AD 767474

LIBRARY
TECHNICAL REPORT SECTION
NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL
MONTEREY, CALIFORNIA 93940

AGARD-LS-61

AGARD-LS-61

AGARD

ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH & DEVELOPMENT, PARIS

7 RUE ANCELLE 92200 NEUILLY SUR SEINE FRANCE

AGARD LECTURE SERIES No. 61

on

Optics of the Sea (Interface and In-water Transmission and Imaging)

NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION

DISTRIBUTION AND AVAILABILITY
ON BACK COVER

AGARD-LS-61

NORTH ATLANTIC TREATY ORGANIZATION

ADVISORY GROUP FOR AEROSPACE RESEARCH AND DEVELOPMENT

(ORGANISATION DU TRAITE DE L'ATLANTIQUE NORD)

AGARD Lecture Series No.61

OPTICS OF THE SEA

(INTERFACE AND IN-WATER TRANSMISSION AND IMAGING)

The material in this book has been assembled to support a Lecture Series under the sponsorship of the Electromagnetic Wave Propagation Panel and the Consultant and Exchange Program of AGARD.

THE MISSION OF AGARD

The mission of AGARD is to bring together the leading personalities of the NATO nations in the fields of science and technology relating to aerospace for the following purposes:

- Exchanging of scientific and technical information;
- Continuously stimulating advances in the aerospace sciences relevant to strengthening the common defence posture;
- Improving the co-operation among member nations in aerospace research and development;
- Providing scientific and technical advice and assistance to the North Atlantic Military Committee in the field of aerospace research and development;
- Rendering scientific and technical assistance, as requested, to other NATO bodies and to member nations in connection with research and development problems in the aerospace field;
- Providing assistance to member nations for the purpose of increasing their scientific and technical potential;
- Recommending effective ways for the member nations to use their research and development capabilities for the common benefit of the NATO community.

The highest authority within AGARD is the National Delegates Board consisting of officially appointed senior representatives from each member nation. The mission of AGARD is carried out through the Panels which are composed of experts appointed by the National Delegates, the Consultant and Exchange Program and the Aerospace Applications Studies Program. The results of AGARD work are reported to the member nations and the NATO Authorities through the AGARD series of publications of which this is one.

Participation in AGARD activities is by invitation only and is normally limited to citizens of the NATO nations.

The material in this publication has been reproduced
directly from copy supplied by AGARD or the author.

Published August 1973

535.3:535.43:551.463

Printed by Technical Editing and Reproduction Ltd
Harford House, 7–9 Charlotte St, London. W1P 1HD

PREFACE

Recent emphasis on marine applications from space and airborne platforms, (remote sensing and surveillance of the oceans, bottom mapping, submarine detection and communication), rely on a thorough understanding of light propagation in the air, in the sea and across its interface. Until recently, the latter had received little attention compared to atmospheric propagation. Consequently, the Electromagnetic Wave Propagation Panel (EPP) recommended as a follow-up of the AGARD meeting on "Electromagnetics of the Sea", held in 1970, the present Lecture Series totally dedicated to "Optics of the Sea".

Advances in the last two years brought about by the union of the fields of optical imaging and optical oceanography have yielded analytical and experimental techniques fruitful to a gamut of applications in military and physical oceanography. It is the purpose of these lectures to present an account of this newly acquired knowledge integrated into a coherent discipline, "Optics of the Sea".

The lectures cover all the significant topics in "Optics of the Sea" and the mathematical techniques necessary to handle light propagation and imaging in the ocean. These lectures should be of interest to aerospace engineers and scientists, marine engineers, and oceanographers engaged in the solution of military and civilian problems associated with the air-sea environment.

LIST OF SPEAKERS

Lecture Series Directors

Mr L'Ingénieur en Chef P.Halley
Division des Prévisions Ionosphériques
Centre National d'Etudes des Télécommunications
39–40 rue du Général Leclerc
92131 Issy-les-Moulineaux, France

Dr H.Hodara
Vice President
Tetra Tech, Inc.
630 North Rosemead Boulevard
Pasadena, California 91107, USA

Professor A.Ivanoff
Faculté des Sciences de Paris
T24, 9 quai St-Bernard
75005 Paris, France

co-author: Dr J.P.Bethoux
Laboratoire d'Océanographie Physique
Faculté des Sciences
Université de Paris VI
4 Place Jussieu, 75005 Paris, France

Dr L.Mertens
R.C.A. Service Company
"Deep Look" Project
RCA/DL, Hangar B
Patrick Air Force Base, Fl. 32925, USA

Dr A.Morel
Université de Paris
Laboratoire d'Océanographie Physique
06230 Villefranche-sur-Mer, France

co-author: Dr L.Prieur
Université de Paris
Laboratoire d'Océanographie Physique
06230 Villefranche-sur-Mer, France

Mr K.Nygård
University of Copenhagen
Institute of Physical Oceanography
Haraldsgade 6
2200 Copenhagen N., Denmark

Dr W.H.Wells
Tetra Tech, Inc.
630 North Rosemead Boulevard
Pasadena, California 91107, USA

Dr J.R.V.Zaneveld
School of Oceanography
Oregon State University
Corvallis, Oregon 97331, USA

Chairman of the Round Table Discussion

Professor S.Q.Duntley
Director, Visibility Laboratory
Scripps Institute of Oceanography
University of California
San Diego, La Jolla, California 92037, USA

CONTENTS

	Page
PREFACE	iii
LIST OF SPEAKERS	iv
INTRODUCTION A L'ELECTROMAGNETISME DES MERS par P. Halley	I
OVERVIEW OF THE LECTURE SERIES by H. Hodara	37

	Reference
SESSION ONE – AIR/SEA INTERFACE AND RADIATION TRANSFER	
REFLECTION AND REFRACTION OF LIGHT AT THE SEA SURFACE: THEORY AND EXPERIMENT* by K. Nygård	1.1
RADIANCE DISTRIBUTION BELOW THE SEA SURFACE by K. Nygård	1.2
APERCU SUR LES THEORIES DU TRANSFERT RADIATIF APPLICABLES A LA PROPAGATION DANS LA MER par L. Prieur et A. Morel	1.3
ENERGIE SOLAIRE ET THERMOCLINE SAISONNIERE par J.P. Bethoux et A. Ivanoff	1.4
SESSION TWO – LIGHT PROPAGATION IN THE SEA	
FACTEURS PHYSIQUES, CHIMIQUES ET BIOLOGIQUES AFFECTANT LA PROPAGATION DE LA LUMIERE DANS LES EAUX DE MER par A. Ivanoff	2.1
REFRACTIVE INDEX FLUCTUATIONS IN SEA WATER by H. Hodara	2.2
VARIATION OF OPTICAL SEA PARAMETERS WITH DEPTH by J.R.V. Zaneveld	2.3
SESSION THREE – SCATTERING MEASUREMENTS AND THEORY	
DIFFUSION DE LA LUMIERE PAR LES EAUX DE MER. RESULTATS EXPERIMENTAUX ET APPROCHE THEORIQUE† par A. Morel	3.1
THEORY OF SMALL ANGLE SCATTERING by W.H. Wells	3.3
EXPERIMENTAL RESULTS OF SMALL ANGLE SCATTERING by H. Hodara	3.4

* Not available at time of printing

† This paper includes Item 3.2 of the Lecture Series Programme.

Reference

SESSION FOUR – UNDERWATER VISIBILITY AND IMAGING

FACTORS AFFECTING LONG RANGE VISION
by W.H.Wells 4.I

CRITERIA FOR VISION: RESOLUTION, SIGNAL-TO-NOISE RATIO AND CONTRAST
by H.Hodara 4.2

MEDIUM AND SYSTEM TRANSFORM FUNCTIONS
by W.H.Wells 4.3

SESSION FIVE – SYSTEMS FUNDAMENTALS

SOURCES: ARC, FLASH, INCANDESCENT AND LASER LAMPS
by H.Hodara and W.H.Wells 5.I

RECEIVERS: PHOTOELECTRONIC AND PHOTOGRAPHIC DETECTORS
by H.Hodara and W.H.Wells 5.2

UNDERWATER LENSES AND OPTICAL PORTS
by L.E.Mertens 5.3

LONG RANGE VISION TECHNIQUES
by W.H.Wells 5.4

SPATIAL FILTERING AND IMAGE RESTORATION
by H.Hodara 5.5

FORTRAN ALGORITHMS FOR UNDERWATER OPTICS
by W.H.Wells 5.6

ERRATA

Lecture 3.3 -- Theory of Small Angle Scattering

p. 3.3-3 -- Line 2, change to read "at small angles (Lect. 4.1). By...".

p. 3.3-4 -- Third line above Eq. 14, change to read "been experimentally demonstrated and explained by scalar diffraction theory. The two-...".

-- Eq. 15, replace "θ_{max}" by "∞".

p. 3.3-7 -- Line above Eq. 32, replace "28 and 29" by "30 and 31".

p. 3.3-9 -- Equation after Eq. 43, replace "3/2" by "-3/2".

-- Eq. 49, leave first "f_1^c", replace second by "f_1^f".

p. 3.3-11 -- First of Eqs. 57, move "]" to left of "F_1^f".

-- Equation after Eqs. 57, leave first "$e^{-\alpha\Delta}$", change next to "$e^{-\gamma\Delta}$".

Lecture 4.1 -- Factors Affecting Long Range Vision

p. 4.1-4 -- First paragraph in new section, last line, replace "that" with "to".

-- First line under last equation, change to read "Fig. 3, computed from shallow-water data, shows integrated power Φ within a cone angle".

Lecture 4.3 -- Medium and System Transform Functions

p. 4.3-3 -- Next to last row of table, second column, replace "ζ_1" by "δ_1".

p. 4.3-5 -- Fifth line before Eq. 12, spell "fraction".

-- Eighth line after Eq. 14, replace "d" by "δ".

p. 4.3-6 -- Line between Eqs. 16 and 17, replace "D" by "d".

p. 4.3-7 -- Sixth line after Eq. 22, spell "amount".

-- Fifth line from bottom, change first mathematical expression to "$\sim\sqrt{(\rho_1 S + \rho_2 B)}$".

p. 4.3-11 -- Third line of Fig. 4 caption, replace "Radians" by "Radius".

p. 4.3-12 -- Fig. 5, replace "θ_{max}-" by "$\hat{\theta}$=".

p. 4.3-14 -- Legend at top of Fig. 12, replace "13" by "17".

p. 4.3-15 -- Fig. 14, replace "R" by "A", two places.

p. 4.3-16 -- Fig. 15, replace "R_2, ρ_2" by "A_1, ρ_1", and "R_1, ρ_1" by "A_2, ρ_2". (Note subscript swap in this correction, but not in Fig. 14.)

Lecture 5.4 -- Long Range Vision Techniques

p. 5.4-9 -- Eq. 9, replace "p" by "f".

-- Second line after Eq. 10, same change.

Lecture 5.6 -- Fortran Algorithms for Underwater Optics

p. 5.6-1 -- Last equation, correct to read: $D^c = \frac{d}{d\psi}(\psi D^f)$.

p. 5.6-3 -- First indented expression, replace "$J_o(2\theta\psi)$" by "$J_o(2\pi\theta\psi)$".

-- Next line, add subscript, "θ_o".

p. 5.6-5 -- Computer listing, leave first pair of markers "#" alone and lower second pair one line.

p. 5.6-6 -- Three lines above Eq. 5, delete comma after $.

p. 5.6-16 -- Eq. 8, replace "h" by "f".

INTRODUCTION A L'ELECTROMAGNETISME DES MERS

par

P. Halley

Division des Prévisions Ionosphériques
Centre National d'Etudes des Télécommunications
38-40, rue du Général Leclerc
92131 Issy-les-Moulineaux
FRANCE

Plan de l'exposé

1. Avant-Propos
2. Aspect général des caractéristiques e.m. de l'eau de mer ε_r et σ
3. La composition ionique de l'eau de mer
4. La conductivité ionique de l'eau pure et de l'eau de mer
5. L'aspect moléculaire de la polarisation
6. L'eau liquide en régime harmonique
7. Propagation des ondes e.m. dans un milieu de conductivité finie, application à l'eau de mer
8. L'émissivité de la surface de la mer

Quelques notations

σ Conductivité mho/m

σ' Conductivité ionique

σ'' Conductivité dipolaire

ε permittivité (constante diélectrique)

ε_o permittivité de l'espace libre

ε_r permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$

$\bar{\varepsilon}_r$ permittivité relative complexe

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - j\,\frac{\sigma'}{\omega\varepsilon_o}$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon' - j\,\varepsilon'' - j\,\frac{\sigma'}{\omega\varepsilon_o} \equiv \varepsilon' - j\,\frac{\sigma' + \sigma''}{\omega\varepsilon_o}$$

ε' partie réelle de $\bar{\varepsilon}_r$

ε'' partie imaginaire de $\bar{\varepsilon}_r$ due à la polarisation

ε_s $\varepsilon'(0)$ partie réelle de $\bar{\varepsilon}_r$ en régime statique

ε_∞ $\varepsilon'(\infty)$ partie réelle théorique de $\bar{\varepsilon}_r$ pour une fréquence infiniment grande

μ_o perméabilité magnétique de l'espace libre

$$\mu_o = 4\pi \,.\, 10^{-7}\ (\mathrm{H\ m^{-1}})$$

μ partie réelle de l'indice de phase complexe

β coefficient d'absorption $A = A_o\, e^{-\beta z}$

β^* affaiblissement d'absorption dB/m

$$\beta^* = -\,20\,\beta \,.\, \log e$$

T température absolue (°K) ou coefficient de transmission

t température Celsius ou temps

ω pulsation de travail

τ temps de relaxation

INTRODUCTION A L'ELECTROMAGNETISME DES MERS

par

P. Halley

DIVISION DES PREVISIONS IONOSPHERIQUES
CENTRE NATIONAL D'ETUDES DES TELECOMMUNICATIONS
38-40, rue du Général Leclerc - 92131 Issy-les-Moulineaux - FRANCE

SOMMAIRE

L'eau de mer est un milieu ionisé de composition très complexe. Aux basses fréquences, très inférieures à 1 GHz, le milieu est beaucoup plus conducteur que diélectrique ; sa caractéristique essentielle est la conductivité réelle ionique σ' . Les conditions e.m. à l'interface air/mer déterminent la structure du champ dans la mer. Le champ créé par une source dans l'air ne pénètre que par effet de peau. La réfraction et l'absorption sont des phénomènes énormes.

Aux fréquences plus élevées la permittivité ε du liquide intervient. L'eau est une substance polaire (sa molécule possède une structure coudée). Une seconde conductivité réelle σ'' due aux pertes diélectriques apparaît. La théorie de Debye de la polarisation des substances polaires fournit une base théorique au calcul de la permittivité réelle et de la conductivité réelle du milieu marin que l'on peut rassembler en une seule caractéristique : la permittivité complexe.

Aux fréquences supérieures à 1 000 GHz environ, l'eau présente des bandes de raies d'absorption qui sont dues à des résonances particulières des molécules d'eau dans un mélange de 9 isotopes.

Aux fréquences supérieures à environ 3.10^{14} Hz, l'inertie des ions et des molécules d'eau supprime toute conductivité et la transparence optique apparaît.

L'émissivité de la surface de la mer sur une longueur d'onde particulière est déterminée par la permittivité complexe du liquide. La mesure des températures apparentes de luminance est un moyen d'observation de la température superficielle et de la composition chimique à la surface.

1. AVANT-PROPOS :

La planète terre pourrait s'appeler plus justement la planète des mers ou de l'eau, car l'eau est probablement la substance qui distingue le plus la terre des autres planètes du système solaire.

Entre les continents, les océans recouvrent le globe d'un film liquide dont l'épaisseur est environ la $\frac{1}{2500}$ partie du diamètre de la terre elle-même.

Un grand nombre des caractéristiques de cette eau sont très voisines de celles de l'eau ordinaire (dite "douce"), dont les propriétés surprenantes laissent penser que la formule H_2O n'est qu'une représentation insuffisante et inadaptée de la molécule. (Les unités H_2O sont probablement polymérisées par une variété de processus chimiques, si bien que la masse moléculaire moyenne est très supérieure à 18).

Les plus importantes anomalies de l'eau sont ses propriétés thermiques. Les points de fusion et d'ébullition des autres substances de faible masse moléculaire relative, tels que l'ammoniaque NH_3 et le méthane CH_4, sont beaucoup moins élevés que ceux de l'eau. De plus, la chaleur spécifique, la chaleur latente de fusion et la chaleur latente de vaporisation de l'eau sont disproportionnellement élevées.

C'est grâce aux propriétés thermiques exceptionnelles de l'eau et à son extension à la surface de la terre que la température y est aussi uniformément répartie. Les tropiques ne sont pas aussi chauds, ni les pôles aussi froids, qu'ils le seraient sans ces circonstances.

Sous sa phase liquide, l'eau est principalement présente dans les océans. Cette eau n'est pas pure, mais largement salée. Au point de vue électromagnétique, le milieu marin présente des propriétés dont les unes sont très voisines de celles de l'eau douce et dont les autres sont celles d'un électrolyte.

2. ASPECT GENERAL DES CARACTERISTIQUES ELECTROMAGNETIQUES DE L'EAU DE MER ε_r ET σ :

Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler certaines bases de l'électromagnétisme classique à propos desquelles le lecteur trouvera quelques développements en annexe I.

Les équations du champ e.m. permettent de définir trois caractéristiques d'un milieu matériel non ferromagnétique et conducteur qui sont : (Nous adoptons le système Giorgi rationalisé MKS (A).)

- la perméabilité magnétique μ qui est toujours très voisine de celle de l'espace libre

(1) $$\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}\ (\mathrm{H\ m^{-1}})$$

- la constante diélectrique ou permittivité ε ($F\ m^{-1}$) dont la valeur relative à celle de l'espace libre est appelée ε_r

$$(2) \quad \varepsilon_o = \frac{1}{c^2 \mu_o} \qquad (3) \quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o}$$

- la conductivité électrique σ (mho m^{-1})

μ_o étant mis à part, ce sont les caractéristiques macroscopiques ε_r et σ de l'eau de mer qui déterminent les propriétés e.m. de ce milieu. ε_r est une caractéristique dont les valeurs sont presque les mêmes pour l'eau pure et pour l'eau de mer. Au contraire σ, qui généralement parlant est une caractéristique très variable dans la nature, atteint des valeurs beaucoup plus élevées pour l'eau de mer que pour l'eau pure. C'est σ que nous étudierons en premier lieu.

L'eau de mer est un électrolyte aqueux, c'est-à-dire de l'eau qui contient des ions provenant de sels dissous. Ces ions rendent l'eau de mer conductrice du courant à toutes les radiofréquences, même en régime statique.

Par analyse des mouvements microscopiques nous pourrons distinguer :

i) la conductivité ionique de l'eau de mer que nous appellerons σ' et qui est pratiquement la seule à considérer en régime statique et aux basses fréquences. Elle est due aux mouvements des ions ou monopôles dans l'eau neutre sous l'action d'un champ.

ii) la conductivité dipolaire de l'eau que nous appellerons σ'' et qui est due à la création ou à l'orientation de dipôles, c'est-à-dire à la polarisation de l'eau neutre.

La conductivité effective σ est à chaque fréquence la somme des deux conductivités ci-dessus

$$(4) \qquad \sigma = \sigma' + \sigma''$$

3. LA COMPOSITION IONIQUE DE L'EAU DE MER (2).

La conductivité ionique de l'eau des mers fait partie, comme nous l'avons déjà dit, de l'ensemble des propriétés physiques et physico chimiques qui la différencient de l'eau douce.

Ces propriétés sont attribuables à environ 11 constituants chimiques qui représentent plus de 99,9 % de la matière dissoute dans l'eau et que l'on retrouve, à très peu près dans les mêmes proportions, en tout point des océans, quelles que soient le lieu, la température et la pression, à condition de s'éloigner suffisamment des estuaires fluviaux, des sources sous-marines et des banquises.

Cette matière comprend : (Voir tableau I)

les anions $C\ell^-$, SO_4^{--} , HCO_3^- , Br^- et F^-

Les cations Na^+ , Mg^{++} , Ca^{++} , K^+ et Sr^{++}

et non dissocié H_3BO_3

La dissociation des sels étant presque totale, l'eau de mer est un "électrolyte fort" comme les solutions acqueuses d'acides ou de bases fortes. (Il existe cependant des associations ioniques des polyvalents).

A partir de cette composition ionique, il n'est pas possible de dire quelle est la composition du mélange des sels qui sont effectivement dissous. Cependant, si l'on déshydrate de l'eau de mer, on retrouve un mélange de sels dont les deux principaux sont : le chlorure de sodium Na $C\ell$ et le chlorure de magnésium Mg $C\ell_2$.

La concentration totale des sels est appelée "Salinité". Elle est définie comme étant le poids, en gramme, de la matière inorganique dissoute dans l'eau de mer (après que tous les bromures et les iodures ont été remplacés par un apport équivalent de chlorures et que les carbonates ont été convertis en oxydes). La "concentration totale en chlorures" peut être calculée et servir de référence à une composition type.

Tableau I

Composition de l'eau de mer. Concentration partielle des constituants d'une eau de mer ayant une concentration totale en chlorures de 19 o/oo (d'après A. Richards)

	g/kg	g (pour 1 g de chlorures)
Chlorure $C\ell^-$	18,890	0,99894
Sodium Na^+	10,560	0,5556
Magnésium Mg^{++}	1,273	0,06695
Sulfate SO_4^{--}	2,649	0,1394
Calcium Ca^{++}	0,4104	0,02106
Potassium K^+	0,380	0,02000

Tableau I (suite)

	mg/kg	g (pour 1 g de chlorures)
Carbone (comme HCO_3^- ou CO_3^{--})	28	0,00735
Bromure Br^-	65,9	0,00340
Strontium Sr^{++}	8,1	0,00070
Bore, comme H_3BO_3	4,6	0,00137
Silicium, comme silicates	0,01-4,5	
Fluorure F^-	1,4	0,00007
Azote dans NO_3^-	0,01-0,80	
Aluminium $A\ell^{+3}$	0,5	
Rubidium Rb^+	0,2	
Lithium Li^+	0,1	
Phosphore dans PO_4^{-3}	0,001-0,1	

Traces d'éléments présents en concentrations comprises entre 1 à 50 µg/kg : barium, iodure, arsenic, fer, manganèse, cuivre, zinc, plomb, selenium, césium, uranium.
Traces d'éléments présents en concentrations inférieures à 1 µg/kg : molybdène, thorium, cerium, argent, vanadium, lanthanum, yttrium, nickel, scandium, cobalt, cadmium, mercure, or, étain, chrome, radium.

La salinité est une variable caractéristique d'une certaine eau. En plein océan, les valeurs restent comprises entre 32 et 37 o/oo. En Mer Rouge et dans le golfe Persique, où l'évaporation est très intense, elles peuvent dépasser 40 o/oo. La moyenne générale est de 35 o/oo. La concentration moyenne en chlorures est de 19 o/oo.

4. LA CONDUCTIVITE IONIQUE DE L'EAU DOUCE ET DE L'EAU DE MER.

4.1. Le mécanisme du passage du courant dans l'électrolyte (3) :

L'eau de mer est un électrolyte. Sa structure comme celle de tous les électrolytes se rapproche beaucoup de celle d'un plasma. Cependant, la dissociation dans un électrolyte ne fait apparaître que des ions à l'exclusion des électrons. Ces ions sont lourds et lents. Le plus léger d'entre eux, le proton H^+, est encore 1 830 fois plus inerte que l'électron. Il ne porte que la charge + e égale en valeur absolue à celle de l'électron - e.

Chaque ion d'un même type présente une masse m et porte une charge q, qui est un multiple entier positif ou négatif de la charge élémentaire - e de l'électron :

(5) $$q = z\,e$$

z s'appelle "électrovalence"

Le faraday est la charge électrique transportée par une mole d'ions monovalents, tels que Na^+ ou $c\ell^-$ par exemple.

(6) $$F = N_A e = (96\,491{,}2 \pm 1{,}1)\ C/mole$$

(La mole est la quantité d'un corps qui contient N_A entités élémentaires, c'est-à-dire autant de ces entités qu'il y a d'atomes dans 0,012 kg de carbone 12.)

N_A est la constante d'Avogadro.

(7) $$N_A = (6{,}02295 \pm 0{,}00016)\ 10^{23}/mole$$

Si l'ion est bi, tri ou z-valent, la charge transportée par une mole d'ions est z F.
La solution étant électriquement neutre dans son ensemble, la somme des concentrations des ions positifs est égale à la somme des concentrations des ions négatifs.

On appelle "Molarite" de l'ion B le quotient c_B du nombre de moles de cet ion par le volume du mélange. Par unité de volume, il y a donc $N_A c_B$ ions du type B qui portent la charge $N_A c_B z_B e$.

On a, pour un mélange neutre dans son ensemble, $\sum c_B z_B = 0$ (La somme étant étendue à tous les types d'ions).

Les ions, qui ont à peu près la même taille que les molécules d'eau, participent à l'agitation thermique désordonnée, dont il ne résulte aucun courant à l'échelle macroscopique. Mais, s'il existe dans l'électrolyte un mouvement statistiquement ordonné des charges il peut en résulter un courant dont la densité s'écrit :

(8) $$\vec{J} = N_A e \sum c_B z_B \vec{V}_B$$

En présence du champ électrique $\vec{E}$ qui pénètre l'électrolyte, on admet que chaque ion est soumis à la force $q_B . \vec{E}$. (Il n'est pas nécessaire de faire intervenir la polarisation et le champ effectif, puisque les relations entre ces vecteurs sont linéaires). Chaque ion est d'autre part soumis à une force visqueuse ou de frottement $mZ\vec{V}$, où Z a les dimensions d'une fréquence et peut être appelé fréquence de collision de l'ion.

D'autre part, le coefficient de frottement mZ est donné par la loi de Stokes

(9) $$mZ = 6\pi\eta a$$

η désignant le coefficient de viscosité de l'eau et a le rayon de l'ion.

En définitive, l'équation des forces appliquées à l'ion B est (en supprimant dans l'écriture l'indice B) :

(10) $$m \frac{d\vec{V}}{dt} + mZ\vec{V} = q\vec{E}$$

En régime continu on peut admettre

(11) $$\vec{V} = \frac{q}{mZ} \vec{E}$$

La quantité $u = \frac{q}{mZ}$ s'appelle "mobilité" de l'ion.

On a donc pour cet ion :

(12) $$\vec{J} = N_A e\, c|z|u\, \vec{E}$$

ou bien (13) $$\vec{J} = \sigma' \vec{E}$$

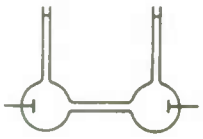


Fig. 1

où σ' est la "conductivité spécifique" due à la présence de l'ion B.

Cette relation est l'expression de la loi d'Ohm.

On appelle "concentration équivalente" C le produit de la molarité c par la valeur absolue de l'électrovalence z

(14) $$C = c|z|$$

Pour un sel dissous, la concentration C est le produit du (nombre de moles par unité de volume) par (la somme des valences rompues). Ainsi, pour Na $c\ell$

$$C = c \,.\, 1$$

D'où (15) $$\sigma' = N_A\, e\, C\, u$$

On peut définir la "conductivité molaire" Λ_m par :

(16) $$\Lambda_m = \frac{\sigma'}{c} = N_A e|z|u$$

et la "conductivité équivalente" Λ par :

(17) $$\Lambda = \frac{\sigma'}{C} = N_A e\, u$$

Pour le mélange d'ions d'un sel dissous, on a bien entendu

(18) $$\Lambda = N_A e \sum u$$

Il résulte de (17) que, pour chaque sel, Λ ne devrait dépendre que de la température et non de la concentration. Ainsi, à température fixe, σ' serait proportionnel à C.

4.2. Méthodes de mesure et résultats expérimentaux (3) et (5) :

Pour mesurer la conductivité d'un électrolyte liquide quelconque, on peut utiliser un vase dont la forme est représentée sur la figure 1 possédant une partie cylindrique de section s, où le champ électrique peut être considéré comme uniforme et parallèle aux génératrices du cylindre.

La quantité d'électricité qui traverse par seconde l'unité de surface MM' est :

(19) $$i = \frac{I}{s} = \sigma' E$$

On met alors en oeuvre les mêmes méthodes de mesure que pour les conducteurs ordinaires. Pour éviter le phénomène de polarisation des électrodes, on emploie dans les mesures au pont de Wheatstone un courant alternatif. On peut étalonner le tube à électrolyte en mesurant sa résistance lorsqu'il est rempli par une solution de conductivité connue.

Expérimentalement, on constate bien que la conductivité des électrolytes augmente avec la température. La variation relative est assez considérable et de l'ordre de 1/40 par degré Celsius. Cette augmentation relative est voisine de celle de $1/\eta$ et liée à la diminution relative du coefficient de frottement interne de l'eau (9).

On constate de plus, que la conductivité équivalente Λ diminue quand la concentration C augmente et tant que C ne dépasse pas beaucoup 10, la variation suit, pour les électrolytes forts, la loi de KOHLRAUSCH (1900) (5) :

(20) $$\Lambda = \Lambda_o - b\sqrt{C}$$

Les deux constantes de cette loi expérimentale sont propres à chaque sel. Λ_o est une conductivité limite qui caractérise une concentration infiniment petite.

Le tableau II, ci-dessous, indique quelques valeurs numériques en mho/m des conductivités équivalentes multipliées par 10^3 de deux solutions aqueuses à 18°C, d'après H. Falkenhagen (5)

Tableau II

C	$\ll 10^{-1}$	10^{-1}	$5\ 10^{-1}$	1	5	10	50	100	500	1000
Na Cℓ	10,899	10,810	10,718	10,649	10,378	10,195	9,571	9,202	8,094	7,435
Mg $C\ell_2$	11,088	10,943	10,768	10,635	10,130	9,814	8,848	8,342	6,987	6,145

La conductivité $\sigma' = \Lambda C$ n'est donc qu'assez grossièrement proportionnelle à la concentration. Noter que pour l'eau de mer la concentration globale équivalente est voisine de 600.

4.3. La conductivité ionique de l'eau pure.

Même parfaitement propre, bidistillée et privée de gaz, l'eau possède une conductibilité résiduelle qui révèle une très faible dissociation. Les concentrations des ions H^+ et OH^- sont telles que l'on ait à 18°C et par m^3 :

(21) $$C_1 = C_2 = 0{,}77\ 10^{-4}$$

Comme le pH est défini par l'expression $pH = -\log_{10} C_1/1000$, le pH de l'eau pure à 18°C est 7,1 environ. (Pour l'eau de mer, le pH varie entre 8,0 et 8,2 à la surface et décroît jusqu'à 7,7 en profondeur, ce qui signifie une légère alcalinité).

Pour un pH de 7,1, on obtient $\sigma' = 3{,}8\ 10^{-6}$ mho/m

et pour un pH de 8, on obtient $\sigma' = 1{,}1\ 10^{-5}$ mho/m

L'eau douce des lacs et des rivières qui n'est pas pure, présente une conductivité de (1 à 5) . 10^{-3} mho/mètre. C'est un conducteur médiocre.

4.4. La conductivité ionique de l'eau de mer.

C'est celle de l'eau pure à laquelle s'ajoute celle produite par les sels dissous, de beaucoup principale.

Le problème est en principe résolu par la formule (12). Mais, il faut déterminer les mobilités qui varient elles-mêmes avec les concentrations. On peut, bien entendu, déterminer la somme des mobilités $(u_1 + u_2)$ d'une paire d'ions d'un sel unique dissous, en mesurant la conductivité équivalente et, par d'autres méthodes, le rapport $u_1/(u_1 + u_2)$. On détermine ainsi les mobilités elles-mêmes. On trouve des valeurs petites, par exemple dans l'eau à 18°C la mobilité de l'ion H^+ est 33 10^{-8} m/s et par V/m. Les ions se déplacent donc lentement.

On peut également, additionner les conductivités provenant de chaque sel en admettant une certaine composition en sels.

Il a paru intéressant de préciser davantage le mécanisme du passage du courant et d'expliquer le fait que la conductivité équivalente Λ d'un électrolyte fort diminue quand la concentration augmente. Le lecteur trouvera, en annexe II, un exposé résumé de la théorie des anomalies des électrolytes de Debye et Hückel, dont il résulte que le mouvement d'un ion particulier, à travers les particules chargées ou non du milieu, est ralenti par le mouvement en sens inverse du nuage d'ions de l'autre signe, qui l'entourent. Cette résistance particulière a été appelée "électrophorèse". A ce premier effet s'en ajoute un second, en régime alternatif, qui est dû au retard que prend le nuage d'ions qui se trouve centré en arrière de l'ion particulier considéré.

Ainsi, la conductivité Λ_o est modifiée. On a finalement :

(22) $$\Lambda = \Lambda_o - (N_A q^2 \chi/3\pi\eta) - (f' q^2 \Lambda_o \chi/12\pi\varepsilon kT)$$

f' est un facteur numérique, qui dépend des q_B/u_B du ou des sels en cause, et $\chi = \left(\frac{2\ Nq^2}{\varepsilon_r kT}\right)^{\frac{1}{2}}$; k est la constante de Boltzmann et T la température absolue.

La formule ci-dessus montre que les deux termes correctifs sont proportionnels à χ donc à $\sqrt{C}$, ce qui explique la loi expérimentale de Kohlrausch

(20) $$\Lambda = \Lambda_o - b\sqrt{C}$$

Si on calcule les termes correctifs de la formule pour le chlorure de sodium à la concentration C = 1 (une mole par m^3) et à 17°C en prenant $\eta = 1{,}09\ 10^{-2}$ et $1/\chi = 9{,}66\ .\ 10^{-9}$ m, le premier terme vaut 0,155 mho/m et le second 0,078 mho/m. D'où finalement, une conductivité équivalente calculée de $10{,}666 \times 10^{-3}$ alors que la conductivité équivalente mesurée est de : $10{,}649 \times 10^{-3}$. L'accord est très bon, aux erreurs de mesure près.

L'équation (22) est parfaitement valable jusqu'à C = 10 et même au-delà (5), à condition d'ajouter des termes correctifs en log C et C log C.

Dans un champ alternatif, la conductivité équivalente limite Λ_o et le premier terme correctif ne sont pas affectés ; mais, le second terme correctif qui dépend du temps de relaxation diminue quand la fréquence augmente parce que la dissymétrie du nuage d'ions n'a plus le temps de s'établir. Λ augmente donc un peu avec la fréquence et pour une fréquence suffisamment élevée il ne subsiste plus dans (22) que la correction d'électrophorèse.

A la concentration équivalente totale de l'eau de mer C ≈ 620 (moles/m^3) le temps de relaxation d'un sel du type NaCℓ serait à 17°C

(23) $$\tau = 1{,}08\ 10^{-10} \text{ seconde}$$

Mais dans ces conditions de concentration, et aux fréquences supérieures à $1/\tau$, la variation de conductivité ionique est complétement masquée par la conductivité dipolaire que nous examinerons plus loin.

Donc, en résumé, tout paraît se passer comme si, aux fréquences radio, la conductivité ionique de l'eau de mer ne dépendait pas de la fréquence ; mais, dépendait seulement de la concentration et de la température. Ceci étant, on peut en revenir aux résultats expérimentaux tels que ceux qui ont été présentés au tableau II.

On utilise couramment la mesure directe globale qui a largement remplacé les procédés de titration sur la plupart des navires océanographiques et dans les laboratoires.

Des relations empiriques entre la température, la salinité (la concentration totale en chlorures) et la conductivité ont été présentées par différents auteurs.

Weyl (1964) a rassemblé ces données par la relation suivante (2) :

(24) $$\log \sigma' = -0{,}42373 + 0{,}892 \log C\ell\ (o/oo) - 10^{-4}\,\tau \left[88{,}3 + 0{,}55\,\tau + 0{,}0107\,\tau^2 - C\ell\ (o/oo)\,(0{,}145 - 0{,}002\,\tau + 0{,}0002\,\tau^2)\right]$$

σ' est la conductivité en mho/m

$\tau = 25 - t$, t est la température Celsius. La relation est valide pour les salinités (chlorinités) de 17 à 20 o/oo et les températures de 0 à 25°C, à la pression de 1 atm.

Les valeurs de σ' que l'on rencontre pour l'eau de mer sont de l'ordre de 3 à 5 mho/m. La conductivité de l'eau de mer est donc, environ, 10^7 fois plus petite que celle du cuivre, mais 10^{12} fois plus grande que celle du verre ordinaire. Les sols terrestres présentent des conductivités médiocres de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-5} mho/m.

5. L'ASPECT MOLECULAIRE DE LA POLARISATION : (5) et (7) :

La polarisation électrique a été définie par l'équation $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o \vec{E}$ (voir annexe I)

L'interprétation microscopique du phénomène est basée sur l'existence de moments électriques moléculaires. Deux charges électriques - q et + q en A et B respectivement, séparées par la distance ℓ, présentent le moment électrique $m_e = q\ell$ (C.m) et vectoriellement $\vec{m}_e = q\,\vec{AB}$. Dans la molécule, la position moyenne dans le temps du centre de gravité des charges positives ne coïncide pas avec celle des charges négatives, mais en est séparée de la distance ℓ.

Le moment de l'unité de volume est la polarisation électrique macroscopique $\vec{P}$

(25) $$\vec{P} = \vec{m}_e\ .\ N$$

, N étant le nombre de molécules par unité de volume.

Ce moment électrique macroscopique apparaît lorsque la substance est soumise au champ $\vec{E}$

(26) $$\vec{m}_e = \frac{\varepsilon_o\,(\varepsilon_r - 1)}{N}\,\vec{E}$$

Cette relation permet d'évaluer le moment m_e de la molécule à partir des mesures de deux grandeurs macroscopiques ε_r et E connaissant N, c'est-à-dire la masse volumique d, la masse molaire M et la constante d'Avogadro

(27) $$N = N_A \cdot d/M$$

On appelle molécules non polaires, celles qui, en l'absence de champ, ne portent aucun moment électrique. (Le moment n'apparaît que sous la contrainte du champ qui apporte une déformation à l'édifice moléculaire. La polarisation ainsi produite est dite électronique et atomique). La permittivité des molécules non polaires est indépendante de la température. Les vecteurs $\vec{m}_e$ et $\vec{E}$ sont constamment colinéaires, quel que soit le mouvement thermique de la molécule, qui est lent comparativement aux mouvements des électrons sous l'action du champ $\vec{E}$.

On appelle molécules polaires, celles qui portent naturellement un moment de grandeur fixe dont la valeur est de quelques debye. (Le debye 3,33 10^{-30} C.m., il est sensiblement égal au moment de deux charges - e et + e séparées par 0,2 Å).

La molécule H_2O est polaire, elle a donc une structure coudée. Son moment électrique est de 2,4 debye, soit 0,8 . 10^{-29} C.m. Lorsqu'on applique le champ $\vec{E}$, le champ local $\vec{E}_\ell$ tend à orienter tous les moments moléculaires. Cependant, l'agitation thermique est très violente. L'énergie thermique par degré de liberté $\frac{kT}{2}$ est bien supérieure à l'énergie potentielle mise en jeu par l'orientation des moments électriques $\vec{m}_e$ par le champ. Le champ $\vec{E}_\ell$ ne fait que diminuer un peu le désordre thermique.

Les caractères distinctifs de la polarisation macroscopique ainsi obtenue sont les suivants :

i) A champ $\vec{E}$ donné, $\vec{P}$ est nettement plus grand pour les corps polaires que pour les corps non polaires.

ii) La polarisation dépend notablement de la température. Elle augmente quand on diminue la température parce que l'agitation thermique décroît.

iii) Les pertes diélectriques sont beaucoup plus grandes dans les corps polaires. Au cours de leur oscillation, les moments élémentaires dissipent en chaleur, par choc, l'énergie qu'ils reçoivent du champ.

On a essayé d'établir des "équations d'état" pour relier la permittivité ε_r à la température et à la densité. La théorie se heurte à la difficulté de relier le champ local microscopique $\vec{E}_\ell$ au champ général macroscopique $\vec{E}$. La relation devrait dépendre essentiellement de la substance étudiée et de sa structure moléculaire.

5.1. La formule de Clausius-Mossotti et le terme de Debye.

Le lecteur trouvera en annexe III quelques explications sur la formule de Clausius-Mossotti et sur le terme de Debye. La mécanique ondulatoire a établi, avec Langevin et Debye, la validité de ces résultats aux températures suffisamment élevées dont généralement à la température ordinaire.

La formule est :

(28) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = C.d$$

Pour les substances non polaires

(29) $$C = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \alpha_o$$

α_o est une constante que l'on appelle "polarisabilité" et qui relie le moment induit au champ local

(30) $$\alpha_o = \frac{\vec{m}_e}{\vec{E}_\ell}$$

Pour les substances polaires il faut ajouter à α_o le terme de Debye et écrire :

(31) $$C = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \left(\alpha_o + \frac{m_e^2}{3\,kT}\right)$$

soit, en définitive :

(32) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = U + \frac{V}{T}$$

avec (33) $$U = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{d}{4\pi\,\varepsilon_o} \alpha_o$$

et (34) $$V = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{d}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{m_e^2}{3\,k}$$

Cette relation ne permet malheureusement pas d'interpréter l'ensemble des faits expérimentaux.

Considérons par exemple les mesures de la permittivité ε_r (0) de l'eau pure qui sont très nombreuses.

Dorsey (5) a dégagé la formule empirique suivante :

(35) $$\varepsilon_r = 81{,}50 \left[1 - 4{,}696 \frac{t - 17}{1000} + 10{,}28 \left(\frac{t - 17}{1000}\right)^2 \right]$$

ε_r augmente un peu avec la pression, de 5 % pour 1 000 kg/cm^2. En tenant compte de la variation de densité avec la température, Dorsey fournit encore la relation :

(36) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = Cd \qquad \text{avec} \qquad (37) \qquad C = 0{,}2262 + \frac{107{,}13}{T} + 0{,}0012755\ T$$

qui rend bien compte des valeurs mesurées pour l'eau liquide. On peut voir que la polarisation électronique, indépendante de la température, ne représente que 6 % environ de la polarisation totale.

L'existence du dernier terme montre que la théorie précédente est en défaut. Aux températures ordinaires, les deux termes en 1/T et T sont sensiblement égaux. Pour faire disparaître le terme en T, il faut diminuer le champ effectif et par conséquent, poser à priori une relation linéaire entre $\vec{E}_\ell$ et $\vec{P}$ telle que :

(38) $$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{p}{3\ \varepsilon_o} \vec{P}$$

On trouve alors la formule :

(39) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{p\ \varepsilon_r + 3 - p} = C\ d$$

En prenant p = 0,02 pour l'eau de mer, Y. Legrand trouve l'expression :

(40) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{0{,}02\ \varepsilon_r + 2{,}98} = \left(21 + \frac{85000}{T}\right) \frac{d}{18}$$

qui correspond bien aux résultats expérimentaux.

5.2. La permittivité en régime harmonique :

Dans un corps à molécules polaires la polarisabilité peut passer pour instantanée, tandis que l'orientation des dipôles qui apporte à la polarisation une part principale n'est pas instantanée. Elle présente un certain temps de relaxation τ

(41) $$\beta = \beta_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

C'est ainsi, qu'en régime alternatif ou harmonique défini par le facteur $e^{j\omega t}$, les rotations des dipôles sont divisées par le terme $(1 + j\omega\tau)$.

La conséquence en est que l'équation (39) doit s'écrire :

(42) $$\frac{\bar{\varepsilon}_r - 1}{p\ \bar{\varepsilon}_r + 3 - p} = U + \frac{V}{T\ (1 + j\omega\tau)}$$

La permittivité d'une substance polaire est donc un nombre complexe, en présence des pertes diélectriques.

On peut poser : (43) $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon' - j\varepsilon''$

Il est facile de voir que :

i) La partie réelle ε' joue exactement le rôle d'une permittivité statique ε_r et qu'elle provient :

- d'une part, de la polarisabilité
- d'autre part de l'orientation dipolaire.

ii) Le terme imaginaire $- j\varepsilon''$ provient de l'orientation dipolaire. On peut poser :

(44) $$\varepsilon'' \equiv \frac{\sigma''}{\omega\ \varepsilon_o}$$

La conductivité supplémentaire σ'' est due aux pertes de la polarisation par effet Joule. La conductivité totale est alors $\sigma = \sigma' + \sigma''$

On appelle souvent σ'' "conductivité dipolaire".

Ainsi, on peut poser pour un milieu présentant une conductivité statique

(45) $$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r - j\,\frac{\sigma'}{\omega\,\varepsilon_o}$$

(46) $$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon' - j\varepsilon'' - j\,\frac{\sigma'}{\omega\,\varepsilon_o} \equiv \varepsilon' - j\,\frac{\sigma' + \sigma''}{\omega\,\varepsilon_o}$$

et introduire la caractéristique complexe $\bar{\varepsilon}_r$ dans la seconde équation de Maxwell, en supprimant le second membre (voir annexe I, équations (II') et (126).

Il est commode de noter, puisque $\bar{\varepsilon}_r$ est une fonction de ω, la valeur de ε' en régime statique par ε_s et la valeur de ε' pour ω infiniment grand par ε_∞ . Il vient alors,

(47) $$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + x^2}$$

et

(48) $$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty)\,x}{1 + x^2}$$

avec

(49) $$x = \frac{p\,\varepsilon_s + 3 - p}{p\,\varepsilon_\infty + 3 - p}\,\omega\tau$$

Dans la théorie classique p = 1

Noter que :

(50) $$\frac{\varepsilon_\infty - 1}{p\,\varepsilon_\infty + 3 - p} = U$$

et (51) $$\frac{\varepsilon_s - 1}{p\,\varepsilon_s + 3 - p} = U + \frac{V}{T}$$

Pour x = 1, on a : (52) $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon_s + \varepsilon_\infty}{2}$ et ε'' est maximum, (53) $\varepsilon''_{max} = \dfrac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2}$

Cette situation x = 1 est appelée "point de transition", dont il découle une valeur ω_t de la pulsation de transition si τ est connu.

6. L'EAU LIQUIDE EN REGIME HARMONIQUE (5)

6.1. Les méthodes expérimentales de mesure des caractéristiques e.m. de l'eau.

La connaissance des caractéristiques e.m. de l'eau repose bien entendu sur des données expérimentales confrontées et associées à la théorie.

Nous avons signalé l'importance de l'emploi du condensateur plan et du voltamètre dans un pont de Wheatstone. Ces dispositifs expérimentaux sont clairement utilisables en régime statique et aux très basses fréquences. Par contre, aux fréquences élevées lorsque par exemple l'écart entre les armatures du condensateur n'est plus très petit devant la longueur d'onde dans le milieu étudié, l'appareillage n'est plus utilisable dans les mêmes conditions.

On utilise alors des lignes bifilaires (ligne de Lecher), des coaxiaux ou des guides d'onde, qu'on fait plonger partiellement dans l'eau ou qu'on remplit partiellement d'eau. On observe alors, par l'intermédiaire d'une onde stationnaire, la longueur d'onde dans l'eau et le coefficient d'affaiblissement.

La ligne de Lecher (figure 2) est une ligne bifilaire verticale, excitée dans l'air par une boucle, à la fréquence f. On place dans l'air, en D, un appareil de mesure de tension alternative. La ligne plonge dans l'eau. L'énergie e.m. progresse vers le bas en une onde progressive qui est partiellement réfléchie sur la discontinuité d'impédance à l'interface. Donc, si on déplace D verticalement, on constate des ondes stationnaires. On peut placer D un peu au-dessus de l'interface, à un noeud de tension. L'onde progressive franchit cependant la surface et progresse sur la ligne dans l'eau, où elle se perd si la ligne est suffisamment longue, qu'elle soit ouverte ou fermée sur un court-circuit C. Si on rapproche le court-circuit C de la surface B, en laissant immobile le détecteur D, on peut construire par points le graphique 2 (b), car l'onde réfléchie sur le court-circuit crée une nouvelle onde stationnaire, amortie dans l'eau. On mesure ainsi la longueur d'onde sur la ligne dans l'eau λ_2 et l'atténuation $e^{-\beta z}$ sur la ligne. On en déduit, d'après la théorie des lignes, l'impédance d'onde dans l'eau qui est directement liée à la permittivité complexe (voir § 7.1.)

