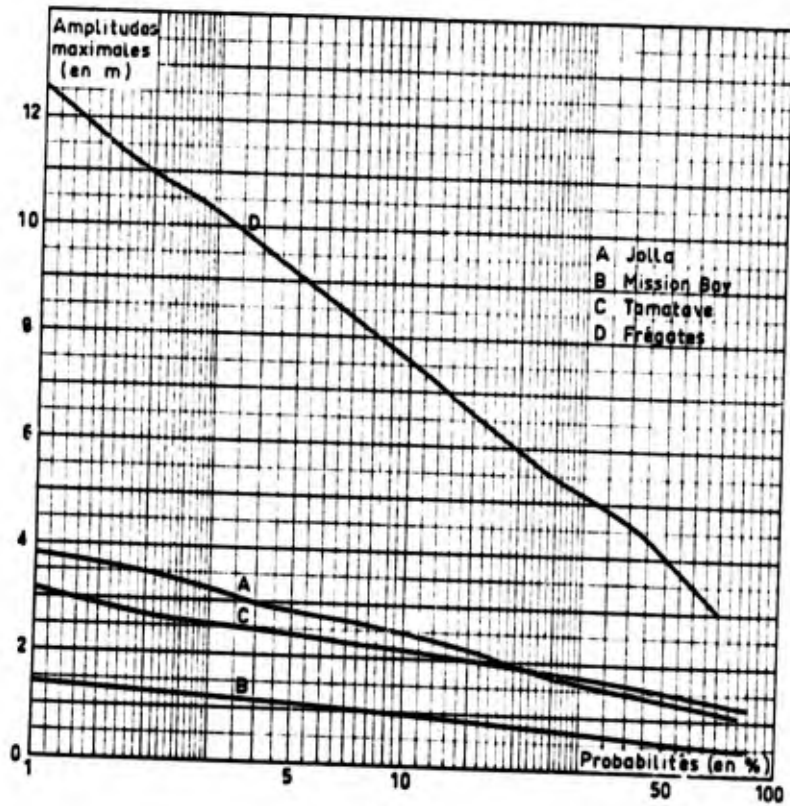


Fig. 1.

de la surface libre que pour la somme des amplitudes des ondes composantes, et la distribution des probabilités est du même coup la même pour le carré de l'une que pour le carré de l'autre. Or, le carré de l'amplitude d'une onde composante est proportionnel à l'énergie qu'elle développe par unité de surface, et l'énergie totale des lames n'est autre que la somme des énergies des ondes qui les composent. On peut donc reprendre ici le même raisonnement — basé sur les propriétés additives — que dans notre première Note, mais pour les carrés des dénivellations de la surface libre au lieu des dénivellations elles-mêmes, et le nombre  $n$  de journées où le carré des dénivellations de la surface libre des lames dépasse la valeur  $h_s^2$  au cours d'une période de  $N$  journées doit être proportionnel à  $\text{Log} n/N$  quand les lames de tempêtes comportent un spectre de fréquences particulièrement étroit.

( 3 )

Or, il existe une telle étroitesse dans les rouleaux de lames déferlantes et, notamment, dans les barres de la côte du Bénin où l'on constate qu'il existe effectivement une relation linéaire entre les valeurs de  $(h_N)^2$  et de  $\text{Log}n/N$  <sup>(\*)</sup> (fig. 2). L'expérience confirme donc le raisonnement que nous venons d'exposer, et l'on peut en conclure, comme Longuet-Higgins et Miche <sup>(\*)</sup>, mais par une toute autre voie, que le spectre d'amplitudes des lames est conforme à la loi de probabilités de Poisson quand le spectre

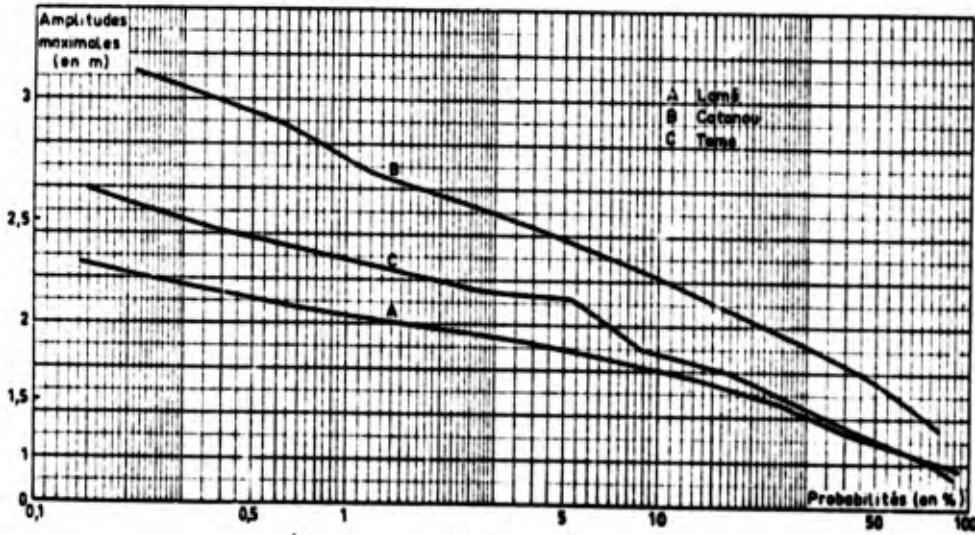


Fig. 2.

de fréquences est particulièrement étroit. La relation que nous venons de dégager revient, en effet, à poser qu'on a

$$h_N^2 = H^2 \text{Log} \int_{h_1}^{\infty} \pi(h_N) dh_N$$

et, par suite,

$$\pi(h_N) = - \frac{2h_N}{H^2} e^{-\frac{h_N^2}{H^2}}$$

en désignant par  $\pi(h_N)$  la probabilité d'apparition d'une dénivellation d'amplitude  $h_N$  dans le spectre d'amplitudes.

(\*) Séance du 31 juillet 1967.

(1) *Comptes rendus*, 260, 1965, p. 3125.

(2) F. P. SHEPARD et D. L. INMAN, *Beach Erosion Board*, Technical Memorandum n° 26, novembre 1951, p. 10; P. BRUUN, *Beach Erosion Board*, Technical Memorandum n° 44, juin 1954, p. 74; LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE, Rapport B 647, 10 mai 1957, fig. 6 et 7; J. DARBYSHIRE, *The Dock and Harbour Authority*, mai 1956, p. 31-32.

(3) J. A. SITANZ, *Travaux du Centre de Recherche et d'Études Océanographiques*, 5, fasc. II, III, IV, septembre 1963, p. 132 et 133; J. DARBYSHIRE, *The Dock and Harbour Authority*, décembre 1957, p. 277.

(4) M. S. LONGUET-HIGGINS, *J. Marine Res.*, 11, 1952, p. 245-266; R. MICHE, *Propriétés des trains d'ondes océaniques et de laboratoire*, Publ. n° 135, Com. Centr. Océan. Ét. Côtes, Paris, 1954.

# LES PHÉNOMÈNES ALÉATOIRES ET L'INGÉNIEUR

## Propriétés additives et lois de probabilités

par

Jean Larras

Inspecteur général des Ponts et chaussées

Relation entre la fonction de répartition d'une variable aléatoire et les propriétés additives d'une certaine fonction de cette variable. Application au choix de la loi de probabilités la plus représentative d'un phénomène physique aléatoire donné. Exemples.

I — Les ingénieurs disposent d'un choix très étendu de lois de probabilités pour interpréter, ou pour extrapoler, un matériel statistique donné : lois de Cauchy, de Fisher et Tippett, de Fréchet, de Galton, de Gauss, de Gumbel, d'E. Halphen, de Laplace, de Pearson, de Poisson, ... fonctions exponentielles, fonction factorielle incomplète, chaînes de Markoff, etc. Mais il est bien difficile de savoir quelle est la loi qu'il faut adopter dans chaque cas, car on ne dispose généralement pas de séries d'observations suffisamment longues, et l'on ne peut dès lors pas toujours tirer grand-chose d'une comparaison directe des ajustements. Or, il s'agit là d'un choix capital pour la détermination des valeurs extrêmes, qui sont parfois les seules dont les ingénieurs aient à se préoccuper; et c'est ainsi qu'on se trouve conduit à considérer les crues d'automne de la Durance de 1 500 m<sup>3</sup>/s à l'Archidiacre comme décennales lorsqu'on utilise la loi de Gumbel, ou comme millénaires lorsqu'on utilise la loi de Fréchet, d'après les jaugeages quotidiens de la période 1916-1955 dans les deux cas. Il faut donc pouvoir disposer d'un critère indiscutable, d'ordre plus mathématique qu'empirique, pour adopter telle ou telle loi de probabilités de préférence à toute autre; et nous allons montrer que les propriétés additives du phénomène dont on étudie le comportement statistique pourraient constituer un critère de ce genre.

II — Supposons en effet que le phénomène en question présente le caractère d'additivité pour une certaine fonction  $\Phi$  de la variable  $x$  dont l'ensemble des valeurs constitue le matériel statistique étudié :

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \dots + \Phi(x_n).$$

Et désignons par  $x_i = f(P_i)$  la fonction de répartition qui définit la probabilité d'apparition  $P_i$  d'une valeur de  $x$  inférieure à  $x_i$  quand le phénomène n'a lieu qu'une fois.

Lorsque le phénomène a lieu  $n$  fois au lieu d'une et ne dépend que du jeu parfaitement libre du hasard, la probabilité d'apparition d'une valeur de  $x$  inférieure à  $x_i$ , d'une valeur de  $x$  inférieure à  $x_2, \dots$  d'une valeur de  $x$  inférieure à  $x_n$  (dans un ordre absolument quelconque) n'est autre que le produit des probabilités d'apparition de chacune de ces  $n$  valeurs de  $x$  prises chacune isolément

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n.$$

On a donc :

$$\Phi[f(P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n)] = \Phi[f(P_1)] + \Phi[f(P_2)] + \dots + \Phi[f(P_n)]$$

quand le phénomène présente le caractère d'additivité que nous avons supposé et quand la répartition des valeurs de  $x$  ne dépend que du jeu parfaitement libre du hasard dans l'intervalle compris entre zéro et  $x_n$  (1).

Or, cette relation ne comporte pas d'autre solution que :

$$\Phi[f(P)] = h^2 \text{Log } P$$

en désignant par  $h$  une constante. L'additivité de la fonction  $\Phi$  signifie donc que la probabilité  $P(x_i)$  d'apparition d'une valeur de  $x$  inférieure à  $x_i$  dans l'ensemble du matériel étudié est telle que l'on ait :

$$\Phi(x_i) = -h^2 \text{Log } P(x_i)$$

ou, plus simplement :

$$P(x_i) = e^{-\Phi(x_i)/h^2}$$

(1) A supposer, bien entendu, que  $x_n$  soit le plus grand des  $x_i$ .

en désignant par  $P(x)$  la fonction de répartition de la variable aléatoire  $x$  dont on étudie le comportement statistique.

III — La réciproque est également vraie car, si la fonction  $\Phi(x_i)$  suit une loi de Gauss, l'additivité des moments du second ordre qui caractérise ce type de loi a pour conséquence que l'on ait :

$$[\sqrt{\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots)}]^2 = [\sqrt{\Phi(x_1)}]^2 + [\sqrt{\Phi(x_2)}]^2 + [\sqrt{\Phi(x_3)}]^2 + \dots$$

et par suite :

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \dots) = \Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3) + \dots$$

IV — Les hauteurs maximales quotidiennes de houle, les hauteurs journalières de pluie et les débits horaires de véhicules sur les routes représentent physiquement la somme de quantités aléatoires indépendantes, et beaucoup plus petites, qui s'ajoutent arithmétiquement à chaque station d'observation. Il résulte donc de ce qui précède que ces phénomènes comportent des fonctions de répartition du type :

$$P(x) = e^{-x/h^2}$$

et qu'on peut les représenter par des diagrammes logarithmiques du type :

$$x = -h^2 \text{Log } (P(x))$$

comme on le constate effectivement dans la pratique (2).

V — On aboutit par contre à des fonctions de répartition du type loi de Gauss :

$$P(x) = e^{-x^2/h^2}$$

lorsqu'il s'agit d'éléments qui représentent physiquement la somme de quantités aléatoires indépendantes, et beaucoup plus petites, dont les carrés s'ajoutent arithmétiquement à chaque station d'observation, comme c'est le cas pour les amplitudes des barres de déferlement de la houle à la côte (3) (4).

VI — On aboutit enfin à des fonctions de répartition qui répondent asymptotiquement à la loi de Fréchet :

$$P(x) = x^{-k}$$

lorsque les éléments qu'on étudie représentent physiquement la somme de quantités aléatoires indépendantes, et beaucoup plus petites, qui se multiplient l'une l'autre à chaque station d'observation (5). Car les logarithmes

(2) Houle : J. Larras, C.R. Ac. Sc., 15 mars 1965. Pluies : R. Kaiser et C. Heidenmann, Die Wasserwirtschaft, 4 1967, p. 170, fig. 6. Véhicules : J. Larras, Rev. gén. routes et aérodromes, n° 422, juin 1967.

(3) J. Larras, C.R. Ac. Sc. 1967.

(4) On sait que la loi de Galton n'est autre que la loi de Gauss dans laquelle on remplace  $x$  par  $\text{Log } x$ . La loi de Galton correspond donc à l'additivité de quantités aléatoires indépendantes de la forme  $(\text{Log } x)$  ou de fonctions de  $x$  qui ont sensiblement la même allure générale.

FROM COPY  
 THE RESEARCH PROGRAMS  
 Professor Dr. Herbert S. Lohr  
 310 Francis Hall  
 University of California  
 Berkeley, California 94720

TRAVAUX Fev. 1969 119

Tableau I — Résistances observées

Données	Cylindres		Cubes	
	28 j.	90 j.	28 j.	90 j.
Résistances médianes (en bars)	430,5	477	522	615
Écart quadratique moyen (en bars)	46	62	46	45
Écart quadratique moyen (en % de la médiane)	10,7	12,9	8,8	7,3
Résistances minimales (en bars)	326	305,5	360	362
Nombre d'essais	298	345	375	750

de ces quantités élémentaires s'ajoutent arithmétiquement et la relation  $\Phi(x) = h^2 K \text{Log } x$  qui traduit cette additivité (6) équivaut identiquement à  $x^k e^{-\Phi(x)/h^2} P(x)$ .

Mais on aboutit tout aussi bien à la loi de Fréchet lorsque les éléments qu'on étudie représentent physiquement la somme de quantités aléatoires indépendantes, et beaucoup plus petites, qui sont de la forme  $K \cdot \text{Log } x$  ou qui ont sensiblement la même allure générale (comme c'est le cas pour les variations de sensation physiologique en fonction de l'excitation).