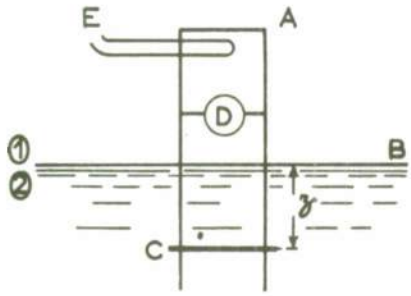


Fig. 2(a) Ligne de Lecher

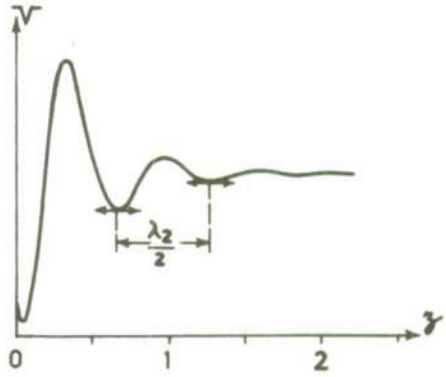


Fig. 2(b) Graphique de mesure

Aux longueurs d'onde décimétriques on peut utiliser des cavités résonnantes.

Dans une cavité, les champs doivent satisfaire l'équation d'onde

(55) $$(\Delta + \bar{k}^2)\,\vec{U} = 0 \qquad \text{avec} \qquad (56) \qquad \bar{k}^2 = \mu_o \varepsilon_o \bar{\varepsilon}_r\, \omega^2$$

et satisfaire aux conditions aux limites sur les parois. Si la cavité est entièrement remplie d'un liquide de conductivité nulle et de permittivité réelle ε_r, la constante de propagation étant donnée, la fréquence de résonance est divisée par $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Pour retrouver la même fréquence de résonance qu'avant le remplissage, il faudrait réduire les dimensions de la cavité dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. Ce faisant, on augmenterait les pertes par effet Joule dans les parois. En effet, ces pertes sont proportionnelles à σ/ℓ. (σ étant la conductivité et ℓ une dimension de la cavité). Ainsi, la surtension serait réduite dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}$. En outre, si le liquide avait une conductivité non nulle, la surtension serait diminuée encore et la nouvelle surtension aurait pour valeur approximative :

(57) $$\frac{1}{Q} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{Q_o} + \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$$

Pratiquement, on choisit une cavité de fort coefficient de surtension Q_o. On y introduit un échantillon de l'eau à observer. On mesure alors un déplacement de la fréquence de résonance de la cavité et une diminution du coefficient de surtension ce qui permet de calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la permittivité complexe de l'échantillon. L'échantillon doit être suffisamment petit pour que les deux effets soient bien découplés et permettent deux mesures indépendantes.

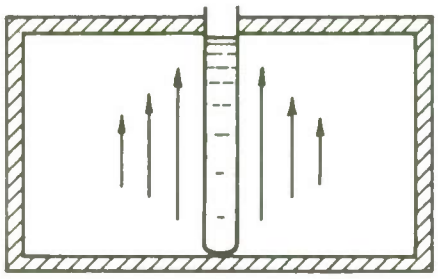


Fig. 3 Cavité résonnante cylindrique en mode TM_{010} avec un tube échantillon axial.

On peut utiliser par exemple le mode TM_{010} du cylindre circulaire droit (figure 3). Dans ce mode, le champ électrique présente une symétrie axiale et est maximum au centre le long de l'axe de la cavité. La symétrie cylindrique peut être maintenue en introduisant l'échantillon dans un tube cylindrique centré sur l'axe. La fréquence de résonance ne dépend que des diamètres de la cavité et du tube échantillon. Elle est indépendante de leur hauteur, aussi longtemps que le tube d'échantillon ne dépasse pas les parois de la cavité.

Enfin, aux longueurs d'ondes centimétriques, on utilise des méthodes dites optiques qui consistent à mesurer le coefficient de réflexion à la surface du liquide en incidence normale ou en oblique. On utilise des antennes ou projecteurs e.m. de dimensions réduites. On mesure $R_{||}$ et $R_{\perp}$. On peut étalonner l'appareillage en remplaçant dans la cuve l'eau par du mercure. On mesure l'absorption sépa-

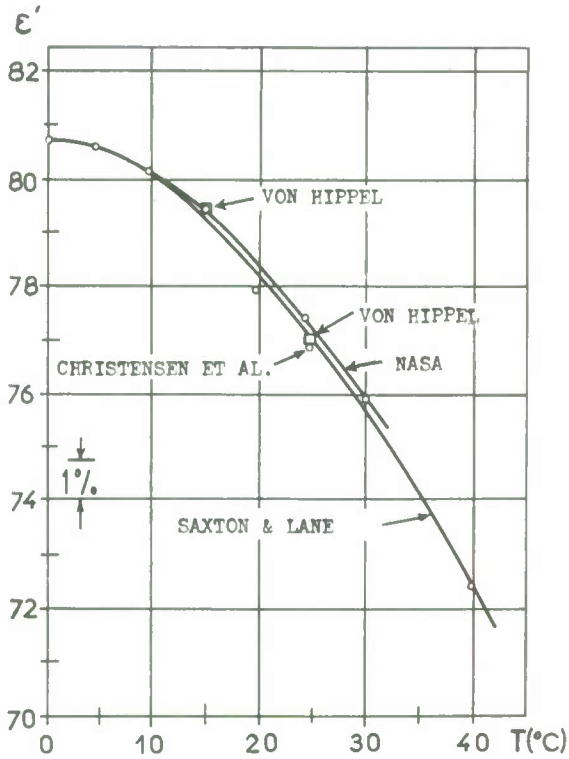


Fig. 4 (a) ε' pour l'eau pure en fonction de la température à 2,653 GHz (NASA - CR 1960).

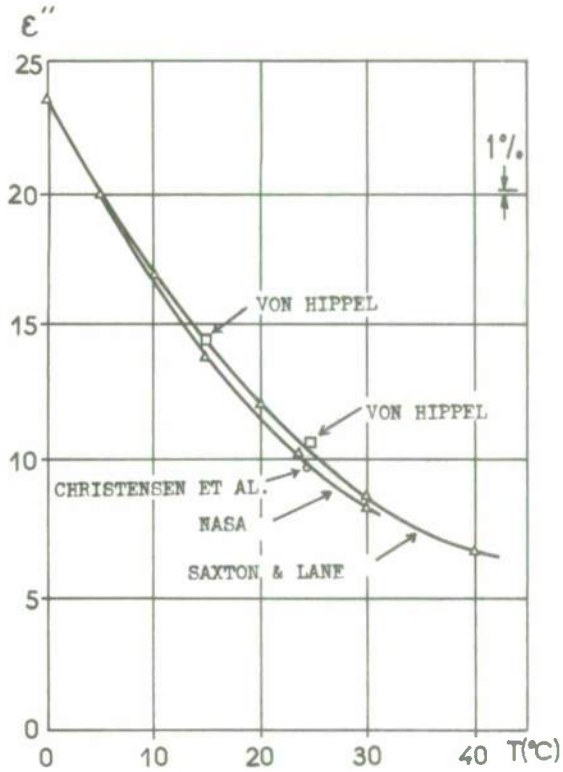


Fig. 4 (b) ε" pour l'eau pure en fonction de la température à 2,653 GHz (NASA - CR 1960).

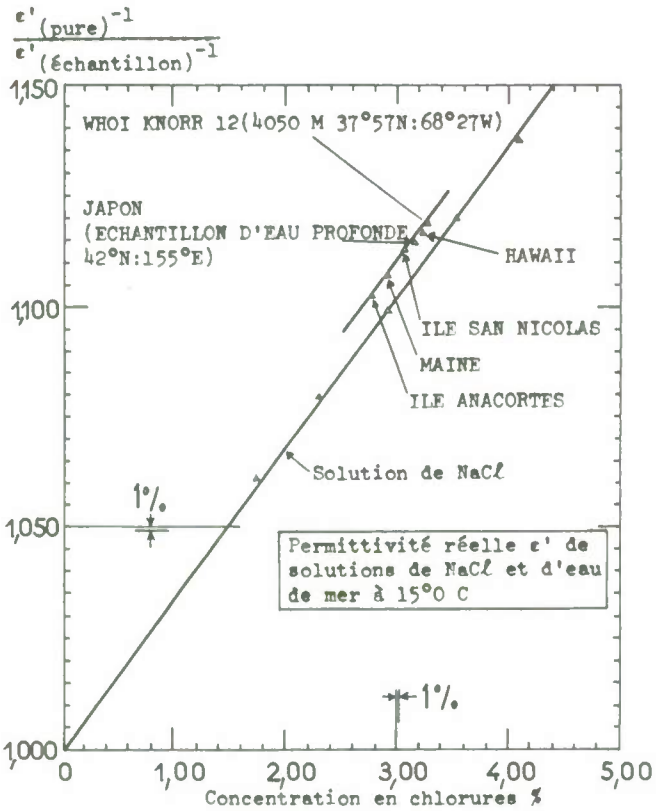


Fig. 5 (a) Valeurs de ε' - 1 relatives à la valeur ε' - 1 de l'eau pure en fonction de la salinité à 15°C pour des solutions de chlorure de sodium et pour des échantillons d'eau de mer, à 2,653 GHz (NASA - CR 1960).

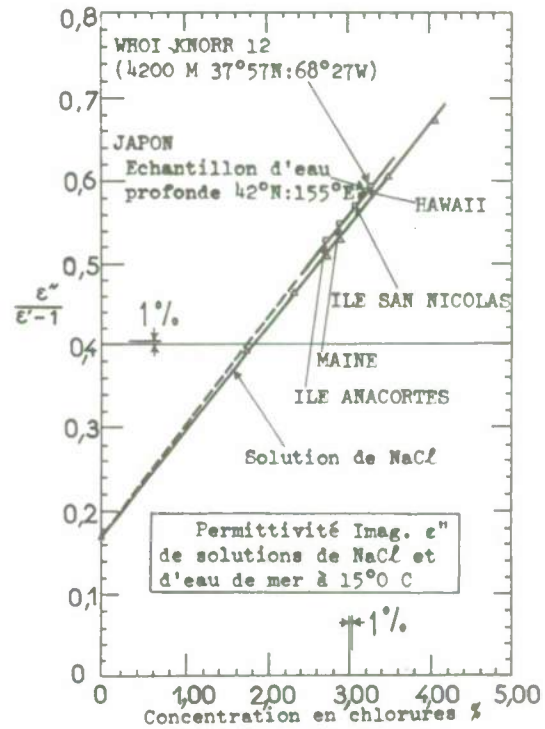


Fig. 5 (b) ε"/(ε'-1) pour des solutions de NaCℓ et des échantillons d'eau de mer à 15°C, à 2,653 GHz (NASA - CR 1960)

rément par la traversée d'une lame d'eau d'épaisseur fixe. Nous verrons plus loin, au § 7, que les quantités mesurées sont liées aux caractéristiques e.m. principales du milieu.

Pour l'eau pure, il existe un bon accord entre les résultats expérimentaux. (Voir, à titre d'exemple, les figures 4 (a) et (b). Ces mesures récentes sont en accord avec les mesures antérieurement publiées, à 0,25 % près pour ε' et à 2 % près pour ε''. Les auteurs (6) estiment que ces mesures particulières à la fréquence 2,653 GHz sont exactes pour ε' à 0,25 % près et pour ε'' à 0,5 % près.).

La valeur ε_s est bien connue.

Saxton et Lane sur 1,24 et 1,58 cm d'une part, Collie Hasted et Ritson sur 1,27 , 3,2 et 10 cm d'autre part se sont attachés à mesurer la variation de μ et de χ avec la température et à comparer ces résultats avec la fonction théorique

$$\frac{\bar{\varepsilon}_r - 1}{\bar{\varepsilon}_r + 2} = U + \frac{V}{T}\frac{1}{1 + j\omega\tau} \tag{54}$$

Les expériences conduisent assez bien aux valeurs calculées. Ainsi, se trouve confirmée la théorie de Debye améliorée par Onsager.

Pour l'eau de mer, on ne dispose malheureusement pas d'un aussi grand nombre d'expériences. Les résultats sont néanmoins nettement en faveur de la théorie. On peut admettre que l'indice d'extinction χ et le coefficient d'absorption β dépendent surtout de la conductivité ionique aux fréquences inférieures à quelques Gigahertz. Voir, à titre d'exemple, les résultats présentés sur les figures 5 (a) et (b) (6). On constate, sur la figure 5 (a), que les résultats obtenus pour les différentes concentrations de NaCℓ sont exactement alignés sur une droite passant par l'origine. Les résultats pour l'eau de mer sont également alignés, mais sur une droite déduite de la droite NaCℓ par une translation. Ce déplacement est certainement dû à la présence des autres ions. Le fait que la droite des échantillons de mer ne passe pas par l'origine des coordonnées, laisse penser qu'il existe dans l'eau de mer un composant qui ne peut être représenté par une concentration en chlorures équivalents et qui contribue aux propriétés diélectriques de cette eau.

Cependant, les mesures confirment bien que les propriétés diélectriques de l'eau de mer ε' et ε'' peuvent être rattachées à une seule caractéristique : la salinité

6.2. L'eau pure aux fréquences inférieures à 1000 GHz.

A la température de 17°C, l'expérience donne pour l'eau pure $\varepsilon_s = 81,5$ tandis que, les formules (42) et (50) conduisent , Y. Legrand, à $\varepsilon_\infty = 5,5$ (On admet aussi 4,9 (6)). Enfin, la longueur d'onde de transition λ_t est voisine de 1,8 cm. Ces trois valeurs numériques suffisent pour calculer ε' ε'' et σ'' par (47) et (48). Les résultats d'Y. Legrand sont présentés dans le tableau III. Si on introduit de plus, dans (49), p = 0,02 et x = 1, on trouve au point de transition :

$$\tau = 0,36\ 10^{-11}\ \lambda_t \tag{58}$$

soit, pour $\lambda_t = 1,8$ cm, (59) $\tau = 0,65\ 10^{-11}$ seconde qui est un temps de relaxation un peu plus petit que la valeur trouvée à la fin de l'annexe III, § 3.

En bref, les résultats sont les suivants :

A toute fréquence inférieure à 1 GHz, ε' ne varie pas ($\varepsilon' \simeq 81,5$).

Lorsque la fréquence augmente de 1 à 1000 GHz, ε' diminue de 81,2 à 5,5. L'absorption augmente, passe par un maximum vers 17 GHz puis diminue.

6.3. L'eau de mer aux fréquences inférieures à 1000 GHz.
Aux fréquences inférieures à 1 GHz,
ε' a la même valeur que pour l'eau pure et σ' varie très peu avec la fréquence

$$\sigma'(\omega) \simeq \sigma'_s \tag{60}$$

Lorsque la fréquence augmente de 1 à 1000 GHz, ε' et σ'' ont à peu près, la même variation que pour l'eau pure. La conductivité σ augmente. La conductivité dipolaire σ'' devient supérieure à la conductivité ionique σ' lorsque la fréquence est supérieure à 4 GHz.

6.4. L'eau aux fréquences supérieures à 1000 GHz.

Jusqu'ici, on a négligé l'inertie des molécules. Aux fréquences suffisamment élevées il faudrait introduire un terme supplémentaire dans l'équation(183) de l'angle de rotation des dipôles. Le moment d'inertie de la molécule d'eau étant approximativement connu, on en déduit que pour la fréquence la plus élevée du tableau III (10^{12} Hz) la correction serait de 10 % en moins. (Inversement, l'absorption de la vapeur d'eau dans le spectre infrarouge permet d'estimer le moment d'inertie de la molécule d'eau).

Ainsi, aux fréquences supérieures à 1000 GHz dans l'infrarouge, la conductivité dipolaire devrait disparaître à cause de l'inertie des dipôles.

Il en est de même de la conductivité ionique. Le mouvement de l'ion a, en effet, pour équation :

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} + mZ\vec{V} = q\,\vec{E} \tag{10}$$

TABLEAU III

Fréquence f (Hz)	Longueur d'onde λ	Permittivité ε'	ε''	Conductivité dipolaire σ'' (mho/m)
0	∞	81,5	0	0
10^7	30 m	81,5	0,0	$0,25 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^7$	15	81,5	0,1	$1,01 \cdot 10^{-4}$
$5 \cdot 10^7$	6	81,5	0,2	$0,60 \cdot 10^{-3}$
10^8	3	81,5	0,5	$0,25 \cdot 10^{-2}$
$2 \cdot 10^8$	1,5	81,5	0,9	$1,01 \cdot 10^{-2}$
$5 \cdot 10^8$	0,6	81,4	2,3	$6,33 \cdot 10^{-2}$
10^9	30 cm	81,2	4,5	$2,51 \cdot 10^{-1}$
$2 \cdot 10^9$	15	80,4	9,0	$9,96 \cdot 10^{-1}$
$5 \cdot 10^9$	6	75,2	20,9	5,75
10^{10}	3	61,4	33,5	18,5
$1,7 \cdot 10^{10}$	1,8 (λ_t)	43,5	38,0	34,8
$5 \cdot 10^{10}$	0,6	13,1	22,8	62,7
10^{11}	3 mm	7,6	12,3	67,6
$2 \cdot 10^{11}$	1,5	6,0	6,2	68,6
$5 \cdot 10^{11}$	0,6	5,6	2,5	69,6
10^{12}	0,3	5,5	1,3	69,6
∞	0	(5,5)	0	(69,6)

Permittivité et conductivité dipolaire de l'eau à 17°C en fonction de la fréquence (5).

TABLEAU IV

Fréquence f (Hz)	Longueur d'onde λ	Permittivité ε'	ε''	Conductivités (mho/m) ionique σ'	dipolaire σ''	totale σ
0	∞	80,5	∞	4,54	0	4,54
10^8	3 m	80,5	818	4,54	0,00	4,54
$2 \cdot 10^8$	1,5	80,5	410	4,54	0,01	4,55
$5 \cdot 10^8$	0,6	80,4	166	4,54	0,07	4,61
10^9	30 cm	80,3	86,6	4,55	0,26	4,81
$2 \cdot 10^9$	15	79,3	50,1	4,56	1,01	5,57
$5 \cdot 10^9$	6	73,5	37,6	4,64	5,81	10,45
10^{10}	3	59,5	42,2	4,75	18,69	23,44
$1,7 \cdot 10^{10}$	1,5	42,1	43,3	4,84	35,26	40,10
$5 \cdot 10^{10}$	0,6	12,6	24,6	5,00	63,32	68,32
10^{11}	3 mm	7,3	13,2	5,08	68,35	73,43
$2 \cdot 10^{11}$	1,5	5,8	6,7	5,13	69,30	74,43
$5 \cdot 10^{11}$	0,6	5,4	2,7	5,19	70,34	75,53
10^{12}	0,3	5,3	1,4	5,22	70,34	75,55
∞	0	(5,3)	0	(5,29)	(70,36)	(75,65)

Permittivité et conductivité de l'eau de mer à 17°C en fonction de la fréquence (5)
(ici, ε'' désigne la partie imaginaire de $\bar{\varepsilon}_r$)

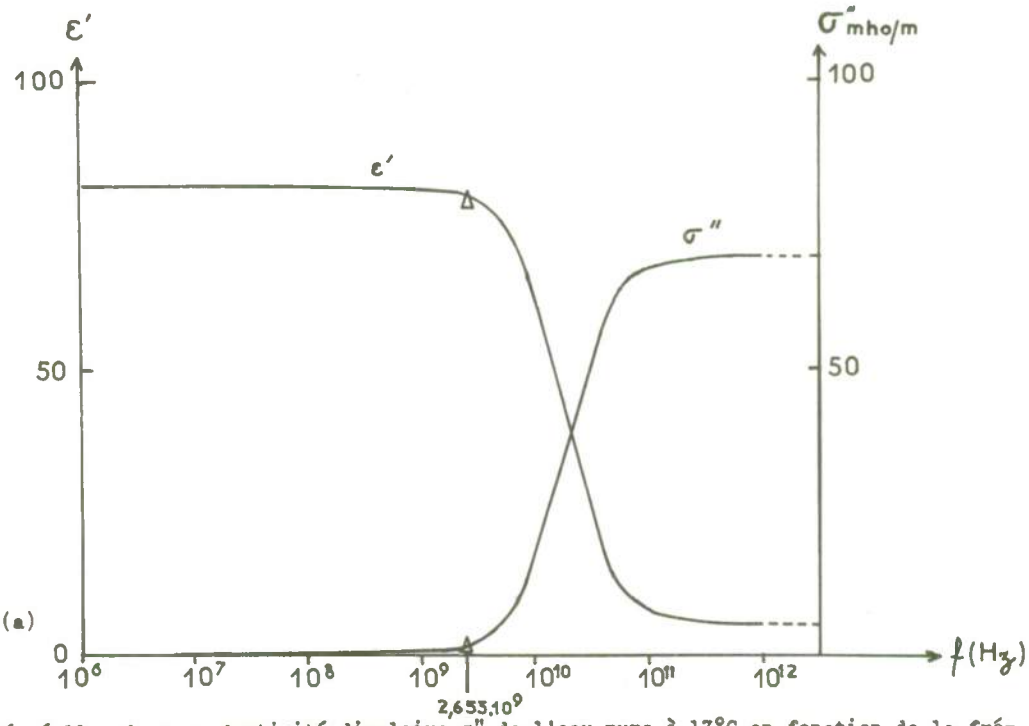


Fig. 5 bis (a)

Permittivité réelle ε' et conductivité dipolaire σ" de l'eau pure à 17°C en fonction de la fréquence (Voir tableau III. Les points à 2,653 GHz sont déduits des observations de la NASA (6)).

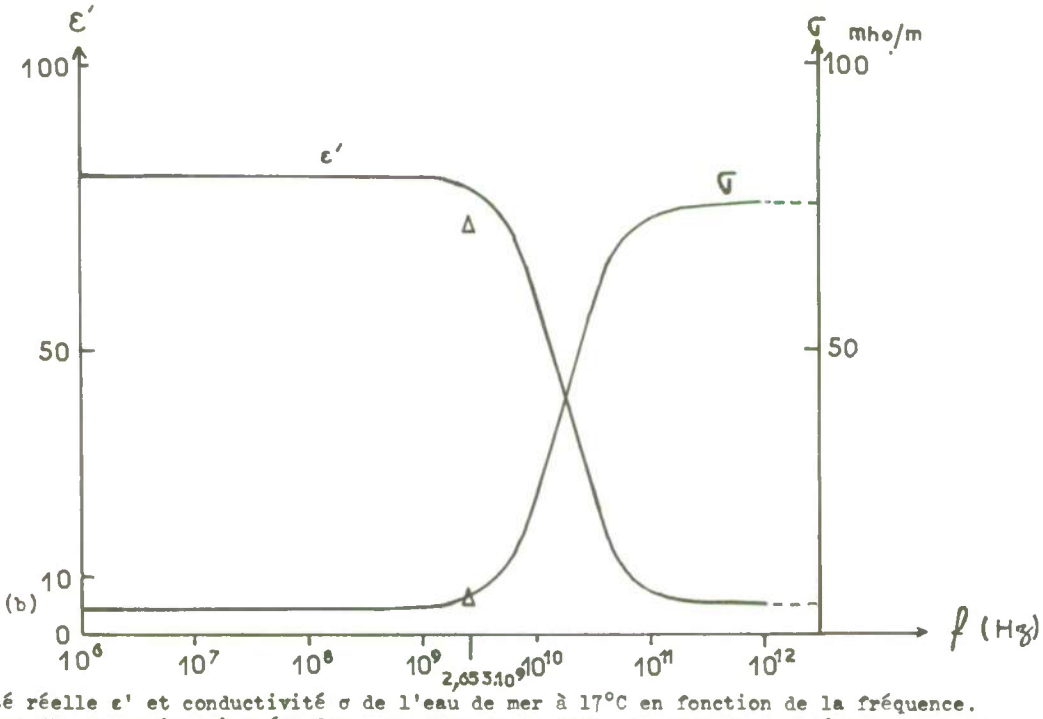


Fig. 5 bis (b)

Permittivité réelle ε' et conductivité σ de l'eau de mer à 17°C en fonction de la fréquence. (Voir tableau IV. Les points à 2,653 GHz sont ceux de la NASA. On remarquera l'écart entre la valeur ε' théorique et la valeur observée. Il y a dans l'eau des mers une substance qui n'est pas le chlorure de sodium et qui modifie la permittivité réelle.).

En régime harmonique

(61) $\vec{E} = \vec{E}_o \, e^{j\omega t}$ et (62) $\vec{V} = \vec{V}_o \, e^{j\omega t}$

(L'équation (11) n'est pas admissible aux fréquences élevées).

mais, (63) $\vec{V}_o = q \, \vec{E}_o \, m \, (Z + j\omega) = u \, \vec{E}_o \, (1 + j\omega\tau)$

avec le temps de relaxation

(64) $\tau = \frac{1}{Z} = \frac{q \, m}{u}$

Pour chaque ion, on peut calculer ce temps. Pour Na par exemple, on trouve 1,1 . 10^{-13} seconde. La longueur d'onde de transition est 0,2 mm. Les dernières valeurs du tableau IV sont donc déjà affectées par l'inertie des ions.

La conductivité totale s'annulerait donc dans l'infrarouge et resterait nulle aux longueurs d'onde plus courtes.

Il existe cependant des bandes d'absorption individuelles du champ e.m. par l'eau, qui sont dues à des résonances particulières de la molécule. Pour expliquer les propriétés connues de la molécule d'eau on parvient à admettre la structure suivante :

Un atome d'oxygène et deux d'hydrogène. Le premier comporte un noyau de charge + 8e et 8 électrons de charge - e. Les seconds ont pour noyau un proton de charge + e et possèdent un électron. Pour essayer de combiner la position respective de ces charges et des masses, pratiquement concentrées dans les noyaux, on possède un certain nombre de données qui sont : le moment dipolaire permanent, le moment d'inertie mécanique (que l'on peut connaître par l'absorption dans l'infrarouge et par l'effet Raman) l'anisotropie (par la dépolarisation de la lumière diffusée), etc.

La seule possibilité est un modèle triangulaire isocèle. L'image proposée est présentée sur la figure 6 (a). En o est le noyau d'oxygène accompagné de ses deux électrons les plus voisins. Les deux protons sont en H et H. Les 8 électrons restants forment une couche complète (octet) assimilable à une sphère de centre C et de rayon r . Les valeurs admises pour les dimensions sont :

$OH = 0{,}954 \, \mathring{A}$ $\widehat{HOH} = 104°5$ $r \simeq 1{,}38 \, \mathring{A}$

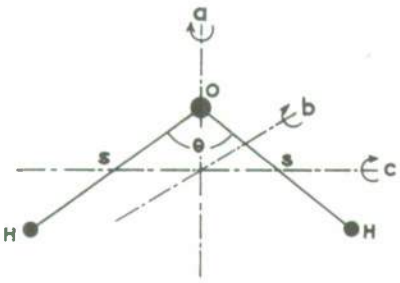


Fig. 6(a) Structure de la molécule de vapeur d'eau

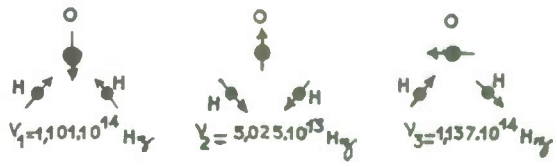


Fig. 6(b) Résonances fondamentales de la molécule de vapeur d'eau

L'absorption par la vapeur d'eau dans la région de 0,54 à 9 μ est provoquée par des transitions vibration-rotation.

Dans l'infrarouge lointain de 9 μ à 1,5 cm, l'absorption est provoquée par des transitions de rotation pure, et dans l'ultra violet ($\lambda < 0{,}2$ μ) par des transitions électroniques. Tous ces niveaux sont quantifiés et les raies spectrales en provenant se disposent en bandes de raies nombreuses. De plus, l'eau étant un mélange d'isotopes, les termes de chacun d'eux sont un peu différents selon la masse du noyau. On peut compter 9 molécules différentes dans l'eau, dont la mieux connue après H_2O est D_2O : l'eau lourde, que l'on obtient par électrolyse prolongée d'eau ordinaire. L'eau lourde se compose de 99,7 % de $D\,^{16}O\,D$ et de 0,3 % de $D\,^{18}O\,D$. Bien que la proportion isotopique d'un élément quelconque soit assez remarquablement constante dans la nature, il peut exister des différences.

Les trois types de résonances normales de la molécule de vapeur d'eau sont observées sur les fréquences principales suivantes :

$\nu_1 = 1{,}1 \; 01 \; 10^{14}$ $\nu_2 = 5{,}03 \; 10^{13}$ $\nu_3 = 1{,}137 \; 10^{14}$ Hz

Ces transitions sont provoquées par la rotation de la molécule autour de ses axes a b c

La figure 7 présente l'affaiblissement d'absorption d'une épaisseur d'eau de 1 mm en fonction de la fréquence, d'après les Bell Telephone Laboratories (communication de Mr D.C. Hogg).

Les résonances de la molécule d'eau apparaissent clairement entre 2.10^{12} et 3.10^{14} Hz. Au-delà, apparait la transparence optique de l'eau.

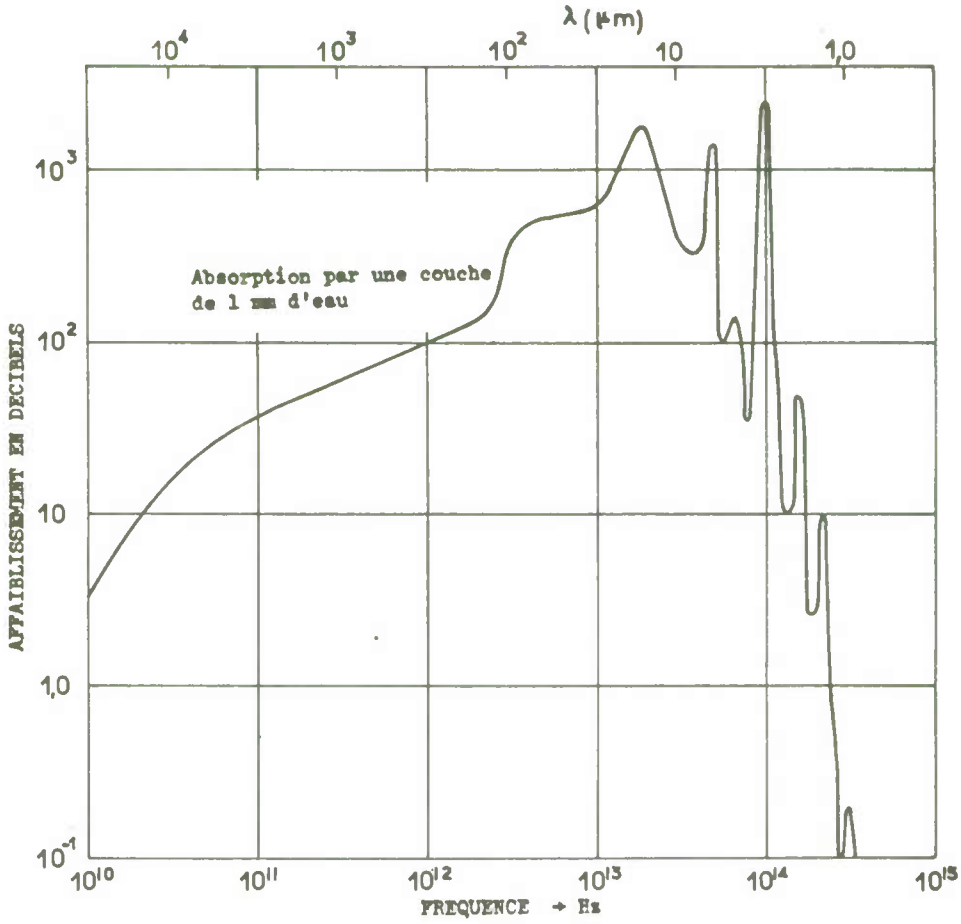


Fig. 7 Affaiblissement produit par la traversée d'une épaisseur d'eau de 1 mm en fonction de la fréquence (Bell Telephone Lab.).

7. PROPAGATION DES ONDES E.M. ET APPLICATION A L'EAU DE MER

Le lecteur trouvera, en annexe I, des rappels généraux concernant l'établissement de l'équation des ondes.

Si on considère une propagation unidimensionnelle et plus précisément une onde plane, produite par conséquent par une source infiniment éloignée, onde qui progresse vers les z croissants en fonction du temps, dans un milieu de caractéristique $\bar{\varepsilon}_r$, on peut écrire :

(65) $$\vec{U} = \vec{U}_o \, e^{j(\omega t - \bar{k} z)}$$ (Annexe I, équation (139))

avec (56) $$\bar{k}^2 = \mu_o \, \varepsilon_c \, \bar{\varepsilon}_r \, \omega^2$$ $\bar{k}$ s'appelle la constante de propagation

$\vec{U}$ désigne soit le vecteur $\vec{E}$, soit le vecteur $\vec{H}$

7.1. Les caractéristiques pratiques du milieu.

Ce sont : l'indice de réfraction, le coefficient d'absorption, la tangente de l'angle de pertes et l'impédance d'onde. Toutes ces quantités se déduisent de $\bar{\varepsilon}_r$

La vitesse de phase est : (66) $$\bar{v} = \frac{\omega}{\bar{k}}$$ Il lui correspond l'indice de phase

(67) $$\bar{n} = \frac{c}{\bar{v}} = \frac{c}{\omega} \bar{k} = \frac{\bar{k}}{k_o}$$ k_o est la constante de propagation de l'espace libre à la fréquence considérée. Par conséquent, dans cette écriture $\bar{\varepsilon}_r$ représente le carré de l'indice de phase

(68) $$\bar{\varepsilon}_r = \bar{n}^2 = \left(\frac{\bar{k}}{k_o}\right)^2$$

Il est commode d'utiliser les notations

(69) $$\bar{k} = \alpha - j\beta$$ et (70) $$\bar{n} = \mu - j\chi$$

Puisque μ_o est la perméabilité magnétique, nous employerons le symbole μ pour désigner la partie réelle de l'indice complexe

(71) $\alpha = k_o \mu$ et (72) $\beta = k_o \chi$

L'équation (104) s'écrit encore :

(73) $$\vec{U} = \vec{U}_o \, e^{-\beta z} \, e^{j(\omega t - k_o \mu z)}$$

β s'appelle le coefficient d'absorption.

En posant :

(74) $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon' - j\varepsilon''$ c'est-à-dire (75) $\varepsilon' = \varepsilon/\varepsilon_o$ et $\varepsilon'' = \dfrac{\sigma}{\omega \varepsilon_o}$

Ainsi, la partie réelle de $\bar{\varepsilon}_r$ complexe est notée indifféremment ε_r ou ε'.

Il vient à partir de (68) et de (70) :

(76) $$\mu^2 = \frac{\varepsilon' + (\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$$ et (77) $\chi = \dfrac{\varepsilon''}{2\mu}$

On appelle tangente de l'angle de pertes le nombre γ défini par :

(78) $$\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r (1 - j\gamma)$$

On peut définir l'impédance intrinsèque $\bar{Z}$ du milieu comme étant le rapport des amplitudes E et H des champs. Partant de (65), pour déterminer la constante H_o en fonction de E_o, on introduit dans l'équation (I) $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ ce qui conduit à :

(79) $$\frac{E_o}{H_o} = \frac{\mu_o \omega}{\bar{k}}$$

(Dans un milieu conducteur, les champs E et H ne sont pas en phase)

D'où (80) $$\bar{Z} = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o \bar{\varepsilon}_r}} = \frac{376{,}6}{\sqrt{\bar{\varepsilon}_r}}$$

Dans l'espace libre Z,est une résistance pure de 376,60 ohms.

7.2. Développements concernant les milieux plus conducteurs que diélectriques ou plus diélectriques que conducteurs.

Pour une fréquence particulière f_o, la tangente de l'angle de pertes est égale à l'unité

(81) $\gamma = \dfrac{\sigma}{\omega \varepsilon_o \varepsilon_r}$ $\gamma = 1$ pour (82) $f_o \simeq 1{,}8 \; 10^{10} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r}$

Dans ces conditions :

7.2.1. Pour $f < f_o$, c'est-à-dire $\gamma > 1$

(83) $$\alpha = \left(\frac{\omega \mu_o \sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2\gamma} - \ldots\right)$$

(84) $$\beta = \left(\frac{\omega \mu_o \sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2\gamma} + \ldots\right)$$

Lorsque $\gamma >> 1$ <u>le milieu est beaucoup plus conducteur que diélectrique</u>. La caractéristique ε_r ne joue pratiquement aucun rôle dans la propagation. On peut écrire approximativement :

(85) $$\alpha \simeq \beta \simeq \sqrt{\omega} \left(\frac{\mu_o \sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

(86) $$\mu \simeq \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{\sigma}{2 \varepsilon_o}\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'indice de réfraction réel intrinsèque μ est inversement proportionnel à la racine carrée de la fréquence.

Le coefficient d'absorption β est proportionnel à la racine carrée de la fréquence.

7.2.2. Pour $f > f_o$, c'est-à-dire $\gamma < 1$

(87) $$\alpha = \omega (\mu_o \varepsilon_o \varepsilon_r)^{\frac{1}{2}} (1 + \frac{1}{8} \gamma^2 - \ldots)$$

(88) $$\beta = \omega (\mu_o \varepsilon_o \varepsilon_r)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma}{2} (1 - \frac{1}{8} \gamma^2 + \ldots)$$

Lorsque $\gamma << 1$ le milieu est beaucoup plus diélectrique que conducteur.

On peut écrire approximativement :

(89) $$\beta \simeq \frac{1}{2} \sigma \left(\frac{\mu_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et

(90) $$\mu \simeq \sqrt{\varepsilon_r}$$

L'indice de réfraction réel intrinsèque μ ne dépend que de la permittivité ε_r réelle.

Le facteur d'absorption β ne dépend pas de la fréquence.

Appelons β^* l'affaiblissement en dB/m et appelons $d = \frac{1}{\beta}$ la profondeur de pénétration qui est la distance sur laquelle les champs s'affaiblissent dans le rapport 1/e. Sur la distance $\lambda = 2\pi d$, la phase diminue de 2π.

7.3. Application à l'eau de mer des développements concernant les milieux plus conducteurs que diélectriques ou plus diélectriques que conducteurs.

Pour la mer caractérisée par $\varepsilon_r = 81,5$ et $\sigma = 4$ mho/m

on trouve (130) : $f_o \simeq 0,9$ GHz

Aux fréquences basses $f << 0,9$ GHz, on a :

f (Hz)	10^2	10^3	10^4	10^5
μ	$1,9 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$	$1,9 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^2$
β^* (dB/m)	0,347	1,04	3,47	10,4
d (m)	25,2	7,94	2,52	0,794

Aux fréquences élevées $f >> 0,9$ GHz, on aurait :

$\mu \simeq 9$

$\beta^* = 720$ (dB/m) $\qquad d = 0,012$ (m)

La valeur $\mu = 9$ qui est bien $\sqrt{81}$ fut trouvée expérimentalement par Ellinger en 1892 en ondes centimétriques. Mais, nous avons vu qu'aux fréquences élevées supérieures à 1 GHz la permittivité ε_r et la conductivité σ de l'eau de mer ne sont plus des constantes. Les valeurs ci-dessus n'indiquent qu'une tendance pour les fréquences de quelques GHz lorsque ε_r n'a que peu diminué et que σ'' n'a pas encore atteint des valeurs élevées. Aux fréquences supérieures à 4 GHz les propriétés e.m. de l'eau de mer se rapprochent de plus en plus de celles de l'eau pure.

7.4. Réflexion et réfraction sur l'interface Air-Mer (8).

Supposons maintenant, que le milieu de caractéristiques μ_o, ε et σ remplisse un demi espace (que nous désignerons par le chiffre 2 en indice), séparé par un interface plan d'un demi espace libre de caractéristiques μ_o, ε_o et zéro (que nous désignerons par le chiffre 1 en indice). La présence de la limite modifie les conditions de propagation et amène des complications considérables. L'équation de propagation doit satisfaire non seulement à la condition de rayonnement à l'infini mais aux conditions, aux limites. Ces conditions, sur l'interface, sont :

l'égalité des composantes tangentielles à l'interface des champs électrique et magnétique, l'égalité des composantes normales du champ magnétique. Par contre, les composantes normales du champ électrique doivent satisfaire à l'équation

(91) $$\bar{\varepsilon} \vec{E}_{2n} = \varepsilon_o \vec{E}_{1n}$$

ou

(92) $$\vec{E}_{2n} = \frac{\vec{E}_{1n}}{\bar{\varepsilon}_r}$$

L'écriture de ces conditions à l'interface se traduit par les lois de Descartes. (La loi de réfraction n'étant applicable que de façon formelle).

Pour une onde plane qui remplit le demi espace libre, la propagation est caractérisée par une pénétration dans le milieu conducteur. On distingue une onde réfractée et une onde réfléchie.

Le coefficient de réflexion étant défini comme le rapport, par unité de surface sur l'interface, du flux moyen d'énergie réfléchie au flux moyen d'énergie incidente

(93) $$\left\{ \begin{array}{l} R = S_1'' \cos\theta_1 \,/\, S_1' \cos\theta_1 \\ R = \dfrac{|\text{Réel } E_1'' \wedge H_1''|}{|\text{Réel } E_1' \wedge H_1'|} \end{array} \right.$$

On trouve pour la polarisation T. M. (Transversale magnétique, c'est-à-dire à vecteur électrique parallèle au plan d'incidence).

(94) $$R_{||} = \frac{(k_2 \cos\theta_1 - k_1 \cos\theta_2)\,(\tilde{k}_2 \cos\theta_1 - k_1 \tilde{\cos}\,\theta_2)}{(k_2 \cos\theta_1 + k_1 \cos\theta_2)\,(\tilde{k}_2 \cos\theta_1 + k_1 \tilde{\cos}\,\theta_2)}$$

$\cos\theta_2$ est complexe et déterminé par la loi de Descartes

(95) $$k_1^2 (1 - \cos^2\theta_1) = k_2^2 (1 - \cos^2\theta_2)$$

Avec $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 = \bar{\varepsilon}_r$

On trouve :

(96) $$R_{||} = \frac{|(\varepsilon' \cos\theta_1 - p)^2 + (\varepsilon'' \cos\theta_1 - q)^2|}{|(\varepsilon' \cos\theta_1 + p)^2 + (\varepsilon'' \cos\theta_1 + q)^2|}$$

avec

(97) $$\left\{ \begin{array}{l} p = (\varepsilon' + \cos^2\theta_1 - 1)^{\frac{1}{2}} \left[\dfrac{(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \\ q = (\varepsilon' + \cos^2\theta_1 - 1)^{\frac{1}{2}} \left[\dfrac{(1+\rho^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

et (98) $$\rho = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon' + \cos^2\theta_1 - 1}$$

On a, bien entendu, en appelant T, le coefficient de transmission (99) $T_{||} + R_{||} = 1$

et de même $T_{\perp} + R_{\perp} = 1$, pour la polarisation T.E..

Aux basses fréquences $\gamma >> 1$ la réflexion, la réfraction et l'absorption sont des phénomènes énormes comme le tableau V le laissait supposer.

En toute rigueur, l'indice vrai (100) $\mu(\theta_1) = \sin\theta_1 / \sin\psi_2$ est une fonction de θ_1 de même, le coefficient d'absorption vrai $\beta(\theta_1)$. ψ_2 est l'angle de réfraction vrai, formé par les plans d'égale phase dans le milieu 2 et l'interface.

Puisque $\alpha = \beta$ (85) on a (101) : $\dfrac{\mu(\theta_1)}{\mu} = \dfrac{\beta(\theta_1)}{\beta}$

et le développement :

(102) $$\frac{\mu(\theta_1)}{\mu} = \frac{\beta(\theta_1)}{\beta} = \left(1 + \frac{1}{4}\frac{\sin^2\theta_1}{\mu^2} + \ldots\right)$$

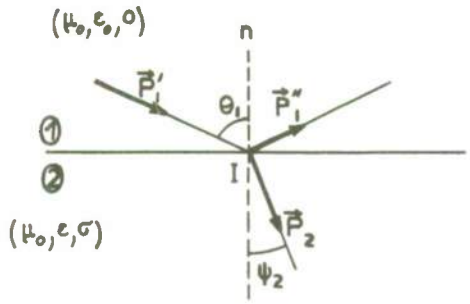


Fig. 8

Si on appelle T^* le coefficient de transmission en oblique, c'est-à-dire le rapport du flux d'énergie e.m. à travers la surface unité perpendiculaire à la direction de propagation dans le milieu 2 immédiatement en dessous de l'interface, au flux d'énergie incident à travers la surface unité perpendiculaire à la direction d'incidence dans le milieu 1, on trouve pour la polarisation T.M. et pour $0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

(103) $$T^*_{||} \simeq \frac{2}{\mu + \frac{1}{\cos\theta_1} + \frac{1}{2\mu\cos^2\theta_1}}$$

où μ est l'indice intrinsèque donné par (86)

et (104) $$T^*_{||} > T^*_{\perp} \quad (\perp \text{ désignant la polarisation T.E.})$$

Pour l'incidence normale $\theta_1 = 0$, on a :

(105) $$T_{||} = T_{\perp} = \frac{2}{\mu + 1 + \frac{1}{2\mu}}$$

Pour les grandes valeurs de μ on a, quel que soit θ_1 (à condition d'exclure les incidences rasantes)

(106) $$T_{||} = \frac{2}{\mu}$$

On voit donc que la perte au franchissement de l'interface est importante. On trouve, pour l'eau de mer, les valeurs approximatives suivantes :

f (Hz)	10^2	10^3	10^4	10^5
$1/T_{\|\|}$ (dB)	40	35	30	25

Ces valeurs manifestent l'importance du phénomène de réflexion.

L'angle ψ_2 est très petit.

On peut schématiser cette réflexion-réfraction de l'onde plane en séparant les deux composantes, normale $\vec{E}_n$ et tangentielle $\vec{E}_t$, du vecteur $\vec{E}$. Le flux d'énergie lié à la composante tangentielle pénètre dans la mer et y est absorbé. Le flux d'énergie lié à la composante normale à l'interface se propage parallèlement à l'interface en présentant beaucoup plus d'énergie en dessus qu'en dessous (voir figure 9).

En conclusion, le phénomène général de réfraction de l'onde plane dans le conducteur est le suivant :

i) L'onde est affaiblie par la réflexion, qui se traduit par une perte au franchissement de l'interface.

ii) Immédiatement en dessous de l'interface, l'onde s'affaiblit exponentiellement en fonction de la distance à l'interface et disparaît dans le conducteur. Les surfaces d'égale amplitude sont des plans parallèles à l'interface.

iii) Les surfaces d'égale phase sont perpendiculaires à la direction $\vec{P}_2$ qui fait avec la normale à l'interface un angle ψ_2 plus petit que θ_1.

Dans l'eau douce, γ est toujours très petit et μ est voisin de 9 pour les fréquences inférieures à quelques GHz et jusqu'à des fréquences assez basses pour que la conductivité résiduelle de cette eau intervienne.

Dans l'eau de mer, μ est voisin de 9 aux fréquences de quelques GHz et sa valeur augmente énormément quand la fréquence diminue.

Pratiquement, aux basses fréquences ψ_2 est très petit. On peut considérer que cet angle est nul. L'onde est pratiquement homogène.
La vitesse de phase c/μ est très faible. A 10 kHz, la longueur d'onde est voisine de 16 mètres ; la vitesse de groupe est double de la vitesse de phase ($u = 2\,\frac{c}{\mu}$) et vaut environ 310 km/s ; l'impédance d'onde est complexe de module 0,28 ohm et d'argument $-\frac{\pi}{4}$.