VII — La loi d'addition n'est toutefois pas nécessairement la même pour toutes les valeurs de  $x$  dans l'ensemble du matériel étudié.

C'est ainsi que les débits élémentaires qui concourent à la formation d'un cours d'eau s'ajoutent purement et simplement l'un à l'autre dans un lit très dégagé, mais qu'il n'y a plus d'addition possible de ce genre lorsqu'il n'y a plus suffisamment de place pour eux sans qu'ils se gênent (7).

C'est également le cas lorsqu'une partie des phénomènes dépend du hasard et l'autre pratiquement pas (7) (8).

La méthode la plus commode pour distinguer les tranches qui correspondent à des lois d'addition (et de probabilités) différentes consiste à représenter les fonctions de répartition sur des diagrammes :

- à ordonnées logarithmiques, pour les types de lois du paragraphe IV,
- à ordonnées gaussiennes, pour les types de lois du paragraphe V,
- à abscisses et ordonnées logarithmiques, pour les types de lois du paragraphe VI.

Les parties rectilignes de ces diagrammes correspondent en effet aux tranches dans lesquelles on peut appliquer les lois correspondantes, et les parties non rectilignes aux tranches dans lesquelles on ne peut pas.

Nous en avons déjà donné des exemples (7) (8), mais il ne nous paraît pas inutile d'en donner un autre dans la présente étude.

VIII — Il s'agit de 1768 essais de résistance à la compression d'un béton particulièrement soigné, pour ouvrage exceptionnel, qui a fait l'objet de 4 sortes d'essais et de 125 prélèvements distincts (tableau I) (9).

(5) Il se pourrait que ce soit le cas pour les débits classés de certaines rivières bien qu'on n'en discerne pas bien actuellement l'explication physique (J. Bernier, Revue de Statistique Appliquée, 1957, n° 2, vol. 5).

(6) On sait que la loi de Gumbel n'est autre qu'une loi de Fréchet dans laquelle on remplace  $x$  par  $e^x$ . On peut donc représenter asymptotiquement la loi de Gumbel par la relation  $\Phi(x) = h^2 K \text{Log}(e^x) = h^2 K x$ , et l'on retombe asymptotiquement sur le même type de loi de répartition qu'au paragraphe IV.

(7) J. Larras, Terres et eaux, n° 8, 1966.

(8) J. Larras, Rev. gén. routes et aérodromes, n° 422, juin 1967.

(9) Résultats d'essais communiqués par le Laboratoire central des Ponts et Chaussées.

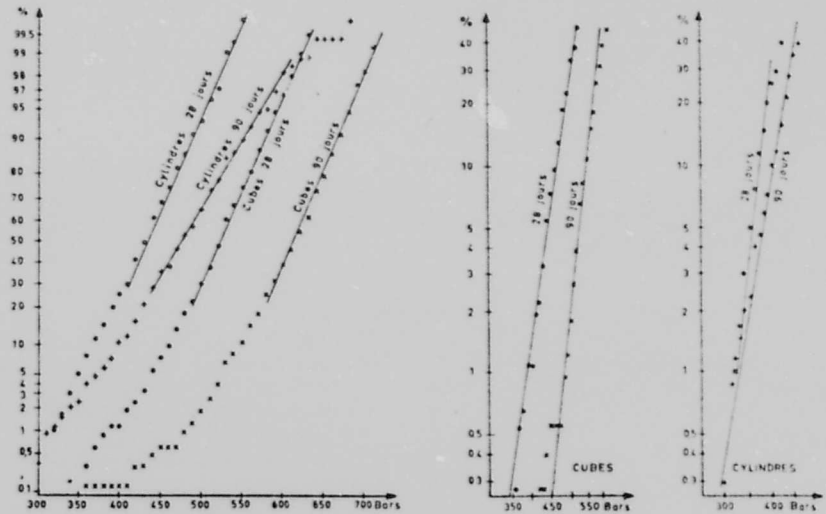


Fig. 1 et 2. — Résistance à la compression

Tableau II — Résistances calculées

Probabilités	Cylindres		Cubes	
	28 j.	90 j.	28 j.	90 j.
1/10 G	379	398	469	558
	370	402	463	547
1/100 G	334	333	425	515
	322	328	390	482
1/1 000 G	299	283	392	481
	281	265	327	424
1/10 000 G	266	235	360	449
	244	214	275	374

Résistances exprimées en bars : G — Loi de Gauss F — Loi de Fréchet.

La fonction de répartition qui correspond à chaque sorte d'essais suit pratiquement la loi de Gauss (droite de Henry) au-dessus de 20%, et la loi de Fréchet en-dessous (fig. 1 et 2). C'est peut-être dû à la présence de légers vides dans les bétons les moins compacts, alors qu'il n'y en aurait pas dans les bétons les mieux faits, mais il nous suffit de constater le fait, et nous allons voir qu'il peut être gros de conséquences. Le danger d'apparition de bétons de faible résistance paraît en effet devoir être beaucoup plus élevé lorsqu'on

l'évalue par extrapolation de la loi de Fréchet de la figure 2 que par extrapolation de la loi de Gauss (droite de Henry) de la figure 1, comme on peut le voir sur la tableau II. Et ceci pourrait être de nature à modifier certaines méthodes d'évaluation des résistances nominales du béton (surtout à partir d'éprouvettes cubiques) si de nouvelles et de plus longues séries d'essais devaient confirmer cette observation par la suite.

J. Larras

*en respectueux hommage*

*R. Mayençon*

ETUDE STATISTIQUE DES OBSERVATIONS DE VAGUES \*

par

René MAYENÇON

Ingénieur des Travaux Météorologiques

Le Service Météorologique britannique a publié récemment<sup>xx</sup> des statistiques portant sur les observations visuelles de vagues et de houles effectuées à bord de 500 navires sélectionnés pendant huit ans (de 1953 à 1961), en de multiples régions du globe (au total, plus d'un million d'observations, reportées sur cartes perforées).

Nous nous proposons ici de dégager certaines caractéristiques importantes de ces données et d'examiner quels enseignements il est possible d'en tirer.

1 - CRITIQUE DE L'HOMOGENEITE DES DONNEES

L'ouvrage de N. HOGGEN et F.E. LUMB fournit des statistiques sur une cinquantaine de zones qui englobent la plupart des grands itinéraires maritimes du monde. Nous ne nous occuperons ici que des zones 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12 et 17 (cf. figure 1).

1.1.- Le nombre total d'observations utilisées varie beaucoup d'une zone à l'autre. En effet, ces nombres dépendent des dimensions des zones et du nombre de navires les ayant traversées. C'est ainsi que l'on note respectivement pour les zones 2, 3, 4, 7, 8, 11, 12 et 18 : 33 146, 3 911, 7 646, 71 948, 46 547, 73 133, 90 702, 60 570 observations de vagues pour les huit années étudiées. De plus, il est certain que la densité de répartition géographique des observations n'est pas répartie uniformément à l'intérieur de chaque zone.

1.2.- La représentation graphique du nombre d'observations de hauteurs des vagues, par tranche de 0,50 m, suffit à mettre en évidence, pour chaque zone, deux discontinuités considérables et à première vue surprenantes : l'une entre 4,50 m et 5 m, l'autre entre 9,50 m et 10 m. (cf. figure 2, relative à la zone 2, à titre d'exemple).

x Manuscrit reçu le 24 février 1969.

xx "Ocean Wave Statistics" N.HOGGEN, F.E. LUMB (1967).

A vrai dire, ces anomalies s'expliquent aisément car elles résultent d'un manque de simplicité et d'homogénéité du code utilisé pour les observations des vagues\*.

Quand la hauteur dépassait 4,50 m, il convenait d'ajouter 50 au nombre indiquant la direction ; en outre, quand la hauteur dépassait 9,50 m, il fallait chiffrer 9,50 m et ajouter, en clair, le mot "WAVES" suivi de l'indication en clair de la hauteur. On peut penser que certains observateurs attendaient que les creux dépassent nettement 5 m pour utiliser un code relativement compliqué : tantôt ils chiffreraient 4,50 m (au lieu de 5 m ou plus), tantôt ils omettaient, dans un certain nombre de cas, de signaler les vagues quand celles-ci avaient des creux de 5 à 6 mètres. En ce qui concerne les houles supérieures à 9,50 m, elles étaient le plus souvent chiffrées 9,50 m sans le groupe WAVES.

Le premier enseignement évident que l'on peut tirer de l'examen sommaire de ces données est qu'un code doit être simple et homogène.

## 2 - PROBABILITE D'OCCURENCE DE LA HAUTEUR DES VAGUES

### 2.1.- Mise en évidence d'une loi simple

Si l'on fait abstraction des valeurs concernant les creux de 4,50 m, de 5 m, de 5,50 m et également ceux de plus de 9 m, on constate que le nombre d'observations, par tranches de hauteur de 50 cm, obéit généralement de façon remarquable, en ce qui concerne les creux supérieurs à 2 m, à une loi exponentielle. Il suffit, en effet, de porter en ordonnée les nombres de cas suivant une échelle logarithmique et en abscisse, les hauteurs des vagues (telles qu'elles sont estimées visuellement par les observateurs des navires) selon une échelle linéaire, pour voir, dans la plupart des zones, les points représentatifs alignés suivant une droite.

On peut, par ce procédé, reconstituer facilement le nombre d'observations qui auraient probablement été faites, avec un bon code, pour les creux de 4,50 m, de 5 m, de 5,50 m, de 9,50 m et plus. C'est ainsi que pour la zone 2, par exemple (cf. figure 3), on trouve les valeurs figurant entre parenthèses sur le tableau 1, et que nous avons placées en regard des valeurs brutes manifestement affectées par les défauts du code.

Ce qui est particulièrement remarquable, c'est que la somme des nombres de cas de creux supérieurs à 9 m reconstitués à l'aide de la droite se trouve

\* Un code amélioré est entré en application à compter du 1er janvier 1968.

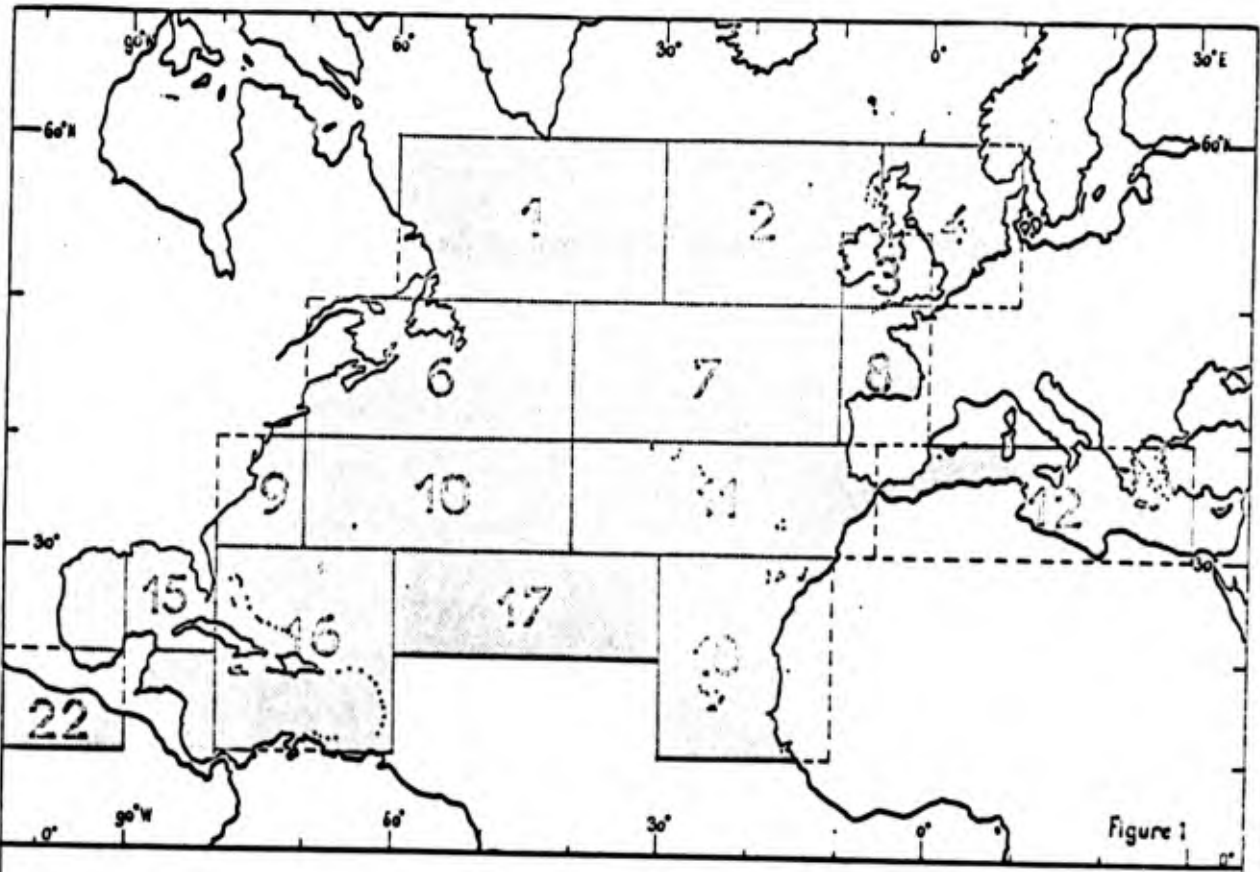


Figure 1

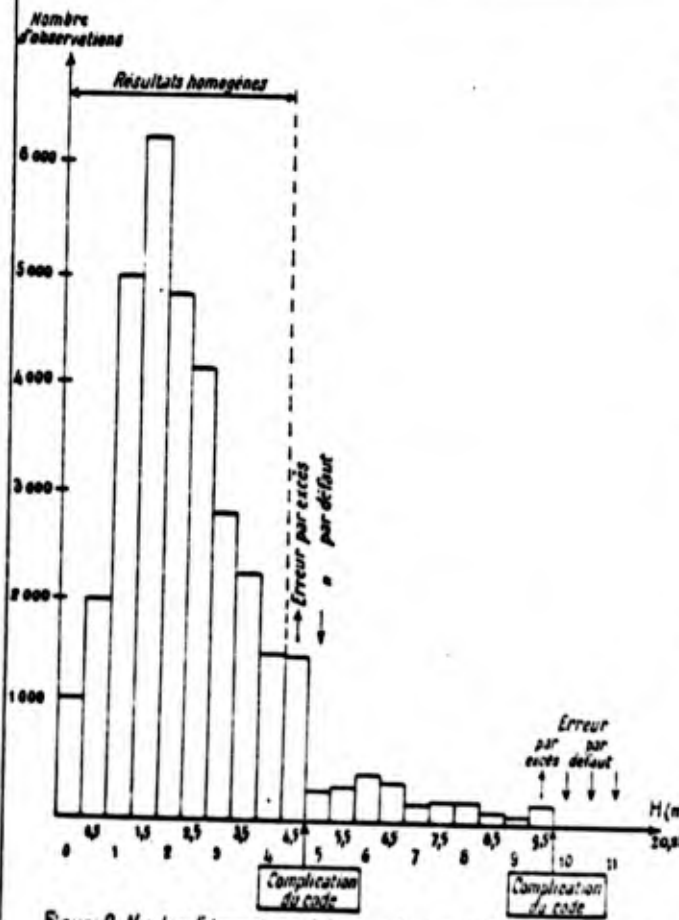


Figure 2. Nombre d'observations de hauteur des vagues (toutes directions, toutes saisons)