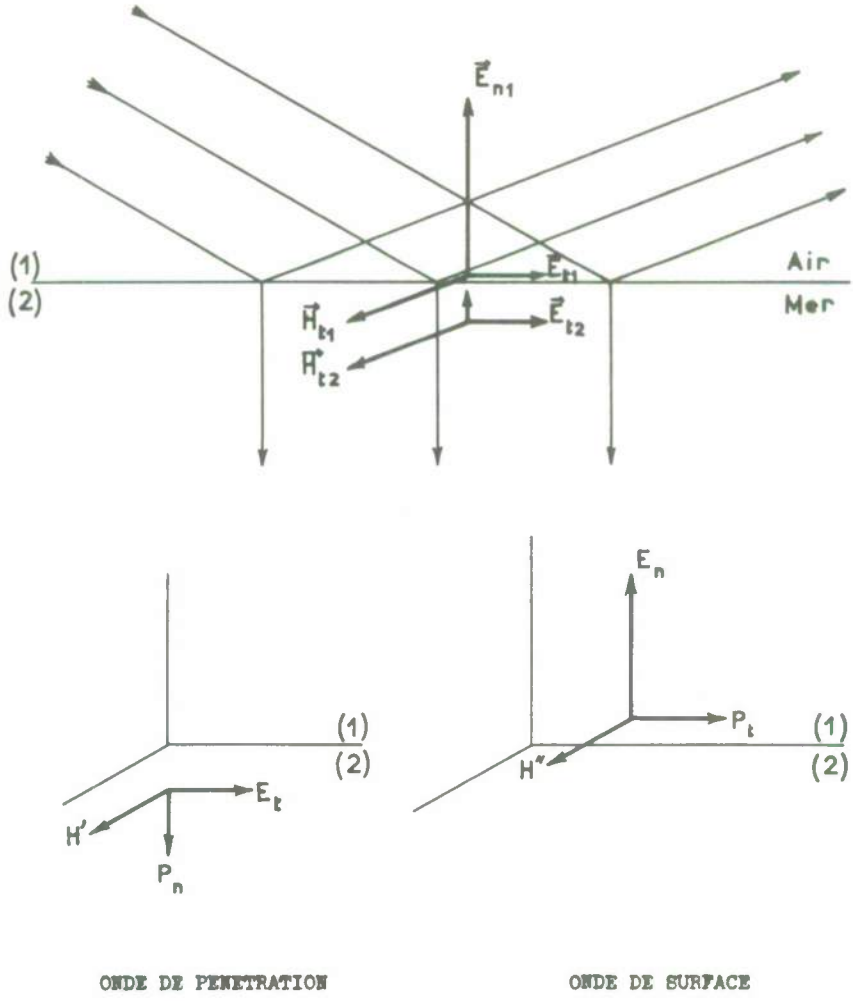


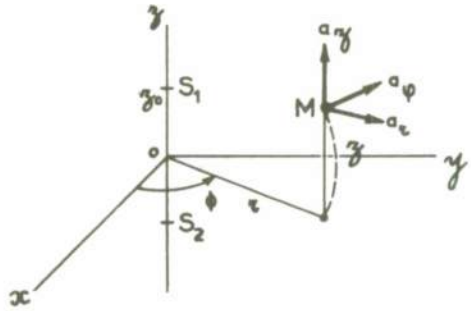
Fig. 9 Schéma de la réflexion et de la réfraction à la surface de la mer.

7.5. Le champ à l'interface Air-Mer, créé par une source électrique éloignée, polarisée verticalement, en basse fréquence (9).

Nous avons indiqué que l'hypothèse de l'onde plane n'était pas satisfaisante aux incidences rasantes. Pour connaître le champ à l'interface en incidence rasante on doit effectuer un calcul du champ créé par une source à distance finie.

On considère en coordonnées cylindriques une source e.m. en S_1 à l'altitude z_o sur oz.

Fig. 10



Le milieu (1) a pour caractéristiques μ_o , ε_o et zéro ; $z \geq 0$

Le milieu (2) a pour caractéristiques μ_o , ε et σ ; $z \leq 0$

On recherche une expression simplifiée et calculable du champ à l'interface, c'est-à-dire pour $z = 0$ et dans l'air.

On a, ainsi : (107) $R = \left[r^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}$ et (108) $\cos\theta = z_o/R$

On suppose la source S_1 électrique et polarisée verticalement. On suppose que l'indice de réfraction intrinsèque de la mer milieu (2) est un nombre grand. L'expression R_v qui se dégage de l'écriture mathématique prend alors la valeur approximative suivante :

$$R_v \simeq \frac{\frac{z_o}{R} \cdot \mu(1 - j) - 1}{\frac{z_o}{R} \cdot \mu(1 - j) + 1} \tag{109}$$

Les expressions du champ électrique sont alors assez facilement calculables en négligeant les termes en $(\frac{1}{k_o R})^2$ et de degré supérieur devant les termes en $\frac{1}{k_o R}$, c'est-à-dire en supposant R supérieur à environ 2 ou 3 λ_o.

On trouve que pour une source au sol $z_o = 0$, ou pour une source en altitude telle que $\frac{z_o}{R} \ll 1$ le rapport E_z/E_r est constant

$$\frac{E_{normal}}{E_{tangent}} \simeq \mu\,(1 - j) \tag{110}$$

Le vecteur électrique est donc presque vertical et l'énergie e.m. qui pénètre dans la mer est réduite.

7.6. On sait qu'entre la mer ou la terre et l'ionosphère, les ondes de très basse fréquence, de l'ordre de la dizaine de kHz, se propagent bien, l'un des "modes" étant réfléchi par l'ionosphère avec une faible perte, Ainsi, le champ s'affaiblit moins en fonction de la distance orthodromique au sol, qu'il ne s'affaiblirait dans l'espace libre en fonction de la distance rectiligne.

Avec des puissances suffisantes pour dominer le bruit naturel atmosphérique, qui est très intense, on peut couvrir toute la surface du globe. Si les signaux peuvent être convenablement reçus, immédiatement en dessous de la surface de la mer, ils peuvent être reçus en profondeur. En effet, le bruit atmosphérique comme le signal s'affaiblit exponentiellement en fonction de la distance à l'interface. La limite est imposée par le bruit local du capteur.

8. L'EMISSIVITE DE LA SURFACE DE LA MER.

La couche superficielle de la mer reçoit le rayonnement direct solaire et le rayonnement diffus de l'atmosphère. Ce rayonnement global est partiellement réfléchi par l'interface et absorbé en dessous de l'interface. La conservation de l'énergie nous a permis d'écrire qu'en tout point et à toute longueur d'onde

$$R + T = 1$$

La surface chauffée de la mer devient ainsi une source de rayonnement thermique dirigée vers l'atmosphère et qui rayonne à sa température. Il s'agit du rayonnement thermique d'un corps non noir.

On appelle émissivité directionnelle spectrale $\varepsilon(\lambda)$ d'un corps quelconque à la température T pour la longueur d'onde λ en un point donné et dans une direction donnée, le rapport de sa luminance spectrale énergétique à celle du corps noir à la même température, qui absorbe complétement tout rayonnement reçu à sa surface.

Si on appelle ici $T(\lambda)$ le coefficient d'absorption, que nous avons appelé coefficient de transmission, pour un rayonnement de même direction et de même longueur d'onde incident au même point du corps à la même température, la loi de Kirchhoff s'exprime par la relation

(111) $$\varepsilon(\lambda) = T(\lambda)$$

Ce qui entraine $\varepsilon(\lambda) \leqslant 1$ qui traduit la relation entre la luminance énergétique $L'(\lambda)$ du corps considéré et celle $L(\lambda)$ du corps noir.

(112) $$L'(\lambda) = \varepsilon(\lambda)\, L(\lambda)$$

8.1. L'émissivité de la surface de la mer tranquille à la longueur d'onde λ est donc déterminée par sa permittivité complexe qui est, elle-même, une fonction de sa température et de sa composition chimique. On peut mesurer la température apparente de luminance T_L de l'interface (ou de la couche superficielle) au moyen d'un radiomètre idéal placé dans l'air. Cette température est liée à la température moléculaire T_s de la couche superficielle et à l'emissivité de la surface

(113) $$T_L(\lambda) = \varepsilon(\lambda)\, T_s$$

Ainsi, puisque $\varepsilon(\lambda)$ est fonction de la composition chimique C et de la température T_s, la mesure de T_L peut fournir T_s connaissant C ou bien fournir C connaissant T_s

(114) $$\varepsilon(\lambda)_{||} = 1 - R_{||}$$ (voir équations (96), (97) et (98))

(115) $$\varepsilon(\lambda)_{\perp} = 1 - R_{\perp}$$

8.2. La NASA a effectué une étude (6) sur les moyens pour déterminer la température de l'océan avec une erreur absolue de ± 1 °K et une résolution de ± 0,1 °K par satellite sur une base intéressant le globe entier, tous les temps météorologiques et toutes les heures du jour, en vue de servir des industries d'importance vitale telles que la pêche hauturière, les transports maritimes et les recherches météorologiques et océanographiques. Le rapport décrit les effets dus à la surface de la mer, les effets provoqués par l'atmosphère et les effets associés aux imperfections de l'instrumentation. Il décrit aussi, les spécifications et performances de l'instrument recommandé. La bande 2,5 - 4,2 GHz ayant été retenue, l'émissivité $\varepsilon(\lambda)$ de l'océan dans cette bande dépend un peu de la salinité. L'examen des variations géographiques et temporelles de la salinité indique que les incertitudes provenant d'erreurs dans la connaissance de ces variations ne devraient pas dépasser quelques dizièmes de degré malgré des lacunes importantes dans les observations océanographiques.

Pour tirer un parti maximal des mesures radiométriques par satellite, il faudrait connaître la salinité moyenne des océans du globe avec une exactitude au moins aussi bonne que ± 1 %.

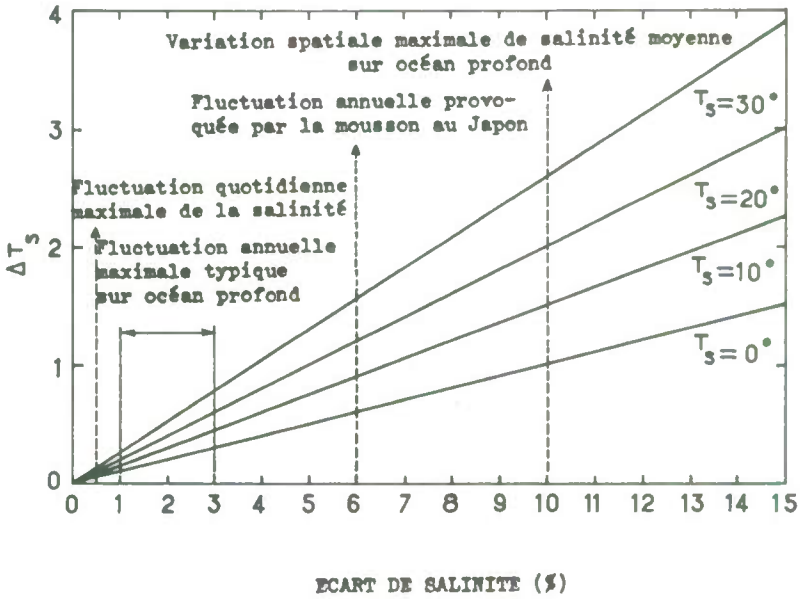


Fig. 11 Incertitudes sur la température moléculaire T_s mesurée à 2,65 GHz par radiomètre, imputables aux changements de salinité sur les océans du monde.

Annexe I

---

1. LES EQUATIONS DU CHAMP.

1.1. Les équations de Maxwell (1).

A l'échelle macroscopique, les phénomènes électromagnétiques sont régis par les équations de Maxwell, en tout point de l'espace au voisinage duquel les propriétés physiques du milieu sont continues.

Ces équations qui lient entre eux cinq vecteurs du champ : $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$ et $\vec{J}$, c'est-à-dire respectivement : le champ électrique, l'induction magnétique, l'induction électrique, le champ magnétique et la densité de courant, s'écrivent (en système Giorgi rationalisé MKS que nous employons) de la manière suivante :

(I) $$\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

(II) $$\nabla \wedge \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

Ces deux relations sont indépendantes.

1.2. Les équations complémentaires.

Pour que le système soit déterminé, il est nécessaire de s'imposer trois conditions supplémentaires, telles que :

$$\vec{D} = D(\vec{E}) \qquad \vec{H} = H(\vec{B}) \qquad \vec{J} = J(\vec{E}) \qquad \text{par exemple}$$

De telles relations sont à déterminer uniquement à partir des propriétés physiques du milieu au voisinage du point considéré, en faisant appel à la théorie et à l'expérience.

Si ces propriétés sont indépendantes de la direction (milieu isotrope) on constate que $\vec{D}$ est parallèle à $\vec{E}$ et $\vec{H}$ parallèle à $\vec{B}$. Alors, des relations linéaires sont acceptables. En fait, de telles relations permettent de résoudre la plupart des problèmes de l'électromagnétisme où l'on ne considère pas d'effets non linéaires.

Dans l'espace libre, ou vide, deux relations simples sont bien connues

(116) $$\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$$ et (117) $$\vec{H} = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}$$

ε_o est appelé pouvoir inducteur spécifique ou bien constante diélectrique ou encore permittivité et μ_o est appelé perméabilité magnétique, de l'espace libre.

En système MKS(A)

(118) $$\mu_o = 4\pi\ 10^{-7}\ (\mathrm{H\ m^{-1}})$$ et (119) $$\varepsilon_o = \frac{1}{c^2\ \mu_o}\ (\mathrm{F\ m^{-1}})$$

c étant la vitesse de la lumière dans l'espace libre.

1.3. La polarisation électrique et magnétique.

Pour décrire l'état e.m. d'un échantillon du milieu matériel considéré, il s'avère commode d'introduire deux vecteurs supplémentaires. On définit les vecteurs "polarisations" électrique $\vec{P}$ et magnétique $\vec{M}$ par les équations

(120) $$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_o \vec{E}$$ et (121) $$\vec{M} = \frac{1}{\mu_o} \vec{B} - \vec{H}$$

Ces vecteurs s'annulent dans l'espace vide. Ils représentent donc la matière. Ils s'annulent en l'absence du champ. Ce sont donc des polarisations induites.

Dans les milieux isotropes, on voit que par définition les vecteurs polarisations sont parallèles aux vecteurs correspondants du champ. A condition d'exclure les substances ferromagnétiques, on trouve expérimentalement que $\vec{M}$ est proportionnel à $\vec{H}$

(122) $$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

Pratiquement χ_m est toujours très petit, pour toutes les matières non ferromagnétiques, positif pour les matières paramagnétiques et négatif pour les matières diamagnétiques.

Nous poserons pour simplifier, en excluant les milieux ferromagnétiques :

(123) $$\vec{M} \equiv 0$$

La troisième équation du système est donc :

(III) $$\vec{H} = \frac{1}{\mu_o} \vec{B}$$

Pour la polarisation électrique nous écrirons classiquement :

(124) $$\vec{P} = \chi_e \, \varepsilon_o \, \vec{E}$$

Ou bien, avec

(125) $$\chi_e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} - 1$$

(IV) $$\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_o) \, \vec{E} \text{ ou } \vec{P} = \varepsilon_o \, (\varepsilon_r - 1) \, \vec{E}$$

ε est la permittivité du corps considéré. Le nombre sans dimensions $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$ en est la valeur relative.

1.4. La loi d'Ohm.

Il faut encore écrire une dernière relation empirique entre la densité de courant et le champ.

On pose :

(V) $$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Le facteur σ est appelé conductivité du milieu.

On sait, par expérience, qu'à l'échelle macroscopique cette loi est bien vérifiée, que le champ électrique dans le milieu soit constant ou non, qu'il dépende du temps ou non.

1.5. Le système final.

En définitive, pour tenir compte de la présence d'un corps matériel non ferromagnétique dans le domaine de l'espace où l'on considère le champ e.m., il suffit d'écrire les deux équations de Maxwell sous la forme :

(I) $$\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

et

(II') $$\nabla \wedge \vec{B} - \varepsilon_o \mu_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \, \sigma \, \vec{E} + \varepsilon_o \mu_o \, (\varepsilon_r - 1) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ces deux équations lient les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

Les caractéristiques du milieu matériel qui apparaissent dans le second membre de l'équation II' sont :

σ la conductivité

ε_r la permittivité relative $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_o$

La conductivité σ est très variable suivant le milieu matériel en cause. Il n'existe pas à proprement parler de conducteur parfait ($\sigma = \infty$), ni de diélectrique parfait ($\sigma = 0$) en dehors du vide.

En régime harmonique du temps, défini par le facteur $e^{j\omega t}$, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t}$ est identique à $j\omega$.

L'équation II' peut s'écrire sous la forme :

(II'') $$\nabla \wedge \vec{B} - j\omega \, \mu_o \, \bar{\varepsilon} \, \vec{E} = 0$$

avec (126) $$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_o \, \varepsilon_r - \frac{j\sigma}{\omega} = \varepsilon_o \, \bar{\varepsilon}_r$$

$\bar{\varepsilon}$ est alors une permittivité complexe qui rassemble les deux caractéristiques ε_r et σ du milieu. (Dans notre écriture, les quantités surmontées d'un tiret sont complexes).

Les mesures au condensateur plan entre les armatures duquel on peut insérer une substance matérielle (au besoin, on peut immerger complétement le condensateur dans la substance à étudier), font apparaître que :

σ et ε_r sont en général, non des constantes, mais des fonctions de la pulsation ω

On peut donc distinguer :

En régime statique ($\omega = 0$) une conductivité σ (0), qui peut être très petite.

En régime harmonique ($\omega \neq 0$) une conductivité σ (ω), due en particulier aux pertes diélectriques, qui peut être très supérieure à σ (o).

De même, on doit distinguer ε_r (0) (que nous désignerons aussi par ε_s) et ε_r (ω). Cette dernière fonction définit le spectre de dispersion de la substance.

1.6. Le temps de relaxation.

Si ρ est la densité de charge électrique, l'équation dite de continuité

(127) $$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

exprime la conservation de la charge au voisinage d'un point.

Dans une région où la conductivité n'est pas nulle, il ne peut exister de charges libres. Ce théorème peut être facilement démontré lorsque le milieu est homogène et que les relations entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ d'une part, $\vec{J}$ et $\vec{E}$ d'autre part sont linéaires.

On a, en effet, à partir de (V) : (128) $$\nabla \cdot \sigma\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En prenant la divergence de l'équation II, il vient :

(129) $$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

D'où l'on tire :

(130) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho = 0$$

La densité de charge à un instant quelconque est donc :

(131) $$\rho = \rho_o \, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$$

Le temps $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$ est appelé "temps de relaxation".

2. PROPAGATION DES ONDES. APPLICATION A L'EAU DE MER :

2.1. Les équations de propagation du champ e.m. :

Rappelons les hypothèses de départ. Nous supposons que le milieu est homogène, isotrope et illimité. De plus, les relations linéaires III, IV et V sont satisfaites ; de sorte que le milieu du point de vue macroscopique est défini par trois constantes

$$\mu_o \quad , \quad \varepsilon \quad \text{et} \quad \sigma$$

On suppose de plus que, du point de vue macroscopique, $\rho = 0$

Les équations satisfaites par le champ sont donc I et II'. Pour obtenir l'équation du champ $\vec{E}$ prenons le rotationnel de I, il vient pour le premier nombre, en tenant compte de $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$:

(132) $$\Delta E = \mu_o \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H})$$

et en tenant compte de II'

(133) $$\Delta\vec{E} - \mu_o \, \varepsilon_o \, \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o \, \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

On trouverait la même équation pour le champ $\vec{H}$.

Supposons de plus, que le champ ne dépende que d'une seule coordonnée de l'espace, par exemple z et que le régime soit harmonique dans le temps, défini par le facteur $e^{j\omega t}$, les champs E et H satisfont à l'équation

(134) $$(\Delta + \bar{k}^2) \, \vec{U} = 0$$

$$\vec{U} = \vec{E} \quad \text{ou} \quad \vec{U} = \vec{H}$$

avec (135) $\bar{k}^2 = \mu_o \, \varepsilon_o \, \bar{\varepsilon}_r \, \omega^2$ et (136) $\bar{\varepsilon}_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_o} - j \frac{\sigma}{\omega \, \varepsilon_o}$

ε et σ sont des nombres réels.

La solution générale de (134) s'écrit :

(137) $$\vec{U} = \vec{U} \, e^{j(\omega t - \bar{k}z)} + U_2 \, e^{j(\omega t + \bar{k}z)}$$

On appelle $\bar{k}$ la constante de propagation.

On montre que les vecteurs H et E (milieu isotrope) sont perpendiculaires à la direction oz, c'est-à-dire à la direction de propagation et sont perpendiculaires entre eux.

Puisque le système d'unités est cohérent $\mu_o \varepsilon_o c^2 = 1$. D'où :

(138) $$\bar{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \bar{\varepsilon}_r$$

Si on considère la solution particulière de l'onde plane qui se déplace vers les z croissants en fonction du temps

(139) $$\vec{U} = \vec{U}_o \, z^{j(\omega t - \bar{k}z)}$$

2.2. Les principales caractéristiques pratiques d'un milieu de propagation sont : l'indice de réfraction de phase, le coefficient d'absorption, la tangente de l'angle de pertes, l'impédance d'onde ...

La vitesse de phase est : $\bar{v} = \frac{\omega}{\bar{k}}$. Il lui correspond l'indice de phase $\bar{n} = \frac{c}{\bar{v}}$

On a : $\bar{n} = \frac{c}{\omega} \bar{k} = \frac{\bar{k}}{k_o}$ (k_o est la constante de propagation de l'espace libre à la fréquence considérée)

ε_r représente le carré de l'indice de phase

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{n}^2 = \left(\frac{\bar{k}}{k_o}\right)^2$$

Si on pose : $\bar{\varepsilon}_r = \varepsilon_r(1 - j\gamma)$, où ε_r et γ sont des nombres réels, γ s'appelle la tangente de l'angle de pertes.

On a :

$$\bar{n} = \frac{\bar{k}}{k_o} = \varepsilon_r^{\frac{1}{2}} (1 - j\gamma)^{\frac{1}{2}}$$

On peut poursuivre le calcul en le fondant sur les identités suivantes :

$$\text{Réel } (1 - j\gamma)^{\frac{1}{2}} \equiv \left[\frac{(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} + 1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$- \text{Imag. } (1 - j\gamma)^{\frac{1}{2}} \equiv \left[\frac{(1 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} - 1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

(Voir § 7.2., 7.3. et 7.4. du texte principal)

Annexe II

Théorie des anomalies des électrolytes

On a cherché à expliquer le fait que la conductivité équivalente Λ d'un électrolyte fort diminue quand la concentration augmente. Debye et Hückel l'ont expliqué d'une manière assez satisfaisante. Les principaux points de leur théorie sont les suivants :

1. Le potentiel d'un ion et de son nuage.

On considère un "ion central" de charge q, à l'origine des coordonnées qui est un point singulier. Il est entouré d'un peu plus d'ions négatifs que d'ions positifs de sorte qu'il existe, en plus de l'ion "central", une charge - q distribuée avec une certaine densité ρ qui est une fonction de point, l'ensemble du système composé de l'ion central et du nuage d'ions étant neutre au total.

On peut montrer rigoureusement que ce système de charges crée à la distance r le potentiel scalaire ((1) chapitre III) :

(140) $$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{e^{-ar}}{r}$$

L'équation de Poisson : $\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$ fournit

(141) $$\rho = -\frac{q\,a^2}{4\pi} \frac{e^{-ar}}{r}$$

D'après Boltzmann, les ions se répartissent entre les différents niveaux de l'énergie potentielle $q\phi$, proportionnellement au facteur $e^{-\frac{q\phi}{kT}}$, T étant la température absolue et k une constante universelle.

On suppose pour simplifier un électrolyte du type NaCℓ, dont les deux ions possèdent la même charge q. Dans ces conditions, les densités volumiques des ions + et - à la distance r de l'ion central sont :

(142) $$N_{\pm} = A\, e^{\pm\frac{q\phi}{kT}}$$

Les nombres N_+ et N_- devant être égaux à grande distance, on a : A = N

La densité volumique ρ, à la distance r, a donc, pour expression :

(143) $$\rho = Nq\,(e^{-\frac{q\phi}{kT}} - e^{+\frac{q\phi}{kT}})$$

Si la solution est suffisamment étendue $q\phi$ reste petit devant kT. (Pour C = 10, l'ion le plus rapproché est en moyenne à $4{,}4\ 10^{-9}$ m de l'ion central. Le rapport $\frac{q\phi}{kT}$ à la température ordinaire est voisin de $\frac{6}{40}$. Cette concentration est donc à peu près la limite d'application de l'approximation suivante).

On remplace les exponentielles par le premier terme de leur développement. On arrive facilement à la solution :

(144) $$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{e^{-\chi r}}{r}$$ (145) avec $$\frac{1}{\chi} = \left(\frac{\varepsilon\, kT}{2Nq^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

et (146) $$\rho = -\varepsilon\ \chi^2\ \phi$$

Le potentiel ϕ représente la superposition du potentiel créé par l'ion central et de celui créé par le nuage.

2. L'ELECTROPHORESE.

Un ion central, positif par exemple, doit progresser dans un milieu qui, en moyenne, est entrainé en sens inverse de son mouvement parce qu'il a plus de voisins négatifs que de positifs. Cette résistance particulière au mouvement des ions a été appelée électrophorèse par Helmholtz.

Considérons le volume compris entre deux sphères de rayons r et r + dr, centrées sur l'ion central considéré. Ce volume vaut $dW = 4\pi\, r^2\, dr$. Il est soumis à la force électrique $d\vec{F} = \vec{E}\,\rho\, dW$. Suivant la loi de Stokes, une sphère de rayon r, animée de la vitesse $\vec{v}$ dans un fluide de viscosité η est soumise à la force de frottement

(147) $$\vec{F} = +\,6\pi\,\eta\, r\,\vec{v}$$

Le volume dW entre les deux sphères de rayons différents et de vitesses différentes est soumis à la force de frottement (148) $$d\vec{F} = +\,6\pi\,\eta\, d\,(r\vec{v})$$

D'où l'on tire

(149) $$r\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{6\pi\eta}(1 + \chi r)e^{-\chi r} + C$$

Pour que v reste fini pour r = 0, il faut C = - 1. On obtient finalement comme vitesse d'électrophorèse au voisinage de l'ion

(150) $$\vec{v} = - q\ \chi\ \vec{E}/6\pi\ \eta$$

La vitesse réelle de l'ion central est donc :

(151) $$u_1\vec{E} - \vec{v}$$

On doit donc corriger l'expression (15) de la conductivité et écrire :

(152) $$\sigma' = N_A\ c\ q\ (u_1 + u_2) - q\ \chi\ /3\pi\ \eta$$

D'où la conductivité équivalente en supposant $z_1 = z_2 = 1$

(153) $$\Lambda = \Lambda_o - N_A\ q^2\ \chi\ /3\pi\ \eta$$

Λ_o est une conductivité limite qui caractérise une concentration infiniment petite du sel dissous.

3. LE TEMPS DE RELAXATION ET SON EFFET SUR LA CONDUCTIVITE

Le second effet du nuage d'ions sur la conductivité provient du temps de relaxation dans l'établissement ou la disparition du nuage.

Si l'ion central disparaît, l'équilibre statistique est rompu.

En un point : (154) $\rho = \rho_o\ e^{-\frac{t}{\tau}}$. Le temps de relaxation τ varie en fonction de r.

Le maximum est obtenu pour $r = 2/\chi$

Un calcul assez rigoureux aboutit à l'expression :

(155) $$\tau = f/kT\chi^2$$

f est une fonction des q_B/u_B des différents ions. On obtient comme ordre de grandeur $1{,}4\ 10^{-7}$/C(seconde) pour NaCℓ.

Supposons maintenant, que le champ $\vec{E}$ soit alternatif. On peut montrer que si l'ion central se déplace avec la vitesse $\vec{v}$, le nuage est centré en arrière de l'ion central à la distance $v\tau$.

Le potentiel du nuage vérifie une expression qui comprend une partie symétrique et une partie dissymétrique.

En bref, la conductivité est modifiée. On a finalement avec l'électrophorèse :

(156) $$\Lambda = \Lambda_o - (N_A\ q^2\ \chi\ /\ 3\pi\ \eta) - (f'\ q^2\ \Lambda_o\ \chi\ /12\pi\varepsilon\ kT)$$

f' est un facteur numérique fonction des q_B/u_B du sel en cause.

4. CONSEQUENCES :

La formule (156) ci-dessus nous montre que les deux termes correctifs sont proportionnels à χ donc à $\sqrt{C}$. On retrouve ainsi la loi expérimentale de Kohlrausch

(20) $$\Lambda = \Lambda_o - b\ \sqrt{C}$$

Annexe III

La formule de Clausius Mosotti et le terme de Debye

1. LA FORMULE DE CLAUSIUS MOSOTTI :

On dispose de la relation de Clausius Mosotti que l'on peut expliquer selon le schéma simpliste suivant. Le champ effectif $\vec{E}_\ell$ sur chaque molécule est la somme du champ appliqué $\vec{E}$ et du champ produit par les autres molécules.

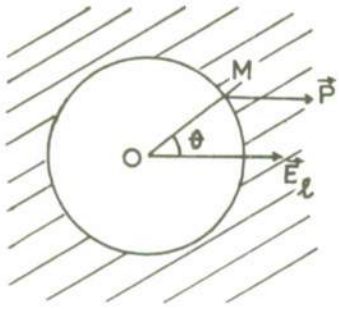


Fig. 12

On peut imaginer une cavité fictive que l'on suppose sphérique, centrée en O sur une molécule. Sur la face interne de cette sphère de rayon r apparaissent des charges. La charge portée par la couronne comprise entre les angles θ et θ + dθ est :

(157) $$dQ = P \cos\theta \, 2\pi r^2 \sin\theta \, d\theta$$

Le champ dû aux charges de la cavité est par raison de symétrie colinéaire à $\vec{E}_\ell$ et vaut :

(158) $$\frac{1}{2\varepsilon_o} \vec{P} \int_o^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{3\varepsilon_o} \vec{P}$$

D'où :

(159) $$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_o} \vec{P}$$

Y. Legrand [5] fait remarquer que l'écriture de l'équation(159) repose sur des bases bien fragiles et qu'il est sans doute préférable de poser à priori une relation linéaire entre $\vec{E}_\ell$ et $\vec{P}$, telle que :

(159 bis) $$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_o} p \vec{P}$$

(Le facteur numérique p peut être notablement inférieur à l'unité dans le cas de l'eau de mer.).

Partant de (159) et de (IV), il vient :

(160) $$\vec{E}_\ell = \frac{\varepsilon_r + 2}{3} \vec{E}$$

Le moment de toutes les molécules de l'unité de volume sera :

(161) $$\vec{P} = N \cdot \vec{m}_e = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_o \vec{E} \qquad \text{(équation IV)}$$

, où N est le nombre de molécules par unité de volume.

(162) $$N = \frac{d}{M} N_A \qquad \left(\begin{array}{l} d \text{ étant la masse volumique} \\ M \quad \text{"} \quad \text{"} \text{ molaire} \end{array}\right.$$

En tenant compte de (51), on peut écrire :

(163) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = Cd \qquad \text{ou (164)} \qquad \varepsilon_r - 1 = \frac{3\,Cd}{1 - Cd}$$

, où C est une constante, dont la valeur est :

(165) $$C = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\vec{m}_e}{\vec{E}_\ell}$$

Si on appelle "polarisabilité" α_o une constante qui relie le moment induit au champ local

(166) $\alpha_o = \dfrac{\vec{m}_e}{\vec{E}_\ell}$, on a encore :

(167) $$C = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \alpha_o$$

2. LE TERME DE DEBYE ET L'EXPRESSION GENERALE DE LA PERMITTIVITE RELATIVE.

Pour les corps non polaires, l'effet du § 1 ci-dessus est seul à considérer. Par contre, pour les corps polaires, dont la molécule possède un moment permanent, on doit ajouter un autre effet pour lequel Debye a proposé un terme, qu'on peut expliquer de la manière suivante :

Quand un dipôle moléculaire fait l'angle θ avec le champ uniforme $\vec{E}_\ell$, il est soumis à un couple, qui, en l'absence de toute autre force, l'oriente dans le sens du champ. Si on écarte alors le dipôle de l'angle θ, le travail exécuté est :

(168) $$\frac{m_e}{4\pi\,\varepsilon_o} \int_o^\theta E_\ell \sin\theta\, d\theta = \frac{m_e\, E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o} (1 - \cos\theta)$$

D'où l'expression de l'énergie potentielle du dipôle :

(169) $$u = - \frac{m_e\, E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o} \cos\theta$$

En réalité, les dipôles ne vont pas pouvoir s'orienter, d'une part à cause du SPIN, d'autre part des chocs intermoléculaires. L'équilibre statistique est régi de façon que les molécules se répartissent entre les diverses valeurs de l'énergie potentielle u, proportionnellement au facteur $e^{-\frac{u}{kT}}$, où T est la température absolue et k la constante de Boltzmann.

En l'absence du champ, aucune direction n'est privilégiée et le nombre de molécules, dont le moment fait avec une direction fixe un angle compris entre θ et $\theta + d\theta$, est proportionnel à l'angle solide $2\pi \sin\theta\, d\theta$.

En présence du champ, il faut poser :

(170) $$dN = A\, e^{-\frac{u}{kT}}\, 2\pi \sin\theta\, d\theta$$

L'exposant de l'exponentielle est petit au moins aux températures suffisantes $T \simeq 300$ °K. On peut donc poser pour simplifier :

(171) $$e^{-\frac{u}{kT}} \simeq 1 + \frac{m_e\, E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\, kT} \cos\theta$$

On obtient $A = \frac{N}{4\pi}$ en écrivant qu'il y a N molécules par unité de volume.

Chacune des dN molécules contribue pour la part $m_e \cos\theta$ au moment dipolaire de l'unité de volume. D'où :

(172) $$P = \frac{N}{2} m_e \int_o^\pi \left(1 + \frac{m_e\, E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\, kT} \cos\theta\right) \cos\theta \sin\theta\, d\theta$$

(173) $$P = \frac{N}{3} \frac{m_e^2\, E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\, kT}$$

En tenant compte des équations (160) et (IV), il vient l'expression :

(174) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = Cd$$

avec :

(175) $$C = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_o} \left(\alpha_o + \frac{m_e^2}{3\,kT}\right)$$

Soit, en définitive :

(176) $$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = U + \frac{V}{T}$$

Avec : (177) $$U = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{d}{4\pi\,\varepsilon_o} \alpha_o$$ (178) $$\alpha_o = \frac{m_e}{E_\ell}$$

et (179) $$V = \frac{4\pi}{3} \frac{N_A}{M} \frac{d}{4\pi\,\varepsilon_o} \frac{m_e^2}{3\,k}$$

La mécanique ondulatoire a établi, avec Langevin et Debye, que le résultat ci-dessus était valable

aux températures suffisantes, donc généralement à la température ordinaire.

3. LE TEMPS DE RELAXATION.

Dans un corps à molécules polaires, la polarisabilité peut passer pour instantanée, tandis que l'orientation dipolaire qui apporte à la polarisation une part principale n'est pas instantanée.

En l'absence du champ $\vec{E}$, la distribution symétrique s'exprime par (voir § 2)

(180) $$d\,N_o = 2\pi\,A \sin\theta\,d\theta$$

En présence du champ il se superpose, à cette première répartition, une répartition dissymétrique

(181) $$dN_1 = 2\pi\,A\,\frac{m_e\,E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\,kT}\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta$$

L'excès total des molécules, qui sont dans la demi sphère dans le sens du champ, est

(182) $$\int_o^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\,A\,\frac{m_e\,E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\,kT}\cos\theta\,\sin\theta\,d\theta = \pi\,A\,\frac{m_e\,E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\,kT}$$

Il y a un défaut total de même valeur dans l'autre demi sphère dans le sens opposé au champ.

Supposons qu'à l'instant $t = 0$, le champ E s'annule brusquement. L'un quelconque des dipôles va se mouvoir pour gagner une nouvelle position d'équilibre. La question se pose de savoir comment s'effectue ce mouvement.

Debye a supposé que le couple moteur qui agit sur le dipôle pour le ramener à sa position finale de repos $\xi\beta$ était proportionnel à l'angle de rotation β qui décroît de β_o, à l'instant $t = 0$, à zéro. Il a supposé de plus, que le mouvement était freiné par un frottement de viscosité dont le couple $\zeta\,\frac{d\beta}{dt}$ était proportionnel à la vitesse de rotation. En conséquence, la permittivité relative ε_r est complexe et il existe un temps de relaxation. En effet, l'équation du mouvement,

(183) $$\zeta\,\frac{d\beta}{dt} + \xi\beta = 0$$

fournit la loi de retour au repos :

(184) $$\beta = \beta_o\,e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{avec} \qquad \tau = \zeta/\xi$$

Pour déterminer τ, on écrit qu'à l'instant $t = 0$ on doit avoir d'après (182) :

(185) $$\beta_o = \frac{m_e\,E_\ell}{4\pi\,\varepsilon_o\,kT}$$

D'où (186) : $\xi = 2\,kT$ et (187) $\tau = \zeta\,/\,2\,kT$

On suppose de plus, que la molécule d'eau est sphérique de rayon a et tourne dans un fluide de viscosité η

La théorie de Stokes conduit alors à l'expression :

(188) $$\zeta = 8\pi\,\eta\,a^3$$

On obtient ainsi, à 17°C, pour l'eau :

$$\tau = 0{,}89\;10^{-11}\ \text{seconde}$$

4. LE REGIME HARMONIQUE ET LA PERMITTIVITE COMPLEXE A UN SEUL TEMPS DE RELAXATION.

En Régime harmonique, le champ $\vec{E}$ peut s'écrire :

(189) $$\vec{E}_\ell = E_{\ell o}\,e^{j\omega t}$$

L'équation du mouvement des dipôles devient :

(190) $$\zeta\,\frac{d\beta}{dt} + \xi\beta = m_e\,E_{\ell o}\,e^{j\omega t}$$

La solution générale de l'équation sans second membre est (76). Elle disparaît rapidement.

Une solution particulière de l'équation avec second membre est :

(191) $$\beta = \beta_o\,e^{j\omega t}$$

Avec (79), il vient :

(192) $$\beta_o = \frac{m_e\,E_{\ell o}/4\pi\,\varepsilon_o}{\xi(1 + j\omega\tau)}$$

Ainsi, les rotations des dipôles sont divisées par $(1 + j\omega\tau)$, par rapport à ce qu'elles seraient dans un champ statique de même amplitude

$$\beta_s = \frac{m_e \, E_{\ell o}/4\pi \, \varepsilon_o}{\xi} \tag{193}$$

Donc, à tout instant, le terme $e^{j\omega t}$ étant éliminé partout, les équations du §.2 sont encore valides à condition de remplacer E_ℓ par $E_\ell/(1 + j\omega\tau)$; ce qui se traduit dans les équations finales (175) et (179) par la division des derniers termes par $(1 + j\omega\tau)$.

On peut donc écrire :

$$\frac{\bar{\varepsilon}_r - 1}{p \, \bar{\varepsilon}_r + 3 - p} = U + \frac{V}{T \, (1 + j\omega\tau)} \tag{194}$$

Références

(1) STRATTON, J.A. — Théorie de l'électromagnétisme (Traduit par Hebenstreit J.) Dunod - Paris 1961

(2) RICHARDS, F.A. — Chemical and biological factors in the marine environment Chap. 8 of Ocean Engineering Brahtz, editor - Wiley

(3) DARMOIS, E. DARMOIS, G. — Electrochimie théorique Masson - Paris 1960

(4) KONDRATYEV, K. YA — Radiation in the atmosphere Academic Press N.Y. (1969)

(5) LE GRAND, Y. BROC, J. SAINT-GUILY, B. CHANU, J. — Introduction à l'électromagnétisme des mers Annales de l'institut océanographique Tome XXVII (1952)

(6) HIDY, G.M. ; HALL, W.F. HARDY, W.N. ; HO, W.W. JONES, A.C. ; LOVE, A.W. VAN MELLE, M.J.; WANG, H.H. WHEELER, A.E. — Development of a satellite microwave radiometer to sense the surface temperature of the world oceans NASA Report CR - 1960 (1972)

(7) TERRIEN, J. — Radiations électromagnétiques Encyclopédie Physique et Spatiale Annuaire 1970 du bureau des longitudes

(8) HALLEY, P. — Effets importants d'une discontinuité physique diélectrique-métal sur la propagation de l'onde e.m. qui la franchit Subsurface communications AGARD CP n° 20 - 1966

(9) HALLEY, P. — Le problème Air-Mer à deux milieux. Calcul du champ électrique à la surface pour une source électrique polarisée verticalement ou une source magnétique polarisée horizontalement, élevées en altitude Revue du CETHEDEC n° 9 (1967)

(10) BARRIOL, J. — Les moments dipolaires Gauthier-Villars (1957)

OVERVIEW OF THE LECTURE SERIES

Henri Hodara
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

Philosophy of the Lectures

In preparing this Lecture Series, we have constantly kept in mind its usefulness and applications to problems of significant interest for the military and oceanographic communities.

On the military side, recent emphasis on marine applications from space and airborne platforms such as remote sensing and surveillance of the oceans, bottom mapping, submarine detection and communications call for a thorough understanding of light propagation in the air, in the sea and across its interface. We now understand fairly well transmission through the atmosphere and we can predict light propagation in that portion of the air-water link with reasonable accuracy. However, it is only recently that the transmission of light in seawater has been understood, particularly in regard to scattering and optical imaging. It is one of the purposes of this conference to disseminate our newly acquired knowledge of this subject.

On the oceanographic side, daylight propagation in and out of the sea has always been a key tool in the study of physical oceanography, relating the flux balance to the photosynthesis processes and the heat budget to the seasonal thermocline. Extensive measurements together with light propagation theory tie in the physical and chemical properties of seawater to the ocean optical parameters: A case in point is the effect of particle size distribution on daylight scattering.

The interaction between these two fields, optical imaging and physical oceanography, with their respective tools, has created a synergism responsible for those advances in "Optics of the Sea" which form the subject of these lectures. Thus, models of particle size distributions developed by oceanographers coupled to the solution of the very small angle scattering problem brought about by the military interest in high resolution imaging now give us the tools to predict imaging systems performance, and conversely to extract from their operation meaningful data on the physics and biology of the ocean

Finally, these lectures provide once more an example of how concepts such as signal-to-noise ratio, transfer function, and technologies, like range gating, greatly used in the aerospace field have been applied successfully to advance the fledgling disciplines of underwater optics.

The Lectures

The first session "Air-Sea Interface and Radiation Transfer" is designed to cover the fundamental mechanisms of how daylight is distributed above and below the sea surface.

Lecture 1.1, "Reflection and Refraction at the Sea Surface", gives first a brief review of the classical equations governing optical reflection and refraction at a plane interface between two media of different refractive index. It goes on to predict how sea state affects the classical results and relates reflection and refraction by rough surfaces to existing observation. Of particular interest is the inclusion of polarization effects.

Lecture 1.2, "Radiance Distribution Below the Sea Surface", takes on where 1.1 left off, starting with light penetration in water and provides the mathematical techniques to calculate its energy spectral and angular distribution as a function of depth. This lecture also discusses how light is propagated back up into the atmosphere, a result of importance for remote sensing.

Lecture 1.3, "Radiative Transfer Theories", is a review and integration of the various theories to predict daylight propagation in and out of the water. Limits of applicability of the various theories are given, particularly the depth at which single scattering is no longer valid and higher order scattering comes in. Formulas are derived and summarized in order to provide the lecture participants with a working tool capable of application to various problems of interest.

Lecture 1.4, "Solar Energy and Seasonal Thermocline" is an application of how a strictly phenomenological description of the sea in terms of optical parameters, attenuation, scattering, absorption and surface reflection, yields a useful prediction of the thermocline depth... a problem of military and oceanographic interest.

The second session "Light Propagation in the Sea" delves into those properties of the ocean that affect the transmission of light and shows how they can be lumped into strictly phenomenological parameters sufficient to describe optical radiation.

Lecture 2.1, "Physical, Chemical and Biological Factors Pertinent to Light Propagation", first describes the basic properties of seawater that govern light behavior: temperature and salinity gradients, size and distribution of biological and inert particles, turbulence scales, thermocline depth. These basic properties are then related to the fundamental ocean optical parameter, attenuation, absorption and scattering. Existing theories that attempt to establish such relations are given along with experimental confirmation.

Lecture 2.2, "Refractive Index Fluctuations in Seawater", takes over at the phenomenological level. It presents pertinent derivations and calculations relating temperature and salinity fluctuations in the ocean to optical parameters.

Lecture 2.3, "Variation of Optical Sea Parameters with Depth", attempts to relate observations of optical parameters as a function of depth with the basic physico-chemical and biological factors

discussed in 2.1. In particular, some rudimentary theory is proposed that ties down the scattering coefficient in terms of the life cycle of biological particles around the thermocline and their distribution as a function of depth.

The third session deals with scattering theories and their confirmation by in-situ measurements.

Lectures 3.1 and 3.2, "Experimental Results of Large Angle Scattering" and "Theory of Large Angle Scattering, are restricted to large angle scattering down to a few degrees. A theoretical discussion of the relationship between the value of the scattering function at 4° or 5° and the total scattering coefficient is given as well as its experimental confirmation.

Lectures 3.3 and 3.4, "Theory of Small Angle Scattering", and Experimental Results of Small Angle Scattering", cover small angle scattering from several degrees (10° to 15°) to a few microradians. The overlap between small and large angle scattering theories around 5° provides a consistency check between the two theories. The concept of transfer function measurement to extract the scattering function is presented as well as some calculation based on in-situ experiments.

The third session forms the link between the preceding sessions on optical oceanography and the remaining ones on optical imaging.

The fourth session defines carefully the basic concepts at the root of all calculations regarding the performance of imaging systems.

Lecture 4.1, "Factors Affecting Long Range Vision", first defines and develops those optical parameters which relate directly to vision underwater. It overlaps some of the material presented in Session 2 but it is in no way detrimental. Repetition, from a different viewpoint is always fruitful in a tutorial presentation. Emphasis is placed on how optical parameters affect visibility quantitatively and how calculations are performed.

Lecture 4.2, "Criteria for Vision", a logical sequence to the previous lecture, translates the factors developed earlier into concise criteria or figures-of-merit of visibility. Particular emphasis is placed on classical criteria such as contrast which apply to eye-vision and in their relation to those like signal-to-noise ratio more suited for imaging systems capable of data processing.

Lecture 4.3, "Medium and Systems Transfer Functions" is the final embodiment of these concepts and criteria into a working tool for calculating the performance of a viewing system whether it be the eye or an imaging tube.

Session 5, "Systems Fundamentals", the last session in the series, presents the fundamental principles of operation of the major viewing subsystems, Lecture 5.1, "Sources", Lecture 5.2, "Receivers", Lecture 5.3, "Underwater Lenses". It goes on to the more recent long-range techniques, Lecture 5.4, "Long-Range Viewing Techniques" and 5.5, "Spatial Filtering and Image Restoration". The emphasis is away from hardware description but rather on basic principle of operation, upper theoretical performance limits and evaluation criteria common to many subsystems. Finally, Lecture 5.6, "Fortran Algorithms for Underwater Optics" describes in detail the computer programs which have been developed for printing out automatically achievable resolution as a function of range in terms of the system and the ocean optical parameters.