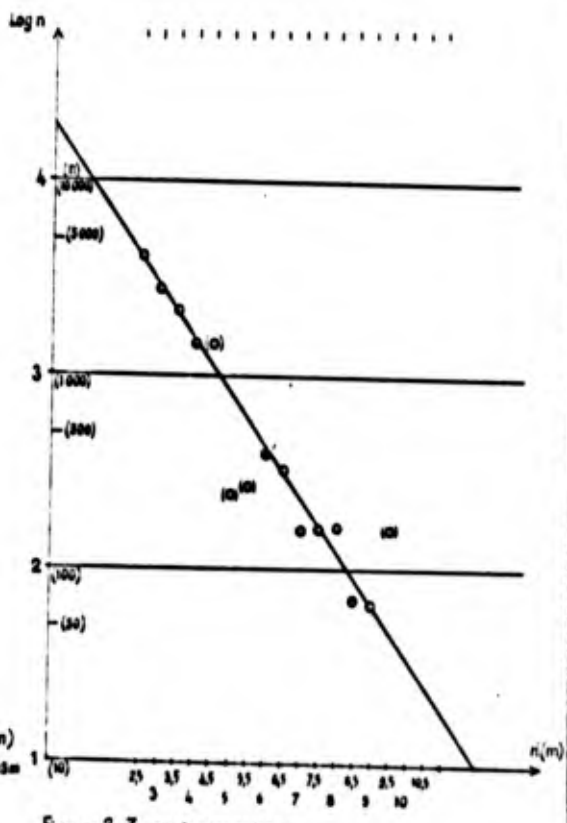


Figure 3. Zone 2, toutes saisons. n = nombre d'observations de hauteur de vagues.

Tableau 1

Hauteur des vagues (m)	Nombre de cas (Zone 2)	
	Valeurs brutes extraites de "Ocean Wave Statistics"	Valeurs tirées de la figure 3
4	1463	(1463)
4,50	1461	(1090)
5	245	(780)
5,50	267	(575)
.....	...	.....
9	64	(64)
9,50	161	(46)
10	0	(34)
10,50		(25)
11	2	(18)
11,50		(14)
12	3	(10)
12,50		(8)
13	0	(6)
13,50		(5)
14	0	(4)
14,50		(3)
15	2	(2)
15,50		(1)
16	0	(1)

être voisine du nombre d'observations visuelles chiffrées 9,50 m ou plus. Cela constitue une confirmation de la validité de la loi exponentielle que nous avons mise en évidence graphiquement et de façon très simple.

Donnons maintenant à cette loi une expression mathématique.

Soit  $m$  la pente de la droite établie comme il a été dit précédemment, c'est-à-dire en portant le logarithme du nombre de cas en ordonnée ( $\log n$ ) et la hauteur chiffrée des vagues ( $H$ ) par tranches de 50 cm en abscisse.

Soit  $b$  l'ordonnée du point d'intersection de cette droite avec l'axe  $\vec{Oy}$ . Soit  $k$  un nombre tel que  $k = 10^b$ ;  $b = \log k$ . On a :

$$\log n = mH + b$$

d'où

$$n = 10^{mH + \log k}$$

(en prenant, pour tranches de hauteur, les bornes  $H - 0,25$  m et  $H + 0,25$  m,  $H$  étant, exprimé en mètres). Pour la zone 2 :

$$n = 10^{-0,274 H + 4,283}$$

Nous donnerons plus loin les coefficients relatifs aux autres zones.

2.2.- Calcul du nombre de vagues de hauteur égale ou supérieure à une valeur donnée

Le nombre  $N$  d'observations de vagues dont la hauteur est supérieure ou égale à une valeur donnée  $H_1$  peut être considéré comme égal au double de la surface comprise entre l'axe  $\vec{Ox}$  et la courbe établie à partir des observations effectuées par tranches d'un demi-mètre, cette surface étant limitée à gauche par la droite  $x = H_1$ .

Cette surface est égale à  $\int_{H_1}^{\infty} 10^{mH + \log k} dH$ .

$m$  étant négatif,  $10^{mH}$  tend vers zéro quand  $H$  tend vers l'infini.

$$\text{Donc : } \int_{H_1}^{\infty} 10^{mH + \log k} dH = - \frac{1}{L10} 10^{mH_1 + \log k}$$

d'où

$$N = - \frac{2m}{L10} 10^{mH_1 + \log k}$$

C'est une fonction exponentielle dont la représentation graphique dans le même système de coordonnées que précédemment (à savoir :  $y = \log n$  ; ici on prendra  $y = \log N$ ) est une droite parallèle à  $y = mH + \log k$  et dont le point d'intersection avec l'axe  $\vec{Oy}$  a une ordonnée (que nous désignerons par  $\log K$ ) supérieure de  $\log \frac{2m}{L10}$  à celle de l'intersection de la droite  $y = mH + \log k$ .

492

2.3.- Il serait certes intéressant de connaître le pourcentage  $p_i$  de vagues d'une hauteur supérieure ou égale à une valeur donnée  $H_i$ .

Soit  $T$  le nombre d'observations effectuées dans une zone,

$$p_i = \frac{N_i \times 100}{T}$$

La fonction  $p$  se représente graphiquement, dans le même système de coordonnées, par une droite parallèle à celle de la fonction  $N$ . On peut aussi, plus simplement, effectuer un changement d'origine, tel que :

$$\log p = Y = y - \log \frac{100}{T}$$

Sachant que le nombre des observations effectuées en un point fixe donné, toutes les 3 heures, pendant un an, est de 2 920, la probabilité  $P_i$  de l'observation en un an, à raison de 8 observations par jour, d'un "creux" égal ou supérieur à une valeur  $H_i$ , est de :

$$P_i = \frac{p_i \times 2\,920}{100}$$

Un nouveau changement d'origine permettra facilement d'obtenir graphiquement le logarithme de cette probabilité ( $P_i = 1$ ).

Mentionnons qu'une probabilité  $P$  de 0,1 par exemple signifie : en moyenne 1 fois au cours d'une période de 10 ans ; une probabilité  $P$  de 0,01, 1 fois en moyenne en 100 ans...

La hauteur correspondant à  $P = 0,1$  s'applique à une houle dite décennale, celle correspondant à  $P = 0,01$  à une houle dite centenaire. Cette dernière valeur a une grande importance pratique pour l'établissement des caractéristiques d'ouvrages maritimes devant subsister plusieurs décennies.