Radiance Distribution below the Sea Surface

by
Kjell Nygård
Institute of Physical Oceanography
Haraldsgade 6, 2200 Copenhagen N.
Denmark

SUMMARY

Radiance distribution as a function of depth are the most basic radiometric quantities for describing the structure of the solar and global field of radiation in the upper layers of the sea. Immediately below the sea surface the radiance distribution is chiefly determined by the radiance distribution above the surface and by the reflecting and refracting properties of the air - water interface. Through the processes of absorption and scattering by the water itself and by dissolved and suspended matter the initial radiance distribution is progressively changed with increasing depth. A survey is given of our present concepts of inherent and apparent optical properties, and simple models describing their interrelations and relations to the radiance distribution through the classical, time-independent equation of radiative transfer are presented. Some experimental data are presented and discussed. A brief account of the polarization of the underwater light field is given.

1. INTRODUCTION

A radiance distribution is a set of numbers giving the magnitude of the radiance, $L(z,\theta,\varphi)$ (power per unit surface per unit solid angle) incident at a point in space from all directions about the point. It therefore completely describes the geometrical structure of the field of radiation at the chosen wavelength or wavelength band. To obtain a complete radiance distribution experimentally involves pointing a detector with defined acceptance angle in all directions about the point. This has in the past been a slow and tedious process, involving many experimental difficulties. Therefore very few complete sets of radiance distributions have been obtained so far, and most of them have been obtained using instruments with small or moderate resolution.

Many workers have limited their measurements to one or a few azimuth angles, often defined by the vertical plane through the sun, and one or a few zenith angles. New developments in instrumentation is about to change this situation. A review of experimental results collected until now has been given by Jerlov (1), and Smith (2).

2. RADIANCE METERS

A variety of radiance meters have been designed and used by various investigators, apparently according to the principle: each experimenter his own design. Consequently the existing data are obtained with instruments which differ higly in spectral and angular resolution and in accuracy in orientation. Data obtained by different investigators are therefore usually not directly comparable. Reviews of instrument designs have been made by Jerlov (1) and Smith (2).

There are two main classes of radiance meters:

1. Those that uses an optical system to limit the acceptance angle of the detector which defines the angular resolution of the instrument. The usual optical systems are either a radiance tube (Gershun tube) (Fig. 1) or a lens-pinhole system (Fig. 2). The angular resolution of Gershun tube instruments is typically of the order of 6° - 15°, whereas lens-pinhole instruments usually have heigher resolution (1° - 5°). These instruments must, of course, comprise devices to stabilize the orientation and for scanning in vertical and horizontal planes, the design of which meet with considerable technical difficulties.

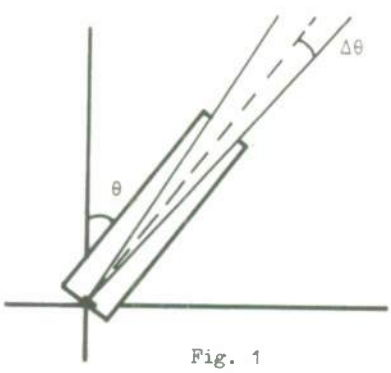


Fig. 1

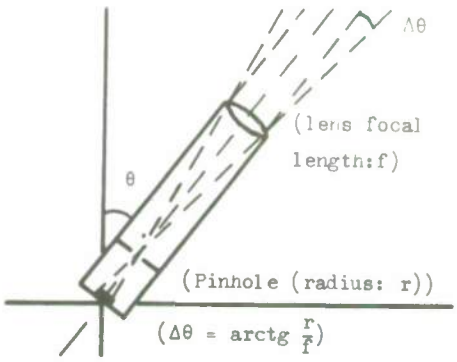


Fig. 2

2. An entirely new departure was made by Smith et al (2, 3) who designed a Radiance Camera system around a socalled fish-eye lens with an acceptance angle of nominally 180°. The geometry of the system is such that the entire hemisphere is projected with small distortion onto a photographic film in the focal plane of the fish-eye lens. Two such cameras were mounted back to back. Thus the complete radiance distribution over the whole sphere may be recorded simultaneously. The main advantages of this system over the previous ones are speed, and the possibility of highly automating

the data reduction by means of an automatic scanning microdensitometer coupled to a computer.

3. OBSERVED RADIANCE DISTRIBUTIONS

It is clear that the radiance distribution immediately below the surface is determined by the radiance distribution immediately above the surface as modified by the effects of reflection and refraction at the air-water interface. Even below a smooth water surface one would therefore expect a rather complex angular structure of the field of radiance. Below a wind-roughned and wavy surface additional large fluctuation both in direction and in amplitude must be expected as discussed in some detail in the first lecture of this series. These fluctuations are, however, largely averaged out in most of the available experimental data, partly because of the usually low angular resolution of the instruments used and also because the published data are time averages over several seconds.

Some typical examples of observed radiance distributions in the upper layers are shown in Fig. 3, 4 and 5. They are all taken in relatively turbid water and illustrate the distribution in the vertical plane of the sun only. The first distribution (Fig. 3) which was obtained by Tyler (4) on an overcast day at Lake Pend Oreille, Idaho, using an instrument with a angular resolution of 6.6^{o} illustrates very nicely some points predicted by the laws of reflection and refraction:

1. The compression of the whole upper hemisphere into the angular interval $\pm 48.6^{o}$ and the very sharp decrease in radiance for zenith angles greater than 48.6^{o}. This is perhaps the most conspicuous feature of the distribution at a depth of 2.5 cm as compared with the radiance distribution above the water.
2. The increase in magnitude of radiance at 2.5 cm depth compared with values above the surface for all zenith angles less than the critical angle 48.6^{o}. This follows from the relation

$$L(j)_w = (1 - \rho(i))\, n^2\, L(i)_a$$

deduced in lecture No. 1.

3. The distinct peak around 90° which is due to radiant energy back-scattered by the water towards the surface and then totally reflected at the surface.

Another conspicuous feature is that with increasing depth the distribution becomes less directed and more diffuse. The tranformation is so rapid that in angular interval $48.6^{o} - 90^{o}$ and in some depth intervals near the surface the radiance actually increases with increasing depth. This spectacular phenomenon, which only occurs in fairly turbid water, must be explained in terms of the scattering and absorbing properties of the water.

Looking now at Fig. 4 which shows a radiance distribution obtained by Jerlov and Fukuda (5) in Gullmar Fjord, Sweden, on a clear day, we observe the very strong radiance peak in the direction of the refracted sun rays, and the sharp decrease in radiance at the edge of Snell's circle ($\pm 48.6^{o}$ from the zenith direction) We also note that radiance increases from 0 to 1.9 m depth in most angular intervals in the upper hemisphere. The peaks at $\pm 90^{o}$ are in this case reduced to shoulders, but are still rather conspicuous.

Our third example (Fig. 5) was obtained by Sasaki et al (6) in hazy weather off Japan. We note that the radiance distribution near the surface is much more diffuse than the one illustrated in Fig. 4, but it still has a conspicuous peak in the direction of refracted sun rays. In some angular intervals radiance is higher at 5 m depth than at 1 m, although an actual increase only occur between 1 and 3 m. With increasing depth we observe that the fine structure in angular distribution is gradually lost so that at 40 m the distribution is smooth and almost symmetrical about the zenith direction.

If we exmine the distribution of radiance in the lower hemisphere, i.e. for zenith angles numerically greater than 90° we find in all our three examples that the distributions are smooth and without fine structure even very close to the surface and that there is a minimum at or close to the nadir direction. In other words, the energy back-scattered by the water is diffuse at all depths, but with a gradual increase in radiance as the direction of observation is changed from directly downwards to a horizontal direction. In Fig. 6 the data from Fig. 4 and some additional data from the same experiment have been redrawn as profiles of radiance for different zenith angles in the vertical plane of the sun. We note that in some directions the depth profiles in the logaritmic plot are straight lines which indicates a constant rate of change. In other directions the depth profiles are curved, some even displaying maximum radiance not at the surface but at some shallow depth. All depth profiles has, however, a trend to become straight and parallell with increasing depth. This strongly indicates that at least two different processes are active in the water: one which continuously dissipate energy and one which redirect energy flux into other directions than that in which it originally travelled. These are the processes of absorption and of scattering. In order to understand how the field of radiance is changed with depth we must therefore examine and obtain an understanding of the absorbing and scattering properties of water. We will do this using the classical equation of transfer for radiance as a starting point.

4. THE EQUAT'ON OF TRANSFER FOR RADIANCE

We assume that the underwater radiance distribution is in a steady state, supplied by a constant source of radiance at the surface, that no sources of radiant flux exist in the water, and that the radiant energy is nearly monochromatic and unpolarized. Under these assumptions the equation of transfer for radiance can be stated in the following classical form:

$$\frac{dL(z, \theta, \varphi)}{dr} = -c(z)L(z, \theta, \varphi) + L^{*}(z, \theta, \varphi) \qquad (1)$$

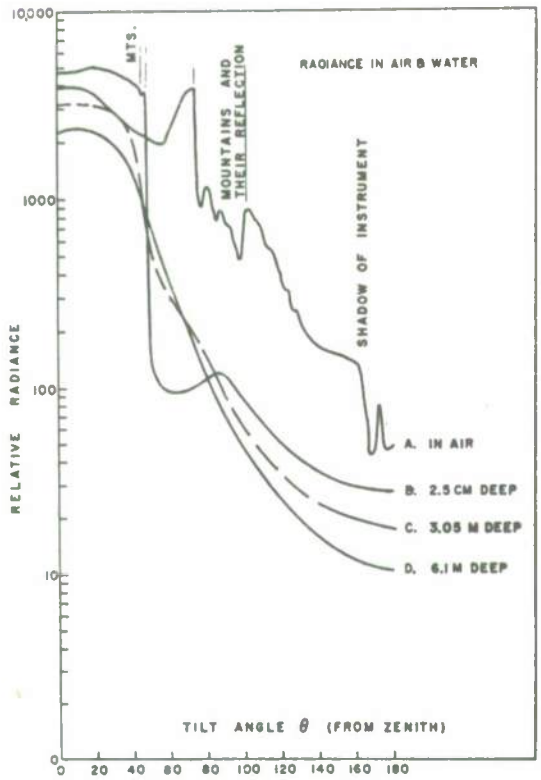


Fig. 3

Angular distribution of radiance in air and water. Overcast day. Lake Pend Oreille, Idaho. After Tyler (4).

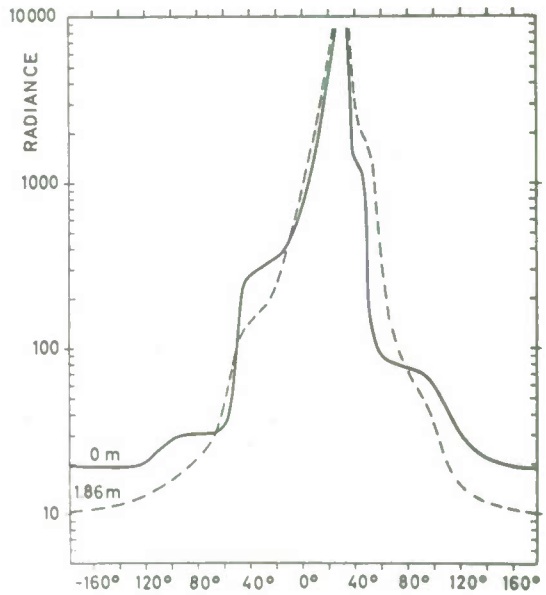


Fig. 4

Angular distribution of radiance in uppermost layers. Clear day. Gullmar Fjord, Sweden. After Jerlov and Sukuda (5).

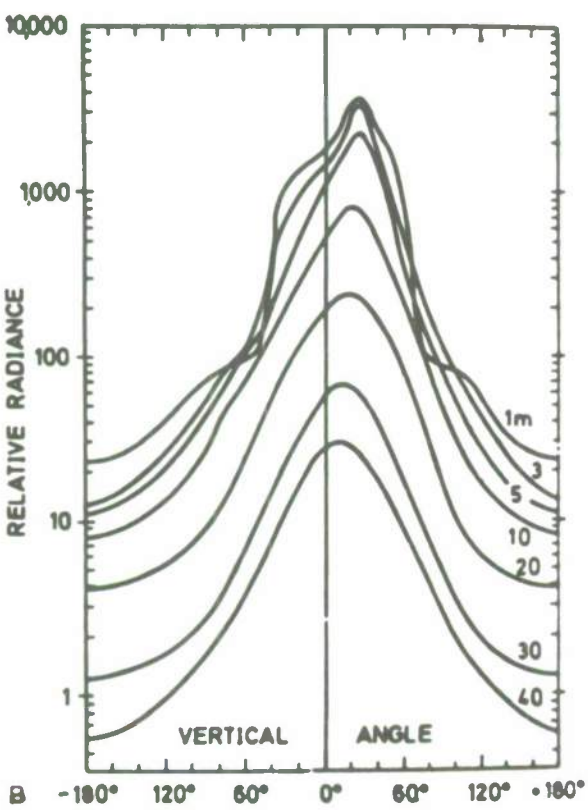


Fig. 5

Angular distribution of radiance. Hazy weather. Off Japan. After Sasaki et.al. (6)

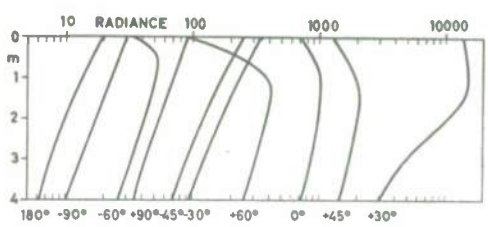


Fig. 6

Observed radiance as function of depth for different zenith angles in the vertical plane of the sun. Green light (535 nm). Sun at +30°. From same experiment as Fig. 4.

where

$$L^{*}(z, \theta, \varphi) = \int_{4\pi} \beta(z, \theta, \varphi, \theta', \varphi') L(z, \theta', \varphi') d\omega(\theta', \varphi') \quad (2)$$

The path function or sterisent, L^{*}, is the radiance per unit length in the direction of the line of sight, generated by radiant flux scattered into the line of sight from all directions about the point z.

$\beta(z, \theta, \varphi, \theta', \varphi')$ is the volume scattering function at point z for radiant flux incident in the direction θ', φ', and scattered off in the direction (θ, φ)

c(z) is the total attenuation coefficient

$$c(z) = a(z) + b(z) \quad (3)$$

Here a(z) is the absorption coefficient and b(z) is the total scattering coefficient given by

$$b(z) = \int_{4\pi} \beta(z, \theta, \varphi, \theta', \varphi') d\omega(\theta', \varphi') \quad (4)$$

and

$$z = r \cos \theta \quad (5)$$

i.e. θ is the angle between zenith and the direction of motion of the flux.

The first term on the right in eq. (1) gives the space rate of loss of radiance $L(z, \theta, \varphi)$ by attenuation along a direction of travel, the second term gives the space rate of gain of $L(z, \theta, \varphi)$ by rescattering of radiant flux back into the original direction of travel. The parameters a, b, c and β are called the inherent optical properties of the water because they at a given point are invariant under all changes of the radiance distribution at that point. They all have the dimension of inverse length (m^{-1}).

Before we start a more detailed discussion of the equation of transfer and its solutions we will briefly review these inherent optical properties.

5. INHERENT OPTICAL PROPERTIES OF SEA WATER

The inherent optical properties of a water mass represent the combined optical effect of the water itself and of suspended and dissolved matter. We therefore write:

$$c = c_w + c_p + c_y \quad (6)$$

where

c = total attenuation coefficient, as before

c_w = attenuation coefficient for water

c_p = attenuation coefficient for particles

c_y = attenuation coefficient for dissolved matter

and

$$c_w = a_w + b_w \quad (7a)$$

$$c_p = a_p + b_p \quad (7b)$$

$$c_y = a_y + b_y \quad (7c)$$

where

a_w = absorption coefficient for water

a_p = absorption coefficient for particles

a_y = absorption coefficient for dissolved matter

b_w = scattering coefficient for water

b_p = scattering coefficient for particles

b_y = scattering coefficient for dissolved matter, usually negligible.

It is an established experimental fact that it is extremely difficult to make and to keep optically pure, particle free water. Therefore no really precise measurements of the attenuation coefficients of water are as yet available. The difficulties are particularly manifest when it comes to experimental determination of the volume scattering function because even minute traces of particulate matter have an enormous influence on scattering in the forward direction.

The values given in Table I below are generally believed to be accurate, and although strictly valid only for pure water they should also be representative for pure sea water, since it

has been shown that the sea salts only has a minor influence on the optical properties.

Wavelength (nm)	Transmittance (%/m)	Attenuation coefficient c (m^{-1})	Scattering coefficient b (m^{-1})
	Clarke and James (1939) (7)		Le Grand (1939)(8)
375	95.6	$45 \cdot 10^{-3}$	$6.64 \cdot 10^{-3}$
400	95.8	$43 \cdot 10^{-3}$	$5.03 \cdot 10^{-3}$
425	96.8	$33 \cdot 10^{-3}$	$3.89 \cdot 10^{-3}$
450	98.1	$19 \cdot 10^{-3}$	$3.05 \cdot 10^{-3}$
475	98.2	$18 \cdot 10^{-3}$	$2.43 \cdot 10^{-3}$
500	96.5	$36 \cdot 10^{-3}$	$1.97 \cdot 10^{-3}$
525	96.0	$41 \cdot 10^{-3}$	$1.60 \cdot 10^{-3}$
550	93.3	$69 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^{-3}$
575	91.3	$91 \cdot 10^{-3}$	$1.11 \cdot 10^{-3}$
600	83.3	$186 \cdot 10^{-3}$	$0.93 \cdot 10^{-3}$
625	79.6	$228 \cdot 10^{-3}$	$0.78 \cdot 10^{-3}$
650	75.0	$288 \cdot 10^{-3}$	$0.67 \cdot 10^{-3}$
675	69.3	$367 \cdot 10^{-3}$	$0.58 \cdot 10^{-3}$
700	60.7	$500 \cdot 10^{-3}$	$0.49 \cdot 10^{-3}$
725	29	$1,240 \cdot 10^{-3}$	$0.43 \cdot 10^{-3}$
750	9	$2,400 \cdot 10^{-3}$	$0.38 \cdot 10^{-3}$
775	9	$2,400 \cdot 10^{-3}$	$0.33 \cdot 10^{-3}$
800	18	$2,050 \cdot 10^{-3}$	$0.29 \cdot 10^{-3}$

Table I. Observed transmittance and attenuation coefficient, and theoretical scattering coefficient for pure water.

On examining Table I we note:

1. The attenuation is primarily an absorption effect. Scattering is only important in the blue and ultraviolet. In the red and infrared scattering rapidly becomes negligible compared with absorption.
2. The total attenuation coefficient has a minimum in the blue at a wavelength of approximately 475 nm and increases relatively slowly with decreasing wavelength. Towards the red the increase is much more rapid, particularly in the interval 560 - 600 nm. Red light is very strongly attenuated. Water is therefore essentially a monochromator for blue light.

5.1. The Volume Scattering Function $\beta(\theta)$

The volume scattering function is conventionally defined as the radiant intensity $dI(\theta)$ (flux per unit solid angle) scattered from a volume element in a given direction θ per unit of irradiance on the volume element and per unit volume.

$$\beta(\theta) = \frac{dI(\theta)}{E dv} \qquad (m^{-1}\ sr^{-1}) \tag{8}$$

An alternative but equivalent definition may be derived from the path function in eq. 4 by considering the field of radiance to be uniform and equal to $L(0)$ within a small solid angle $\Delta\Omega$ about a direction 0 and zero in all other directions. Then the corresponding path function ΔL^* in an arbitrary direction θ is given by

$$\Delta L^* = \beta(\theta)\, L(0) \cdot \Delta\Omega$$

from which follows

$$\beta(\theta) = \frac{\Delta L^*}{L(0)\, \Delta\Omega} \tag{9}$$

For pure water the elementary Rayleigh theory gives for the scattered intensity, $I(\theta)$, in the direction θ, where θ is the angle between the incident flux and the scattered flux

$$I(\theta) = I_o \cdot \lambda^{-4} (1 + \cos^2\theta) \tag{10}$$

i.e. the scattered intensity is:

1. Inversely proportional to the fourth power of the wavelength.
2. The intensity varies only with a factor of two when θ varies from 90° to 0°, and from 90° to 180°.
3. The scattered intensity has equal maxima in the forward and backward direction.

A more elaborate theory due to Einstein and Smoluchowski which attributes scattering to fluctuations in density or concentration and takes into account the anisotrophy of the water molecules which gives rise to depolarization of the scattered radiation gives:

$$I = I_o \cdot \lambda^{-4} \left(1 + \frac{1 - \delta}{1 + \delta} \cos^2 \theta\right) \tag{11}$$

where the depolarization defect term δ has been determined to be 0.09.

The values in Table II has been computed from this theory.

Scattering angle θ (^{o})	Scattering function $\beta(\theta)$ 460 nm
0-180	$3.17 \cdot 10^{-4}$
10-170	$3.13 \cdot 10^{-4}$
20-160	$3.00 \cdot 10^{-4}$
30-150	$2.80 \cdot 10^{-4}$
45-135	$2.45 \cdot 10^{-4}$
60-120	$2.11 \cdot 10^{-4}$
75-105	$1.86 \cdot 10^{-4}$
90	$1.74 \cdot 10^{-4}$

Table II. Theoretical scattering function for pure water.
(After Le Grand, 1939)

The addition of even minute concentrations of particulate matter bring about a drastic change in the angular dependence of $\beta(\theta)$, particularly in the forward direction. This is evident from the experimental curves in Fig. 7, 8 and 9 which were obtained in the optically higly contrasting waters of the Sargasso Sea and the Baltic. The water of the Sargasso Sea has very low concentrations both of particles and of dissolved organic matter, whereas Baltic water has an abundance of both. Fig. 7 and 8 show total scattering functions for blue light and red light respectively. In Fig. 7 a curve obtained by Morel for highly purified distilled water is included for comparison.

The curves in Fig 9 for particle scattering functions are obtained from measured total scattering functions by subtracting the theoretical values for pure water. Looking at these curves we observe that $\beta(\theta)$, instead of increasing with a factor of two when θ decreases from 90° to 0°, in all cases increases about 10 000 times. This remarkable concentration of the scattered radiation in a small angular interval in the forward direction is characteristic for all natural waters and indicates that particles greater than the wavelength of light are the chief agent for producing the scatterance. On the other hand the absence of distinct peaks in the $\beta(\theta)$-curves indicate a broad distribution of particle sizes.

5.2. The Total Scattering Coefficient b

The total scattering coefficient is obtained by integrating the volume scattering function over all angles

$$b = \int_{4\pi} \beta(\theta) d\omega = 2\pi \int_0^{\pi} \beta(\theta) \sin\theta \, d\theta \tag{12}$$

with $d\omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$

It is sometimes convenient to split b in two parts:

The forward scattering coefficient b_f defined by

$$b_f = 2\pi \int_0^{\pi/2} \beta(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

and the backward scattering b_b defined by

$$b_b = 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \beta(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

From the shape of $\beta(\theta)$ it is clear that $b_f >> b_b$. Typically $b_f \approx 50\, b_b$.

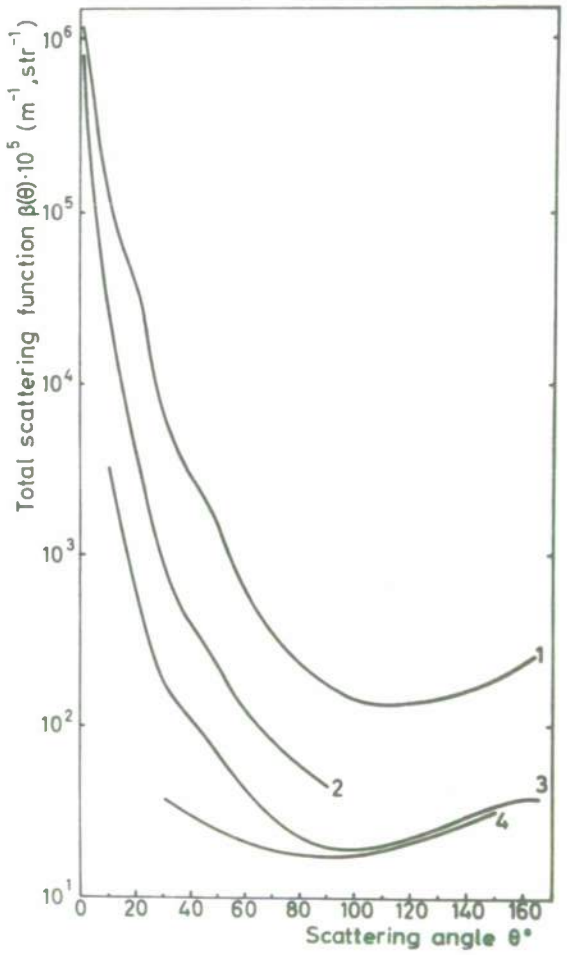


Fig. 7. Total scattering functions

1. Baltic, station 2, 488 nm, 10 m
2. Baltic, station 2, 488 nm, 40 m
3. Sargasso Sea 460 nm, 10–75 m
4. Morel (1966), distilled water (460 nm)

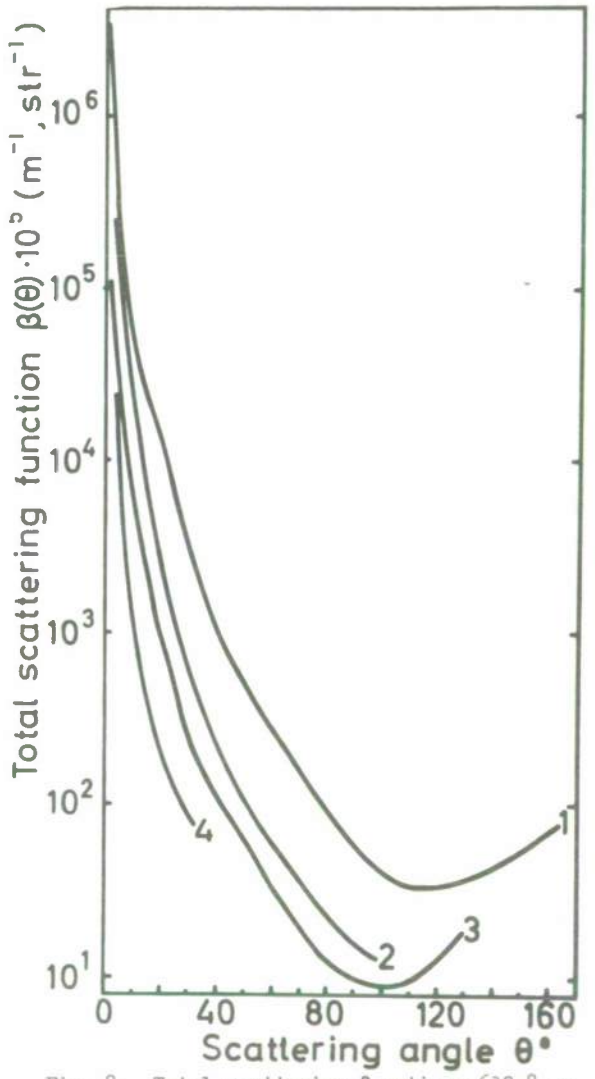


Fig. 8. Total scattering functions 632.8 nm

1. Baltic, station 3, 10 m
2. Baltic, station 3, 40 m
3. Sargasso Sea, 10– 75 m
4. Sargasso Sea, 400 m

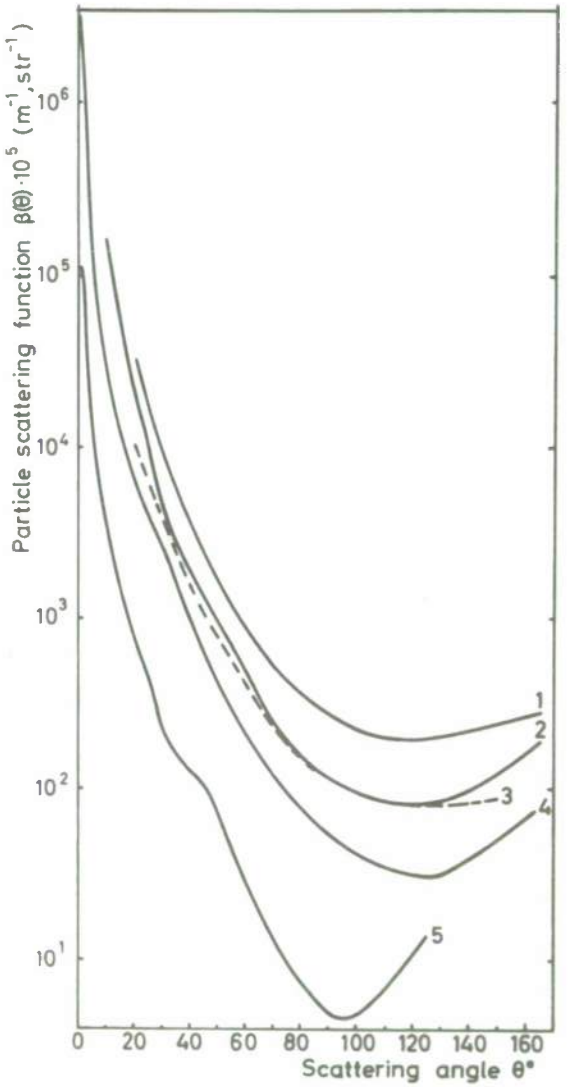


Fig. 9. Particle scattering functions

1. Baltic, station 3, 510 nm, 10 m
2. Baltic, station 3, 525 nm, 10 m
3. Tyler (1961), 522 nm
4. Baltic, station 3, 632.8 nm, 10 m
5. Sargasso Sea, 632.8 nm, 10–75 m

5.3. The Absorption Coefficient a

The absorption coefficient, a, represent the loss of radiance due to conversion of radiant energy into other forms of energy, usually heat. The absorption coefficient is usually obtained as the difference between an experimentally determined total attenuation coefficient and a measured or computed total scattering coefficient:

$$a = c - b$$

This procedure is adopted because of the great experimental difficulties involved in direct measurements of the absorption coefficient. However, a direct experimental method for determining a will be described below.

The absorption coefficient for pure water, a_w, is strongly wavelength dependent and have a broad minimum in the blue.

The absorption coefficient for particles, a_p, is less dependent on wavelength but will generally increase towards shorter wavelengths. Examples of coloured, selectively absorbing, particles have been found, but are not common.

The absorption coefficient for dissolved substances, a_y, is negligible in the red and show a strong increase towards shorter wavelengths.

The optically most active of the dissolved substances normally found in sea water is a complex mixture of numerous different, relatively stable, organic compounds of yellow or brown colour known under the collective name "yellow substance". The chemical composition of yellow substance will vary from place to place and to some extent also with time. In coastal areas, especially in northern regions, a large proportion may be humus compounds of terrestrial origin brought into the sea by rivers. In off shore areas the materiel is mainly of marine origin and consists primarily of decomposition products from marine algae. The concentration is therefore particularly high in areas of high productivity. It should be noted that yellow substance also exhibit fluorescence in the blue/green when irradiated by ultraviolet light. The fluorescence is strongest for yellow substance of marine origin.

5.4. Summary

A qualitive summary of the absorbing and scattering characteristics of the different factors that play a part in the attenuation of radiant energy in the sea is given in the table below.

Summary of scattering and absorption characteristics.

	Absorption		Scattering	
	character	λ -dependence	character	λ -dependence
water	invariant at constant temp. and pressure	strong, min. at approx. 470 nm	invariant, small compared to absorption	
sea salts (inorganic)	negligible in visible weak in ultra-violet	some increase towards shorter wavelengths	-	-
suspended particulate matter	variable	increase toward short wave-lengths	variable	usually independent of wave-length
dissolved organic matter "yellow substance"	variable	increase toward short wave-lengths	-	-

A few examples of values of inherent optical properties are brought together in Table III. They are intended to show the order of magnitude which may be expected in different areas and to give an idea of the relative importance of the different factors.

Region	λ- (nm)	$c-c_w$	b_p m^{-1}	a_p m^{-1}	a_y m^{-1}	Reference
Sargasso Sea	440	0.05	0.04	0.01	~ 0	(1)
	633	0.032	0.023	0.009	~ 0	(9)
Caribbean	440	0.09	0.06	~ 0	0.03	(1)
	655	0.06	0.06	~ 0	~ 0	
Galapagos	440	0.24	0.08	0.04	0.12	(1)
	655	0.11	0.07		~ 0	
South Baltic Sea	380	1.15	0.21	0.28	0.66	
	655	0.27	0.20	0.07	~ 0	(1)

Table III. Regional comparison of inherent properties.

6. APPARENT OPTICAL PROPERTIES

An apparent optical property is one which is not dependent of the geometrical structure of the field of radiance, but depend jointly on the inherent optical properties as defined above and on the geometrical structure of the field of radiance as it exists at the time of measurement. The logical and systematic development of the concepts of apparent optical properties is mainly due to Preisendorfer who introduced the term and used the e properties in his theoretical development of the theory of transfer as applied to the sea to express characteristic properties of radiance distributions as functions of depth in terms of readily measurable qualities. (10)

Before defining the apparent properties we will first define some further irradiance concepts and will do this by formally integrating the equation of transfer.

6.1. Formal Integration of the Equation of Transfer

Let us consider the equation of transfer for monochromatic unpolarized light in the following form:

$$\cos\theta \frac{dL(z,\theta,\varphi)}{dz} = - c(z) L(z,\theta,\varphi) + L^{*}(z,\theta,\varphi) \tag{13}$$

Now let us integrate over all directions about a point at depth z assuming the horizontal gradient of the field of radiance to be zero. We may then write:

$$\frac{d}{dz}\int_{4\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega = - c(z)\int_{4\pi} L(z,\theta,\varphi)\, d\omega + \int_{4\pi} L^{*}(z,\theta,\varphi)\, d\omega \tag{14}$$

where $d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$. The integral on the left hand side may be written:

$$\frac{d}{dz}\int_{4\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega = \frac{d}{dz}\int_{+2\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega - \frac{d}{dz}\int_{-2\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega \tag{15}$$

where $+2\pi$ indicates integration over the upper hemisphere and -2π indicates integration over the lower hemisphere. We now define the following quantities:

The irradiance $E(z)$ defined by the relation

$$E(z) = \int_{4\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega \tag{16}$$

is the net downward flux per unit horizontal surface at the depth z. $E(z)$ may be considered as the algebraic sum of two streams of flux: A downward flux given by the downward (or downwelling) irradiance $E_d(z)$ and an upward flux given by the upward (or upwelling) irradiance $E_u(z)$. $E_d(z)$ and $E_u(z)$ are defined by the relations:

$$E_d(z) = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} L(z,\theta,\varphi)\cos\theta\, d\omega \tag{17}$$

$$E_u(z) = \int_{\theta=\pi}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} L(z,\theta,\varphi)\left|\cos\theta\right| d\omega \tag{18}$$

The integrations indicated in eq. (17) and (18) are easily performed optically using cosine collectors.

Thus $E_d(z)$ is the flux per unit area measured by a horizontal cosine collector facing upward at depth z. Similarly $E_u(z)$ is the flux per unit area measured by a horizontal cosine collector facing downward.

The integral of a radiance distribution, at a point at depth z, over all directions about the point is the scalar irradiance, E_o :

$$E_o(z) = \int_{4\pi} L(z,\theta,\varphi)\, d\omega \tag{19}$$

It is sometimes convenient to consider separately the scalar irradiance due to radiant flux received from the upper and the lower hemisphere. These may be written, respectively:

$$E_{od}(z) = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} L(z,\theta,\varphi)\, d\omega \tag{20}$$

$$E_{ou}(z) = \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} L(z, \theta, \varphi) d\omega \tag{21}$$

where

$$E_o(z) = E_{od}(z) + E_{ou}(z) \tag{22}$$

If the scalar irradiance is divided by the velocity of light in the medium, we obtain the radiant energy density, i.e. the available radiant energy per unit volume at a given point in space. The last integral on the right hand side of eq. (13) may be transformed in the following way:

$$\int_{4\pi} L^*(z, \theta, \varphi) d\omega = \int_{4\pi} \int_{4\pi} L(z, \theta, \varphi)\, \beta(z, \theta, \varphi; \theta', \varphi') d\omega\, d\omega'$$

$$= \int_{4\pi} L(z, \theta, \varphi) d\omega \int_{4\pi} \beta(z, \theta, \varphi; \theta', \varphi') d\omega' \tag{23}$$

or

$$\int_{4\pi} L^*(z, \theta, \varphi) d\omega = E_o(z)\, b(z)$$

where we have made use of the definitions of L^* and b(z) according to eq. (2) and (4). Making use of these results and definitions we can write eq. (14) in the following form:

$$\frac{dE(z)}{dz} = \frac{d}{dz}(E_d(z) - E_u(z)) = -c(z)\, E_o(z) + b(z)\, E_o(z)$$

or, because

$$c(z) = a(z) + b(z)$$

$$\frac{d}{dz}\left[E_d(z) - E_u(z)\right] = -a(z)\, E_o(z) \tag{24}$$

and

$$a(z) = \frac{1}{E_o(z)} \frac{d}{dz}\left[E_u(z) - E_d(z)\right] \tag{25}$$

Eq. (25) which relates the absorption coefficient a(z) directly to the scalar irradiance and to the rate of change with depth of the net upward irradiance was first derived by Gershun (12, 13) and later independently by Preisendorfer (10, 14).

Of the quantities on the right hand side of eq. 25 E_d and E_u and their rate of change with depth are simple and straight forward to measure directly. The measurement of E_o is more difficult. It requires a collector which has equal collecting properties in all directions. This has been difficult, if not impossible to achieve in practice.

Recently Smith and Wilson (15) have suggested the use of two "fish-eye" lenses mounted back to back and protected behind transparent hemispheres as a collector for scalar irradiance. This suggestion might provide a practical solution to the problem.

Another practical solution which has been used by several workers is to use a spherical irradiance collector, every elemental surface area of which is a cosine collector. This will not measure the scalar irradiance E_o, but a quantity called the spherical irradiance E_s, which is defined as the limit of the ratio of radiant flux onto a spherical surface to the area of the surface, as the radius of the sphere tends to zero with its centre fixed.

$$E_s \lim_{r \to 0} \frac{F_r}{4\pi r^2} \tag{26}$$

where F_r is the radiant flux onto the sphere of radius r.
It is easily proved that for all radiance distributions:

$$E_o = 4 E_s \tag{27}$$

Thus the variable E_s may be used in eq. (25) as a substitute for the theoretically more satisfactory E_o. Difficulties do, however, arise in practice, because true spherical cosine collectors are difficult both to make and to evaluate.

6.2. Attenuation Coefficients for Radiance and Irradiance

The apparent optical properties commonly used for describing an underwater field of radiant flux and its change with depth are parameters defined in terms of radiance, $L(z, \theta, \varphi)$, the irradiances $E_d(z)$, $E_u(z)$, and $E_o(z)$ and the depth derivatives of these quantities.

The most important group of apparent properties is the attenuation coefficients which are

defined as follows:

1. Atenuation coefficient for radiance, $K(z,\theta,\varphi)$:

$$K(z,\theta,\varphi) = -\frac{1}{L(z,\theta,\varphi)} \frac{\partial L(z,\theta,\varphi)}{\partial z} \tag{28}$$

or alternatively:

$$\overline{K}(z,\theta,\varphi) = -(z_2 - z_1)^{-1} (\ln L(z_1,\theta,\varphi) - \ln (z_2,\theta,\varphi)$$

where $\overline{K}(z,\theta,\varphi)$ is the mean attenuation coefficient in the depth interval z_1 to z_2.

2. Attenuation coefficient for path function $K^*(z,\theta,\varphi)$;

$$K^*(z,\theta,\varphi) = -\frac{1}{L^*(z,\theta,\varphi)} \frac{\partial L^*(z,\theta,\varphi)}{\partial z} \tag{29}$$

3. Attenuation coefficient for irradiance, $K(z)$:

$$K(z) = -\frac{1}{E(z)} \frac{\partial E(z)}{\partial z} \tag{30}$$

4. Attenuation coefficient for downward irradiance, $K_d(z)$:

$$K_d(z) = -\frac{1}{E_d(z)} \frac{\partial E_d(z)}{\partial z} \tag{31}$$

5. Attenuation coefficient for upward irradiance, $K_u(z)$:

$$K_u(z) = -\frac{1}{E_u(z)} \frac{\partial E_u(z)}{\partial z} \tag{32}$$

6. Attenuation coefficient for scalar irradiance, $K_o(z)$:

$$K_o(z) = -\frac{1}{E_o(z)} \frac{\partial E_o(z)}{\partial z} \tag{33}$$

7. Attenuation coefficient for spherical irradiance $K_s(z)$:

$$K_s(z) = -\frac{1}{E_d(z)} \frac{\partial E_s(z)}{\partial z} \tag{34}$$

Attenuation coefficients for upward and downward, scalar and spherical irradiance are defined in a similar way.

All attenuation coefficients have of course units of reciprocal length (m^{-1}). It should perhaps be pointed out that these attenuation coefficients are in general all functions of the radiance distribution at the surface, i.e. of atmospheric conditions and solar elevation angle, of the inherent optical properties of the water and, even in homogenous water, of depth z, because the angular distribution of radiance changes with depth. It is, however, found that they display a striking regularity and thus are very useful for describing the rate of change of radiance and irradiance with depth. To facilitate comparison between measurements the atmospheric conditions under which an attenuation coefficient is measured, and in particular the solar elevation angle, should always be specified. In particular it must be stressed that the attenuation coefficient for radiance $K(z,\theta,\varphi)$ is also a function of direction at a given point, maximum values generally being found in the direction of refracted sun rays. Near the surface $K(z,\theta,\varphi)$ may attain negative values in some directions. Attenuation coefficients for irradiance are always positive.

6.3. Irradiance Ratio, R(z)

The irradiance ratio or irradiance reflectance is defined as:

$$R(z) = \frac{E_u(z)}{E_d(z)} \tag{35}$$

R(z) may be thought of as the reflectance of a hypothetical plane surface at depth z. It depends upon and contains information about the scattering properties of the entire medium above and below the level z.

6.4. Distribution functions, $D_d(z)$ and $D_u(z)$

American workers, especially Preisendorfer and his colleagues, have often used the

down- and upwelling distribution functions $D_d(z)$ and $D_u(z)$ as a simple means of characterizing the depth dependence of the shape of the radiance distribution. These functions are defined as:

$$D_d(z) = \frac{E_{cd}(z)}{E_d(z)} \tag{36}$$

and

$$D_u(z) = \frac{E_{ou}(z)}{E_u(z)} \tag{37}$$

European workers have sometimes used the ratios $\frac{E_o}{E_d}$ or $\frac{E_o}{E_u}$ in a similar, but not so specific, way, but without giving the ratios names.

6.5. As a simple example of the application of the parameters defined above we rewrite eq. 25 giving a(z) as function of directly measurable quantities. Substituting $K_d(z)$, $K_u(z)$, and $R(z)$ we get directly.

$$a(z) = \frac{1}{E_d(z)}(- K_u(z) E_u(z) + K_d E_d(z))$$

or

$$a(z) = \frac{E_d(z)}{E_o(z)} (K_d(z) - K_u(z) R(z)) \tag{38}$$

7. EXAMPLES OF IRRADIANCE DISTRIBUTIONS

It is clear that when we integrate a radiance distribution to obtain an irradiance value we loose information on the angular distribution of radiant flux. The prime advantage of the irradiance concepts, especially E_d and E_u is that they are relatively easy and quick to measure as functions of depth compared with complete radiance distributions, and still contain a lot of information on the changes with depth of radiant energy. This is particularly important when complete spectral information is required. Complete spectral radiance data as function of depth are as yet practically nonexistent due to the excessive amount of time and labour required to obtain them. Spectral irradiance data are available for some oceanic areas, and are now being obtained at an increasing rate due to the development of modern, fast instruments (1, 16, 17, 18, 19).

Fig. 10 shows the depth dependeance of E_d at a few selected wavelengths in relatively clear, homogeneous water. We notice the curvature in the semilogorithmic plots, especially in the short wave part of the spectrum, which indicate that K_d tend to increase with depth.

Fig. 11 is an example of the spectral distribution of E_d at a few selected depths, also in clear homogenous water.

Already early simple theories which assumed isotropic scattering ($\beta(\theta)$ = const) or considered Rayleigh scattering of direct sun rays only, were able to predict the essentiel feature that E_d was attenuated less in the upper layers than in deep layers, so that a plot of $\ln E_d$ versus depth, z, showed curvature, or in other words that $K_d(z)$ had a tendency to increase with z even in homogeneous water. However, the established experimental fact that the scattering is dominantly in the forward directions makes it necessary to take this dominant feature into proper account.

We will now consider a simple general model due to Jerlov and Fukuda (5) involving only single scattering.

8. SIMPLE INTEGRATION OF SCATTERED LIGHT

We assume that near the surface direct solar radiation is the only source of scattered radiation so that multiple scattering may be neglected.

The spectral downwelling irradiance $E_d(0, \lambda)$ immediately below the surface and the total attenuation coefficient $c(\lambda)$ below the surface is assumed known and constant. In the following we will consider only monochromatic radiation and simplify notation by writing E for $E_d(\lambda, z)$. With reference to fig. 12 we then have for the irradiance on a small volume element dv at an arbitrary point at depth x:

$$E \sec j \, e^{-cx\sec j} \tag{39}$$

The scattered intensity dI from dv in the direction (θ, φ), which forms an angle α to the incident beam is then by definition given by

$$dI = E \sec j \, e^{-cx\sec j} \beta(\alpha) \, dv \tag{40}$$

where the angle α is given by:

$$\cos\alpha = \cos j \cos\theta + \sin j \sin\theta \cos\varphi \tag{41}$$

provided the azimuth $\varphi = 0$ for the plane of incidence.

The scattered irradiance dE_{sc} at Q on a plane normal to PQ is then:

$$dE_{sc} = E \sec j \cdot e^{-cx\sec j} \beta(\alpha) r^{-2} \cdot e^{-cr} \, dv \tag{42}$$

where r is the distance from P to Q.

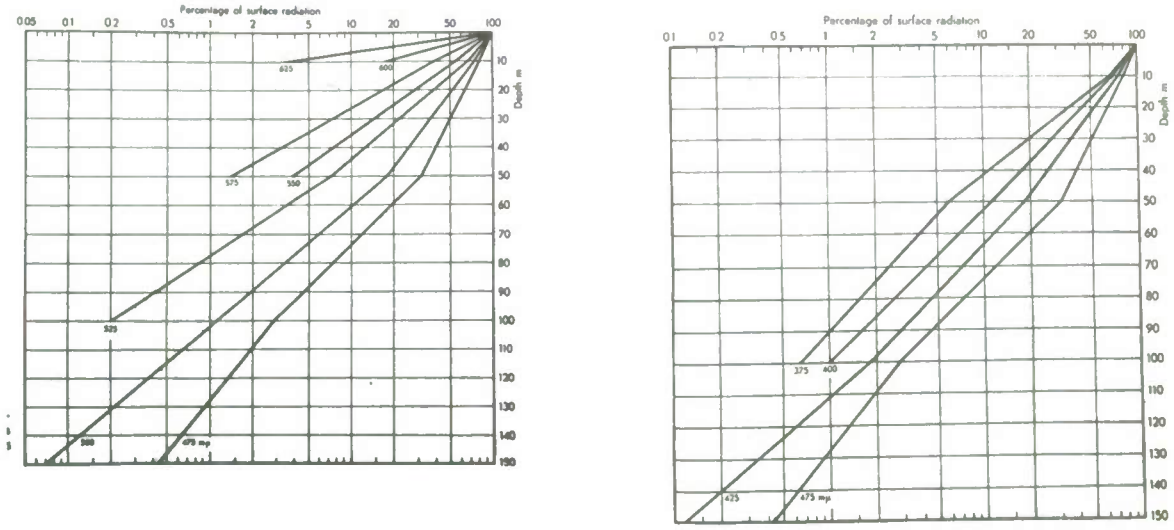


Fig. 10
Depth dependence of downward irradiance at different wavelengths. Western North Atlantic (N 30.5°, W 56°). After Jerlov (16)

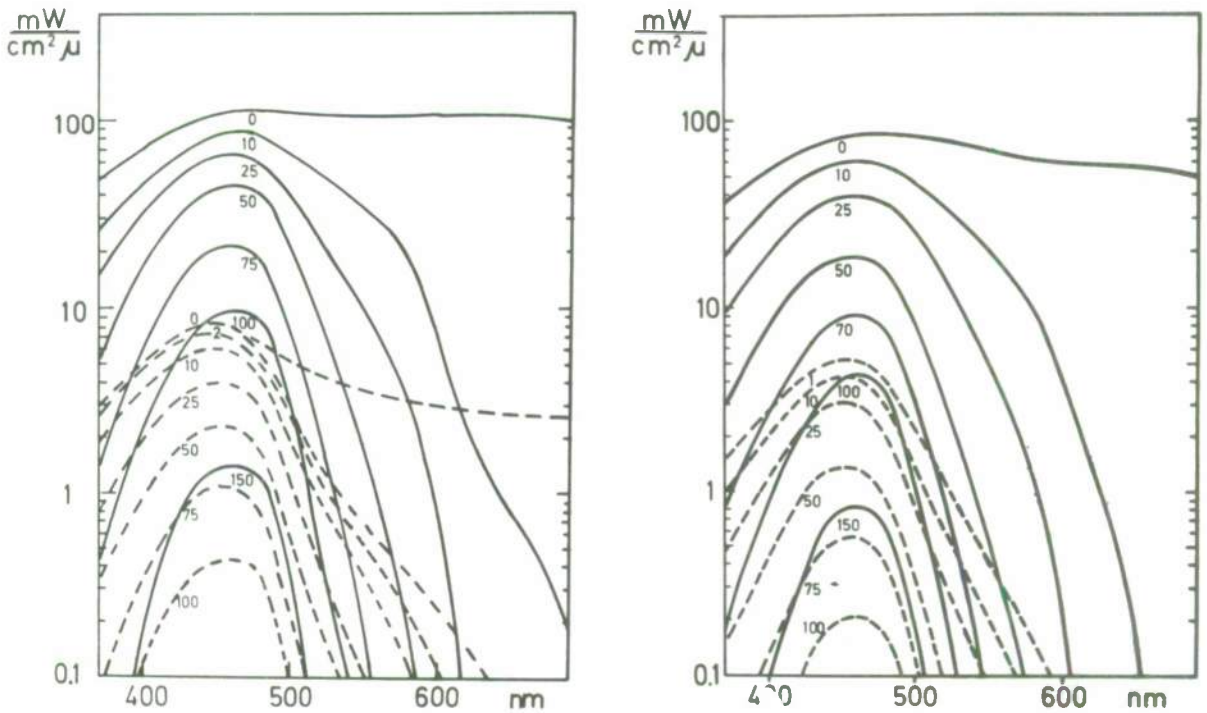


Fig. 11 a

Fig. 11 b

Spectral irradiance at selected depths in the Sargasso Sea, March 1966.

$E_d(\lambda)$ ————

$E_u(\lambda)$ ----------

a) solar elevation approx 56°

b) solar elevation approx 30°

After Lundgren and Højerslev (19)

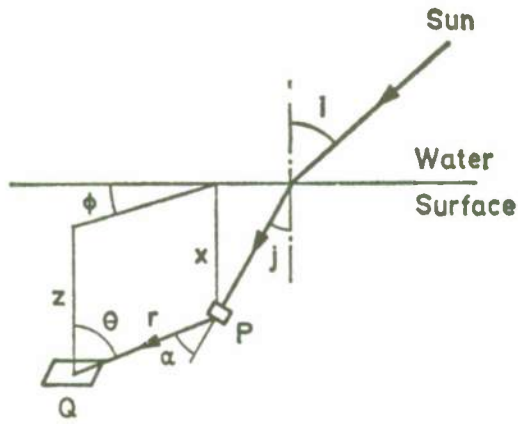


Fig. 12

8.1. Scattered Radiance

If we now consider that the volume element is:

$$dv = r^2 \, dr \, d\omega \tag{43}$$

and that the scattered radiance at Q from the volume element is given by

$$L_r = \frac{dE_{sc}}{d\omega} \tag{44}$$

we have

$$L_r = E \sec j \, e^{-cx\sec j} \, \beta(\alpha) \cdot e^{-cr} \, dr \tag{45}$$

For simplicity we limit ourselves to consider scattered radiance in the vertical plane of the sun, i.e. in the plane of incidence. We then have

$$\alpha = \theta - j$$

$$x = z - r \cos \theta$$

Substituting in eq. (42) and integrating with respect to r from $r = 0$ to $r = z \sec\theta$. i.e. from depth z to the surface along the direction θ, we obtain the total radiance $L(\theta)$ scattered into the direction θ in the upper hemisphere $(0 < \theta < \pi/2)$:

$$L(\theta) = E \sec j \, \frac{\beta(\theta - j)}{c} \, \frac{\sec\theta}{\sec\theta - \sec j} \cdot e^{-cz\sec j} \left(1 - c^{-c(\sec\theta - \sec j)z} \right) \tag{46}$$

If the logarithm of $L(\theta)$ computed according to eq. (46) is plotted against depth with θ as parameter we get a series of curves which start at zero at the surface and increases to reach a maximum at a depth z_m. At greater depths $L_{(\theta)}$ decreases. The depth of maximum scattered radiance is easily shown to be given by

$$z_m = \frac{1}{c} \, \frac{\ln \sec\theta - \ln \sec j}{\sec\theta - \sec j} \tag{47}$$

Eq. (47) reduces to

$$z_m = \frac{1}{c} \cos j \tag{48}$$

for $\theta = j$. z_m is 0 for $\theta = \pi/2$ and has its maximum for $\theta = 0$.

The radiance scattered into the direction θ in the lower hemisphere $(\pi/2 < \theta < \pi)$ is obtained by integrating with respect to r from $r = 0$ to $r = \infty$, i.e. from depth z to infinite depth. We get in this case:

$$L(\theta) = E \sec j \, \frac{\beta(\theta - j)}{c} \, \frac{\sec\theta}{\sec\theta - \sec j} \cdot e^{-cz\sec j} \tag{49}$$

In this case a logarithmic plot of $L(\theta)$ versus depth gives a straight line with apparent attenuation coefficient $K = c \sec j$.

Jerlov and Fukuda (5) have tested this simple theory in relatively turbid water characterized by: $c = 0.5$, $b = 0.3$ for $\lambda = 535$ nm. They found good agreement between computed and experimental values in the uppermost layers.

8.2. Scattered Irradiance

The downward irradiance dE_{dsc} at Q due to light scattered from dv at P is from (45)

$$dE_{dsc} = L_r \cos\theta \, d\omega = E \sec j \, e^{-cx\sec j} \beta(\alpha) \cdot e^{-cr} \cos\theta \, dr \, d\omega \tag{50}$$

or with

$$d\omega = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \tag{51}$$

$$dE_{dsc} = E \sec j \, e^{-cx\sec j} \beta(\alpha) \cdot e^{-cr} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \tag{52}$$

The total downward scattered irradiance E_{dsc} at depth z is then found by integrating over all directions in the upper hemisphere and with respect to r from 0 to $z \sec\theta$, which gives:

$$E_{dsc}(z) = E \sec j \cdot e^{-cz\sec j} \frac{1}{c} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\beta(\alpha)\sin\theta}{\sec\theta - \sec j} \left(1 - e^{-cz(\sec\theta - \sec j)}\right) d\varphi \, d\theta \tag{53}$$

If skylight is neglected, the total downward irradiance $E_d(z)$ is the sum of the direct and the scattered downward irradiance, namely

$$E_d = E \cdot e^{-cz\sec j} \left(1 + \frac{\sec j}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\beta(\alpha)\sin\theta}{\sec\theta - \sec j} \left(1 - e^{-cz(\sec\theta - \sec j)}\right) d\varphi \, d\theta\right) \tag{54}$$

To find the upward irradiance, $E_u(z)$, we integrate eq. (52) over all directions in the lower half plane and with respect to r from r = 0 to r = ∞, and get

$$E_u = E_{\sec j} \cdot e^{-cz\sec j} \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\beta(\alpha)\sin\theta}{\sec\theta - \sec j} \cdot d\varphi \, d\theta \tag{55}$$

For small optical depths, $cz \to 0$, and for a zenith sun (j = 0) eq. (54) may be simplified:

$$E_d = E \cdot e^{-cz}\left(1 + \frac{1}{c} \int \left(\frac{\beta(\theta)\sin\theta}{\sec\theta - 1}\right) (1 - (1 - cz\sec\theta + cz)) \, d\varphi \, d\theta\right.$$

$$= E \cdot e^{-cz}\left(1 + 2\pi z \int_0^{\pi/2} \beta(\theta)\sin\theta \, d\theta\right) = E \cdot e^{-cz}(1 + z\, b_f)$$

Because $b_f >> b$, we may with small error write in this case

$$E_d \approx E \cdot e^{-cz}(1 + bz) \approx E \cdot e^{-cz} \cdot e^{+bz}$$

or

$$E_d = E \cdot e^{-az} \tag{56}$$

which suggest that irradiance attenuation in the surface layer is primarily due to absorption.

9. PREISENDORFER RADIANCE MODEL

In a series of papers, the main results of which are summarized in (20) Preisendorfer has brought to completion a theoretical model of radiance distribution in the sea which has proved very useful. Preisendorfer's model is essentially a solution of the equation of radiative transfer obtained under a number of simplifying assumptions:

1. The field of radiance $L(0,\theta,\varphi)$ immediately below the surface is assumed known and independent on time and horizontal position.

2. The water is assumed optically homogenous; i.e. the attenuation coefficient c and the volume scattering coefficient $\beta(\theta)$ are assumed to be constant and known.

3. The path-function $L^*(z,\theta,\varphi)$ is assumed to be independent of time and horizontal position and to be attenuated in the z-direction with a constant attenuation coefficient K, so that

$$L^*(z,\theta,\varphi) = L^*(0,\theta,\varphi) \cdot e^{-Kz} \tag{57}$$

Preisendorfer now considers a target point at depth z_t, a point of observation at depth z and a path $(z_t, \theta, \varphi, r)$ from z_t to z along the direction (θ,φ) (Fig. 13). In this case θ is the angle between the zenith and the direction of motion of the flux, and we have:

$$z_t - z = r\cos\theta$$

To measure the field radiance at depth z we have to point a radiance meter in the direction $(\theta + \pi, \varphi + \pi)$.

If $L_o(z_t,\theta,\varphi)$ is the inherent radiance of the target at z_t and $L_r(z,\theta,\varphi)$ is the apparent

radiance at z we obtain by integrating eq (1) along the path $(z_t, \theta, \varphi, r)$ under the above assumptions:

$$L_r(z, \theta, \varphi) = L_o(z_t, \theta, \varphi) \cdot e^{-cr} + \int_o^r L^* (z', \theta, \varphi) \cdot e^{-c(r - r')} dr' \tag{58}$$

where

$$z' = z_t - r'\cos\theta \tag{59}$$

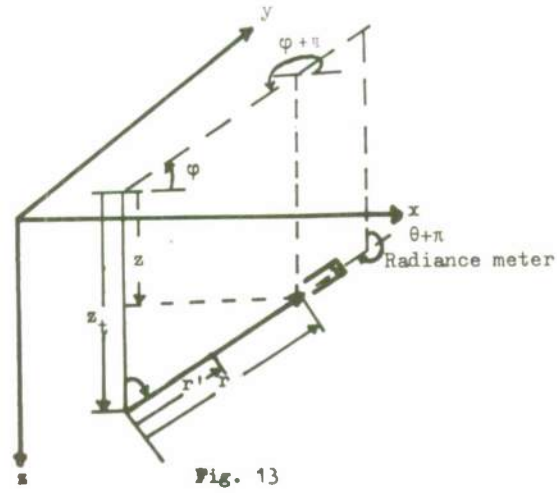


Fig. 13

The apparent radiance may thus be written as the sum of a transmitted inherent radiance and a path radiance which consists of flux which has been scattered into the direction (θ, φ) at each point of the path and then transmitted to the observation point.

By substituting eq (57) and (59) in eq (58) and performing the integration we obtain:

$$L_r(z, \theta, \varphi) = L_o(z_t, \theta, \varphi) \cdot e^{-cr} + \frac{L^*(o, \theta, \varphi) \cdot e^{-Kz}}{c + K \cos \theta} (1 - e^{-(c + K \cos \theta)r}) \tag{60}$$

Eq. (60) constitute Presendorfers model for radiance distributions. A characteristic feature of the model is that no explicit form of $\beta(\theta)$ is assumed, but that the complete path function is treated as a parameter with known properties.

9. 1. SOME PROPERTIES OF THE MODEL

To gain some more insight into the model we will consider some special cases.

1. Horizontal paths.

We consider a horizontal path of infinite length at depth z. In this case $\theta = \frac{\pi}{2}$ and $r = \infty$, and eq. (60) reduces to

$$L_\infty(z, \pi/2, \varphi) = \frac{1}{c} L^*(o, \pi/z, \varphi) \cdot e^{-Kz} \tag{61}$$

The radiance is constant along the path.

2. Upward moving flux.

Let us first consider the simple case of radiance from the nadir direction in optically infinitely deep water.
Then

$$z_t \to \infty, \ \theta = o, \ r \to \infty$$

and we get

$$L_{nadir}(z) = \frac{L^* (0, o, \varphi) \cdot e^{-Kz}}{C + K} \tag{62}$$

For flux moving along a path in the general direction (θ, φ) in the lower hemisphere in deep water we have

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

and get from eq. (60)

$$L_u(z, \theta, \varphi) = \frac{L^*(o, \theta, \varphi) \cdot e^{-Kz}}{c + K \cos \theta} \tag{63}$$

A logaritmic plot of $L_u(z, \theta, \varphi)$ is therefore a straight line from which K may be determined.

3. Downward moving flux.

We consider the surface as the target point, $z_t = 0$ and $L_o(z_t, \theta, \varphi) = L_o(o, \theta, \varphi)$ is the radiance distribution from sun and sky immediately below the surface as modified by reflection and refrac-

tion.
We also have:

$$\pi/2 \leq \theta \leq \pi$$

and

$$r = - z \sec \theta = z \left|\sec \theta\right|$$

substituting in eq. (60) we obtain for the downward moving flux $L_d(z, \theta, \varphi)$:

$$L_d(z, \theta, \varphi) = L_o(o, \theta, \varphi)\, e^{-cz\left|\sec\theta\right|} \frac{L^*(o, \theta, \varphi)\cdot e^{-Kz}}{+ c-K\left|\cos \theta\right|}\left(1 - e^{-(c\left|\sec \theta\right|-K)z}\right) \tag{64}$$

which for radiance from the zenith direction reduces to

$$L_d(z, \pi, \varphi) = L_o(o, \pi, \varphi)\cdot e^{-cz} + \frac{L^*(o, \pi, \varphi)\cdot e^{-Kz}}{c - K}\left(1 - e^{-(c - K)z}\right) \tag{65}$$

Since L_d according to eq. (64) and (65) is the sum of two terms involving different exponential functions it is clear that a semilogarithmic plot of L_d with respect to z (or r) will in general be non linear. The slope of the plot, which gives $K(z, \theta, \varphi)$, the attenuation coefficient for radiance, will in general be a function both of depth and direction of observation. Near the surface and in some angular intervals L_d may even increase with depth to reach a maximum at a certain depth z_m as was also found with the simple theory discussed above. At greater depths the curves for L_d for different values of θ tend to become straight and parallel to each other, in agreement with experiment.

4. Approach to asymptotic state.

Looking at eq. (64) it is easy to see that at great depths

$$1 - e^{-(c\left|\sec \theta\right| -K)z} \rightarrow 1$$

and

$$L_o(o, \theta, \varphi) \cdot e^{-cz\left|\sec \theta\right|} \rightarrow 0$$

so that with increasing depth the term

$$\frac{L^*(o, \theta, \varphi) \cdot e^{-Kz}}{c - K\left|\cos \theta\right|}$$

becomes more and more dominant.
The attenuation of this term is independent of direction. It is reasonable to assume that at great depths the radiance distribution asymptotically approaches the shape given by:

$$L(z, \theta, \varphi) = \frac{L^*(z, \theta, \varphi)}{c + K \cos \theta} \tag{66}$$

which is independent on surface radiance distribution and only depend on c and b and thus K and is attenuated equally in all directions. Several authors have tried to provide a rigid proof for the existence of the asymptotic state, but none are entirely satisfactory.

However, the available experimental data at greater depth definitely indicate an approach to a distribution which is symmetric around the zenith direction and which is attenuated at an equal rate in all directions.

10. Other Models

Even a superficial treatment of other models will lead too far. A brief review is given by Jerlov (1) and more recent work has been reviewed by Zanefeld (25). Theories of radiative transfer will also be the subject of the next lecture in this series.

11. Polarization of underwater radiation

Electromagnetic radiation under water is in general linearly polarized. The direct radiation from the sun is impolarized, but the scattered skylight which penetrates the surface is partly polarized and may, near the surface, contribute a significant part to the degree of polarization measured. Close to the surface elliptically polarized light has been observed in directions near the critical angle of total reflection. It originates from linearly polarized scattered flux which is totally reflected at the surface and which suffers a phase change during reflection. The polarization caused by reflection and refraction at the surface of direct sun light is small and has not been observed in the sea.

The chief mechanism responsible for the polarization observed in the sea is multiple scattering of solar radiation by water and by suspended particles. The relative importance of these scatterers is not well known, but it is clear that the degree of polarization and its angular distribution is closely connected with the directionality of the light field and thus with the radiance distribution and the inherent optical properties of the water.

The angular distribution of degree of polarization, p, is complicated. The maximum degree of polarization, P max, usually occurs at scattering angles relative to the main direction of flux somewhat greater than 90° and varies widely from approximately 60% in very clear to less than 10% in very

turbid water. All factors that tend to decrease the directionality of the field of radiation also tend to decrease p_{max}. p_{max} will therefore in general decrease with increasing depth and have a minimum at the most penetrating wavelength.

A particular simple angular distribution of p occurs when the sky is completely overcast and on clear days when the sun is at or near zenith. In these cases p is independent of azimuth, as is evident from Fig. 15 which also illustrates some of the other points mentioned above.

At all other solar elevations the degree of polarization is also a function of azimuth. Polar plots of the degree of polarization in vertical planes at different azimuths from the sun will in general display two dissimilar lobes (Fig. 17). The dissimilarity between the lobes tend to increase with increasing solar zenith angle and disappears only at an azimuth of 90°.

Comprehensive reviews of the whole polarization problem has recently been made by Ivanoff and by Timofeeva (23, 24).

12. SOME EXPERIMENTAL RESULTS

Although generally recognized as the most basic radiometric quantity for describing the structure of solar radiation in the upper layers of the sea, radiance distributions as function of depth are very seldom measured. Complete and accurate data sets which include simultaneous measurements of $L(z, \theta, \phi)$ and the inherent optical properties $\beta(\theta)$, b, a, and c as functions of depth and wavelength are practically nonexistent from the open sea. At best all significant parameters have been measured at a few selected wavelengths and all values of $L(z, \theta, \phi)$ obtained within a limited range of solar elevation angles. Systematic investigations on the dependence of $L(z, \theta, \phi)$ on solar elevation has, to my knowledge, never been made.

This sad situation is of course due to the formidable experimental difficulties and to the great expense in instrumentation, time and money needed to secure even a single complete data set. Recent developments in instrumentation will, no doubt, help to remedy the present situation. (3, 21).

We will now briefly consider the results of some recent efforts to measure radiance distributions in the open sea. The measurements were made in waters with highly different inherent optical properties and under different environmental conditions.

12.1. The Sargasso Sea

The Sargasso Sea is representative for the clearest ocean water. Fig. 14 gives the angular distribution of radiance in the vertical plane of the sun at selected depths for three wavelengths in the vertical plane of the sun at selected depths for three wavelengths in the wavelength band of least attenuation. Due to swell it was not possible to measure reliably close to the surface. In Fig. 16 the same data are redrawn to display relative radiance measured at different zenith angles as functions of depth. At this station the water was homogeneous from the surface to approximately 100 m depth, but gradually becoming clearer at greater depths. This is evident from Fig. 8, curve 3 and 4 and explains the downward curvature of some of the curves in fig. 16 at greater depths. During this cruise the inherent optical properties were either measured directly at some wavelengths or computed using the methods outlined above. Some of the results are given in the following table:

depth (m)	λ (nm)	a (m^{-1})	b (m^{-1})	c (m^{-1})	K (m^{-1})	K/c
100	375	0.023	0.030	0.050	0.042	0.84
250	425	0.024	0.024	0.048	0.041	0.85
400	475	0.016	0.016	0.032	0.027	0.84
150	525	0.032	0.023	0.056	0.046	0.82

Although the accuracy of these data are open to discussion they should at least be a good indication of the magnitude of the different parameters in very clear oceanic water. It should be noted that in the wavelength band of least attenuation a is approximately equal to b.

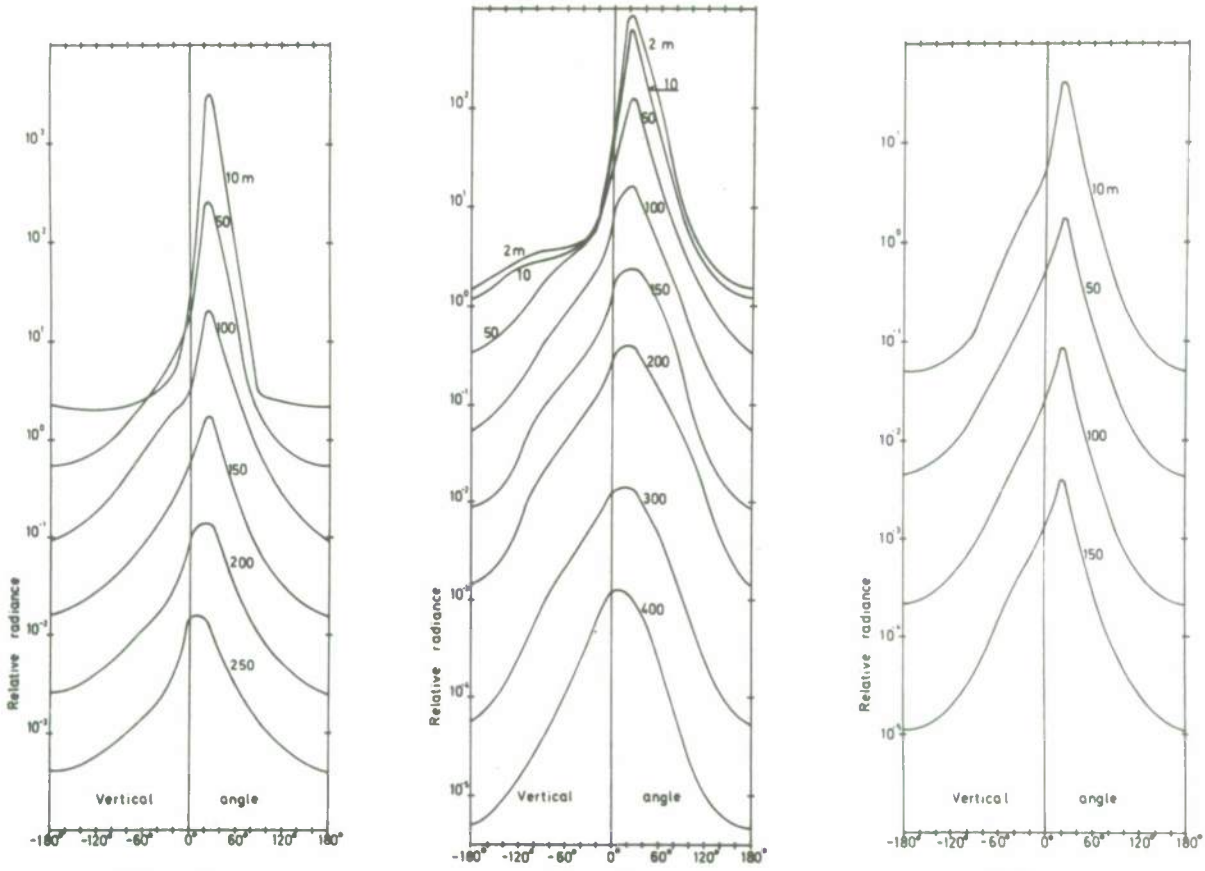
12.2. The Panama Basin

Fig. 15 illustrates the enormous difference in radiance distribution near the surface between an overcast day and a clear day with the sun near zenith (75°-85° elevation angle). Again, reliable measurement of the radiance in the direction of the sun could not be obtained near the surface. We note the symmetry about the vertical which prevails at all depths for an overcast sky and for a near zenith sun. We also note the extremely sharp change in radiance and in degree of polarization at the critical angle in both cases (1 m curves).

12.3. The Baltic

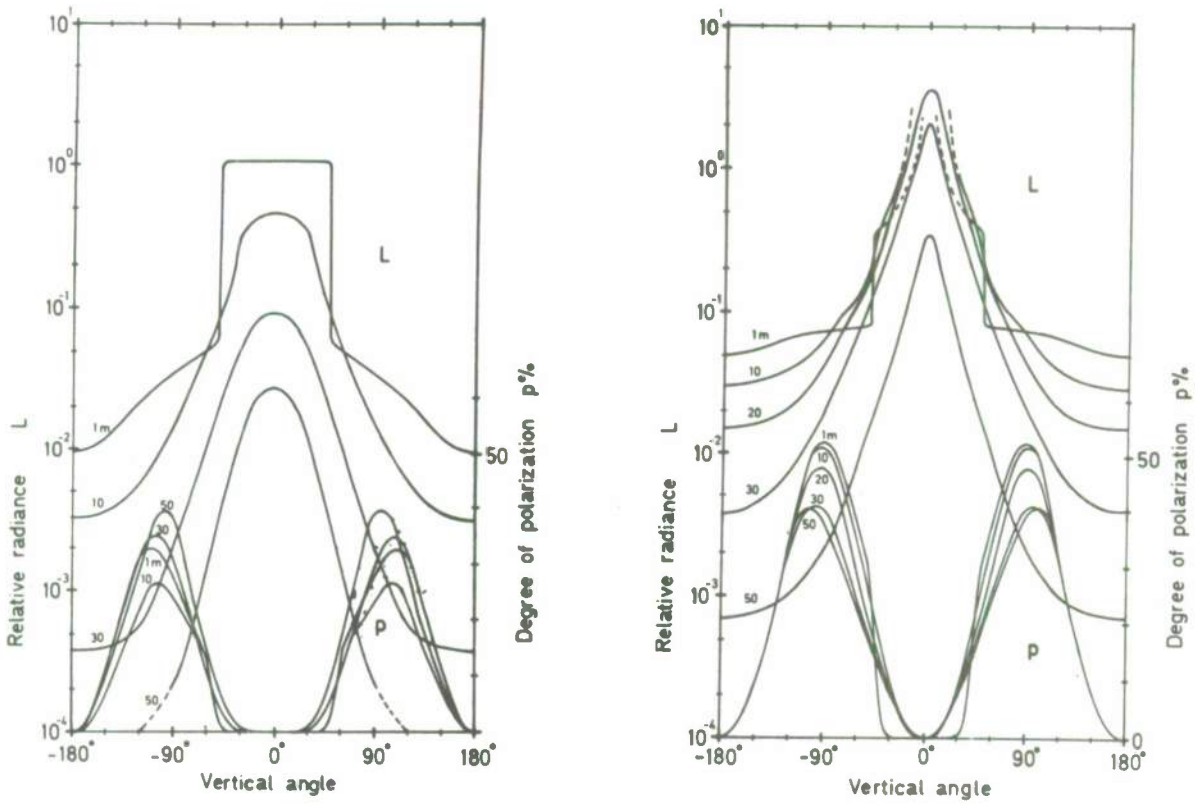
The waters of the Baltic contains an abundance both of particles and of dissolved organic matter. It therefore serves as an example on the conditions one might expect to find in very turbid sea water of coastal type in sharp contrast to the Sargasso Sea. The radiance distributions given in Fig. 18 were obtained on two different occations, but fit together rather nicely. In this area the water is stratified with a marked decrease in attenuation at depths greater than approximately 40-50 m. (See Figs. 7 and 8, curves 1 and 2). Using measured data for $\beta(\theta)$ and c and the radiance distribution at 100 m, the following values were arrived at:

$$a = 0.09 \qquad K = 0.12$$
$$b = 0.25 \qquad K/c = 0.35$$
$$c = 0.34$$



a. (425 nm) b. (475 nm) c. (575 nm)

Fig. 14. Angular distribution of radiance. Sargasso Sea, March 1966. Sun's elevation 52° - 61°. Instrument resolution approx 2.5°. After Lundgren and Højerslev (19)



a. b.

Fig. 15. Angular distribution of radiance and degree of polarization. Panama Basin, March 1969. Sun's elevation 75° - 85°. Instrument resolution approx 1.5°. λ = 500 nm.
a) overcast sky. b) clear sky. After Lundgren(21).

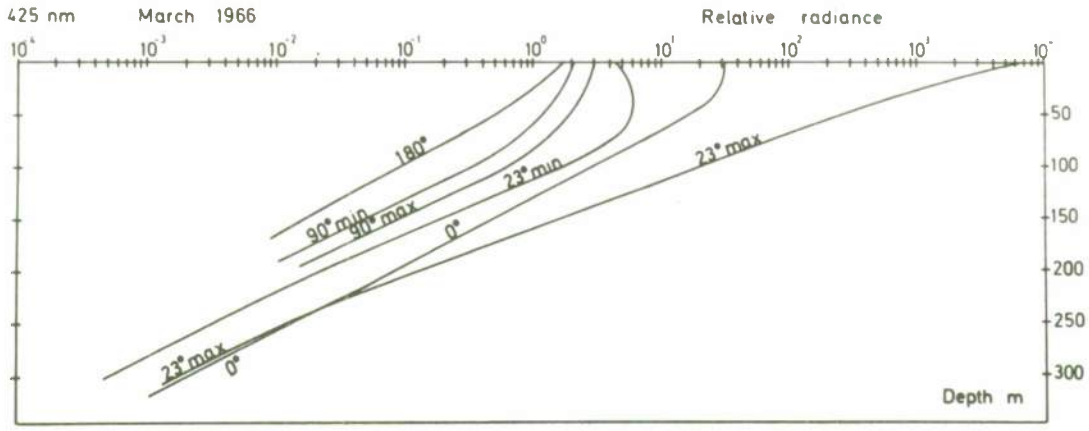


Fig. 16 a

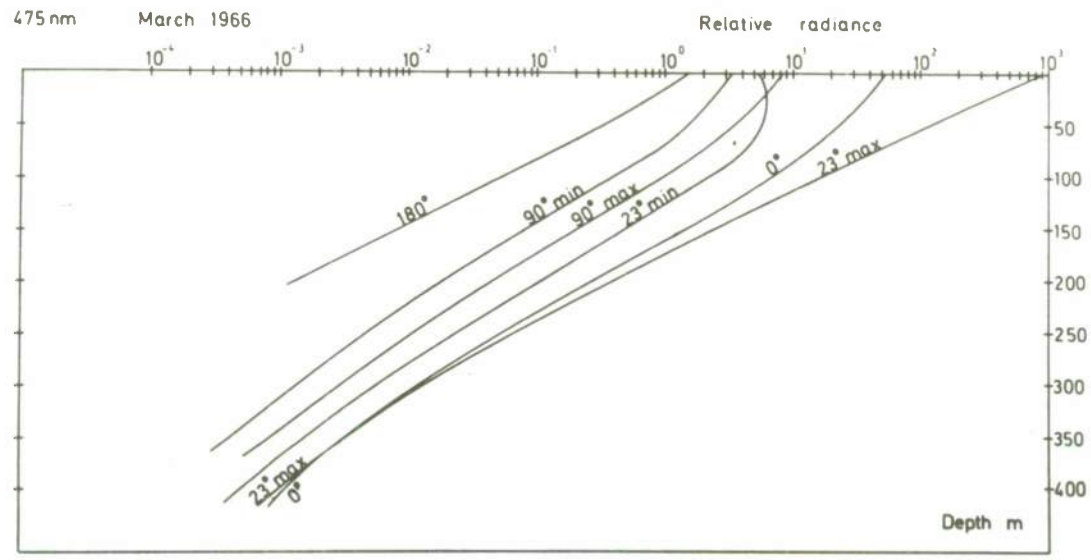


Fig. 16 b

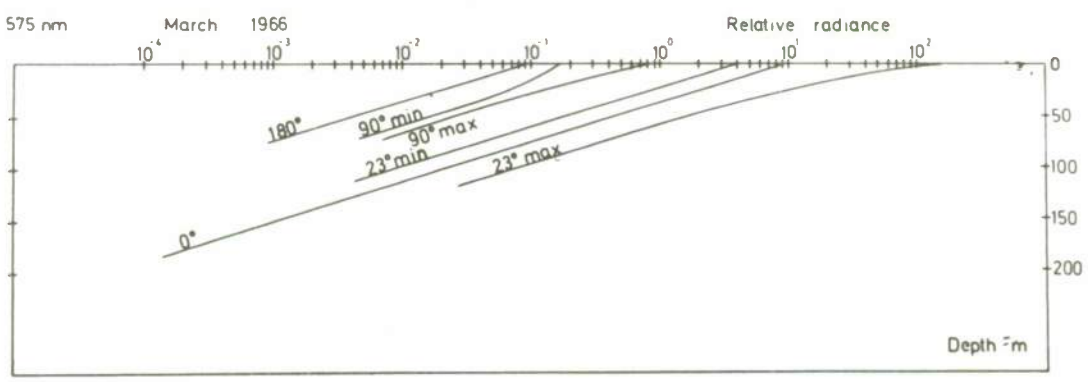


Fig. 16 c
Relative radiance as function of depth for different zenith angles. Sargasso Sea, March 1966. Same experiment as in fig. 14. a) 425 nm, b) 475 nm, c) 575 nm.

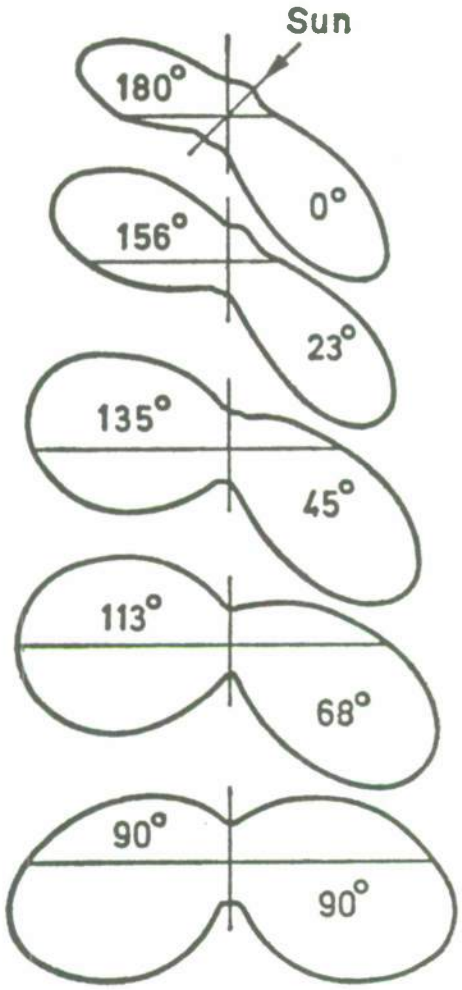


Fig. 17. Angular distribution of degree of polarization in vertical planes at different azimuths from the sun. After Timofeeva (22).

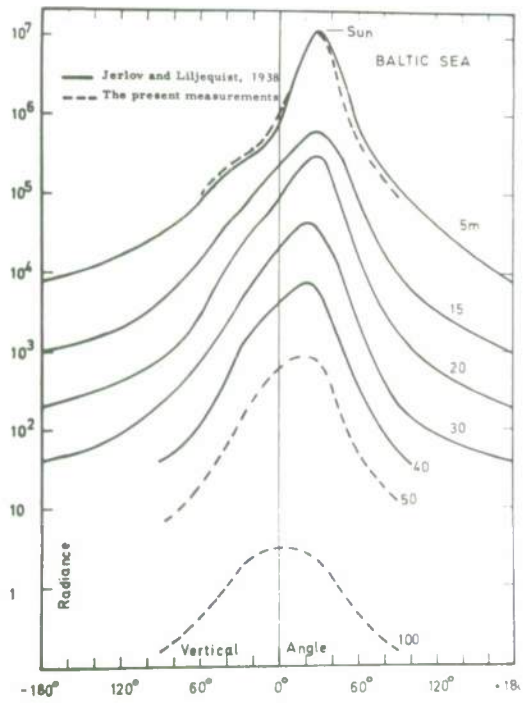


Fig. 18

Angular distribution of radiance in the vertical plane of the sun. Wavelength 535 nm. After Jerlov and Nygård (27).

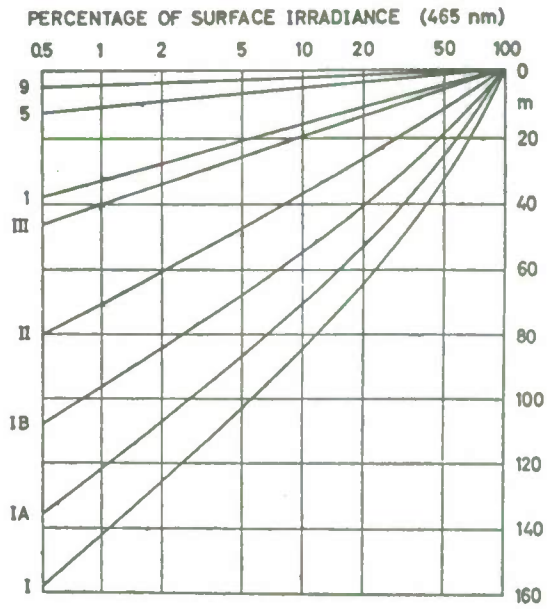


Fig. 19

Relative downward irradiance (465 nm) as function of depth in different water types. After Jerlov (1).

We note that in this case b is nearly three times a for the most penetrating wavelength. In Jerlov's scheme of optical classification of oceanic surface water types (1) Sargasso Sea water belongs to type I, and the water of the Panama Basin is approximately type II (Fig. 19). The water of the Baltic is classified as coastal and has properties between type 1 and type 5.

13. REFERENCES

1. Jerlov, N.G.: Optical Oceanography. Elsevier Publ. Co., Amsterdam, London, New York (1968).
2. Smith, R.C.: Structure of the solar radiation in the upper layers of the sea. In: Optical Aspects of Oceanography, N.G. Jerlov (ed.), Academic Press, New York and London (1973).
3. Smith, R.C., Austin, R.W. and Tyler, J.E.: An oceanographic Radiance Distribution Camera System. Appl. Optics, Vol. 9 (1970), pp. 2015-2022.
4. Tyler, J.E.: Comparison of light distribution above and below water. J. Mar. Res., Vol. 16 (1958), pp. 96-99.
5. Jerlov, N.G., and Fukuda, M.: Radiance Distribution in the upper Layer of the Sea. Tellus, 12 (1960), pp. 348-355.
6. Sasaki, T., Watanabe, S., Oshiba, G., Okami, N., and Kajihara, M.: On the instrument for measuring angular distribution of underwater radiance. Bull. Japan. Soc. Sci. Fisheries, 28 (1962), pp. 489-496.
7. Clarke, G.L., and James, H.R.: Laboratory analysis of the selective absorption of light by sea water. J. Opt. Soc. Am., 29 (1939), pp. 43-55.
8. Le Grand, G.: La pénétration de la lumiere dans la mer. Ann. Inst. Océanogr., 19 (1939), pp. 393-436.
9. Kullenberg, G., Lundgren, B., Malmberg, S.A., Nygård, K., and Højerslev, N.: Inherent optical properties of the Sargasso Sea. Inst. of Phys. Oceanogr., Univ. of Copenhagen, Rep. No. 11 (1970).
10. Preisendorfer, R.W.: Application of radiative transfer theory to light measurements in the sea. Union Géod. Géophys. Int., Monographie No. 10:11-30 (1961).
12. Gershun, A.: O fotometrii mutnykk stedin. Tr. Gos. Okeanogr. Inst., 11:99 (1936).
13. Gershun, A.: The light field. J. Math. Phys., 18 (1939), pp. 51-151.
14. Preisendorfer, R.W.: Directly observable quantities for light fields in natural hydrosols. Scripps Inst. Oceanogr., Univ. Calif., Rep. 58-46 (1958).
15. Smith, R.C., and Wilson, W.H.: Photon scalar Irradiance. Appl. Optics, 11 (1972), pp. 934-938.
16. Jerlov, N.G.: Optical Studies of Ocean Waters. Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 1947-48, Vol. III, No. 1, Gøteborg (1951).
17. Bauer, D., and Ivanoff, A.: Spectro-Irradiance Metre. Cah. Oceanogr. XXII (1970), pp. 477-488.
18. Tyler, J.E., and Smith, R.C.: Measurements of Spectral Irradiance Underwater, New York, Gordon and Breach (1970).
19. Lundgren, B., and Højerslev, N.: Daylight Measurements in the Sargasso Sea. Results of the "Dana" Expedition Jan-Apr. 1966, Inst. of Phys. Oceanogr., Univ. of Copenhagen, Rep. No. 14 (1971).
20. Preisendorfer, R.: A Model for Radiance Distributions in natural Hydrosols. In "Physical Aspects of Light in the Sea", (J.E. Tyler, ed.), pp. 51-60, Honolulu, Univ. Hawaii Press (1964).
21. Lundgren, B.: On the polarization of the daylight in the sea. Inst. of Phys. Oceanogr., Univ. of Copenhagen, Rep. No. 17 (1971).
22. Timofeeva, V.A.: Spatial distribution of the degree of polarization of natural light in the sea. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Ser. Geofiz., Vol. 6, pp. 1843-1851 (1962).
23. Ivanoff, A.: Polarization measurements in the sea. In: Optical Aspects of Oceanography. N.G. Jerlov (ed.), New York and London, Academic Press (1973).
24. Timofeeva, V.A.: Optics of turbid waters. In: Optical Aspects of Oceanography. N.G. Jerlov (ed.), New York and London, Academic Press (1973).
25. Zaneveld, J.R.V.: New developments of the theory of radiative transfer in the oceans. In: Optical Aspects of Oceanography. N.G. Jerlov (ed.), New York and London, Academic Press (1973).
26. Kullenberg, G.: A comparison between observed and computed light scattering functions. Inst. of Phys. Oceanogr., Univ. of Copenhagen, Rep. No. 13 (1970).
27. Jerlov, N.G., and Nygård, K.: Inherent optical properties computed from radiance measurements in the Baltic. Inst. of Phys. Oceanogr., Univ. of Copenhagen, Rep. No. 1 (1968).

APERCU SUR LES THEORIES DU TRANSFERT RADIATIF *
APPLICABLES A LA PROPAGATION DANS LA MER

L. PRIEUR et A. MOREL
Laboratoire d'Océanographie Physique
Centre de Recherches Océanographiques de Villefranche
06230 Villefranche-sur-Mer
France

INTRODUCTION

Les théories actuellement existantes ont été élaborées au cours de recherches portant d'abord sur le rayonnement électromagnétique en provenance des planètes ou des étoiles et plus récemment sur la diffusion des neutrons. Les problèmes de transfert radiatif peuvent dans tous les cas être posés mathématiquement sous la forme d'une équation de transfert. La résolution de celle-ci ne présente aucune difficulté lorsque le milieu où se propage les particules (photons, neutrons, etc..) est non diffusant même s'il contient lui-même des sources de ces mêmes particules. Il en est tout autrement si la redistribution, dans tout l'espace, due à la diffusion intervient. Alors, pour simplifier, on suppose très souvent que la diffusion est isotrope ou que l'absorption est faible et négligeable ; ces approximations sont justifiées en général pour l'étude de la diffusion des neutrons ou en astronomie.

Le développement de l'océanographie n'étant que relativement récent, la propagation des ondes électromagnétiques visibles dans la mer a fait l'objet d'études théoriques beaucoup moins nombreuses. Par contre, on dispose d'un bon nombre de données expérimentales ; aussi l'intérêt d'une théorie, nécessairement assez complexe dans le cas de l'eau de mer, peut se poser. En fait, on doit y avoir recours pour pouvoir effectuer des prévisions dans des domaines assez variés. On veut par exemple connaître et prévoir, à partir des caractéristiques mesurables des eaux, la répartition de l'énergie disponible pour la photosynthèse, premier maillon de la vie. On veut établir comment le rayonnement solaire absorbé par les océans participe à l'équilibre radiatif de la planète. La théorie est, en outre, nécessaire pour la prévision de la visibilité, pour le choix des moyens appropriés pour la photogrammétrie, pour l'interprétation des photographies aériennes de la surface de la mer, etc..

I. DESCRIPTION DU PROBLEME ET FACTEURS INTERVENANT POUR SA RESOLUTION.

Avant de faire une revue des principales théories de transfert radiatif, il convient de rappeler quels sont les facteurs physiques qui caractérisent optiquement le milieu, et quelles sont les grandeurs photométriques permettant de décrire la pénétration des ondes électromagnétiques dans la mer. Ces notions de base sont détaillées dans les ouvrages classiques et font l'objet de "lectures" appartenant au même groupe que celle-ci (par exemple : [73, 38, 22, 36, 53].

I.1. Caractéristiques optiques.

L'atténuation d'un pinceau collimaté est caractérisée par le coefficient (népérien) d'atténuation $\underline{c}$ (m^{-1}). La diminution du flux de ce pinceau est due à deux phénomènes : l'absorption, coefficient népérien $\underline{a}$ (m^{-1}) et la diffusion redistribuant l'énergie dans tout l'espace suivant une indicatrice de diffusion (coefficient népérien $\underline{\beta(\theta)}$ (m^{-1} ster. $^{-1}$)). L'intégrale sur tout l'angle solide de $\beta(\theta)$ est appelée coefficient total de diffusion $\underline{b}$ (m^{-1}). Ces coefficients, définis pour un pinceau collimaté, décrivent en fait les événements élémentaires susceptibles de survenir à un photon. La conservation de l'énergie impose les relations,

$$b = \int_{4\pi} \beta(\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} \beta(\theta) \sin\theta \, d\theta, \tag{1}$$

$$c = a + b . \tag{2}$$

L'indicatrice de diffusion des eaux de mer est très dissymétrique et très "pointue" vers l'avant [53], et leur absorption n'est pas négligeable même lorsqu'elles sont considérées comme transparentes. Ces deux constatations font que toute théorie établie pour un milieu à diffusion isotrope ou faiblement dissymétrique ou bien pour un milieu présentant une absorption négligeable n 'est pas suffisamment réaliste pour être appliquée à l'océan. Ces considérations sont importantes car elles conduisent à éliminer (ou à modifier) la plupart des méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif qui ont été établies en astronomie ou pour la diffusion des neutrons.

En revanche, la forme de l'indicatrice de diffusion est peu variable pour les différentes eaux de mer, sauf peut-être aux très petits angles et dans la partie arrière [53, 51, 52]. En conséquence, il existe un rapport a peu près constant entre le coefficient de diffusion totale b et le coefficient angulaire $\beta(\theta)$. Ceci conduit à introduire, dans les calculs, l'indicatrice de diffusion sous une forme normalisée et à ne tenir compte de la valeur absolue que dans le paramètre b. Le rapport b/c, qui caractérise en quelque sorte la probabilité que présente un photon d'être diffusé sur un trajet d'une "distance optique" τ^*, prend dans ce cas une grande importance. En effet, la probabilité pour ce photon soit diffusé dans une direction donnée

* Une partie de cet exposé bibliographique entre dans le cadre du contrat DRME 72-555.

θ est proportionnelle alors à b/c quelque soit le type d'eaux rencontré. L'importance de ce rapport pour la description de la pénétration de la lumière dans les milieux troubles a surtout été mis en évidence expérimentalement par V.A. TIMOFEEVA (89) par exemple. Mathématiquement, comme il est écrit ci-dessous, ce rapport intervient explicitement dans l'équation de transfert.