Voici, pour diverses zones, les résultats obtenus : (tableau 2)

A l'aide des valeurs  $T$ ,  $m$  et  $k$ , nous avons établi les droites représentatives des fonctions  $N$  de la figure 4 où nous faisons figurer, en outre, les valeurs brutes des observations réelles cumulées à partir de 9,50 m.

En fait, la houle centenaire telle que nous venons de la définir ne correspond pas à la taille de la vague la plus grosse susceptible de survenir au

493

Tableau 2

Zones	1	2	3	4	6	7	7 hiver	8	11	12 hiver	17
T	23 016	33 146	3 911	7 646	35 885	71 948	17 057	46 547	73 133	21 013	57 625
-m	0,265	0,274	0,376	0,375	0,286	0,279	0,249	0,351	0,345	0,398	0,480
log k	4,076	4,283	3,476	3,626	4,277	4,600	4,080	4,550	4,580	4,141	4,578
log K	4,570	4,784	3,841	3,996	4,759	5,055	4,623	4,944	4,983	4,480	4,836
Houle annuelle (m) (P = 1)	13,8	13,6	9,8	9,7	12,8	13,3	13,0	10,9	10,6	7,6	7,8
Houle décennale (m) (P = 0,1)	17,6	17,3	12,4	12,3	16,3	16,9	17,0	13,8	13,5	10,1	9,9
Houle centenaire (m) (P = 0,01)	21,3	20,9	15,1	15,0	19,8	20,5	21,0	16,6	16,4	12,6	12,0

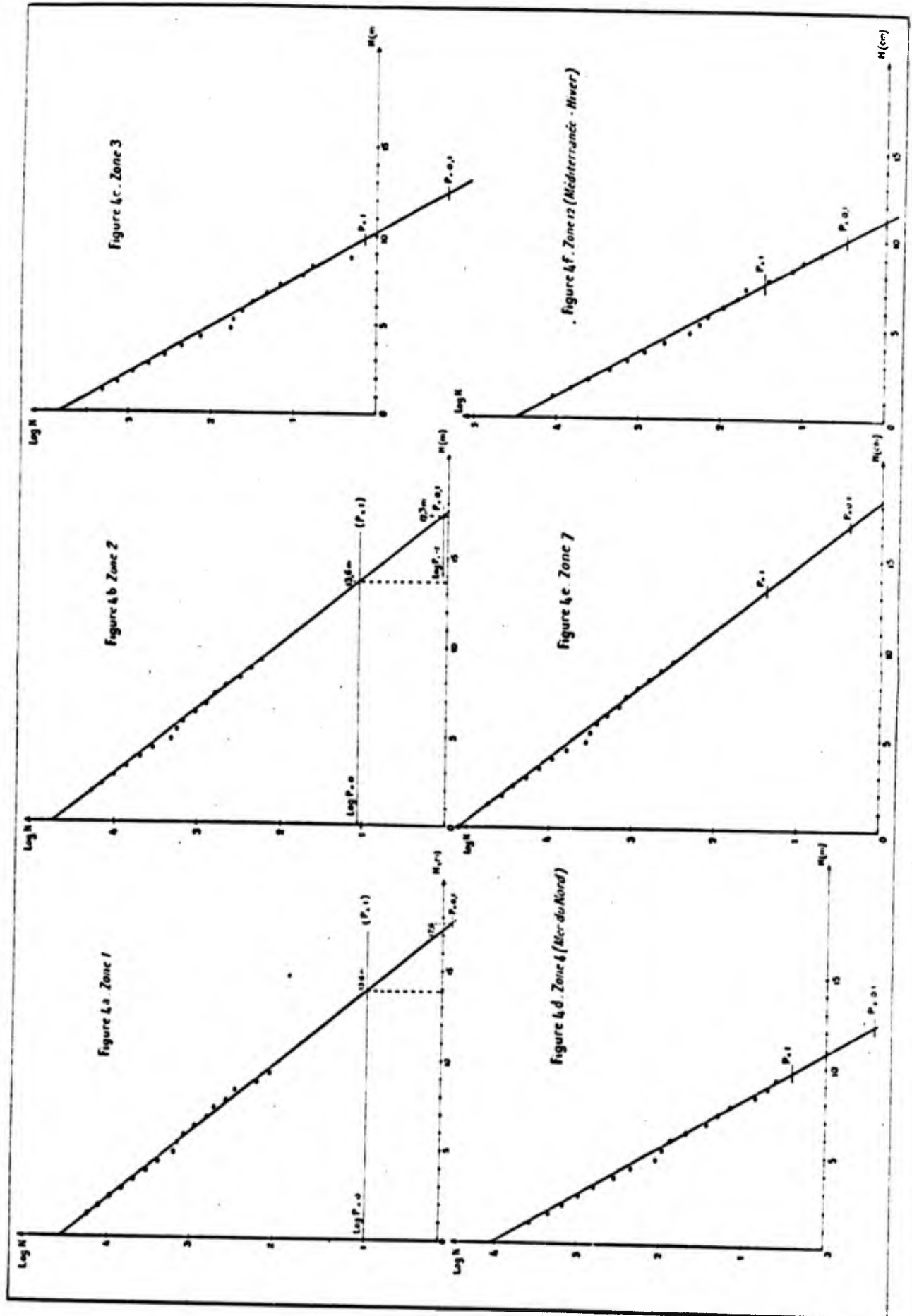
cours d'un siècle. En effet, H représente, en principe, la hauteur moyenne des trois plus grosses vagues d'un groupe de neuf vagues bien formées. C'est la "hauteur significative" : celle que doivent signaler les observateurs marins. Elle est légèrement supérieure à  $H_{\frac{1}{3}}$ . Rappelons que la vague

la plus grosse d'un groupe de 1 000 vagues a une hauteur de  $H_{\frac{1}{1000}}$  en moyenne,  $H_{\frac{1}{1000}}$  étant statistiquement presque le double de  $H_{\frac{1}{3}}$ . Avant d'aller plus loin, il importe de connaître la valeur réelle, aussi précise que possible, des observations H.

### 3 - VALEUR DES OBSERVATIONS VISUELLES

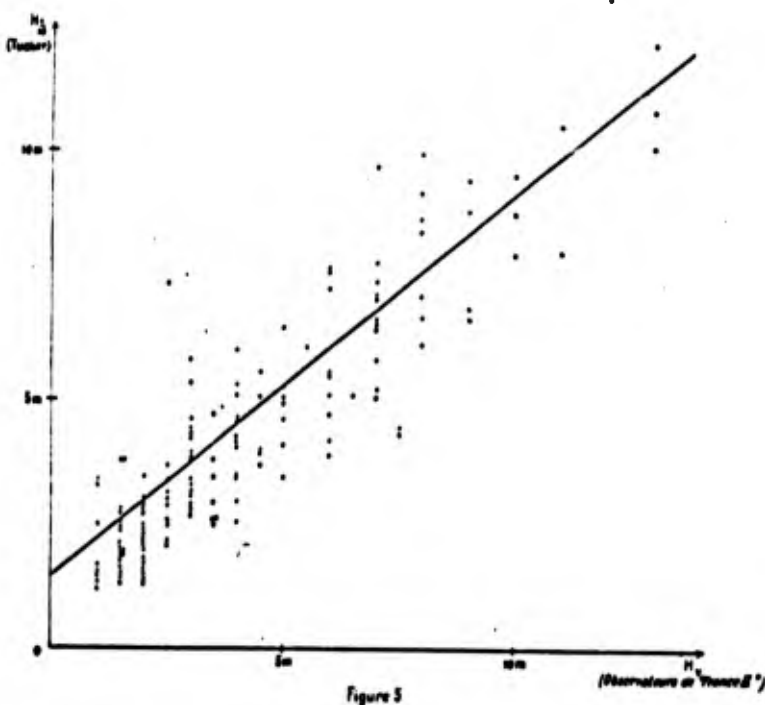
3.1.- Comparaison entre les observations visuelles et les enregistrements à l'aide d'un appareil TUCKER effectués simultanément à bord du navire météorologique "France II" d'octobre 1966 à janvier 1967\*.