I.2. Grandeurs caractérisant la répartition de l'énergie lumineuse.

La grandeur photométrique de base est la luminance L(P,D) qui est le flux reçu, normalement en P, par une surface élémentaire dS dans un angle solide élémentaire $d\omega$ entourant une direction D. Cette quantité décrit complétement le champ lumineux en tout point de l'espace et pour toutes les directions. Cependant, c'est aussi la quantité la plus complexe à obtenir aussi bien théoriquement qu'expérimentalement. Souvent on considère, dans les calculs, les intégrales des luminances sur un demi-espace pour obtenir l'éclairement d'un plan, ou sur l'espace entier pour l'éclairement scalaire :

L'éclairement d'un plan est (cf. Fig.1) :

(3) $$E = \int_{2\pi} L.\cos\theta \, d\omega'$$

L'éclairement scalaire est :

(4) $$E_o = \int_{4\pi} L \, d\omega$$

I.3. Influence de la longueur d'onde

Dans la plupart des calculs théoriques, les radiations sont supposées monochromatiques. Ceci est justifié, car les phénomènes physiques dispersifs (fluorescence, effet Raman) sont très souvent négligeables dans l'étude de la propagation d'un rayonnement solaire ou artificielle dans la mer. En outre, cette supposition est nécessaire, car les caractéristiques optiques dépendent de la longueur d'onde. Cependant, on doit rappeler que la forme de l'indicatrice n'en dépend pas beaucoup en première approximation (54) (51b). Si bien que dans la mesure où une grandeur photométrique ne dépend que du rapport b/c, changer de longueur d'onde est équivalent à changer simplement la valeur de ce rapport.

I.4. Conditions aux limites

Les caractéristiques optiques présentées ci-dessus définissent le milieu lui-même, dans ses interactions élémentaires avec les ondes électromagnétiques. Afin de déterminer complétement le problème, il convient de s'imposer les conditions aux limites qui forment en quelque sorte les données initiales. Par exemple, on suppose une certaine répartition des luminances à la surface de la mer et on veut connaître, la répartition en profondeur, ou bien on se donne l'indicatrice d'émission d'une lampe immergée, etc.. Ces conditions sont indépendantes des caractéristiques optiques du milieu lui-même et n'ont trait qu'à la distribution géométrique des luminances aux confins du milieu. De leur symétrie dépendra en général le choix du système de coordonnées et même, aussi, le choix de la méthode à utiliser pour connaître la répartition des luminances en profondeur.

Afin de résoudre théoriquement le problème, on est amené à idéaliser les données de manière qu'elles présentent une forme mathématique simple. Pour l'étude de la pénétration de la lumière du jour on supposera que la surface de la mer est éclairée uniformément dans toutes les directions ou bien uniquement par le soleil, c'est-à-dire dans une seule direction, le fond de la mer sera supposé d'une profondeur infinie ou aura un coefficient de réflexion nul ou uniforme. Pour la pénétration de la lumière artificielle, la source sera collimatée ou répondra à la loi de Lambert et sera, en outre, considérée comme ponctuelle, etc..

I.5. Considérations générales

Plusieurs ouvrages plus ou moins récents ont présenté une revue détaillée du transfert radiatif. Leurs auteurs ont consacré en général leurs études aux problèmes issus de l'astronomie, et donc, aucun ne traite du cas particulier de l'eau de mer. Néanmoins, les principes de bases de certaines théories exposées restent valables, et seuls changent les détails des méthodes de résolution. L'ouvrage qui semble le plus complet sur les diverses théories existantes est, sans doute, celui de V.V. SOBOLEV (85); d'autres ouvrages fondamentaux sont plus détaillés sur certains points, S. CHANDRASEKHAR (16), V. KOURGANOF (40) et R.W. PREISENDORFER (71), (72).

Dans la présentation des différentes méthodes de résolution du transfert radiatif (II), on a cherché à dégager, lorsqu'ils existent, les concepts physiques sur lesquels elles s'appuient. En outre, seules sont présentées les théories qui peuvent faire intervenir une indicatrice dissymétrique qui correspond au cas de l'eau de mer. On a ensuite (III) considéré quelques problèmes concrets, déjà étudiés par divers auteurs. Ils sont suffisamment idéalisés pour permettre une application des théories précédemment décrites, sans néanmoins l'être trop, afin que les résultats cernent d'une manière satisfaisante la réalité physique.

II. METHODES

Elles sont en fait fort nombreuses et sont utilisées sous des formes plus ou moins variées par divers auteurs. Il devient souvent difficile de les distinguer les unes des autres. Leur classement en dif-

NOTA.-
* $\tau = cz$, où z est la distance réelle exprimée en mètre. Donc τ est une grandeur sans dimension et à ce titre les termes profondeurs optiques, distance optique ne sont pas propres. On les utilise ici par imitation des termes anglais "optical depth", "optical length".

férents types, bien que nécessaire pour la clarté, peut paraître arbitraire en raison de leur interpénétration. Ici, cependant, elles sont répertoriées en cinq grandes catégories qui relèvent chacunes de considérations mathématiques ou physiques distinctes.

- On a groupé, dans la première catégorie, les méthodes qui font appel à tous les artifices mathématiques nécessaires pour résoudre, avec le minimum d'approximations, l'équation de transfert.

- La seconde catégorie concerne les méthodes naturelles qui permettent de calculer les uns après les autres les différents ordres de diffusion.

- Dans la troisième, on fait appel non plus au processus simple de l'atténuation et de la diffusion, mais à des opérateurs de réflexion et de transmission diffuses correspondant à une couche du milieu.

- Dans la quatrième, la propagation réelle d'un photon est simulée.

- Enfin, dans la cinquième catégorie, on a rassemblé les théories qui supposent une variation aléatoire dans le temps du processus de diffusion, alors que dans les méthodes précédentes, les phénomènes sont en général supposés indépendants du temps.

II.1. Méthodes mathématiques

Elles utilisent toutes l'équation de transfert qui s'obtient, en général, à partir de la conservation locale de l'énergie. Mais lors de la résolution, on ne se préoccupe pas de la signification physique des calculs entrepris.

II.1.1. Equation de transfert

Pour plus de simplicité, on suppose que les phénomènes sont stationnaires, et que les radiations sont monochromatiques. On exprime le bilan d'énergie en chaque point P du milieu, et pour chaque direction D, pour un élément de volume $d\ell . dS$ (voir fig. 2).

- La différence du flux entrant dans ce volume, et en sortant, selon la direction D, est :

(5) $$\frac{dL\,(P,D)}{d\ell} \,.\, dS \,.\, d\ell \,.\, d\omega$$

- La perte par atténuation dans la direction D est d'après la définition de c,

(6) $$-\, c(P) d\ell \,.\, L(P,D) \,.\, dS\, d\omega$$

- Le gain par diffusion dans la direction D de l'énergie pénétrant dans l'élément de volume dV et provenant de la direction D' est (cf. définition de β) :

(7) $$+\left[\int_{4\pi} \beta\,(P,\,D,\,D') \,.\, L\,(P,\,D')\, d\omega'\right] \underbrace{d\ell \,.\, dS}_{dV} \,.\, d\omega$$

La conservation de l'énergie impose l'égalité entre l'expression (5) et la somme des expressions (6) et (7),

(8) $$\frac{dL\,(P,\,D)}{d\ell} = -\, c(P)\, L(P,D) + \int_{4\pi} \beta(P,\,D,\,D') \,.\, L(P,\,D')\, d\omega',$$

qui est l'équation de transfert en régime stationnaire (indépendante du temps) et sans source interne.

Toutes les méthodes de ce groupe supposent que les caractéristiques optiques sont indépendantes de la variable d'espace, symbolisée ici par P. En outre, il est commode de normaliser l'indicatrice de diffusion par son intégrale, et ainsi de faire apparaître explicitement le coefficient total de diffusion. L'équation (6) devient,

(9) $$\frac{1}{c} \,.\, \frac{dL(P,\,D)}{d\ell} = -\, L(P,\,D) + L^{*}\,(P,\,D).\ ,$$

avec, par définition (10) $$L^{*}\,(P,\,D) = \frac{b}{c} \,.\, \int_{4\pi} L\,(P,\,D')\, \beta_n\,(D,\,D')\, d\omega'\ ,$$

et (11) $$\int_{4\pi} \beta_n\,(D,\,D')\, d\omega' = 1 \text{ quelque soit } D.$$

La fonction L^{*} est appelée fonction source en transfert radiatif et quelquefois "path function"(22).

L'intégration sur l'angle solide ω conduit à une relation simple :

(11b) $$\mathrm{Div}\, E = -\, a\, E_o$$

qui est une autre forme exprimant la conservation locale de l'énergie.

Dans le cas de la pénétration de la lumière du jour, l'éclairement en surface ne dépend pas des coordonnées horizontales car il est supposé constant sur toute la surface. Alors ne subsiste que la profondeur z comme variable, et la direction D. En introduisant la profondeur optique $\tau = cz$ et les coordonnées angulaires (voir fig. 3), l'équation de transfert s'écrit :

$$(12) \qquad \mu \frac{dL(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = - L(\tau, \mu, \phi) + \frac{b}{c} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} L(\tau, \mu', \phi') \beta_n(\alpha) \, d\mu' \, d\phi'$$

avec (13) $\cos \alpha = \mu\mu' + \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \mu'^2)} \cos \phi$

(14) $\mu = \cos \theta$

c'est l'équation de transfert homogène pour un milieu à symétrie "plan parallèle" ainsi nommée pour rappeler les conditions d'éclairement en surface. Enfin, bien que cela ne soit pas une limitation aux méthodes proposées ci-dessous, on envisage le cas où de plus existe une symétrie axiale, c'est-à-dire que l'angle azimuthal ϕ n'a pas d'influence sur les luminances ; (ceci impose que la répartition en surface possède la même symétrie).

Avec ces hypothèses l'équation de transfert devient

$$(15) \qquad \mu \frac{dL(\tau, \mu)}{d\tau} = - L(\tau, \mu) + b/_c \int_{-1}^{+1} L(\tau, \mu') \left[\int_{0}^{2\pi} \beta_n(\alpha) \, d\phi' \right] d\mu'$$

Cette équation est souvent appelée "équation homogène". Pour que le problème soit complétement déterminé, il convient en outre de s'imposer les conditions aux limites ; ces dernières permettent de fixer les constantes d'intégration qui apparaissent lorsque cette équation différentielle est résolue. Souvent, cependant, en introduisant dans l'équation (15) un terme supplémentaire représentant la lumière directement transmise, sans diffusion, de la surface à la profondeur τ. Ce terme a la forme $L(o, \mu) e^{-\tau/\mu}$. L'équation obtenue est alors dite "avec second membre". Les conditions aux limites du problème formulé ainsi doivent alors être changées en conséquence (96, p. 1099), (16, p. 22).

II.1.2. Méthode des ordonnées discrètes. Méthode des fonctions propres.

L'équation (15) est une équation intégro-différentielle, et il n'existe pas de solution analytique simple d'une telle équation. La fonction source L^* a une structure complexe en raison de la dissymétrie de l'indicatrice. Aussi, en général, on utilise la propriété d'addition des harmoniques sphériques pour simplifier cette intégrale. Le processus mathématique, qui a été décrit très complètement par S.CHANDRASEKHAR, est le suivant :

- On développe en série de polynômes de Legendre la fonction $\beta(\mu) = b/_c \, \beta_n(\mu)$

$$(16) \qquad \beta(\mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell P_\ell(\mu) \qquad \ell \text{ entier}$$

N est le nombre total de polynômes choisis pour approcher l'indicatrice de diffusion. On vérifie, par intégration sur μ et en tenant de compte des propriétés d'orthogonalité des polynomes de Legendre, que ω_o le premier coefficient dans le développement n'est autre que le rapport $b/_c$; (le polynôme d'ordre 0 étant l'unité).

La propriété d'addition des harmoniques sphériques conduit à,

$$(17) \qquad \int_{0}^{2\pi} \beta(\alpha) \, d\phi' = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell P_\ell(\mu) P_\ell(\mu')$$

L'indicatrice de diffusion étant mis sous une forme mathématique maniable, l'approximation de l'opérateur intégral de l'équation (15) reste la principale difficulté. Compte tenu de l'équation (17), cette dernière devient :

$$(18) \qquad \mu \frac{dL}{dL}(\tau, \mu) = - L(\tau, \mu) + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell P_\ell(\mu) \left[\int_{-1}^{+1} P_\ell(\mu') L(\tau, \mu') \, d\mu' \right]$$

Deux méthodes, que l'on va présenter plus en détail, ont surtout été utilisées pour résoudre cette équation :

- <u>Méthode des ordonnées discrètes</u> développée par S. CHANDRASEKHAR (16).
  (On devra se reporter à cet ouvrage pour les détails du calcul)

On utilise la méthode de quadrature de Gauss, qui divise l'intervalle d'intégration selon les zéros des polynomes de Legendre ; (d'autres méthodes de quadrature sont possibles et dans certains cas plus

plus précises ; en réalité, le choix du développement de l'indicatrice de diffusion influe sur toute la suite du calcul. Pour plus de détail sur les autres types de développement, on peut se reporter à l'ouvrage de V.V. SOBOLEV [85] ou à celui de V. KOURGANOF [40]. Il est cependant logique de faire appel à la quadrature de Gauss, car les polynômes de Legendre sont déjà utilisés pour le développement de l'indicatrice).

Donc l'intervalle (- 1, + 1) est divisé selon les zéros μ_j du polynôme de Legendre $P_{2n}(\mu)$ qui sont au nombre de 2n. La formule de quadrature est,

$$\int_{-1}^{+1} f(\mu)d\mu \simeq \sum_{j=-n}^{n} a_j \, f(\mu_j), \tag{19}$$

avec (19b)
$$a_j = \frac{1}{\left[\dfrac{dP_m(\mu)}{d\mu}\right]_{\mu=\mu_j}} \times \int_{-1}^{+1} \frac{P_m(\mu)}{\mu - \mu_j} d\mu .$$

Les coefficients a_j existent sous forme de tables numériques.

L'équation (18) est alors remplacée par un système de 2n équations différentielles homogènes simples de la forme :

$$\mu_i \frac{dL}{d\tau}(\tau, \mu_i) = - L(\tau, \mu_i) + \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell P_\ell(\mu_i) \sum_{j=-n}^{n} a_j P_\ell(\mu_j) L(\tau, \mu_j) \text{ avec } i = \pm 1, \pm 2.., \pm n \tag{20}$$

la seule condition imposée à n est :

$$4n - 1 > 2N$$

En choisissant n, on dit qu'on résoud dans la $n^{\text{ième}}$ approximation.

La résolution de ce système est classique. On recherche des solutions de la forme

$$L(\tau, \mu_i) = e^{+k_\alpha \tau} f(\mu_i, k_\alpha) . \tag{21}$$

Les constantes k_α sont les racines de l'équation "caractéristique" du système (20) :

$$1 = \frac{1}{2} \sum_{j=+n}^{n} \sum_{\ell=0}^{N} \frac{a_j}{1 + \mu_j k} \omega_\ell P_\ell(\mu_j) \xi_\ell(k). \tag{22}$$

Les ξ_ℓ sont obtenus par récurrence, et on démontre que l'équation est d'ordre n en k^2 ; il y a donc 2n racines distinctes, en général, symétriques.

On remarque que les k_α ne dépendent que des μ_j et des coefficients ω_ℓ du développement de l'indicatrice de diffusion.

La solution du système (20) s'écrit :

$$L(\tau, \mu_i) = \sum_{\alpha=-n}^{n} \frac{C_\alpha e^{k_\alpha \tau}}{1 + \mu_i k_\alpha} f(\mu_i, k_\alpha) , \tag{23}$$

où $f(\mu_i, k_\alpha)$ symbolise une fonction des paramètres désormais connus. Le résultat final montre donc que la luminance s'exprime comme une fonction d'une somme d'exponentielles dont les coefficients k_α sont caractéristiques du milieu lui-même, une fois choisi le nombre n.

Les constantes c_α sont déterminées par les conditions aux limites du problème posé ; par exemple si le milieu est infini, la luminance doit tendre vers zéro pour τ augmentant indéfiniment, et donc les c_α doivent être nuls pour les valeurs de k_α positives.

On doit remarquer que les luminances ne sont obtenues que pour des valeurs discrètes de l'angle $\theta(\mu_i)$ imposées par les polynômes de Legendre d'ordre 2n.

Si la symétrie n'est pas axiale, le principe du calcul reste le même, car on développe en série de Fourier :

(24) $$L(\tau, \mu, \phi) = \sum_{m=0}^{N} L^m(\tau, \mu) \cos m\phi$$

et on calcule les $L^m(\tau, \mu)$ par une méthode très analogue à la précédente, mais un peu plus complexe car m intervient directement dans les équations.

La méthode reste donc très générale. Elle est très commode, en particulier lorsqu'il s'agit de connaître l'influence des conditions de surface sur la pénétration de la lumière dans un milieu d'indicatrice donnée, car les valeurs des k_α restent les mêmes et seuls les coefficients c_α changent. On pourrait donc en principe tabuler les valeurs des k_α et de la fonction $f(\mu_i, k_\alpha)$ de l'équation (20) pour les valeurs typiques de b/c, l'indicatrice ayant une forme constante ; et dans cette hypothèse la résolution du problème que l'on se pose se bornerait à la résolution des équations (23) selon les conditions aux limites qui en découlent.

- Méthode des fonctions propres (eigenfunctions)

Cette méthode a été initialement appliquée au transfert radiatif par CASE (15) puis étendue au cas de la diffusion non sphérique (50), (18, 19). Une synthèse de la méthode peut être trouvée dans l'article de S.PAHOR (56).

On reprend l'équation de transfert sous la forme (18), c'est-à-dire que le milieu est supposé plan-parallèle et à symétrie axiale (cf. paragraphe II.1.1). Là encore, le cas général pourrait être traité en développant en séries de Fourier suivant l'azimuth.(éq.24).

On cherche à priori des solutions de la forme

(25) $$L(\tau, \mu) = \phi(\nu, \mu)\, e^{-\tau/\nu},$$

avec une condition de normalisation importante, posée également à priori

(26) $$\int_{-1}^{+1} \Phi(\nu,\mu)d\mu = 1 .$$

L'équation (18) devient :

(27) $$(\nu - \mu)\, \Phi(\nu - \mu) = \frac{\nu}{2} \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell P_\ell(\mu) \int_{-1}^{+1} \Phi(\nu, \mu) P_\ell(\mu)\, d\mu ,$$

On remarque l'équivalence de forme des deux équations (21) et (25). La présente méthode diffère de la précédente à ce stade. Au lieu de faire une approximation de l'intégrale ci-dessus, on définit une série de fonctions ,

(28) $$g_\ell(\nu) = \int_{-1}^{+1} \Phi(\nu, \mu) P_\ell(\mu)\, d\mu ,$$

qui évidemment sont calculées à partir d'une relation de récurrence, déduite de celle qui relie trois polynômes de Legendre consécutifs :

(29) $$\nu(2\ell + 1 - \omega_\ell)\, g_\ell(\nu) = (\ell + 1)\, g_{\ell+1}(\nu) + \ell\, g_{\ell-1}(\nu).$$

Le premier terme est d'après l'éq. (26) :

(30) $$g_0(\nu) = 1 .$$

On poursuit en définissant la fonction,

(31) $$g(\nu,\mu) = \sum_{\ell=0}^{N} \omega_\ell\, g_\ell(\nu) P_\ell(\mu) ;$$

l'équation (27) devient,

(32) $$(\nu - \mu)\, \Phi(\nu, \mu) = \frac{\nu}{2} g(\nu, \mu).$$

Lorsque ν est compris dans l'intervalle $(-1, +1)$, $\nu - \mu$ s'annule. L'expression de la solution recherchée dans cet intervalle est alors :

$$(33) \qquad \Phi(\nu,\mu) = \frac{\nu}{2} P \frac{g(\nu,\mu)}{\nu - \mu} + \lambda(\nu)\, \delta^{o}(\nu - \mu),$$

où δ^{o} symbolise la distribution de Dirac.

P indique que lors d'une intégration on doit prendre la valeur principale de Cauchy de l'expression qui suit ; $\lambda(\nu)$ est calculé à partir de la condition de normalisation (Eq. 26),

$$(34) \qquad \lambda(\nu) = 1 - \frac{\nu}{2} P \int_{-1}^{+1} \frac{g(\nu,\mu)}{\nu - \mu}\, d\mu.$$

Dans l'intervalle (- 1, 1) il y a donc un ensemble continu de fonctions propres singulières.

Hors de cet intervalle, on trouve également un nombre fini M de faire de fonctions propres discrètes satisfaisant l'éq. 26,

$$(35) \qquad \Phi(\pm \nu_i, \mu) = \frac{\nu_i}{2} \times \frac{g(\pm \nu_i, \mu)}{\nu_i \mp \mu}, \text{ avec } L = 1, 2, \ldots M \text{ et } 2M \leqslant 2N + 1.$$

Les ν_i sont déterminés par la condition de normalisation (éq. 26).

En résumé, les fonctions $\phi(\nu, \mu)$ recherchées forment un ensemble composé d'un sous-ensemble continu et d'un sous-ensemble d'éléments discrets.

Le grand intérêt de cette méthode réside dans le fait que cet ensemble est complet et que les fonctions propres sont orthogonales [15, 18, 19, 50].

En conséquence, la solution générale de l'équation de transfert est,

$$(36) \qquad L(\tau, \mu) = \sum_{i=1}^{M} A_{\pm i}\, \Phi(\pm \nu_i, \mu) e^{\mp \tau/\nu_i} + \int_{-1}^{+1} A(\nu)\, \Phi(\nu,\mu)\, e^{-\tau/\nu}\, d\nu,$$

où les facteurs A sont déterminés par les conditions aux limites en tenant compte des propriétés d'orthogonalité des fonctions propres [15].

On peut noter que les fonctions propres, elles aussi, dépendent uniquement des caractéristiques optiques et de la symétrie du milieu ; en conséquence, la même remarque que celle effectuée à la fin du paragraphe précédent sur la méthode des ordonnées discrètes peut être faite. Cette méthode présente l'avantage de donner les solutions exactes, une fois développée l'indicatrice de diffusion en polynômes de Legendre, tout en gardant une forme analytique maniable pour un certain nombre de problèmes.

II.1.3. Méthodes faisant intervenir la forme intégrale de l'équation de transfert.

Pour plus de simplicité dans la présentation on reprend l'équation de transfert correspondant à un milieu plan parallèle à symétrie axiale (éq. 15) en l'écrivant sous la forme de deux équations :

$$(37) \qquad \mu \frac{dL(\tau,\mu)}{d\tau} = - L(\tau,\mu) + L^{*}(\tau,\mu),$$

$$(38) \qquad L^{*}(\tau, \mu) = \frac{b}{c} \int_{-1}^{+1} L(\tau, \mu') \left[\int_{o}^{2n} \beta_n(\alpha)\, d\phi' \right] d\mu'.$$

La solution formelle de l'équation (37) s'écrit :

$$(39) \qquad L(\tau, \mu) = e^{-\tau/\mu} \int_{o}^{\tau} L^{*}(t, \mu)\, e^{t/\mu} \frac{dt}{\mu} + L(o, \mu)\, e^{-\tau/\mu} \qquad \text{avec } o < \mu < 1,$$

$$(40) \qquad L(\tau, \mu) = e^{+\tau/\mu} \int_{\tau}^{\infty} L^{*}(t, \mu)\, e^{-t/\mu} \frac{dt}{\mu} \qquad \text{avec } -1 < \mu < 0.$$

Dans ces deux équations on a tenu compte des conditions d'éclairement en surface et on a supposé le milieu de profondeur infinie ($L(\infty, \mu) = 0$). (Une simple dérivation des équations précédentes permet de retrouver l'équation (37).

L'ensemble des équations (38), (39), (40) est équivalent aux deux équations (37), (38), mais il contient en plus les conditions aux limites. En outre, il permet de mettre en évidence un nouveau prin-

cipe de calcul. Au lieu de chercher directement à exprimer les luminances L, comme précédemment, on cherche les solutions pour la fonction scurce L^*, les équations (39) et (40) permettant alors de trouver L (τ, μ) ; mathématiquement le problème est ramené à la résolution d'une équation intégrale sur L^*, que l'on obtient facilement en remplaçant l'expression de L (τ, μ) des équations (39) et (40) dans l'équation (38). Ce principe de calcul est très utilisé dans le cas d'une diffusion sphérique car l'équation intégrale est simple, mais avec une forte anisotropie, les développements mathématiques, quoique possibles, sont complexes. Cependant on indique, ci-dessous, sans les détailler quelques méthodes qui ont été décrites.

- Modèle simple de R.W. PREISENDORFER

Il est décrit dans la référence (70). L'hypothèse de départ consiste à poser :

$$L^* (\tau, \mu) = L^* (0, \mu)\, e^{-k/c\,\tau} \tag{41}$$

où L^* (0, μ) est supposé connu (conditions initiales) et k est une constante indépendante de la profondeur qui peut être déterminée soit par une autre méthode, soit expérimentalement.
L'expression de L (τ, μ) est alors aisément trouvée à l'aide de l'équation (39) par exemple.
Ce modèle se révèle surtout très pratique pour l'étude des contrastes des objets immergés (22).

- Méthode d'approximations successives

Elle est directement compréhensible à partir des équations (38), (39), (40). On attribue à priori une valeur vraisemblable à la luminance L (τ, μ), par exemple en posant :

$$L_o (\tau, \mu) = L_o (0, \mu)\, e^{-\tau/\mu} \tag{42}$$

En utilisant une méthode mathématique appropriée suivant la forme que l'on donne à l'indicatrice de diffusion, on calcule la fonction L_o^* (τ, μ) à l'aide de l'équation (38), puis L_1 (τ, μ) par l'intermédiaire des équations (39), (40).

On obtient ainsi la première approximation et on répète le processus pour avoir une solution de plus en plus précise (il y a en général convergence). L'écart entre la $n^{\text{ième}}$ approximation et la solution réelle dépend, bien sûr, de la méthode choisie pour représenter l'indicatrice de diffusion.

- Méthode des harmoniques sphériques

Dans cette méthode, la solution L (τ, μ) est cherchée sous la forme d'un développement en série de polynômes de Legendre, l'indicatrice de diffusion étant elle-même développée sous cette forme. L'équation de transfert homogène est alors résolue en utilisant les propriétés d'orthogonalité , et les relations de récurrence entre les polynômes de Legendre. Différentes constantes interviennent ; pour les calculer on utilise les équations (38) puis (39) et (40) qui tiennent compte des conditions aux limites.

Cette méthode est décrite dans la référence (40) pour une diffusion isotrope et dans (44) pour une diffusion anisotrope. Dans (96) une diffusion anisotrope est aussi envisagée et une comparaison intéressante avec la méthode des ordonnées discrètes est faite, ces deux méthodes fournissant finalement le même résultat.

- D'autres méthodes, utilisant le calcul des variations (40) ou les propriétés de fonctions mathématiques annexes ((16)) peuvent être employées, mais elles ne sont réellement intéressantes que dans les cas où la diffusion est isotrope, et donc ne sont pas décrites ici (cf. paragraphe I.1).

II.1.4. Méthodes approchées pour une indicatrice de diffusion très pointue vers l'avant.

Ces méthodes semblent particulièrement adaptées au milieu eau de mer, car elles utilisent dans les approximations le fait que l'indicatrice de diffusion est extrêmement pointue vers l'avant. En général, elles sont utilisées lorsque la luminance source est unidirectionnelle sur toute la surface (le cas du soleil par exemple), et elles ne restent valables que pour des angles θ petit (< 30° en général).

Deux types de méthodes sont possibles : les méthodes utilisant la technique des perturbations et celles utilisant les transformées de Fourier.

- Méthodes des perturbations

On trouvera une description détaillée de celles-ci dans (96, 77, 79). Le principe général est de rechercher la solution L (τ, μ) sous la forme :

$$L (\tau, \mu) \equiv L_o (\tau, \mu) + L_1 (\tau, \mu) + \bar{L} (\tau, \mu) \tag{43}$$

où L_o est la lumière non diffusée donc connue, L_1 correspond à une première approximation et $\bar{L}$ est le résidu qui peut être estimé, une fois calculé L_1. On suppose que la profondeur optique τ est faible de manière que $L_1 \gg \bar{L}$. Ceci permet d'écrire l'équation de transfert pour L_1 seulement avec des conditions aux limites appropriées, puis pour $\bar{L}$. Dans la résolution de ces équations, on fait intervenir la pointe de l'indicatrice ; par exemple, dans l'équation (38) L (τ, μ') est développé en série de Taylor autour de μ.

$$L (\tau, \mu') = L (\tau, \mu) + \frac{\partial L (\tau, \mu)}{\partial \mu} (\mu' - \mu) \ldots \tag{44}$$

L'indicatrice de diffusion étant développé en polynôme de Legendre l'équation (37) se prête alors au calcul classique de perturbation (96).

Ce calcul n'est intéressant que pour les faibles profondeurs optiques. En effet, lorsque la diffusion est simple, la lumière est principalement diffusée dans la direction $\mu' = \mu$ par suite de la pointe de l'indicatrice ; plus les diffusions multiples interviennent (ce qui est le cas lorsque τ augmente) et plus il est nécessaire de pousser le développement à des ordres élevées de manière que L reste petit devant L_1, condition indispensable pour appliquer cette technique de perturbations. Ces considérations limitent finalement l'application de cette méthode.

- Méthodes des transformées de Fourier

Dans la résolution de problèmes particuliers, tels que la détermination de la répartition des luminances à une certaine distance d'un point source situé dans un milieu diffusant et absorbant (Point Spread Function), l'approximation des petits angles, possible grâce à l'indicatrice très pointue, permet de mettre l'intégrale intervenant dans l'équation de transfert sous la forme d'un produit de convolution. Dans ce cas la résolution est simplifiée dans l'espace de Fourier. Cette technique a été utilisée par exemple par WELLS (97) et par DOLIN (20, 21).

II.2. Méthodes de "solution naturelle"

Sous ce titre on a réuni les différentes méthodes qui se fondent sur l'évaluation des ordres successifs de diffusion. Le concept physique de base est une évidence : les photons n fois diffusés subissent une diffusion simple de plus que les photons (n - 1) fois diffusés qui parviennent au même point du milieu.

II.2.1. Principe

Le principe de ces méthodes est très simple.

- On calcule la luminance directement transmise à partir de la source en chaque point P du milieu et pour chaque direction D : L_o (P,D).

- Connaissant L_o (P,D) on peut calculer la luminance diffusée dans la direction D, à partir de chaque point P'

(45) $$L_1^* (P'D) = \int_{4\pi} L_o (P'D') \beta (P', D, D') d\omega' = \mathcal{R} \; L_o(P'D') ;$$

L'indicatrice de diffusion est supposée bien sûr connue. $\mathcal{R}$ symbolise l'opérateur :

$$\int_{4\pi} (\quad) \beta (P', D, D') d\omega' .$$

- La luminance d'ordre 1 au point P est déduite de L_1^* en tenant compte de l'atténuation entre le point P' où a eu lieu la diffusion simple et le point P,

(46) $$L_1 (P,D) = \int_o^{PP_\ell} L_1^* (P', D) T (|PP'|) d (|PP'|) = \mathcal{T} \; L_1^* (P', D) ;$$

|PP'| représente la distance géométrique entre les points P et P' et T est l'atténuation subit par un pinceau sur la distance PP'. Si la distance |PP'| est r et si les caractéristiques optiques sont constantes sur le trajet PP',

$$T (|PP'|) = e^{-cr} ;$$

P_ℓ est le point qui se trouve à la limite du milieu et dans la direction D (fig. 4).

L'équation (46) peut s'écrire :

(47) $$L_1 (P,D) = \mathcal{T} \mathcal{R} L_o (P, D) = \mathcal{S} L_o (P,D).$$

- On calcule de la même manière les luminance d'ordre supérieur.

- La luminance réelle cherchée est, évidemment, la somme des différents ordres

(48) $$L (P,D) = \sum_{i=o}^{\infty} L_i (P,D)$$

On trouvera dans le livre de R.W. PREISENDORFER (71) une étude formelle de cette solution naturelle et en particulier une preuve que la solution trouvée est bien solution de l'équation de transfert. Un avan-

tage appréciable de cette méthode est qu'elle fournit directement l'importance relative des ordres de luminances.

II.2.2. Propriétés des ordres de luminance

On indique ici quelques propriétés simples.

- La notion d'ordre est relative, car on définit l'ordre zéro comme étant la luminance venant directement de la source. Si, par exemple, il s'agit du ciel, il est évident que la lumière venant de cette source a été diffusée dans l'atmosphère. Si on englobait dans le milieu l'atmosphère, la décomposition en ordre de luminances serait différente, mais le résultat serait le même.

- Les opérateurs R et T sont linéaires par rapport à la luminance donc si le calcul est effectué pour un même milieu et pour deux types de répartitions en surface, on connaît par simple addition le résultat correspondant à la répartition globale.

- Lorsque l'indicatrice de diffusion ne change pas de forme, l'opérateur R est linéaire vis-à-vis du rapport b/c. En effet, on peut écrire l'équation (45) sous la forme,

$$L_i^* (P,D) = b/c \int_{4\pi} L_{i-1} (P,D') \beta_n (D, D') d\omega' ; \tag{49}$$

ici, les coordonnées de P sont exprimées en distances optiques et le milieu est supposé homogène vis-à-vis des caractéristiques optiques. A partir de cette propriété, on démontre très facilement la relation (75),

$$L_i^{b/c} (P,D) = (b/c)^i L_i^1 (P,D), \tag{50}$$

dans laquelle la luminance $L_i^1 (P,D)$ est la luminance d'ordre i calculée en supposant que le milieu est non absorbant (b/c = 1). En conséquence, il suffit de calculer les ordres de luminances pour le cas non absorbant. Ensuite, par l'intermédiaire de l'équation (50), on déduit la luminance totale pour toute valeur de b/c si le milieu est éclairé par la même source. Cette propriété valorise beaucoup l'emploi de la solution naturelle dans le cas des eaux de mer, car les calculs les plus longs peuvent être effectués une fois pour toute pour divers types de source.

Une autre conséquence de l'équation (50) est que la contribution de la luminance d'ordre i à la luminance totale est d'autant moins forte, à profondeur optique égale, que le milieu est plus absorbant (b/c plus petit). En appliquant ceci au cas où seule la luminance d'ordre zéro est porteuse d'informations (lumière non diffusée), on s'aperçoit que celles-ci seront d'autant moins détruites par la diffusion, pour une même profondeur optique, que le rapport b/c est plus petit ; (on peut, par exemple, faire varier le rapport b/c par un choix judicieux de la longueur d'onde).

II.2.3. Application pratique

- La méthode de solution naturelle est applicable pour tous les types de conditions initiales. Cependant, soit par manque de temps, soit par manque de place en mémoire d'ordinateur, le nombre N total d'ordres de luminance calculés restent nécessairement limité. La luminance approchée qui en découle sera,

$$L_{ap} = \sum_{i=0}^{N} L_i = L - \sum_{i=N+1}^{\infty} L_i . \tag{51}$$

Pour les faibles profondeurs optiques, les ordres élevés de luminance sont en général faibles devant les premiers ordres ; par contre, plus la profondeur croît et plus les ordres supérieurs à N prennent de l'importance et partant, l'erreur totale augmente. Cette méthode fournit donc des résultats exacts pour les profondeurs optiques faibles, la limite d'application étant déterminée par le nombre N et par le rapport b/c, évidemment (cf. éq. 50).

- Un autre avantage de cette méthode est de pouvoir utiliser l'indicatrice de diffusion réelle sous forme de table numérique, sans être obligé de la représenter par un développement mathématique.

- Cette méthode a été appliquée au cas de l'eau de mer jusqu'au 1er ordre (41, 38) et jusqu'au troisième ordre (86) pour la pénétration de la lumière en provenance du soleil seul. Elle est également appliquée à l'eau de mer jusqu'au 21ème ordre, avec une indicatrice expérimentale réaliste et pour divers types de répartitions initiales (75). Ces derniers calculs permettent de connaître la répartition des luminances jusque 8 à 10 profondeurs optiques avec une bonne précision. En particulier, on a mis en évidence que pour la pénétration de la lumière du jour, les luminances d'ordre supérieur à deux interviennent (plus ou moins suivant la valeur de b/c) dès que la profondeur optique dépasse l'unité. Ceci met l'accent sur le fait que les calculs effectués en ne tenant compte que de la simple diffusion dans une couche d'épaisseur supérieure à une demi-profondeur optique restent très approximatifs.

II.3. Méthodes utilisant directement les principes d'invariance

L'application des principes d'invariance a permis de résoudre exactement un grand nombre de problèmes, en particulier les problèmes d'Albedo pour lesquels les méthodes précédentes ne donnaient que des

solutions approchées. PREISENDORFER les considère comme les concepts de base de toute théorie du transfert radiatif (72). On trouvera un exposé détaillé des méthodes dans les ouvrages cités en référence (16, chap. VII) (71, sec 23).

II.3.1. Les principes d'invariance

Le point de vue physique est le suivant. On divise le milieu étudié en couches, planes en général mais non nécessairement. On étudie, non pas les phénomènes physiques qui se produisent à l'intérieur d'une couche, mais uniquement les interactions de cette couche prise dans son ensemble avec le flux radiatif. De ce point de vue la couche du milieu réfléchit de manière diffuse du même côté que la luminance entrante et transmet également de manière diffuse sur le côté opposé à celle-ci. On obtient par simple conservation de l'énergie (Fig. 5) deux équations,

$$L_+ (a) = L_+ (b)\, T (b,a) + L_- (a)\, R (a,b) \quad ,$$

(52)

$$L_- (b) = L_+ (b)\, R (b,a) + L_- (a)\, T (a,b) \quad .$$

Les luminances dirigées vers le haut sont notées "plus" et "moins" vers le bas.

Les luminances entrantes sont L_- (a) à la face supérieur de la couche et L_+ (b) à la face inférieure. Les deux autres types de luminances sont sortantes. Les opérateurs R (i,j) et T (i,j) sont respectivement les opérateurs : réflexion et transmission diffuse, et les luminances sur lesquelles ils s'appliquent, entrent par la face i. Ces opérateurs, du type opérateur intégral, dépendent des caractéristiques optiques à l'intérieur de la couche, c'est-à-dire que R et T sont fonctions de c, β (P, D, D') et de l'épaisseur de la couche.

Le groupe des équations (52) est une expression des principes d'invariance. En réalité, le principe fondamental d'invariance, d'abord énoncé par AMBARTSUMYAN (1) s'exprime comme suit : Dans un milieu plan-parallèle d'épaisseur optique infinie, la luminance sortante ne varie pas si une épaisseur quelconque est ajoutée ou enlevée à ce milieu. Par la suite CHANDRASEKHAR (16) a étendu ce type de raisonnement au cas des milieux d'épaisseur optique finieet a énoncé quatre principes complémentaires entre eux. Enfin, on trouvera les différentes formes de ces principes pour tous les milieux dans l'ouvrage de PREISENDORFER (71).

Il faut noter qu'exprimant la conservation de l'énergie, les équations (52) sont équivalentes à l'équation de Transfert. Une fois le problème posé de cette manière, il reste à trouver les opérateurs R et T pour le résoudre. Pour ceci, on établit les relations fonctionnelles qui relient ces opérateurs. Deux types principaux de méthodes utilisées existent selon qu'elles sont basées sur une formulation continue, ou sur une formulation discrète (addition des couches).

II.3.2. Formulation continue

Elle existe principalement pour les milieux plan parallèle éclairés suivant une direction. On trouvera le détail dans (16, chap. VII).

- On forme d'abord à partir de l'expression mathématique des principes d'invariance (non présentée ici) un groupe de quatre équations intégrales auxquelles satisfont les opérateurs R et T. Dans ces équations interviennent directement et explicitement l'épaisseur optique τ du milieu considéré et l'indicatrice de diffusion.

Pour résoudre ces équations on développe à nouveau en polynômes de Legendre l'indicatrice, et on applique une méthode de fonctions propres, d'harmoniques sphériques ou d'approximations successives. CHANDRASEKHAR (16) a montré que les solutions se décomposent en produits de fonctions qui ne dépendent les unes que de l'angle d'incidence sur la couche et les autres que l'angle d'émergence (réflexion ou transmission). Ces fonctions sont au nombre de deux et sont classiquement appelées X (μ) et Y (μ), lorsque le milieu est d'épaisseur optique finie.Lorsque celle-ci est infinie, une seule fonction intervient, la fonction appelée H (μ). Les propriétés de ces fonctions ont, évidemment, été très étudiées.

L'intérêt de cette méthode est de donner une solution analytique aux problèmes du transfert radiatif ; cependant sans être non applicable (CHANDRASEKHAR , S.PAHOR, LENOBLE 1963) pour la diffusion non sphérique, elle reste semble-t-il peu maniable par comparaison avec les méthodes numériques depuis le développement des ordinateurs.

II.3.3. Formulation discrète

Celle-ci, par contre, se prête très bien au calcul sur ordinateur. Le principe de résolution est le suivant (toutes les étapes du calcul sont détaillées dans (71, sec. 70)).

Le milieu est divisé en couches d'égales épaisseurs, et seules des directions discrètes régulièrement réparties sont envisagées. Les équations (52) sont alors des équations matricielles. On suppose connu les opérateurs matriciels R et T pour une couche élémentaire. Ils peuvent être déterminés en faisant l'hypothèse que seule la diffusion simple intervient dans la couche si celle-ci est de faible épaisseur optique, ou pourrait l'être par toute autre méthode donnant une solution précise de l'équation de transfert pour les épaisseurs optiques pas trop grandes (par exemple, la solution naturelle).

D'après le groupe d'équations (52), connaissant les luminances entrantes dans la couche, on déduit les luminances sortantes, réfléchies et transmises. On ajoute une tranche d'égale épaisseur sous la couche

précédente. La luminance sortant de celle-ci vers le bas est entrante pour la couche ajoutée, alors que les opérateurs R et T restent les mêmes (si les caractéristiques optiques sont homogènes dans le milieu). Ainsi, par empilement successif de couches d'égales épaisseurs, on calcule toutes les luminances par itération.

Les opérateurs réflexion et transmission diffuses pour deux couches d'égale épaisseur se déduisent des opérateurs R et T connues pour une couche. Il existe des relations de récurrence permettant d'obtenir les opérateurs correspondant à n couches successives. Ces relations sont l'équivalent des relations fonctionnelles établies dans la formulation continue.

Donc, pour un milieu de caractéristiques optiques données on peut calculer les éléments des matrices des opérateurs correspondant à une profondeur optique égale à un nombre entier de couches élémentaires. Il suffit d'appliquer les opérateurs matriciels aux luminances imposées par les conditions aux limites pour connaître la répartition des luminances aux diverses profondeurs optiques.

Dans cette méthode, la précision de la répartition des luminances dépend directement de la dimension choisie des matrices (donc de la puissance de l'ordinateur utilisé). Elle dépend, en outre, de l'épaisseur choisie de la couche élémentaire car l'erreur commise en supposant que les diffusions multiples y sont négligeables, s'aggrave lors de l'empilement successif des couches.

On doit noter que les résultats obtenus par R.W. PREISENDORFER, pour 26 directions d'espace et pour une épaisseur de couche élémentaire d'une demi-profondeur optique, sont en bon accord avec l'expérience (71, chap. 11).

En résumé, cette méthode semble bien adaptée à la pénétration de la lumière du jour dans la mer dans la mesure où l'on ne cherche pas à avoir avec précision la répartition angulaire continue des luminances. En particulier, elle permet très facilement de traiter les cas où le ciel n'est pas uniforme mais nuageux. Cette méthode n'est pas limitée au cas de la pénétration de la lumière du jour, mais dans les autres problèmes (point source, rayon laser) le nombre des matrices nécessaires aux calculs augmentent sensiblement, la simplification apportée par la symétrie plan - parallèle disparaissant.

II.4. Méthodes de Monte-Carlo

Ces méthodes sont essentiellement numériques et leur fréquence d'utilisation a suivi la progression de la puissance des ordinateurs. Le principe est de suivre la marche d'un photon pénétrant dans un milieu diffusant-absorbant pour connaître sa position et sa direction à l'endroit du milieu où est supposé placé le récepteur. On suit ainsi un grand nombre de photons et la répartition finale cherchée est obtenue statistiquement.

Dans ces méthodes, tous les phénomènes d'interaction des photons avec le milieu doivent être mis sous forme de loi de probabilités, la réfraction et la réflexion à l'interface air-mer, l'absorption, la diffusion, l'angle de diffusion ... En fait, il est seulement nécessaire de connaître les lois régissant les phénomènes élémentaires, ce qui est le cas pour l'eau de mer.

Vis-à-vis d'un photon, l'absorption se comporte comme un phénomène de tout ou rien et la probabilité qu'un photon disparaisse est fonction de la distance qu'il a parcouru dans le milieu. Il est donc nécessaire d'enregistrer cette distance. Ceci est souvent simulé, en affectant un poids statistique au départ, qui, à chaque événement survenant au photon, est diminué suivant la distance parcourue. Le photon est considéré comme disparu lorsque son poids descend en dessous d'une valeur fixée à l'avance.

Pour la diffusion il faut déterminer deux phénomènes. L'endroit où le photon est diffusé et l'angle indiquant la déviation du photon par rapport à son trajectoire initiale. De même pour la réflexion et la réfraction, il est nécessaire de déterminer par une loi de probabilité si le photon est réfléchi ou réfracté.

Pour appliquer ces lois de probabilités, on doit disposer d'un générateur de nombres aléatoires auquel il est fait appel chaque fois qu'un événement survient au photon. Avec ce nombre aléatoire et connaissant la loi de probabilité attaché à l'évènement, on détermine complétement la marche du photon (par exemple l'angle de diffusion, la réflexion etc..).

Dans ces méthodes l'indicatrice de diffusion est en général tabulée, et elle peut donc être très pointue vers l'avant.

En réalité il existe une grande variété de méthodes, selon qu'on applique le processus aléatoire à tous les phénomènes physiques ou à certains seulement, les autres étant pris en compte analytiquement.

Ces méthodes sont tout à fait générales et on peut construire des modèles de milieux diffusants complexes. Dans les références (57 à 65) un modèle très complet d'océan-atmosphère avec des nuages pour diverses hauteurs de soleil est présenté. Un inconvient de ces méthodes tient au fait qu'elles sont purement numériques et qu'en conséquence les lois physiques sont plus difficiles à mettre en évidence. Ainsi, pour dégager l'influence de chaque paramètre il faut recommencer le calcul dans sa totalité. Un autre inconvénient est que la mise au point du calcul est longue et demande des vérifications très soignées, car la précision d'un calcul de ce type ne peut être connue qu'une fois terminé (58). Par ailleurs, cette précision dépend directement du temps consacré au calcul, car elle est reliée au nombre d'"histoires" enregistrées de photons pénétrant dans le milieu étudié.

II.5. Théories tenant compte des fluctuations au sein du milieu.

Dans ce qui précède, on a supposé que les caractéristiques optiques du milieu étaient fixées et stationnaires (indice de réfraction, indicatrice de diffusion, absorption, atténuation, etc..). Mais dans la nature, l'indice de réfraction de l'atmosphère ou de l'océan n'est pas homogène et présente des fluctuations dans le temps à des échelles variables. On dit que le milieu est aléatoire (random medium) ou turbulent (turbulent medium). On pourrait supposer que ces fluctuations présentent un caractère stationnaire , en dé-

duire une indicatrice de diffusion et appliquer les méthodes précédentes. En réalité celles-ci ne sont pas adaptées à ce cas, pour lequel plusieurs théories ont été élaborées. Le problème pratique est de connaître la réponse d'un détecteur, qui possède une certaine constante de temps et un certain angle de champ, à l'intensité d'une source (en général éloignée). Entre la source et le récepteur est interposé un milieu turbulent. Si celui-ci ne remplit pas tout l'espace entre la source et le récepteur, on peut aisément se ramener au premier cas par simples calculs d'optique géométrique .

Ces théories ont été envisagées en général pour la propagation d'un pinceau laser ou pour l'explication des scintillation à travers l'atmosphère, supposée fluctuante mais transparente. En d'autres termes il n'y a pas de particules au sens physiques du terme ; la diffusion est due alors uniquement aux hétérogénéités d'indice. Dans la réalité, il n'y a pas de discontinuité physique entre la diffusion par les particules et celle engendrée par les hétérogénéités d'indice. Logiquement il faudrait tenir compte des deux phénomènes, principalement dans le cas de l'eau de mer (voir par exemple (102, 76, 30)). Dans ce qui suit on ne considère que l'influence des hétérogénéités d'indice.

Dans cette revue, on ne peut exposer complètement les problèmes posés par les processus aléatoires de diffusion qui ont été et sont très étudiés en particulier en optique atmosphérique. Les ouvrages qui semblent à la base de la plupart des études actuelles sont ceux de V.I. TATARSKII (87, 88) et MM. BORN et WOLF (11) ; de nombreux articles ont paru ces dernières années (6, 7, 8, 13, 14, 23, 25, 29, 32, 33). Cependant peu d'applications au cas de l'eau de mer ont été faites à ce jour (102). On se bornera à indiquer sommairement de quelle manière le problème est posé et en quels termes il est résolu.

L'équation de base (87, p. 60) qui décrit la propagation d'une onde électromagnétique dont la longueur d'onde est très faible vis-à-vis des dimensions des cellules turbulentes est établie à partir des équations de Maxwell.

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 n^2 \vec{E} = 0 , \tag{53}$$

où n est l'indice, et $\vec{E}$ le vecteur champ électrique représentatif de l'onde.

Pour connaître l'éclairement en un point situé à une certaine distance de la source il suffit de résoudre les équations scalaires des composantes du champ électrique. Soit u une composante, on cherche les solutions sous la forme :

$$u = Ae^{is} ,$$

où A est l'amplitude et s la phase correspondante.

L'indice de réfraction ayant une variation aléatoire, l'amplitude et la phase de l'onde aura également une variation aléatoire. Pour décrire la répartition de l'éclairement autour d'un point on est conduit à utiliser la fonction de cohérence mutuelle Γ (Mutual coherence function (11, 55), qui est une fonction de moyenne dans le temps

$$\Gamma (x_1 , x_2 , \tau) = \overline{u(x_1 , t + \tau) . u^* (x_2 , t)} ,$$

ou des fonctions statistiques analogues, fonctions de corrélation ou de structure (87).
(x_1 et x_2 sont deux points situés dans un plan perpendiculaire à la propagation de l'onde).

On remarque que la fonction $\Gamma (x_1 , x_2 , o)$ représente la corrélation entre les signaux obtenus en deux points au même moment, et que $\Gamma (x , x , \tau)$ est la corrélation entre les signaux en un même point à deux instants séparés par l'intervalle de temps τ. Cette fonction est donc directement liée à la notion de cohérence.

Deux types de méthodes apparaissent chez les divers auteurs (32).

- On cherche les solutions de (53) en termes de A et de s, puis on calcule les fonctions de corrélation pour la phase et pour l'amplitude qui dépendent des fonctions de corrélation pour l'indice (87, 88, 103, 13).

- Certains auteurs (8, 9, 32, 100) ont établi une équation différentielle suivant la distance à la source et portant directement sur les coefficients de Fourier de la fonction Γ ; le problème est alors de résoudre cette équation.

Dans toutes ces méthodes certaines hypothèses doivent être faites, telles que faibles variations d'indice, fluctuations d'indices s'exprimant sous des formes mathématiques maniables etc.. En outre, la résolution n'est valable que pour un domaine de distances en général pas trop grandes. On peut retenir que les résultats diffèrent selon les valeurs de critères simples, liés à la longueur d'onde, à l'ouverture du pinceau initial et à la distance d'observation (13, 87, 46) pour de grandes distances on trouve une forme asymptotique à la fonction de cohérence (9 ; 101).

II.6. Remarques sur la polarisation

Dans tout ce qui précède on a supposé la lumière non polarisée. En fait, la plupart des méthodes décrites s'appliquent également à l'étude de celle-ci en utilisant les quatres paramètres de Stokes (16, 71, 5, 4). D'après certains auteurs (28) il semble que le fait d'ignorer la polarisation de la lumière du jour ne modifie pas profondément les résultats du point de vue de l'éclairement. Il semble qu'il ne faille tenir compte de celle-ci que lorsque le phénomène étudié est précisement la modification de l'état de polarisation. Une revue récente de la polarisation de la lumière du jour a été faite par A. IVANOFF (35).

III. APPLICATIONS DES METHODES

Dans ce paragraphe, on décrit quelques problèmes qui présentent un intérêt en océanographie et pour lesquels l'application des méthodes précédentes permet de prévoir théoriquement les résultats. Il ne s'agit pas d'une liste exhaustive, mais les quelques questions abordées montrent quelles informations complémentaires peuvent être déduites de l'application des théories aux données expérimentales.

III.1. Pénétration de la lumière du jour dans la mer.

La connaissance de celle-ci avec le maximum de précision est très importante en océanographie biologique dans toutes les questions touchant à la production primaire des océans. L'idéal serait de mesurer les luminances; mais, bien que les mesures ne soient pas impossibles (84, 95), leur généralisation paraît difficile et probablement non nécessaire. La connaissance des coefficients d'extinction des éclairements plan ou sphérique suffit très souvent pour les applications pratiques. Cependant, ces coefficients ne sont pas des caractéristiques optiques car ils dépendent, outre de celles-ci, des conditions d'éclairement en surface. En conséquence, pour une bonne prévision de la pénétration de la lumière du jour, on doit chercher à établir des relations entre les coefficients d'extinction et les caractéristiques optiques (voir § I.1.).

La définition, même des coefficients d'extinction K, est

$$K = \frac{1}{E}\frac{d\mathrm{Log}E}{dz} \tag{54}$$

où E représente l'éclairement plan ou l'éclairement sphérique. Ces coefficients ont évidemment des valeurs intermédiaires entre le coefficient d'absorption et le coefficient d'atténuation.

Pour trouver les relations citées plus haut, on peut calculer la répartition des luminances pour différents types de conditions d'éclairement en surface et pour différentes caractéristiques optiques ; on en déduit par intégration l'éclairement E et donc K. En général, on suppose que le milieu est plan parallèle (cf.1.1) et homogène pour plus de simplicité.

De nombreux calculs de répartition de luminances dans la mer utilisant diverses méthodes ont été présentées : la méthode des ordonnées discrètes dans la troisième approximation (42, 43), celle des fonctions propres (24), celle utilisant la forte dissymétrie de l'indicatrice de diffusion (78, 80), une autre appliquant les principes d'invariance (71), la méthode de Monte-Carlo (64, 65), les solutions naturelles (75). Cependant, ces calculs n'ont pas un caractère systématique, et ne présente souvent que quelques cas particuliers. Il est difficile d'en déduire l'influence des conditions extérieures (hauteur du soleil, ciel couvert) et de la profondeur sur les luminances et par suite sur les coefficients d'extinction.

En ce qui concerne celle de la hauteur du soleil sur ces derniers, il semble qu'elle ne soit pas importante (10, 39), tout au moins pour des hauteurs pas trop faibles. Quant à la variation de K avec la profondeur (dans une mer homogène) elle n'a guère été étudiée théoriquement, sauf semble-t-il dans les références (66, 67, 69) ou un lien est établi entre le coefficient d'extinction et le rapport de l'éclairement d'un plan à l'éclairement sphérique, qui, lui, varie peu. Une théorie simple et intéressante est proposée dans (99). Elle s'appuie sur les principes d'invariance et donne une relation, dépendante de la profondeur, entre K et le rapport de la diffusion vers l'avant à la diffusion vers l'arrière. Cependant, elle ne semble pas applicable directement d'une manière précise au cas de l'eau de mer, où la distribution en taille des particules est différente de celles envisagées.

On dispose bien d'un grand nombre de mesures in situ du coefficient d'extinction, mais peu ont été effectuées simultanément avec celles des caractéristiques optiques du milieu. En outre, celles-ci sont en général variables avec la profondeur, et donc il sera difficile même expérimentalement de déterminer l'influence de la profondeur sur les relations cherchées. Finalement, c'est un point sur lequel l'application systématique de la théorie devrait s'avérer utile.

<u>Cas particulier du régime asymptotique</u>

De telles relations sont actuellement connues lorsque la profondeur optique est suffisamment grande. On démontre (68, 31) que la répartition des luminances tend vers une forme asymptotique de révolution autour de la verticale. Dans ces conditions le coefficient d'extinction ne dépend que de l'indicatrice de diffusion et du b/c. Le régime asymptotique existe quelque soit l'indicatrice de diffusion et les conditions de surface si le rapport b/c < 1 (milieu passif) et à peu près toutes les méthodes permettent de l'étudier. Expérimentalement il a surtout été mis en évidence en laboratoire au sein de milieux artificiels représentatifs de l'eau de mer (90 à 94). Les méthodes mathématiques telles que celle des ordonnées discrètes donnent très facilement les relations entre coefficient d'extinction et caractéristique optiques, et une étude très complète peut être trouvée dans les références (27, 28, 106). Une méthode plus simple a été employée (74, 73) dans le cas des eaux de mer en utilisant l'indicatrice réelle (cf.I-1). Un bon accord entre ces derniers résultats et les résultats expérimentaux (90) les rend utilisables d'une manière sûre pour le cas des eaux de mers.

En bref, les relations entre les coefficients d'extinction et les caractéristiques optiques ne sont connues que pour le cas du régime asymptotique ; pour des profondeurs faibles de telles relations peuvent être obtenues par la méthode des ordonnées discrètes ou par la solution naturelle, bien adaptée au cas de l'eau de mer où l'indicatrice de diffusion due au particule a une forme qu'on peut considérer comme approximativement constante.

III.2 Détection aérienne de la lumière du jour en provenance de la mer.

Les matières en suspension et en solution interviennent pour fixer la couleur de la mer. On est

donc tenté d'étudier celle-ci, à distance, à partir d'avions ou de satellites pour avoir une vue globale du contenu superficiel des océans. Ce problème fait intervenir le transfert radiatif dans l'atmosphère, dans la mer et à l'interface. Une récente publication (3) traite la question d'une manière très concrète, et détaillée.

Le problème se ramène à l'évaluation de la luminance apparente L_z de la mer à une certaine altitude z pour diverses longueurs d'ondes.

$$L_z = L_a^* + (L_r + L_u)\, T_a \tag{55}$$

L_a^* est la luminance diffusée par l'atmosphère dans la direction considérée à partir de la source que constituent le soleil et la voûte-céleste.

L_r est la luminance réfléchie par la surface de la mer,

L_u, la luminance réfléchie de manière diffuse par l'ensemble du milieu diffusant et absorbant qu'est l'eau de mer,

T_a, est la transmission dans l'atmosphère

L'information cherchée est contenue dans L_u et les autres termes interviennent comme des luminances parasites.

Le calcul de la luminance L_a^* est un problème classique de transfert radiatif dans l'atmosphère ; celui de L_r fait intervenir la réflexion des rayons lumineux sur une surface qui n'est pas plane en général, mais fluctuante dans le temps par suite de l'effet des vents. On peut trouver une étude sur ce sujet dans les références (3), (38).

On détaillera plus, ici, les moyens d'évaluer théoriquement la luminance L_u en provenance de la mer. Parmi les différentes méthodes décrites dans la partie II, celle utilisant les principes d'invariance (II.3) semblerait bien adaptée au problème. En effet, on ne cherche pas à connaître la répartition des luminances dans le milieu mais seulement l'effet global de celui-ci sur la lumière du jour incidente. Donc, la connaissance de l'opérateur réflexion diffuse suffit pour apporter la réponse aux questions posées. Cependant, les influences de la turbidité des eaux et de la longueur d'onde, qui se traduisent par une variation du rapport b/c, serait difficile à évaluer, étant donné que ce rapport n'intervient pas linéairement dans les solutions. Il ne semble pas qu'une telle méthode ait été utilisée dans le cas de l'eau de mer.

En revanche, la méthode de solution naturelle met directement en évidence plusieurs points intéressants (75).

- La contribution à la luminance totale rétrodiffusée, de chaque ordre de luminances est équivalente, lorsque le milieu est purement diffusant. En conséquence, la contribution relative de la luminance d'ordre i à la luminance totale est proportionnelle au rapport $(b/c)^i$ (cf II 2.2.).

- Puisque la luminance directement transmise devient faible par rapport à la luminance diffuse dès que l'épaisseur optique dépasse quelques unités, la luminance retrodiffusée à partir de la mer ne reflète principalement que le contenu absorbant et diffusant des couches de surface (une à deux profondeurs optiques).

- Finalement, la dépendance spectrale de cette luminance est reliée directement à celle du rapport b/c dans les couches de surface, puisque plus le rapport b/c est important plus la luminance rétrodiffusée est grande pour une même valeur de luminance incidente (Eq. 57).

On peut résumer ces propriétés par les expressions suivantes conformément à la notation du paragraphe II.2.

$$L(0, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} (b/c)^i\, L_i^1(0, \theta) \qquad \pi/2 < \theta < \pi$$

$$L_i^1(0, \theta) \approx L_j^1(0, \theta) \approx f(\theta) \quad \text{quel que soit } j \tag{56}$$

$$L(0, \theta) \sim f(\theta) \sum_{i=1}^{\infty} (b/c)^i = f(\theta)\, \frac{b/c}{1 - b/c} \quad ; \pi/2 < \theta < \pi \tag{57}$$

où $f(\theta)$ est une fonction qui dépend de la nature de l'éclairement en surface ; on remarque en outre que le terme $L_0^1(0, \theta)$ est pris égal à zéro puisqu'il n'y a pas de luminance directe dirigée vers le haut, le fond de l'océan étant supposé assez éloigné pour y négliger les effets de réflexion.

Enfin par la méthode de Monté-Carlo, on peut disposer d'un modèle très complet d'océan atmosphère et ainsi étudier numériquement tous les termes de l'expression (55) (65, 64). Sans cette dernière référence, l'influence du fond sur l'éclairement remontant a été étudiée et pratiquement, dès que la distance optique est supérieure à trois, celle-ci n'est plus sensible, même lorsque l'albedo du fond est pris égal à l'unité.

III.3. Sources artificielles

Dans ce paragraphe on s'intéresse à l'étude théorique de la propagation des ondes électromagnétiques émises par des sources artificielles telles que des lampes ou un laser. Ce problème est plus ou moins directement relié à celui de la transmission de l'information par des voies optiques et de ce fait présentent un intérêt important. D'autres exposés traitent de ce sujet et on se borne ici à ne considérer que quelques sources simples, qui ont déjà été étudiées. Un certain nombre d'ouvrages (48, 49, 55) fournissent les notions de base relatives aux grandeurs optiques à déterminer pour prévoir la transmission d'une image. Ces grandeurs peuvent se déduire de la réponse du milieu lorsqu'il est éclairé soit par un point source omnidirectionnel soit par un point source unidirectionnel (le rayon laser en est une bonne approximation). On doit signaler que l'examen de ces cas particuliers de source n'est réellement utile que dans la mesure où le milieu est considéré comme linéaire. La validité d'une telle supposition a d'ailleurs été discutée dans (30) le cas de l'eau de mer.

III.3.1.Point source omnidirectionnel (cf. Fig. 6).

Le problème intéressant est de connaître la répartition des luminances à une certaine distance R de la source où sa transformée de Fourier dans l'espace des fréquences angulaires qui est, dans le cas de la lumière incohérente, la fonction de transfert de modulation (Modulation Transfer Function, MTF (98)).

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre ce problème, elles font toutes intervenir des approximations fondées sur le fait que la diffusion a lieu essentiellement aux petits angles. On peut citer la méthode de Wells qui fournit une solution analytique et donne la MTF en fonction de la distance (97). Le principe du calcul est le suivant : dans une couche élémentaire du milieu, la répartition des luminances à la sortie de la couche peut se déduire de celle à l'entrée par un produit de convolution avec l'indicatrice de diffusion (lorsque l'angle de diffusion n'est pas grand). Dans l'espace de Fourier, la solution ne présente pas de difficulté. D'autres méthodes ont été proposées qui utilisent les principes d'invariance (104) où le calcul de Monte-Carlo (17). Elles fournissent des résultats numériques mais non une solution analytique. Une comparaison de ces méthodes a été présentée récemment (105), et l'incertitude sur l'indicatrice de diffusion aux très petits angles (53) ne permet guère d'évaluer la validité des différentes approximations effectuées. Enfin, la méthode de solution naturelle pourrait être également appliquée à ce cas et donnerait directement l'importance des différents ordres de diffusion sans pour cela faire appel à l'approximation des petits angles.

III.3.2. Point source unidirectionnel (cf. Fig. 7).

Depuis l'apparition des lasers, un grand nombre d'études ont été entreprises sur la propagation de la lumière engendrée par une telle source. On a déjà signalé (II-5) quelques théories à ce sujet lorsque la diffusion n'est due qu'à une fluctuation de l'indice de réfraction. L'effet de ce type de diffusion est sensible pour des fréquences angulaires élevées. Celui dû à l'indicatrice de diffusion des particules marines, qui ne présente pas nécessairement un caractère aléatoire, a été également étudié sur le plan théorique et concerne à priori des fréquences angulaires plus faibles. Le problème est de déterminer la répartition des éclairements dans un plan perpendiculaire à la trajectoire initiale du rayon lumineux.

D'après le principe de réciprocité, le problème est le même que celui du paragraphe III.2.1. (26) mais la formulation et la résolution sont différentes. La méthode de Monté-Carlo a été utilisée et les résultats numériques confrontés avec l'expérience sont présentés d'une manière très exploitable (26).(En particulier, on peut en déduire l'éclairement produit par un cône de lumière,et le coefficient d'extinction valable dans ce cas est comparé aux caractéristiques optiques).

L'équation de transfert correspondant au problème posé a été résolue en faisant encore certaines approximations vraisemblables (petits angles, utilisation des transformées de Fourier) (3, 12). Les résultats théoriques doivent être comparés à ceux expérimentaux ; en particulier deux formules empiriques sont préposées l'une pour l'éclairement sur l'axe d'une source ayant une certaine divergence (22) l'autre pour l'éclairement dans un plan perpendiculaire à une source unidirectionnelle (37). Expérimentalement également on a trouvé une répartition Gaussienne de l'éclairement au voisinage du point d'impact du pinceau (47). Enfin, certains calculs fondés sur le fait que la diffusion aux petits angles peut être considérée comme un phénomène aléatoire ont été proposés (102, 5bis, 23).

III.3.3.Sources étendues

Pour connaître avec précision la propagation de la lumière en provenance d'une source non ponctuelle (ce qui est nécessaire par exemple en photographie), il n'y a pas de méthode unique applicable. Par nécessité on fractionne l'étude en considérant plusieurs domaines dans l'espace des fréquences spatiales. Celui des fréquences élevées (observation de fins détails) dans lequel intervient, comme on l'a vu en II.5, les fluctuations d'indice à grande échelle et l'indicatrice de diffusion des particules aux très faibles angles (inférieurs à quelques centièmes de radian) ; Celui où l'indicatrice de diffusion des particules intervient pour des angles moyens (III.3.1), et enfin le domaine des fréquences spatiales faibles où la diffusion intervient dans son ensemble. L'étude de ce dernier domaine revient à celle des contrastes d'ensemble d'objet de taille non petite. Le modèle simple de PREISENDORFER (II.1.3) peut alors donner des résultats acceptables, tandis que les approximations employées dans les méthodes citées en III.3.2 et III.3.3. deviennent moins valables.

III.4. Problèmes inverses

Dans les problèmes envisagés plus haut, qualifiés en général de "directs", les caractéristiques optiques (coefficients de diffusion et d'atténuation, l'indicatrice de diffusion) étaient supposées connues, ainsi que les conditions initiales ; à partir de ces données, la répartition des luminances où des quantités dérivées de celles-ci étaient déterminées. Dans les problèmes "inverses"les caractéristiques optiques du milieu sont déduites des conditions initiales et de la répartition des luminances au sein du milieu.

L'intérêt de ces derniers apparaît clairement lorsqu'on ne connaît pas ou qu'on ne peut mesurer que difficilement les caractéristiques optiques du milieu, et que par contre les résultats expérimentaux donnent accès directement ou indirectement à la répartition des luminances.

Deux modes de raisonnement existent pour aborder ces problèmes. On cherche analytiquement les relations entre caractéristiques optiques et répartition des luminances, ce qui conduit nécessairement dans le cas de l'eau de mer à rechercher l'indicatrice de diffusion sous la forme d'un développement en polynômes de Legendre où sous une forme proche d'une fonction simple. On peut également choisir à priori une indicatrice, effectuer le calcul par les méthodes précédemment décrites, comparer les résultats obtenus avec les résultats expérimentaux, modifier l'indicatrice en conséquence et recommencer pour obtenir un résultat satisfaisant ; c'est un procédé d'itération.

Dans tous les cas on est obligé de définir à priori la forme de l'indicatrice, et finalement, même lorsque les résultats sont bons, on n'est jamais sûr que c'est la forme réelle. A titre d'exemple, on envisage ci-dessous quelques problèmes inverses typiques, dont deux ne nécessitent pas la connaissance de l'indicatrice de diffusion et donc peuvent être parfaitement résolus.

III.4.1. Coefficient d'absorption

C'est un cas simple qui utilise directement l'équation (11b).Lorsque le milieu est plan parallèle, ce qui est une bonne approximation en ce qui concerne la pénétration de la lumière du jour, cette équation s'écrit :

$$\frac{dE_d}{dz} - \frac{dE_u}{dz} = aE_o \quad . \tag{58}$$

où E_d et E_u représentent respectivement l'éclairement plan descendant et ascendant. Ces éclairements sont mesurés d'une manière courante, et l'éclairement scalaire peut l'être également en utilisant un collecteur diffusant sphérique par exemple. De ces mesures on déduit donc l'absorption. Ce coefficient d'absorption peut aussi être obtenu par différence entre le coefficient d'atténuation et le coefficient total de diffusion, mais d'une manière beaucoup moins précise car la valeur absolue de ces coefficients sont très difficiles à déterminer.

III.4.2. Coefficient d'atténuation

En reprenant l'équation de transfert (9), pour les luminances horizontales en milieu plan parallèle,

$$c = \frac{L^*}{L} \quad . \tag{59}$$

C'est la méthode de l'écran noir (41, 34). On peut mesurer le coefficient d'atténuation en comparant la luminance horizontale de la pleine eau et la luminance apparente d'un écran noir situé à une distance connue du point d'observation. Cette méthode a été utilisée également dans l'atmosphère (22b).

III.4.3. Forme de l'indicatrice de diffusion

Elle peut être déduite de la répartition des luminances, et en particulier de celle existant en régime asymptotique. En effet, à chaque forme d'indicatrice correspond une répartition limite propre. On peut employer les deux types de raisonnements signalés plus haut, mais on envisage ici une méthode analytique parfaitement décrite dans la référence (106). On cherche l'indicatrice de diffusion sous la forme d'un développement en polynômes de Legendre. Un tel développement est préalablement effectué sur la répartition connue des luminances; puis sont calculés les différents moments de la répartition angulaire des luminances. (Le moment d'ordre zéro est l'éclairement sphérique, et le moment d'ordre un est l'éclairement plan). On démontre qu'il existe des relations de réccurence entre les différents moments et les coefficients du développement de l'indicatrice. De proche en proche ces derniers peuvent donc être calculés.

Le principe de cette méthode a effectivement été appliqué (81, 28), cependant on doit remarquer que, puisque l'indicatrice de diffusion est très pointue, le développement doit être obtenu jusqu'à des ordres assez élevés. Ce qui nécessite une connaissance très précise de la répartition des luminances. Il faut remarquer que si on utilise le régime asymptotique, on ne peut avoir que les premiers termes du développement avec précision. En effet l'influence, sur la forme de la répartition des luminances, des variations de l'indicatrice est très faible (74, 107). Dans la dernière référence il est montré que les 5 à 10 premiers termes suffisent pour déterminer la répartition asymptotique avec précision. Ceci signifie, en retour, que par cette méthode on ne peut connaître la forme de l'indicatrice que pour des angles non petits.

En réalité dans ce domaine on a une bonne connaissance directe de l'indicatrice et donc ces calculs ne s'imposent pas en général.

III.4.4. Indicatrice de diffusion aux petits angles.

Il en est tout autrement pour le cas des petits angles, cas où on ne dispose que de très peu de mesures, et c'est également dans ce domaine (< 1°) que sa forme pourrait être variable (53) selon l'échelle considérée. Les mesures physiques qui permettraient de déterminer, par une méthode inverse, la forme de cette indicatrice doivent être sensibles à la modification de la répartition des luminances aux petits angles. Il faut donc étudier, par exemple, la propagation d'un pinceau collimaté, ou la fonction de transfert de modulation (17). Malheureusement, on a vu que dans ces problèmes interviennent deux phénomènes physiques, dont les effets se superposent, la diffusion optique (particules, diffusion moléculaire) et les fluctuations d'indice. Le problème inverse est donc compliqué par le fait que, à partir de données expé-

rimentales (répartitions des éclairements perpendiculairement au pinceau), on ne pourra aisément distinguer les deux types de diffusion. D'autres informations concernant les lois de fluctuations d'indice devraient être obtenues indépendamment . Les récents développements dans l'étude du transfert de l'eau de mer devraient permettre d'explorer ce domaine.

CONCLUSION

On dispose d'un grand éventail de méthodes de calculs théoriques pour la propagation des ondes électromagnétiques dans l'eau de mer. De ce qui précède se dégage les quelques remarques suivantes :

Peu de travaux ont traduit ces théories en calculs et surtout en calculs directement utilisables pour la prévision. Si les méthodes analytiques ont vu récemment un certain développement grâce à l'utilisation des fonctions propres, le caractère singulier de ces fonctions entrave souvent leurs applications. De leur côté, les méthodes numériques bien adaptées au calcul sur ordinateur s'avèrent très pratiques, mais un effort doit être fait pour présenter les résultats d'une manière exploitable par ceux qui ne disposent pas directement des programmes toujours longs à élaborer. Un but qu'on pourrait assigner aux calculs serait par exemple de relier les coefficients d'extinction aux caractéristiques optiques en évaluant objectivement l'influence des conditions initiales et leur importance.

La forme de l'indicatrice de diffusion aux très petits angles reste un problème qu'il faut résoudre si l'on veut prévoir les limites de la transmission de l'information dans l'eau de mer et une confrontation de la théorie et de l'expérience est encore actuellement nécessaire, semble-t-il, pour connaître l'influence des fluctuations d'indice.

Compte-tenu de la forme relativement constante de l'indicatrice de diffusion on a vu également l'importance que prend le rapport b/c pour l'explication de la pénétration des ondes électromagnétiques. Ainsi, pour comparer diverses mesures entre elles, il est utile de connaître ce rapport, caractéristique des conditions d'expérience .

N.B. On doit signaler que dans cette revue les travaux de G.V. ROZENBERG n'ont pas été analysés, pour des raisons de documentation, bien que de nombreux articles soviétiques y fassent référence. En outre, la parution d'un important traité d'optique océanographique de R.W. PREISENDORFER est annoncée.

Liste des références.

1 . V.A. AMBARTSUMYAN. "On the problem of Diffuse reflection of light in planetary atmosphere" Smithsonian Inst. Ast. Obs. Ast. Papers 7 (1943)pp 25-33.

2 . D. ARNUSH. "Underwater light beam propagation" J.O.S.A. 62 (1972) pp 1109-1111.

3 . R.W. AUSTIN. "The remote sensing of spectral radiance from below theOcean Surface" Symposium on optical aspects of Oceanography-Copenhagen, Academic Press (à paraître)

4 . G.F. BEARDSLEY. "The polarisation of submarine day light at near-asymptotic depths". Journ. of Geophysical Research 73 (1968) pp 6449-6457.

5 . G.F. BEARDSLEY. "Mueller Scattering matrix of Sea-Water" J.O.S.A. 58 1 (1968) p 52.

5 bis . C. BECK. "Transmission of light through a randomly Scattering medium" Naval Air Development Center. Report n° NADC 72099. AE/ (1972).

6 . M.J. BERAN. "Propagation of mutual Coherence function through random media" J.O.S.A. 56 11 (1966) pp 1475-1480.

7 . M.J. BERAN. "Propagation of the coherence function through random media" J.O.S.A. 58 3 (1968) pp 431-432.

8 . M.J. BERAN. "Propagation of a finitebeam in a random medium" J.O.S.A. 60 5 (1970) pp 518-521.

9 . M.J. BERAN et A.M. WHITMAN. "Asymptotic theory for beam propagation in a random medium" J.O.S.A. 61 8 (1971) pp 1044-1050.

10 . J.P. BETHOUX et A. IVANOFF. "Au sujet de l'influence de la hauteur du soleil sur la valeur du coefficient d'extinction des eaux de mer" C.R. Acad Sci. Paris 270 (1970) B pp 1709-1710.

11 . M. BORN et E. WOLF. "Principles of Optics" Pergamon Press (1959)reedité en (1965) et (1970).

12 . O.N. BRAVO-ZHIVOTOSKY, L.S. DOLIN, A.G. LOUCHININ, W.A. SAVELEV. "on the structure of a narrow light beam in the sea water". Izv. Atm and Ocean Phys. (1962) 2 pp 160-167.

13 . F.P. CARLSON. "Application of optical scintillation measurements to turbulence diagnostics" J.O.S.A. 59 (1969) pp 1343.

14 . F.P. CARLSON. et A. ISHIMARU "Propagation of spherical waves in locally homogeneous random media". J.O.S.A. 59 3 1969 pp 319-327.

15 . K.M. CASE. "Elementary solutions of the transport equation and their applications" Ann. Phys. 9 (1960) pp 1.23.

16 . S. CHANDRASEKHAR. "Radiative Transfer" DOVER publ. inc. NY (1960) 393 p. reedition de (1950) Oxford university press.

17 . F. CHILTON, A.D. JONES, W.K. TALLEY. "Imaging properties of light scattered by the sea" J.O.S.A. 59 (1969) p 891.

18 . Mc. CORMICK et I. KUSCER, "Half Space neutron transport with linearly anisotropic scattering" J. Math. Phys. (1956) 6 p 1939.

19 . N.M. Mc CORMICK et I. KUSCER. "Bi-Orthogonality relation for solving half space transport problems" J. Math Phy (1966) 7. p 2036.

20 . L.S. DOLIN. "Scattering of a light beam in a layer of a turbid medium " Bull (Izv) Higher. Educ. Inst Radiophysics 7. n° 2 (1964).

21 . L.S. DOLIN. "Propagation of a narrow light beam in a medium with strongly anisotropic. scattering" Bull (Izv) Vyssh, Uchebu. Zaved. Radiofizika (Higher Educ. Inst. Radiophysics) (1966) 9 n° 1.

22 . S.Q. DUNTLEY. "Light in the sea" J.O.S.A. 53 (1963) p. 214.

22 b . S.Q. DUNTLEY, A.R. BOILEAU, R.W. PREISENDORFER. J.O.S.A. 47 (1957) p 419.

23 . S.R. DUNTLEY, W.H. VULVER, F. RICHEY et R.W. PREISENDORFER "Reduction od contrast by atmospheric boil" J.O.S.A. 53 (1963) 3 p. 353.

24 . D.L. FEISTEIN, K.R. PIECH et A. LEONARD. "Transport analysis of optical propagation in the undersea environment" Agard Conference Proceedings n° 77 on"electromagnetics of the sea" n° 38.

25 . D.L. FRIED. "Diffusion analysis for the propagation of mutual coherence" J.O.S.A. 58 (1968) 7 pp 961-969.

26 . C.J. FUNK. "Multiple scattering calculations of light propagation in Ocean water". Applied Optics 12 (1973) 2 pp 301-313.

27 . M. HERMAN et J. LENOBLE. "Etude du regime asymptotique dans un milieu diffusant et absorbant". Revue d'Optique 43 (1964) 4 pp 555-57.

28 . M. HERMAN, et J. LENOBLE "Asymptotic radiation in a scattering and absorbing medium" J. Quant Spectrosc. Radiat. Transfer. Pergamon Press. 8 (1968) pp 355.367.

29 . T.L. HO. "Coherence Degradation of gaussian beams in a turbulent atmosphere". J.O.S.A. 60 (1970) 5 pp 667-673.

30 . R.T. Hodgson et D.R. CALDWELL. "Application of Fourier technics to underwater image transmission" J.O.S.A. 62 (1972) 12 pp 1434-1438.

31 . N.V. HOJERSLEV. "A theoretical proof of the existance of a constant vertical radiance attenuation coefficient in a horizontally stratified ocean" Institut for Fysik OceanografiReport n° 2 (1972).

32 . R.E. HUFNAGEL et N.R. STANLEY "Modulation transfer function associated with image transmission through turbulent media". J.O.S.A. 54 (1964)/52.

33 . A. ISHIMARU. "Fluctuations of a beam wave propagating through a locally homogeneous medium". Radio-Sci. (1969) 4 p 295.

34 . A. IVANOFF "Propriétés optiques de l'eau de mer" Ann de géophysique 13 (1957) 1 pp 22-52.

35 . A. IVANOFF "Polarization measurements in the sea. Symposium on Optical Aspects of Oceanography" Copenhagen 1972. Academic PRESS, à paraître.

36 . A. IVANOFF. Lecture Series n° 61.

37 . A.P. IVANOF et I.D. SHERBAF. "Optical conditions in a turbid medium illuminated by a harrow light beam". Optics and spectroscopy (1963) pp 391-394.

38 . N.G. JERLOV. "Optical Oceanography" Elsevier (1968) 194 p.

39 . H.A. JITTS, A. MOREL, Y. SAIJO. "The relation of marine primary production and available photosynthetic irradiance" - à paraître.

40 . V. KOURGANOFF. "Basic Methods in Transfer Problems" Oxford university Press (1952) et Dover Publi. Inc. (1963) 281 p.

41 . Y. LE GRAND. "La pénétration de la lumière du jour dans la mer" Annales de l'institut Oceanographique 14 (1939) pp 393-436.

42 . J. LENOBLE. "Application de la méthode de Chandrasekhar à l'étude du rayonnement diffusé dans le brouillard et dans la mer". Revue d'optique 35 (1956) 1 pp 1-17.

43 . J. LENOBLE. "Etude theorique de la pénétration du rayonnement dans les milieux diffusants naturels" Opt. Acts. 4 (1957) 1 pp 1-11.

44 . J. LENOBLE "Application de la méthode des harmoniques sphériques au cas de la diffusion anisotrope" C.R.AL. Sci. Paris 252 (1961) pp. 2087-2089.

45 . J. LENOBLE. "Essai d'une méthode générale pour l'introduction des fonctions X et Y de Chandrasekhar, dans le cas de la diffusion anisotrope". C.R. Aca. Sci. de Paris 256 (1963) pp 4638-4640.

46 . R.F. LUTOMIRSKI et H.T. YURA. " Wave structure function and mutual coherence function of an optical wave in a turbulent medium"J.O.S.A. 61 (1971) pp 482-487.

47 . S.A. MAKAREVICH, A.P. IVANOV, G.K. ILLICH. "The structure of a narrow light beam emerging from a layer of a scattering medium" Atm. and Ocean Physics (1969) 5 pp 77-83.

48 . A. MARECHAL et M. FRANCON. "Diffraction et structure des images, influence de la cohérence de la lumière" Masson Paris (1970) 204 p.

49 . L. MERTENS. "In-Water Photography" Wiley interscience (1970) 387 p.

50 . J.R. MIKA. Nucl. Sci. Eng. 11 (1965) p. 415.

51 . A. MOREL. "Relation entre coefficients angulaires et coefficient total de diffusion de la lumière pour les eaux de mer". CahiersOcéanographiques 20 (1968) 4 pp 291-303.

51 b . A. MOREL "Etude pour diverses longueurs d'onde de l'indicatrice de diffusion de la lumière par les eaux de mer". U.G.G.I Procès verbaux n° 10, XIV Assembly Berne, (1967) pp 204-205.

52 . A. MOREL. "Examen de résultats expérimentaux concernant la diffusion de la lumière par les eaux de mer". AGARD Conference proceedingsn° 77. on "Electromagnetics of the sea" (1970) n° 30.

53 . A. MOREL. Lecture Séries n° 61 (1973).

54 . F. NYFEELER "Etude de la diffusion de la lumière par l'eau de mer, mesures aux petits angles à l'aide de sources classiques et de sources laser". AGARD conference proceedings n° 17 on "electromagnetics of the sea" (1970) n° 31.

55 . E. O'NEILL. "Introduction of statistical optics" Addison. Wesley. Publ. Comp. Inc. (1963) 179 p.

56 . S. PAHOR. "A new approach to half space transport problems" Nucl. Sci. and Eng. 26 (1966) p. 192.

57 . G.N. PLASS. et G.W. KATTAWAR. "Influence of single scattering albedo on reflected and transmitted light from clouds" Appl. Opt. 7 (1968) p. 361.

58 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR. "Monte-Carlo Calculations of light scattering from clouds" Appl. Opt. 7 (1968) p. 415.

59 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR. "Influence of particle size distribution on reflected and transmitted light from clouds". Appl. Opt. 7 (1968) p. 869.

60 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR. "Calculations of reflected and transmitted radiance for earth's atmosphere". Appl. Optics 7 (1968) p. 1129.

61 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR. "Radiation transfer in an ocean atmosphere system". App. Opt. 8 (1969) 2 pp. 455-466.

62 . G.N. PLASS et G.W.KATTAWAR. "Thermal emission from haze and clouds" App. Opt. 9 (1970) 2 p 413.

63 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR. "Polarization of the radiation reflected and transmitted by earth's atmosphere" App. Opt. 9 (1970) 5 p 1122.

64 . G.N. PLASS G.W. KATTAWAR. "Monte-Carlo Calculations of radiative transfer in the earth's atmosphère Ocean system. I. Flux in the Atmosphère and Ocean" Journ. of Phy. Ocean. 2 (1972) pp 139-145.

65 . G.N. PLASS et G.W. KATTAWAR "Monte-Carlo Calculations of radiative transfer in the earth's atmosphere ocean system. II.radiance in the atmosphere and ocean" Journ. of Phy. Ocean. 2 (1972) pp 146-156.

66 . R.W. PREISENOORFER "Directly observable quantities for light fields in natural hydrosols" Scripps Institution of Oceanography. University of California, San Diego (1958) Rep. 58-46.

67 . R.W. PREISENDORFER "The covariation of the diffuse attenuation and distribution functions in plane-parallel media" Scripps Institution of Oceanography. University of California, San Diego (1959) Rep. 59-52.

68 . R.W. PREISENDORFER. 'Theoretical proof of the existence of characteristic diffuse light in natural water" J. Mar. Res. 18 (1959) pp 1-9.

69 . R.W. PREISENDORFER "On the structure of the light field at shallow depths in deep homogeneous hydrosols" Scripts institution of Oceanography, San Diego, California (1959) Rep. n° 3-5.

70 . R.W. PREISENDORFER "A model for radiance distributions in natural hydrosols" Tenth Pacific Science Congress, Honolulu (1961) University of Hawaï Press (1964) pp 51-59 Ed. by J. TYLER.

71 . R.W. PREISENDORFER "Radiative transfer on discrete spaces" Pergamon Press (1965) 74 Series of Monograph in pure and applied Mathematics 462 p.

72 . R.W. PREISENDORFER "A survey of theoretical Hydrologie optics J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 8 pp 355-328 (1968).

73 . L. PRIEUR. "Pénétration de la lumière du jour dans la mer" A.G.A.R.D. Conférence Proceedings n° 77 (1970) n° 33.

74 . L. PRIEUR et A. MOREL "Etude théorique du régime asymptotique : Relations entre caractéristiques optiques et coefficient d'extinction relatif à la pénétration de la lumière du jour" Cahiers Océanographiques 23 (1971) 1 pp 35-47.

75 . L. PRIEUR A paraître

76 . G.V. ROZENBERG "The statistical-electrodynamic Content of Photometry quantities and of the basic concepts of radiation transfer theory" Opt. and Spectroscopy 28 (1970) pp 210-213.

77 . L.M. ROMANOVA. "The solution of the radiation a transfer equation for the case when the indicatrix of scattering differs from the spherical one"Optika i spectroscopya 13 (1962) p 238.

78 . L.M. ROMANOVA 'Solution of the equation of radiation transfer" Optika i spekt oskopya 13 (1962) 6 p. 463

79 . L.M. ROMANOVA "Small angle approximation of a solution of the equation for radiation transfer, and its refinment" Izv Akad. Nauk. SSSR Ser. Geophy. 8 (1962) pp 1108-1112

80 . L.M. ROMANOVA "The radiation field in plane layer of a turbid medium with strongly anisotropie scattering" Optika i Spektroskopya 14 (1963) 2 pp 262-269.

81 . G. SCHELLENBERGER "Benchung der Straufumktion naturlich gerwässe a s der Unterwassiers Strahlu ngverterling". Gerl. Beitr. Geophys. 76 (1967) 1 pp 69-82.

82 . R.C. SMITH "The optical characterization of natural waters by means of an extinction coefficient" Limn and Ocean 13 (1968) 3 pp 423-429.

83 . R.C. SMITH "An underwater spectral irradiance collector" J.Mar. Res. 27 (1969) pp 341-351

84 . R.C. SMITH. App. Opt. 9 (1970) pp 2015-2022

85 . V.V. SOBOLEV "A treatise on radiative transfer" D. Van Nostrand (1963) Princeton N.5.

86 . Y. SUGIMORI et T. HASEHI "Estimation of undewater scattering radiance up to the third order" j. of Ocean. Soc. of Japan 27 (1971) 2 73-80.

87 . V.I. TATARSKII "Wave propagation in a turbulent medium" Dover Publ. (1967) 285 p. et Mc Graw-Hill NM (1961)

88 . V.I. TATARSKII "The effects of the turbulent medium on wave propagation National Science Fundation Washington DC (1971) TT 6850464

89 . V.A. TIMOFEYEVA " Critère de similitude des milieux troubles en optique" Izv. Akad Nauk SSSR (1968) 4 pp 847-850.

90 . V.A. TIMOFEYEVA "The diffusion reflection coefficient and its relation to the optical parameters of turbid media". Atm. and. Ocean Physics 7 (1971) 6 pp 688-701.

91 . V.A. TIMOFEYEVA "Optical Characteristics of turbid media of the sea water type". Atm. and Ocean.Physics 7 (1971) 12 pp 1326-1329.

92 . V.A. TIMOFEYEVA et F.J. GOROBETS. "Dependance entre les coefficients d'extinction et d'attenuation". Bull (Izv) Acad. Sci. USSSR Geophy. Series (1967) 3 pp 291-296.

93 . V.A. TIMO FEYEVA et L.A. KOVCHNIKOVA. "Sur le problème de la détermination instrumentale du coefficient d'atténuation des milieux troublés. Atm. and Ocean. Physics 2 (1966)3.

94 . V.A. TIMOFEYEVA et V.K. SOLOMONOV. "The Stationary Brightness distribution diagram in turbid media such as sea water". Atm and Ocean-Physics 6 (1970) 6 (1970) 6 pp 611-616.

95 . J.E. TYLER "Program of research in optical Oceanography at Scripps Institution of Oceanography". A.G.A.R.D. Conference Proceedings n° 77 (1970) n° 43.

96 . M.C. WANG et E. GUTH. "On the theory of multiple scattering particulary of charged particles". Phys. Rev. 84 (1951) 6 pp 1092 - 1111.

97 . W.H. WELLS "Loss of Resolution in water as a result of multiple small angle scattering". J.O.S.A. 59 (1969) 6 p. 686.

98 . W.H. WELLS Lecture Series n° 61.

99 . J. WILLIAMS "Optical properties of the Sea". United States Naval Institute series in Oceanography. 123 p.

100 . A.M. WHITMAN et M.J. BERAN, "Beam Spread of Laser light propagating in a random medium". J.O.S.A. 60 (1970) 12 pp/595-1602.

101 . D.A. WOLF "Saturation of irradiance fluctuations due to turbulent atmosphere" J.O.S.A. 58 (1968) p 461.

102 . H.T. YURA. "Small angle scattering of light by Ocean water". Appl. Optics. 10 (1971) 1 p 114-118.

103 . H.T. YURA "First and second moment of wave in random medium J.O.S.A. 62 (1972) pp 889-892.

104 . J.R. ZANEVELD et J. BEARDSLEY. "Modulation transfer function of sea water" J.O.S.A. 59 (1969) 4 pp 378-380.

105 . J.R. ZANEVELD, R. HODGSON, G.F. BEARDSLEY. "Image dégradation over seawater paths a rewiew". A.G.A.R.D. Conference proceedings n° 77. on "Electromagnetics of the sea" n° 41 (1970).

106 . J.R. ZANEVELD et H. PAK. "Some aspects of the axiably symetric submarine daylight field". J. of Geoph. Research 20 (1972) pp 2677-2680.

107 . E.P. ZEGE. "The light field in duf layers of a scattering an absorbing medium" Atm. and Ocean Physics 7 (1971) 2 pp 121-132.

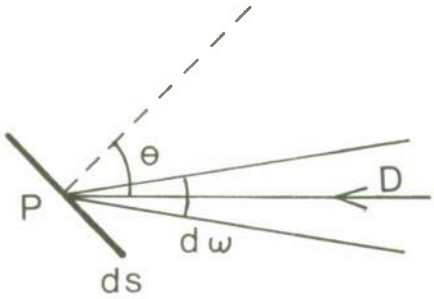


Figure 1

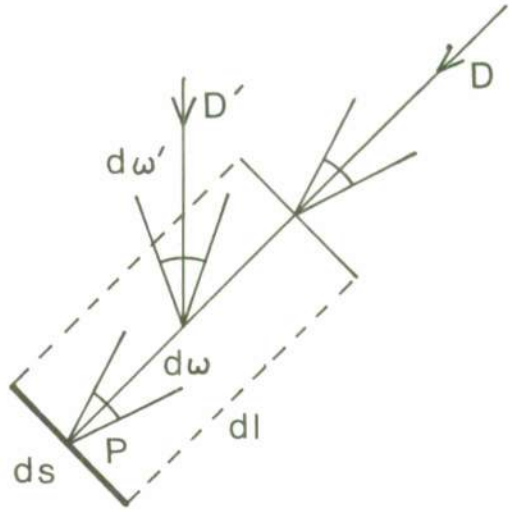


Figure 2

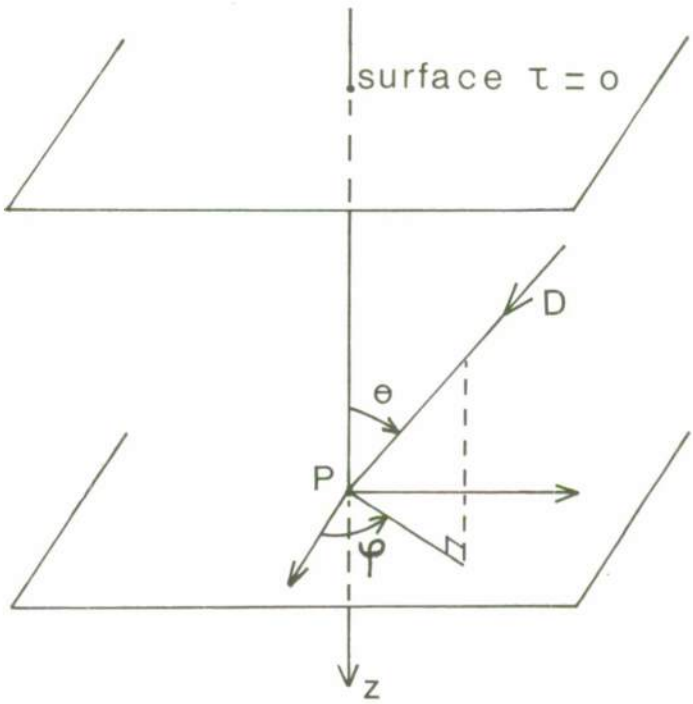


Figure 3

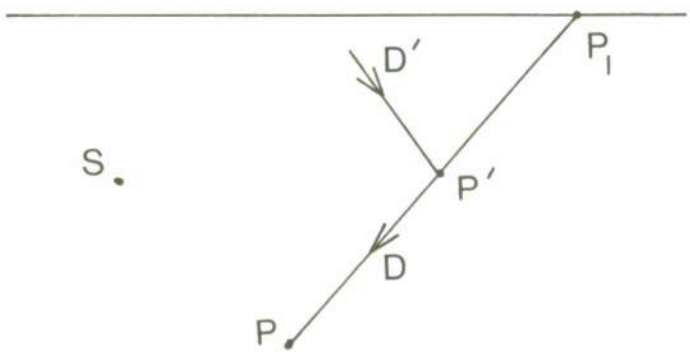


Figure 4 - La source S est ici ponctuelle mais peut être quelconque ; par exemple, elle pourrait être constituée par la répartition des luminance en surface.