\* Note n°240 de l'Établissement d'Études et de Recherches Météorologiques, par E.DEVILLAZ et P.BARBOTTIN.



figures 4a-f

495



Cette comparaison montre que c'est de  $H_{10}$  que les observations visuelles ont été le plus voisines (cf. figure 6).

Nous avons trouvé la relation linéaire suivante (ajustement par la méthode des moindres carrés) :

$$H_{10} = 1,4 \text{ m} + 0,77 H_V, \quad H_V \text{ étant la hauteur des observations visuelles exprimées en mètres (cf. figure 5).}$$

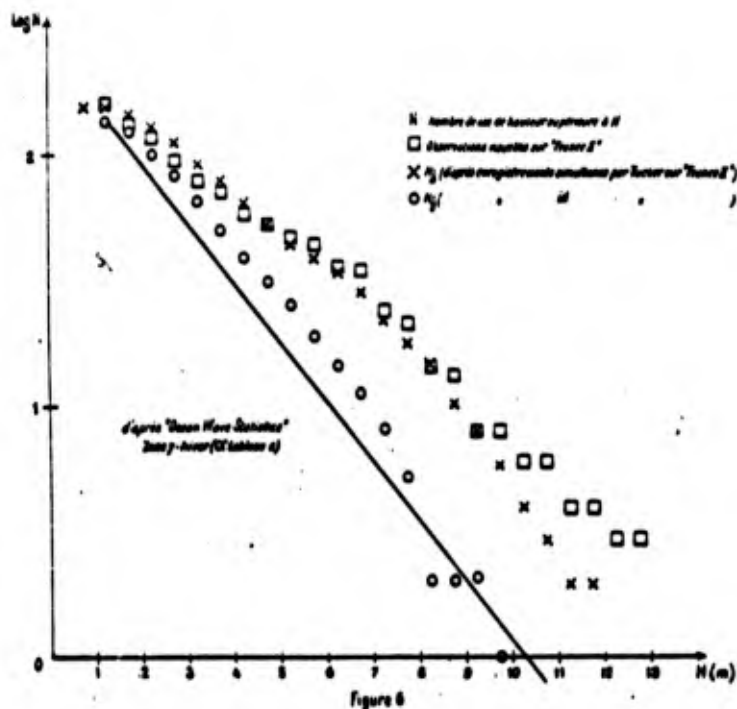
Ce résultat est en désaccord avec ceux rapportés dans "Waves Statistics"<sup>\*</sup> et selon lesquels :

$$H_{10} = 1,23 + 0,88 H_V \quad (1)$$

La figure 6 permet de constater que c'est des points représentatifs de  $H_{10}$  que se rapproche le plus la droite déduite des statistiques d'observations des navires sélectionnés ("Ocean Wave Statistics"), pour l'hiver en zone 7 (cf. tableau 2), et qui a pour équation :

-----  
<sup>\*</sup> MOSKOWITZ, L., PIERSON W.J. and MEHR E. Wave spectra estimated from wave records obtained by the O.W.S. Weather Explorer and O.W.S. Weather Reporter, Technical Reports, I, II and III. New York University College of Engineering, 1962-63.

496



$$\log N = \log \frac{0,498}{L10} \cdot 10^{4,080} - 0,249 H + \log \frac{152}{17\ 057}$$

Remarques : La durée relativement courte de cette campagne de "France II" ne permet pas de tirer des conclusions définitives, notamment en ce qui concerne l'allure vaguement parabolique des courbes qu'on pourrait ajuster aux valeurs tirées des enregistrements automatiques ( $H_{1/3}$  et  $H_{1/10}$ ) et qui donneraient à penser que les hauteurs de vagues pourraient obéir, en partie, à une loi de Gauss (Peut-être, du reste, en est-il bien ainsi dans des intervalles de temps relativement courts). Par ailleurs, il apparaît que les observateurs du "France II" ont eu tendance à fournir une estimation de hauteurs de vagues voisine de  $H_{1/10}$  et donc que leurs observations ont présenté en moyenne des valeurs exagérées par rapport à l'ensemble des autres navires (météorologiques ou sélectionnés et volontaires).

3.2.- HOGGEN et LUMB proposent la relation suivante entre les observations de navires météorologiques stationnaires dotés d'enregistreurs de vagues ( $H_{o.w.s.}$ ) et celles des navires volontaires ( $H_{v.o.s.}$ ) :

$$H_{ows} = 0,85 + 0,93 H_{vos} \quad (2)$$

Or, comme  $H_{\frac{1}{3}} = 1,23 + 0,88 H_{ows} \quad (1)$

il vient :  $H_{\frac{1}{3}} = 1,23 + 0,88 (0,85 + 0,93 H_{vos})$

ou 
$$H_{\frac{1}{3}} = 2 + 0,82 H_{vos} \quad (3)$$

C'est cette formule (3) que nous utiliserons, en étant conscients toutefois de ce que sa validité n'est pas garantie pour des hauteurs nettement supérieures à 10 mètres.

4 - DETERMINATION DE LA HAUTEUR PROBABLE DE LA PLUS HAUTE VAGUE  
OBSERVABLE EN UN POINT, AU COURS D'UNE ANNEE,  
D'UNE DECENNIE ET D'UN SIECLE

Ayant déterminé  $H_{\frac{1}{3}}$  annuelle, décennale et centenaire à l'aide du tableau 2 et de la formule (3) (cf. tableau 3), calculons maintenant la hauteur de la vague individuelle la plus grosse qui puisse théoriquement se présenter. Nous nous sommes placés, rappelons-le, dans l'hypothèse où les observations sont effectuées toutes les 3 heures. Entre deux observations, un millier de vagues environ peuvent se présenter. Or, sur 1 000 vagues, la valeur la plus probable (que nous baptisons  $H_{max}$ ) de la hauteur de la plus grosse est 1,86 fois  $H_{\frac{1}{3}}$ . En adoptant ce coefficient, on trouverait des "vagues centenaires" ( $H_{c.max}$ ) pouvant dépasser 35 mètres (cf. tableau 3).

Remarquons que le rapport entre  $H_{\frac{1}{3}}$  et la valeur la plus probable de  $H_{\frac{1}{1000}}$  (1,86 d'après LONGUET-HIGGINS) est théorique et doit être utilisé seulement

Tableau 3

Hauteur des vagues, exprimées en mètres (1 observation toutes les 3 heures)

Zones	1	2	3	4	6	7	8	11	12 hiver	17
$H_a$ ( $H_1$ annuelle) $\bar{3}$	13,3	13,2	10,0	10,0	12,5	12,9	11,0	10,7	8,2	8,4
$H_d$ ( $H_1$ décennale) $\bar{3}$	16,3	16,2	12,2	12,1	15,4	15,8	13,3	13,1	10,3	10,0
$H_c$ ( $H_1$ centenaire) $\bar{3}$	19,4	19,1	14,4	14,3	18,2	18,8	15,6	15,4	12,3	11,8
$H_c$ max	36	36	27	27	34	36	29	29	23	22

Tableau 4

Hauteurs des vagues, exprimées en mètres (1 observation toutes les 108 secondes)

Zones	1	2	3	4	6	7	8	11	12 hiver	17
$H'_a$ ( $H_1$ annuelle) $\bar{3}$	19,4	19,1	14,1	14,3	18,2	18,8	15,6	15,4	12,3	11,8
$H'_{a,max}$ ( $H_1$ annuelle) $\bar{10}$	24,7	24,3	17,9	18,2	23,1	23,9	19,8	19,6	15,6	15,0
$H'_c$ ( $H_1$ centenaire) $\bar{3}$	25,7	25,1	18,7	18,7	24,0	24,7	20,3	20,2	16,4	15,3
$H'_c$ max	33	32	24	24	31	31	26	26	21	19

pour un spectre de fréquence étroit, ce qui n'est pas le cas dans les tempêtes. Les résultats précédents concernant  $H_{c,max}$  n'ont donc été présentés qu'à titre

indicatif, car nous estimons qu'il vaut mieux opérer de la façon suivante :

Déterminons, à l'aide de la figure 4, la hauteur la plus grande qui serait observée en une année si le nombre annuel d'observations était non plus de 2920 comme précédemment (une observation toutes les 3 heures), mais 100 fois plus grand, donc : 292 000 (ce qui correspond à une observation, en un point, toutes les 108 secondes). Dans ces conditions, la probabilité d'observer la hauteur  $H_{\frac{1}{3}}$  du tableau 3, est non plus d'une fois par siècle, mais une fois, en moyenne, par an. Si l'on admet que 10 vagues environ passent, en moyenne, au cours des 108 secondes, la plus grosse vague a une hauteur  $H_{\frac{1}{10}}$  supérieure de 27 %, en prin-

cipe, à  $H_{\frac{1}{3}}$  (rappelons que  $H_{\frac{1}{3}}$  est calculé à partir des observations visuelles en utilisant l'équation (3)).

Nous appellerons  $H'$  les hauteurs calculées à partir de 292 000 observations par an.  $H'_{o.max}$  est théoriquement la plus grande hauteur susceptible d'être atteinte ou dépassée par une seule vague, une fois par siècle, en un point quelconque - mais distant des côtes - de chaque zone (cf. tableau 4).

En fait, comme la période moyenne des vagues dans les grosses tempêtes est généralement supérieure à 10,8 secondes, la hauteur probable de la vague la plus haute devrait être de  $H_{\frac{1}{8}}$  ou  $H_{\frac{1}{7}}$ , donc, en toute rigueur, un peu inférieure à  $H_{\frac{1}{10}}$ .

En outre, nous ignorons si l'équation (3) est valable pour des vagues de 20 à 30 mètres. Il est donc certain que les valeurs du tableau 4, sans doute déjà plus exactes que celles du tableau 3, ne correspondent pas de façon précise à la réalité et il est probable qu'elles soient quelque peu erronées par excès. Néanmoins, l'ordre de grandeur doit être correct.

A ceux qui trouveraient excessives de telles dimensions, nous dirons que des vagues colossales ont été observées à plusieurs reprises en différents points du globe. Rappelons ici que DUMONT D'URVILLE rapporta avoir rencontré une vague de 30 mètres de haut, au large du cap de Bonne Espérance, et qu'une observation assez précise a été faite à bord du navire américain "Ramapo", le 6 février 1933 dans le Pacifique : le calcul donna 33,60 m.

En parvenant sur des hauts-fonds, notamment au voisinage des côtes, les dimensions des vagues se trouvent considérablement modifiées et il n'est pas possible d'y appliquer les résultats précédents (valables en principe pour le large). Néanmoins, quelques faits observés sur les côtes donnent une idée des tailles énormes que peuvent atteindre certaines vagues. Empruntons à l'ouvrage de Rachel CARSON, "Cette mer qui nous entoure", les passages suivants : "Au cap Trinidad, sur la côte de l'Oregon, pendant une tempête de décembre, le phare servit de théâtre à un événement souvent cité. Tandis que le gardien regardait la mer, dans la chambre de la lampe à 59 mètres au-dessus des hautes eaux, il

voyait un rocher voisin, Pilot Rock, disparaissant continuellement sous des vagues qui balayaient son sommet haut de 30 mètres. Une d'elles, plus grande que les autres, s'abattit sur la falaise à la base du phare. Elle lui sembla s'élever comme un mur d'eau compact jusqu'au niveau de la lampe et lança ses embruns par-dessus le faite de la tour. Le choc reçu arrêta la rotation de la lampe".

"A Unst, la plus septentrionale des îles Shetland, une porte du phare presque à 59 mètres au-dessus de la mer, fut enfoncée. Au phare de Bishop Rock, pendant une tempête d'hiver, une cloche fut arrachée de l'endroit où elle était fixée, à 30 mètres au-dessus des hautes eaux. Un jour de novembre, une forte houle passant, bien qu'il n'y eût pas de vent, près du phare de Bell Rock sur la côte écossaise, se dressa contre la tour, jusqu'à la boule dorée surmontant la lampe, à 35 mètres au-dessus du rocher, et enleva une échelle fixée à la tour, à 25 mètres au-dessus du niveau de l'eau".

"Sur les côtes rocheuses, les vagues d'une forte tempête auront tendance à s'armer, en les enlevant; de pierres et de fragments de roc, qui augmentent beaucoup leur puissance destructive. C'est ainsi qu'un roc pesant plus de 60 kilogrammes fut lancé très au-dessus de la maison du gardien du phare de Tillamook Rock, à 30 mètres de hauteur. En tombant, il fit dans le toit un trou de 7 mètres. Le même jour, des pluies de pierres cassèrent plusieurs vitres à la chambre de la lampe, à 40 mètres de hauteur".

## 5 - CONCLUSION

Les lois exponentielles auxquelles les statistiques des hauteurs de vagues observées à bord des navires semblent obéir, ont été établies de façon empirique et aucune explication n'en a été fournie\*. Sans doute aurait-il été plus satisfaisant pour l'esprit de voir les hauteurs - ou les énergies - obéir

-----  
\* Lors de la rédaction de ce mémoire, nous ignorions les travaux de M. Jean LARRAS et les explications qu'il propose (C.R. Acad. Sc. Paris, t.265, 16 août 1967 : "Nouvelles recherches sur la probabilité d'apparition des houles dont l'amplitude dépasse une valeur donnée"). Notons que les résultats auxquels nous avons abouti indépendamment l'un de l'autre sont en bon accord, tout au moins en ce qui concerne la forme exponentielle simple de la loi de probabilité des hauteurs de vagues en cas de spectre large.

à une loi de Gauss ; et on peut, certes, se demander raisonnablement si la forme exponentielle des lois mises en évidence n'est pas artificielle et ne tient pas au caractère subjectif des observations qui ont servi à les établir. Les appareils enregistreurs automatiques de vagues fourniront certainement, d'ici à quelques années, des données objectives assez abondantes pour permettre de lever - doute à ce sujet et, à tout le moins, de compléter et de préciser davantage les résultats auxquels nous avons abouti et qui doivent évidemment être considérés comme provisoires. Mais, en attendant, l'utilisation et l'interprétation des données statistiques présentées par HOGREN et LUMB, si sujettes à critiques qu'elles puissent être, nous ont paru présenter actuellement un intérêt non négligeable.

551.466.32