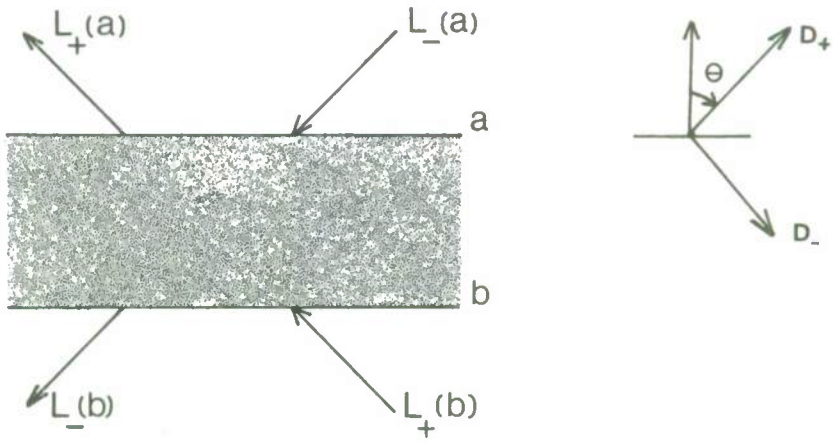


Figure 5

Figure 6 - Le point source isolume est en S ; l'observation se fait en O.

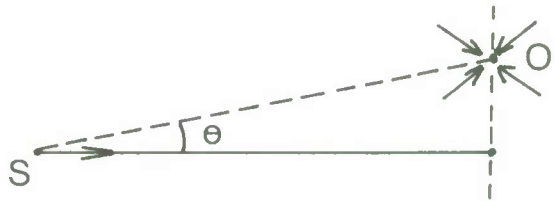


Figure 7 - Point source unidirectionnel.

ENERGIE SOLAIRE ET THERMOCLINE SAISONNIERE.

par

J.P.BETHOUX et A.IVANOFF

Laboratoire d'Océanographie Physique
Université Paris VI,ERA CNRS
4 Place JUSSIEU
75005 PARIS

SOMMAIRE

La diminution avec la profondeur de l'éclairement sous-marin correspond essentiellement à l'absorption de l'énergie solaire par les eaux.Ce phénomène peut être étudié par photométrie sous-marine,qui permet le calcul des fractions d'énergie absorbées par unité de temps et de volume à différentes profondeurs.On obtient ainsi le cycle annuel des profils verticaux"théoriques"de température correspondant à l'absorption du rayonnement solaire. Cet échauffement solaire provoque un gradient de densité qui se traduit par une stabilité verticale des eaux.

Les échanges thermiques avec l'atmosphère entrainent un refroidissement superficiel qui annulle localement la stabilité et peut ainsi se propager en profondeur par conduction thermique turbulente.Les vents renforcent ce processus par un brassage plus ou moins profond.Il y a effacement progressif à partir de la surface du profil théorique initial et remplacement par une couche homothermale dont la température et l'épaisseur varient dans le temps.Sous cette couche de mélange apparait la thermocline saisonnière,au niveau de laquelle on retrouve le profil théorique(et une stabilité des eaux).

Le profil thermique résulte donc de l'échauffement solaire et du refroidissement superficiel par échanges thermiques avec l'atmosphère.Ces phénomènes étant liés,on peut déduire de la connaissance de l'apport solaire et des échanges avec l'atmosphère(ou de la température superficielle qui en résulte)l'épaisseur de la couche de mélange.Toutefois les phénomènes d'advection par les courants marins peuvent perturber la situation.

INTRODUCTION

La décroissance de la température avec la profondeur n'est pas uniforme et,le long de ce profil vertical,apparait presque toute l'année une couche de gradient thermique maximal appelée"thermocline".Cette thermocline,située relativement prés de la surface,est qualifiée de"saisonnière" car son cycle annuel est en relation avec l'apport solaire.Elle se traduit par de forts gradients verticaux de densité et constitue un barrage à la propagation des quantités de mouvement ou de chaleur,et à la diffusion des particules,des substances dissoutes...En outre,ce gradient thermique provoque une modification importante de la transmission des ondes acoustiques sous-marines.Différents auteurs ont proposé pour ce phénomène des schémas plus ou moins compliqués.

Une simplification notable apparait si l'on suppose que la conductibilité thermique turbulente devient pratiquement nulle au niveau de la thermocline.Le profil thermique des cent premiers mètres résulte alors directement de l'apport solaire aux diverses profondeurs et des échanges superficiels avec l'atmosphère,ce dernier effet restant limité à la couche de mélange qui surmonte la thermocline.On présente,à titre d'exemple,l'un des résultats d'une étude de bilan thermique(1) faite à partir de données hydrologiques et météorologiques dans le bassin Liguro-Provencal,au nord-est de la Méditerranée occidentale (figure 1).

RAPPEL DE L'EQUATION DU BILAN THERMIQUE

On peut écrire le bilan thermique des échanges océan-atmosphère sous la forme

$$Qs\ (1-A) = Qt + Qe + Qc + Qn + Qad$$

Qs(1-A) est l'apport solaire diminué de la fraction correspondant à l'albedo de la mer. C'est le rayonnement solaire absorbé par les eaux pendant l'intervalle de temps considéré. Dans notre étude nous avons pris les valeurs de Qs enregistrées à la Station Météorologique de l'Aéroport de Nice.La courbe de la figure 2a en représente la variation annuelle moyenne entre 1965 et 1971.De tels enregistrements étant en fait assez rares,on peut également se reporter à des tables ou atlas climatologiques donnant les valeurs de l'éclairement solaire par ciel clair en fonction de la latitude(2)(3)(4).Des formules empiriques permettent de tenir compte de la nébulosité qui,par exemple,entraine à Nice une diminution moyenne de 20%. L'albedo de la surface de la mer(fraction du rayonnement solaire réfléchie et diffusée par la mer et renvoyée vers l'atmosphère) a été notamment étudié par une équipe de notre laboratoire(5).Il varie entre 6% en été et 8% en hiver.Une valeur moyenne de 7% avait d'ailleurs été proposée par M.I.BUDYKO en 1956.

Qt est la variation pendant le même intervalle de temps du contenu thermique des eaux. Ce terme est calculé à partir des profils verticaux de température.Sa valeur résulte de l'absorption du rayonnement solaire,des échanges thermiques à travers la surface et des apports thermiques par advection.

Qe,Qc,Qn sont les échanges avec l'atmosphère par évaporation Qe,par convection thermique Qc,et par rayonnement infra-rouge Qn(ce dernier appelé également rayonnement"nocturne"). Ces échanges,strictement superficiels,représentent en général une perte d'énergie pour la mer et se traduisent par un refroidissement des eaux.

Qad est l'apport de chaleur par advection marine.Nous reviendrons plus tard sur les effets de ce terme que nous supposerons tout d'abord nul.

PENETRATION DU RAYONNEMENT SOLAIRE DANS LA MER ET ELEVATION CORRESPONDANTE DE LA TEMPERATURE DES EAUX

La diminution de l'éclairement sous-marin avec la profondeur correspond au flux absorbé. Si l'on néglige l'éclairement ascendant qui ne représente que quelques centièmes de l'éclairement descendant, on a la formule connue

$$\frac{dF}{ds.dz} = -\frac{dE_d}{dz} = k\,E_d$$

où E_d est l'éclairement descendant et k le coefficient d'extinction défini entre les profondeurs z_1 et $z_2 > z_1$ par la relation

$$k_{z_2}^{z_1} = \frac{\text{Log } Ez_1 - \text{Log } Ez_2}{dz}$$

E éclairement en Watt.cm^{-2} , z en mètres, k en m^{-1}.

Dans les études de bilan thermique sur des périodes plus ou moins longues la grandeur qui intervient est l'énergie solaire absorbée(ramenée à l'unité de surface).Cette quantité correspond à l'intégrale de l'éclairement sur le temps,appelée"irradiation" et exprimée en joules.cm^{-2}.Nous désignerons cette quantité par le symbole q.
Une étude(6),menée à la bouée-laboratoire (ϕ=42°2N,G=5°6E)en 1969,a montré que le coefficient d'extinction k peut être considéré comme constant au cours de la journée solaire (indépendant de la hauteur du soleil).Cependant ce même coefficient est très variable avec la profondeur dans les premiers mètres par suite de l'absorption sélective exercée par les eaux,principalement sur les courtes et les grandes longueurs d'ondes.Au delà de cinq à dix mètres de profondeur il devient sensiblement constant.Il varie en outre géographiquement et avec les saisons sous l'influence de phénomènes locaux et transitoires qui modifient la transparence des eaux.Comme on ne possède pas d'enregistrement continu de l'éclairement sous-marin en chaque station,on a adopté une valeur moyenne d'extinction déduite de différentes mesures effectuées dans la zone étudiée.Ceci a conduit,pour l'ensemble de l'année, à une absorption globale de soixante dix pour cent dans les cinq premiers mètres,et à un coefficient d'extinction k égal en moyenne à $6.10^{-2}m^{-1}$au delà de cette profondeur(ceci correspond aux caractéristiques d'une eau océanique s'apparentant aux types I ou II de la classification de N.G.JERLOV(7)).
En surface on a l'irradiation $Qs(1-A)= q_o$, entre 0 et 5 mètres de profondeur on suppose une absorption globale de 70%,l'irradiation à 5 mètres est donc $q_5 = 0,3\ q_o$.A toute profondeur supérieure on a

$$q_z = 0,3\ q_o\ e^{-k(z-5)}$$

et l'énergie absorbée entre les profondeurs z et z+dz est

$$q_z - q_{z+dz} = 0,3\ q_o\ e^{-k(z-5)}(1-e^{-k\,dz}) \ .$$

On a représenté sur la figure 2b les fractions d'énergie solaire ainsi absorbées chaque mois par cm2 de surface et par mètre de profondeur à différents niveaux.Il n'est pas nécessaire de tracer un tel diagramme pour des profondeurs supérieures à 70 ou 100 mètres car l'énergie résiduelle y est inférieure au millième de l'énergie incidente en surface.Cette absorption se traduit par une élévation de température que l'on calcule en faisant intervenir la masse volumique de l'eau ρ,la chaleur spécifique de l'eau c_p et l'équivalent mécanique de la calorie J (pour l'eau de mer le produit $J.\rho.c_p = 4\ J.gr^{-1}.°C^{-1}$).Les courbes de la figure 2b peuvent être transformées soit en augmentations de température à différentes profondeurs au cours de l'année,soit,à un instant donné,en variation du profil thermique vertical.Dans ce dernier cas,si l'on choisit un état thermique initial,on peut tracer les différents profils successifs,consécutifs à l'absorption du rayonnement solaire pendant les différents intervalles de temps considérés.Il est commode de prendre comme état thermique initial celui correspondant à la fin du mois de mars car à cette époque en Méditerranée nord-occidentale on rencontre de la surface jusque vers 200 mètres et même au delà une couche d'eau isotherme(à une température tres proche de 13°C).Ainsi sur la figure 3 la première courbe,marquée 04,représente le profil vertical de température résultant de l'apport solaire du mois d'avril,puis de proche en proche,les autres courbes donnent l'effet cumulatif pour les mois suivants,jusqu'en décembre.On peut remarquer que la variation d'un profil à l'autre est maximale en juin(maximum d'apport solaire) et au contraire minimale en décembre(minimum d'apport solaire).Ces profils théoriques seraient vérifiés si la mer était un milieu isolé,figé et de conductibilité thermique nulle.

MODIFICATIONS APPORTEES AU PROFIL D'ECHAUFFEMENT SOLAIRE

Ces modifications sont dues essentiellement aux conséquences des échanges avec l'atmosphère et du brassage par les vents.L'échauffement solaire provoque un gradient de densité qui se traduit par une stabilité verticale des eaux.Les échanges avec l'atmosphère entrainent un refroidissement qui annulle localement cette stabilité et peut ainsi se propager en profondeur par conduction thermique turbulente.Les vents renforcent ce processus par un brassage plus ou moins profond.Il y a effacement progressif à partir de la surface du profil théorique et remplacement par une couche homothermale appelée"mixed layer" dont la température et l'épaisseur varient dans le temps en fonction du bilan thermique.Sous cette couche de mélange se trouve ce que l'on appelle la thermocline saisonnière,c'est à dire un fort gradient thermique,au niveau duquel on retrouve le profil d'échauffement solaire et une stabilité des eaux.On peut donc définir un profil vertical d'équilibre entre l'échauffement solaire et le refroidissement superficiel dû aux échanges avec l'atmosphère.Il est représenté à partir de la surface et jusqu'à une certaine profondeur(celle de la thermocline)par une couche isotherme,de même température que celle de la surface,et aux immersions plus grandes par le profil théorique d'échauffement solaire.

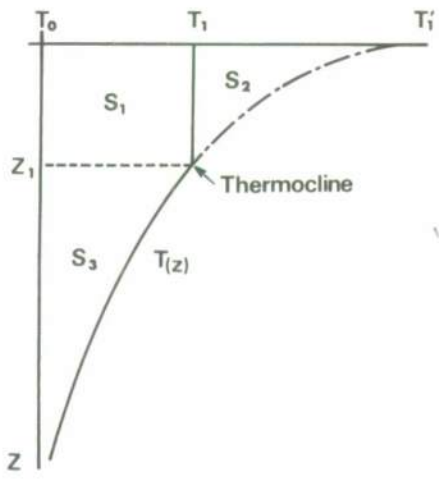
Nous allons à présent comparer ces profils calculés et ceux effectivement relevés en mer en différentes saisons.Les températures portées sur les figures 4a,4b et 4c ont été mesurées en trois stations du bassin Liguro-Provencal(figure 1).En 4a et 4b les mesures ont été effectuées sur la radiale Nice-Calvi(90 milles)respectivement en 1970 à 15 milles au large de Nice et en 1971 à 55 milles de Nico. En 4c les températures proviennent de mesures faites en 1964-65 à la bouée-laboratoire à environ 55 milles de Nice et de Calvi.Sur ces mêmes figures sont représentés les profils d'équilibre calculés à partir d'un apport solaire moyen et de la température de surface de la mer.Malgré les diverses approximations (apport solaire moyen,coefficient d'extinction moyen)l'accord est assez satisfaisant tout au long de l'année entre les températures mesurées et les profils calculés aux deux stations des figures 4a et 4b.Sur la figure 4c,relative à la bouée-laboratoire,on a un accord qualitatif pour les deux périodes du mois de juin avec une thermocline proche de la surface. Par contre,en septembre,les résultats expérimentaux s'écartent notablement du profil d'équilibre.Aux autres stations de la radiale Nice-Calvi les températures relevées s'écartent plus ou moins du profil calculé.Dans notre étude de bilan thermique(1),faute d'une couverture météorologique suffisante,nous avons supposé un même apport solaire et les mêmes échanges atmosphériques sur l'ensemble du bassin Liguro-Provencal,ce qui peut expliquer en partie les désaccords observés.De plus interviennent vraisemblablement des phénomènes d'advection.

DETERMINATION GRAPHIQUE DE LA PROFONDEUR DE LA THERMOCLINE

Le diagramme de la figure3,comme nous l'avons expliqué,est tracé à partir de la connaissance do l'apport solaire(mesure directe ou atlas de valeurs)et du coefficient d'extinction moyen des eaux.La valeur de la température superficielle de la mer,mesurée directement ou par les techniques infra-rouge,permet de determiner graphiquement la profondeur approximative de la thermocline tout au long de l'année.Il suffit de pointer sur le profil thermique théorique la profondeur à laquelle on trouve une température identique à celle mesurée en surface.

CALCUL DE LA PROFONDEUR DE LA THERMOCLINE

Dans ce qui précède la température superficielle rendait compte des effets des échanges avec l'atmosphère.Certains atlas ou publications climatologiques donnent une évaluation locale de ces mêmes échanges.Il est alors possible,avec quelques approximations,de calculer plus ou moins simplement la profondeur de la thermocline à partir de ces données. Ainsi une méthode de calcul proposée par H.LACOMBE(8) ne nécessite que la connaissance de l'apport solaire et de la somme des échanges avec l'atmosphère.Cet auteur suppose comme nous qu'il n'y a pas de phénomènes d'advection;par contre il admet un coefficient d'extinction k constant quelle que soit la profondeur(même dans les premiers mètres).



Sur le schéma ci-contre,le profil isotherme To peut correspondre à celui rencontré en mer à la fin du mois de mars.Le profil $T(z)$atteignant en surface la température T_1' représente le profil théorique d'échauffement solaire calculé en admettant un k constant jusqu'à la surface. Le profil d'équilibre partant d'une température de surface T_1 et s'identifiant au profil théorique pour toute profondeur $z > z_1$ résulte à la fin du mois d'avril de l'apport solaire Io et des pertes dues aux échanges avec l'atmosphère Po.Si l'on considère sur ce schéma les surfaces S_1, S_2, S_3(qui sont proportionnelles à des énergies)on a la relation

$$(S_1 + S_2 + S_3) - (S_3) = (S_1) + (S_2)$$

$S_1+S_2+S_3$ correspond à l'absorption du rayonnement solaire Io. S_3 correspond à l'absorption du rayonnement parvenant à la profondeur z_1 soit $Iz_1 = Io\ e^{-k\ z_1}$. S_1 est l'énergie solaire absorbée à la profondeur z_1,multipliée par la profondeur de la thermocline z_1,soit $z_1 k I_{z1}$. S_2 figure le refroidissement dû aux échanges avec l'atmosphère soit Po.

On a donc la relation $I_o(1-e^{-k\ z_1}) = P_o + z_1\ k\ I_o\ e^{-k\ z_1}$

soit en posant $m = \frac{Io-Po}{Io}$ et $k\ z_1 = q$ on peut écrire $e^q = \frac{1+q}{m}$

La valeur de m tirée des atlas permet donc le calcul de la profondeur z_1 de la thermocline (soit celle de la couche de mélange)si l'on connait le coefficient d'extinction des eaux. En raison même de son mode d'établissement cette formule n'est applicable que tant que la profondeur de la thermocline diminue,c'est à dire,tant que l'on part d'une couche isotherme d'épaisseur z_o pour aboutir à une nouvelle couche d'épaisseur $z_1 < z_o$.Cette condition impose dans la formule ci-dessus un m croissant.Le maximum de la valeur de m correspond à l'instant du minimum de la profondeur de la thermocline(approximativement le mois de juin). Après cette date,on assiste en mer à un approfondissement de la thermocline.On ne peut plus alors calculer directement à un instant donné la profondeur de la thermocline,mais en connaitre la variation relative(pour plus de détails se reporter à l'article original de H.LACOMBE(8)).

L'inconvénient de cette méthode est l'hypothèse d'un coefficient d'extinction constant quelle que soit la profondeur.Il faudrait faire intervenir une fonction k(z) essentiellement variable dans les premiers mètres,ce qui complique le calcul.En outre,si l'on peut se fier raisonnablement aux valeurs du rayonnement solaire Io proposées dans les atlas,il n'en est pas de même pour les valeurs de Po(pertes par évaporation,convection et rayonnement nocturne),ce terme étant très variable en un point donné en fonction des conditions météorologiques. H.LACOMBE a calculé la distribution thermique mensuelle à l'emplacement de la bouée-laboratoire dont nous avons parlé précédemment;il est intéressant de comparer ses estimations de la profondeur de la thermocline aux profils de température relevés en ce même point et portés sur la figure 4c. Fin juin cet auteur propose une profondeur voisine de 23 mètres alors que la thermocline se situe en réalité vers 10 mètres;ce désaccord est peut être lié à l'hypothèse faite sur le coefficient d'extinction k.La comparaison est plus favorable en septembre où les valeurs sont respectivement de 28 et 23 mètres,et en décembre ,48 et environ 45 mètres.

CONCLUSION

Les hypothèses concernant les phénomènes d'advection et le role d'écran de la thermocline nécessitent quelques remarques.

Le cas supposé d'une advection nulle ne doit être que très rarement vérifié en mer;en conséquence on peut s'attendre à des modifications du profil théorique d'équilibre et à des prévisions erronées de la profondeur de la thermocline.Dans notre étude(1)nous avons proposé un schéma de l'advection sur la radiale Nice-Calvi,déduit des différences locales du profil thermique par rapport à un profil d'équilibre supposé sans advection.

Les modèles de calcul proposés supposent que la thermocline constitue un barrage efficace. Alors que l'absorption du rayonnement solaire se fait sentir jusqu'à plus de 100 mètres de profondeur,les effets des échanges superficiels avec l'atmosphère provoquent et restent confinés à la couche de mélange qui surmonte la thermocline.On considère ainsi que la conductibilité thermique turbulente devient nulle au niveau de la thermocline;les exemples expérimentaux fournis confirment cette hypothèse.Par ailleurs,J.GONELLA(9),à partir d'observations de vent,de courant et de température effectuées à la bouée-laboratoire entre 1964 et 1970,a nettement confirmé un effet d'écran de la thermocline vis à vis du transfert de la quantité de mouvement.Cependant,dans le milieu marin,caractérisé par sa turbulence,cette hypothèse correspond à un cas théorique qui ne doit jamais être rigoureusement réalisé.Ces modèles de détermination de la profondeur de la thermocline ne peuvent donc constituer que des estimations,mais ils présentent l'avantage d'être simples et facilement vérifiables.

REFERENCES

1_ BETHOUX J.P et A.IVANOFF."Essai de bilan thermique sur la radiale Nice-Calvi".23ème congrés de la CIESM,Athènes 1972.

2_ BERLIAND T.G. Methodika klimatologicheskikh raschetov radiatsii.Met.Gidrol,6,9-16,1960.

3_ BUDYKO M.I. Atlas du bilan thermique du globe terrestre.Public.Observ.Géophysique Voiekov,Moscou,1963.

4_ MATSUIKE K.,T.MORINAGA,T.SASAKI.Journal of the oceanographical society of Japan,Vol 26, 1970.

5_ CALATHAS J. "Contribution à l'étude de la reflexion de la lumière du jour à la surface de la mer". Thèse 3ème cycle,Faculté des Sciences de Paris,1970.

6_ BETHOUX J.P. et A.IVANOFF."Au sujet de l'influence de la hauteur du soleil sur la valeur du coefficient d'extinction des eaux de mer". C.R.Acad.Sc.Paris,t.270,1970.

7_ JERLOV N.G. Optical oceanography.Elsevier Publishing Company,1968.

8_ LACOMBE H. "Sur un modèle simple de thermocline saisonnière et sur sa prévision". C.R.Acad.Sc.Paris,t.275,1972.

9_ GONELLA J. "The drift current from observations made on the bouee laboratoire". Cahiers Océanographiques,23,1,1971.

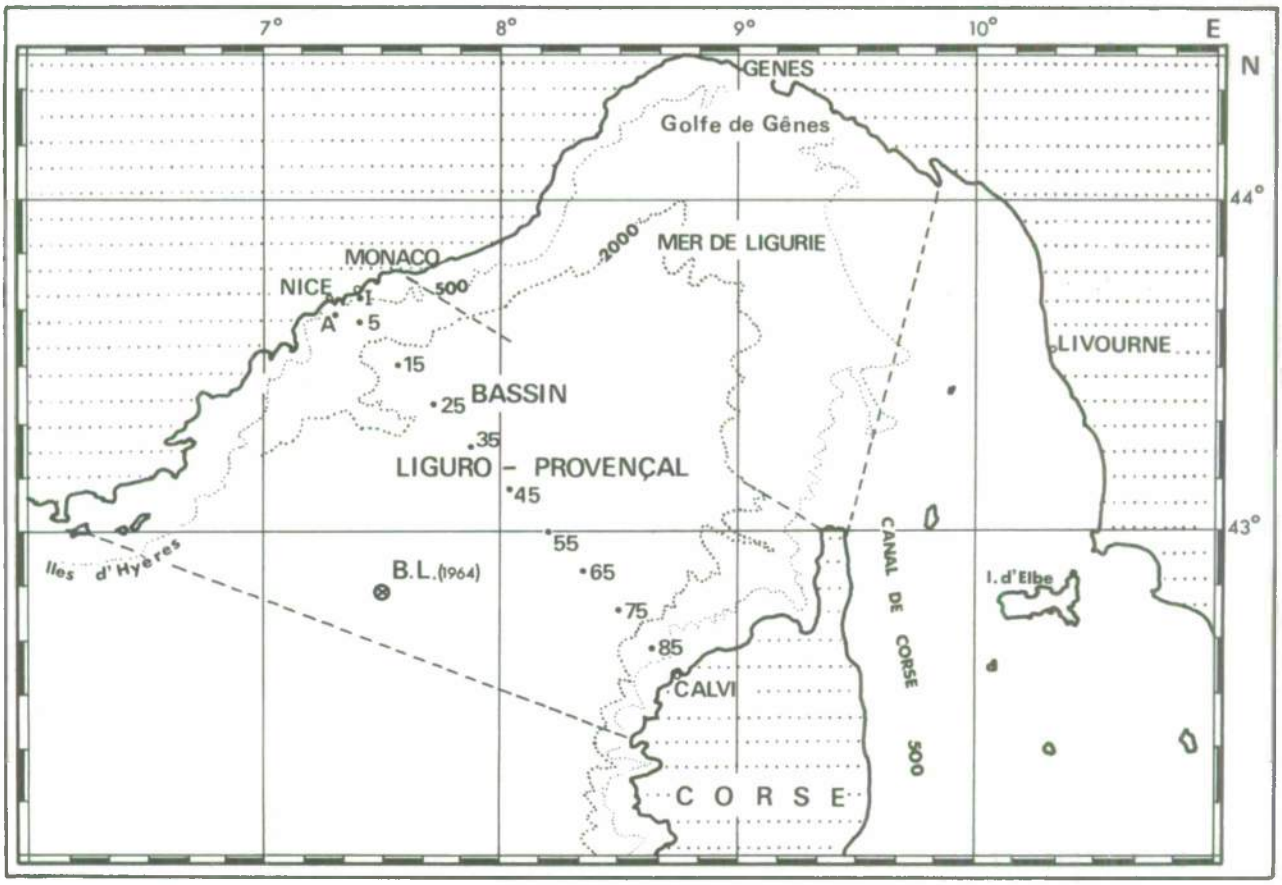

7°
8°
9°
10°
E
N
44°
43°
GENES
Golfe de Gênes
MER DE LIGURIE
2000
MONACO
NICE
500
I
A
5
15
25
BASSIN
35
LIGURO - PROVENÇAL
45
55
65
75
85
B.L.(1964)
Iles d'Hyères
CALVI
CORSE
CANAL DE CORSE
500
LIVOURNE
I. d'Elbe

figure 1

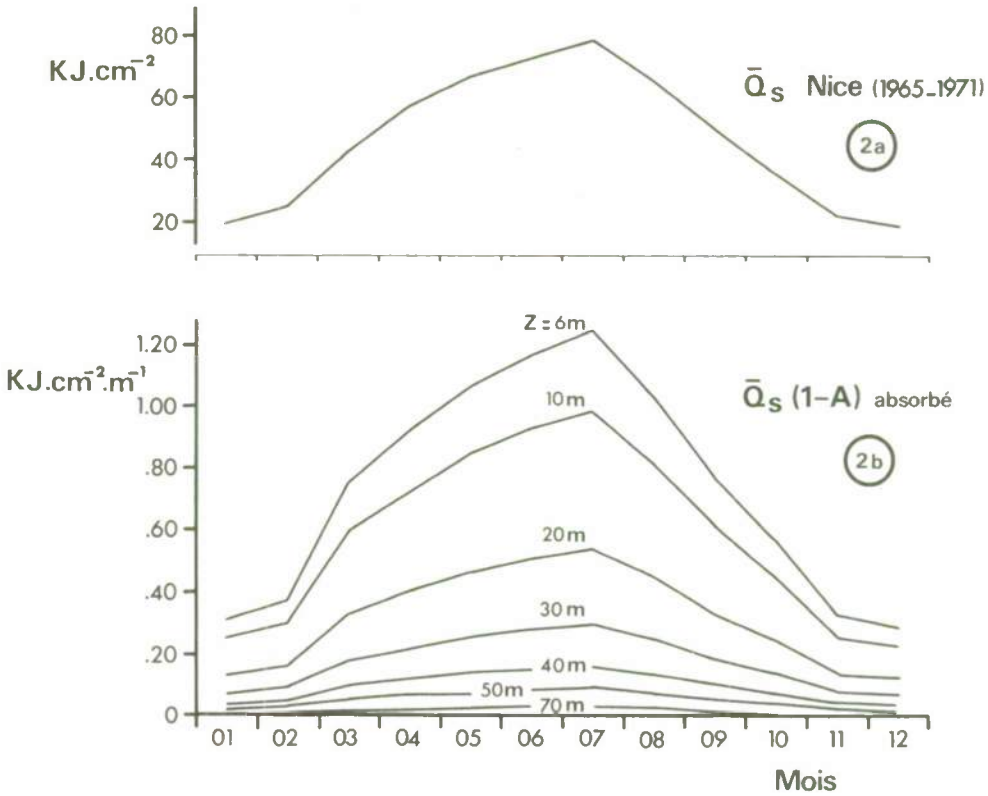


figure 2

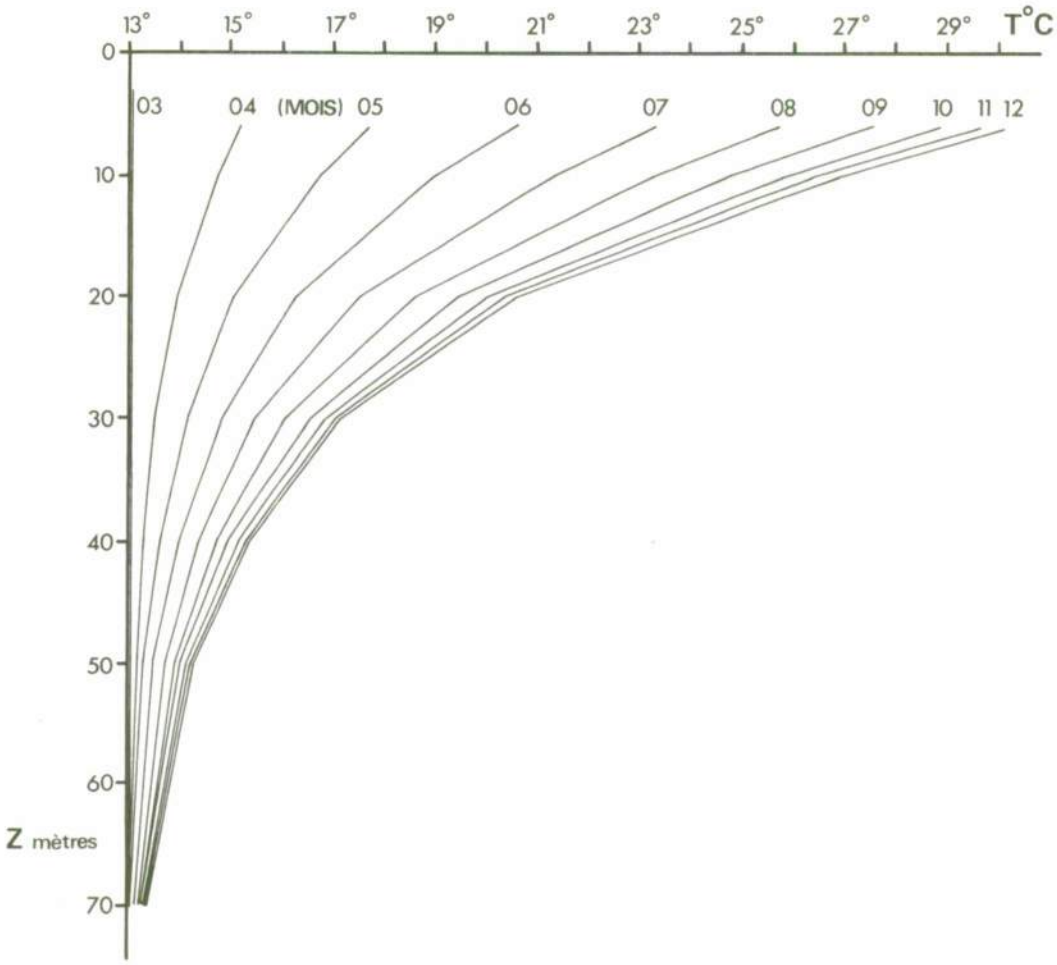


figure 3

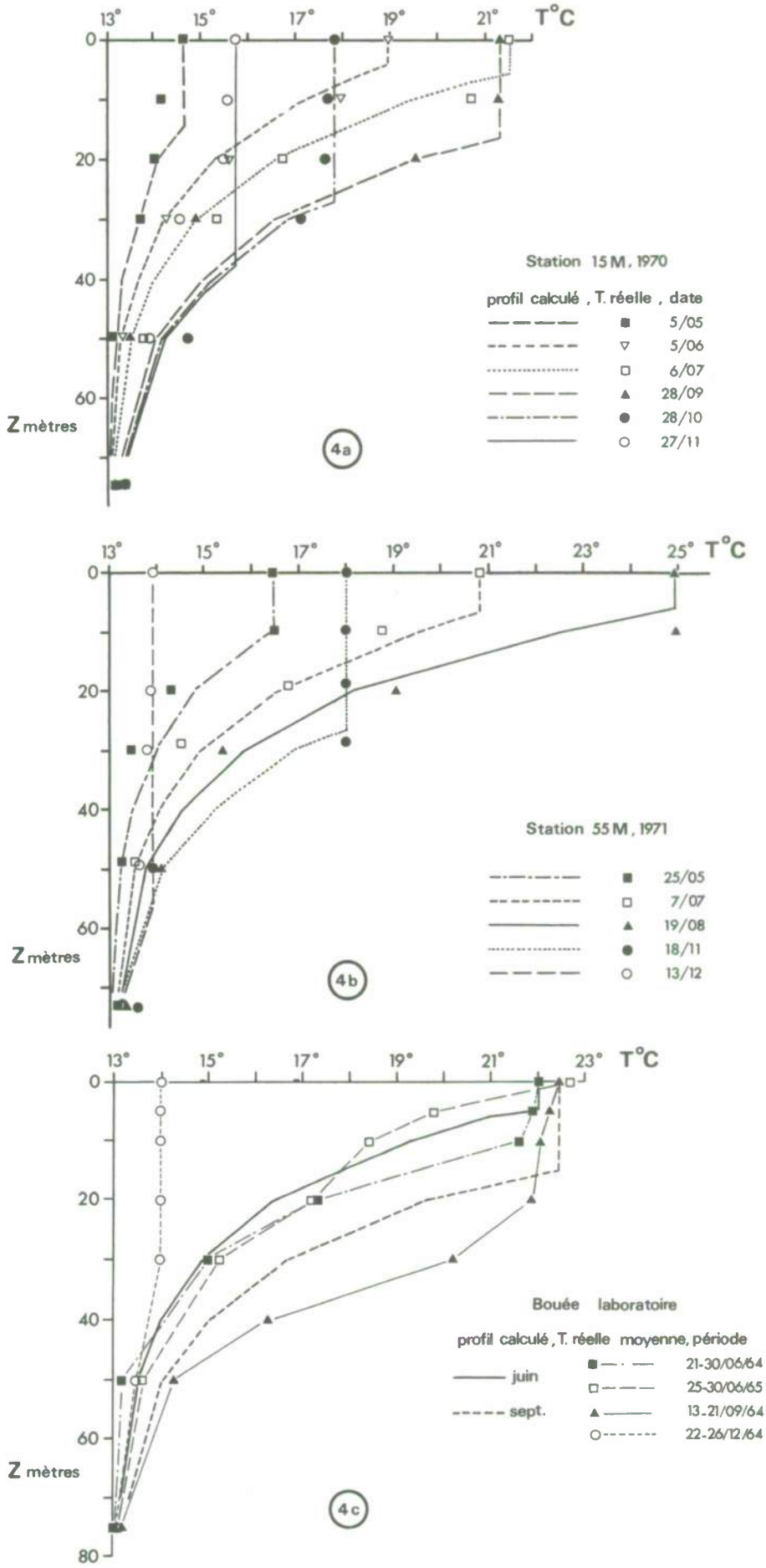

13° 15° 17° 19° 21° T°C
0
20
40
60
Z mètres
Station 15 M, 1970
profil calculé , T. réelle , date
5/05
5/06
6/07
28/09
28/10
27/11
4a
13° 15° 17° 19° 21° 23° 25° T°C
0
20
40
60
Z mètres
Station 55 M, 1971
25/05
7/07
19/08
18/11
13/12
4b
13° 15° 17° 19° 21° 23° T°C
0
20
40
60
80
Z mètres
Bouée laboratoire
profil calculé, T. réelle moyenne, période
juin
sept.
21-30/06/64
25-30/06/65
13-21/09/64
22-26/12/64
4c

figure 4

FACTEURS PHYSIQUES, CHIMIQUES ET BIOLOGIQUES AFFECTANT LA PROPAGATION DE LA LUMIERE DANS LES EAUX DE MER

par

Alexandre IVANOFF

Professeur à l'Université de Paris VI
Directeur du Laboratoire d'Océanographie Physique *
4 Place Jussieu
75230 - Paris Cedex 05
France

1. SOMMAIRE

Dans ce qui suit nous exposons les connaissances de base indispensables pour aborder l'Optique Marine : définition des paramètres permettant de caractériser les propriétés optiques d'un milieu trouble tel que l'eau de mer, propriétés optiques de l'eau pure (celle-ci constituant un point de départ commode), effets optiques des substances en solution dans les eaux de mer, effets optiques des matières en suspension, état actuel de nos connaissances sur les répartitions spatiale et temporelle des propriétés optiques des eaux de mer (et en particulier sur leurs variations avec la profondeur), indice de réfraction des eaux de mer.

2. TERMINOLOGIE. SYMBOLES. * *

La terminologie concernant l'Optique Océanographique a été l'une des préoccupations majeures du "Committee on Radiant Energy in the Sea", désigné par l'Association Internationale d'Océanographie Physique en 1960. Cette terminologie, établie en anglais, a été publiée en Novembre 1964 dans le numéro 57 de la chronique de l'U.G.G.I. [1], et reproduite par N.G. JERLOV dans l'introduction à son traité d'Optique Océanographique [2]. Elle a été traduite au moins en russe et en français [3]. C'est elle que nous utilisons dans ce qui suit, en souhaitant que tous les spécialistes en ce domaine fassent de même, ce qui faciliterait leur compréhension mutuelle.

Rappelons que d'après cette terminologie officiellement recommandée le coefficient d'absorption (absorption coefficient) est représenté par le symbole a, le coefficient (total) de diffusion (total scattering coefficient) par le symbole b, le coefficient angulaire de diffusion (volume scattering function) par le symbole $\beta\theta$, et enfin le coefficient d'atténuation (total attenuation coefficient (1)) par le symbole c.

3. INTRODUCTION

Du point de vue optique, les eaux de mer constituent un milieu absorbant trouble : lorsqu'un faisceau lumineux s'y propage, il y a simultanément absorption et diffusion des photons . L'absorption est une transformation de l'énergie rayonnante en chaleur (2), tandis que la diffusion consiste en un changement de direction des photons, sans perte d'énergie(3) Les molécules mêmes de l'eau, ou des substances qui s'y trouvent en solution, provoquent une faible diffusion, dite "moléculaire". Mais la majeure partie de la lumière diffusée par les eaux de mer l'est par toutes les particules (plancton, déchets organiques, particules terrigènes, etc.) qui s'y trouvent en suspension. C'est ce que nous appelerons plus loin la "diffusion par les particules", qui fait que celles-ci influent énormément sur les propriétés optiques des eaux de mer (et qu'inversement ces propriétés fournissent des informations sur la teneur des eaux en matières en suspension).

De plus les eaux de mer se trouvent en régime turbulent, et la plupart des paramètres y sont fluctuants. Les fluctuations de la température et de la salinité en particulier provoquent des variations de l'indice de réfraction, qui entrainent à leur tour une diffusion de la lumière. Les fluctuations de la teneur en particules en suspension ont vraisemblablement un effet analogue. Ces phénomènes sont en cours d'étude, mais nous les laisserons de côté. Nous nous contenterons de fournir au paragraphe traitant de l'indice de réfraction les données nécessaires pour rattacher ses fluctuations à celles de la température et de la salinité.

(1) Le terme "coefficient d'extinction" (extinction coefficient) étant réservé, du moins en français, aux grandeurs (éclairements, luminances) concernant la pénétration de la lumière du jour dans les océans.
(2) Une part d'absorption peut également être due à l'utilisation de l'énergie rayonnante dans des réactions chimiques, telles que la photosynthèse.
(3) L'absorption des photons avec reémission de photons de moindre énergie et de toutes directions constitue la "fluorescence", qui est en quelque sorte une combinaison d'absorption et de diffusion, avec augmentation de la longueur d'onde. Les eaux de mer sont légèrement fluorescentes comme nous le verrons. Elles présentent également l'effet RAMAN, mais celui-ci ne semble guère présenter d'intérêt en Océanographie (par contre les raies RAMAN sont gênantes dans l'étude de la répartition spectrale de la fluorescence des eaux de mer).

* Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S.
* * Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie, tandis que ceux entre parenthèses renvoient aux notes en bas de page.

Bien que les propriétés optiques des eaux de mer et leur répartition dépendent évidemment d'un grand nombre de facteurs physiques (température, densité, état de turbulence, etc.), chimiques (salinité, teneurs en nitrates, en substances organiques dissoutes, en matières particulaires, etc.) et biologiques (richesse en phytoplancton, minéralisation de la matière organique, etc.), nous avons porté l'accent non pas tant sur ces facteurs, dont l'étude nécessiterait tout un traité d'Océanographie, mais essentiellement sur leurs conséquences en Optique Marine. "Propriétés optiques des eaux de mer" serait donc un titre convenant mieux à cet exposé, qui d'ailleurs est extrait dans sa majeure partie du chapitre 15 (intitulé "Propriétés optiques") du tome II de notre ouvrage sur les propriétés physiques et chimiques des eaux de mer [4], à paraître prochainement.

4. COEFFICIENTS D'ABSORPTION, DE DIFFUSION ET D'ATTENUATION

4.1. Coefficient d'absorption

Considérons (figure 1) un faisceau de lumière monochromatique parallèle traversant

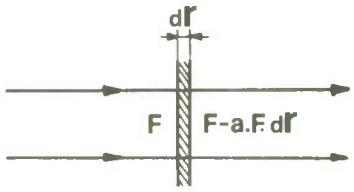


Figure 1

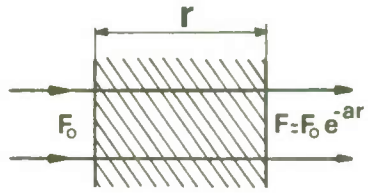


Figure 2

une épaisseur infiniment petite dr d'un milieu absorbant. Si F est le flux énergétique transporté initialement par le faisceau, la fraction dF de ce flux absorbée par la tranche élémentaire dr est de la forme $dF = - a. F. dr$, où le coefficient a, caractéristique du milieu (mais généralement variable avec la longueur d'onde), est appelé "coefficient d'absorption". Il est homogène à l'inverse d'une longueur. Le coefficient d'absorption des eaux de mer est compté en m^{-1}.

Pour une épaisseur finie r de milieu absorbant (figure 2), une intégration simple donne $F = F_0 e^{-ar}$, où F_0 et F sont respectivement les flux transportés par le faisceau avant et après traversée du milieu. La diminution de flux par absorption suit une loi exponentielle.

4.2. Coefficient total de diffusion. Coefficient angulaire de diffusion. Indicatrice de diffusion.

Considérons (figure 3) un pinceau parallèle de lumière monochromatique transportant un flux F et arrivant sur un élément de volume infiniment petit d'un milieu diffu-

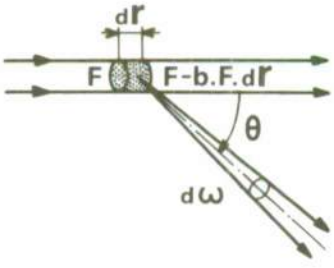


Figure 3

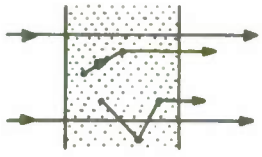


Figure 4

sant, d'épaisseur dr. La fraction dF de flux diffusée dans toutes les directions est de la forme $dF = - b.F.dr$, où le coefficient b, caractéristique du milieu (mais généralement variable avec la longueur d'onde), est appelé "coefficient total de diffusion" (4). Il est homogène à l'inverse d'une longueur, et est compté en m^{-1} en océanographie.

Pour une épaisseur r finie du milieu diffusant, l'expression $dF = - b.F.dr$ ne peut être intégrée que si, de même que dans le cas de l'absorption, toute la lumière diffusée est définitivement perdue pour le pinceau lumineux. Auquel cas on obtient une loi de décroissance exponentielle, $F = F_0 e^{-br}$, analogue à celle régissant les phénomènes d'absorption. Mais en fait les photons diffusés subissent de nouvelles diffusions. Dès que la section du pinceau cesse d'être infiniment petite, une diffusion d'ordre supérieur à 1 peut renvoyer le photon dans la direction de propagation du flux incident (figure 4), et la loi en $F_0 e^{-br}$ cesse d'être rigoureuse. D'ailleurs, la définition même du coefficient total de diffusion $dF = - b.F.dr$, suppose qu'il n'y a pas de diffusions multiples à l'in-

(4) L'épithète "total" est souvent omise, auquel cas il y a risque de confusion avec le coefficient "angulaire" de diffusion, que nous définirons plus loin.

térieur de l'élément de volume d'épaisseur dr, et ne s'applique en toute rigueur qu'à une seule particule diffusante. Il convient donc, dans chaque problème particulier, d'examiner dans quelle mesure on peut se limiter à la diffusion "primaire", et négliger le phénomène de diffusions multiples (qui entraîne des complications mathématiques notables). Ainsi en Optique océanographique la notion de coefficient total de diffusion et les relations élémentaires qui en découlent ne constituent pas toujours une approximation suffisante.

Le coefficient total de diffusion suffirait à définir les propriétés diffusantes d'un milieu si la diffusion se faisait avec la même intensité dans toutes les directions autour de l'élément de volume considéré (5). Or il n'en est rien. Dans une direction faisant l'angle θ avec celle du pinceau incident (voir figure 3), l'élément de volume se comporte comme une source ponctuelle d'intensité

$$dI_\theta = \beta_\theta . F . dr \quad (6)$$

où le coefficient β_θ varie avec l'angle θ (ainsi qu'avec la longueur d'onde)(7). Il est appelé "coefficient angulaire de diffusion"(8). De même que le coefficient total de diffusion, β_θ est homogène à l'inverse d'une longueur. Mais comme l'intensité dI_θ est un flux divisé par un angle solide, l'unité de coefficient angulaire de diffusion est le $m^{-1}.sd^{-1}$.

Pour définir complètement les propriétés diffusantes d'un milieu (pour une longueur d'onde donnée), il faut connaître la valeur du coefficient angulaire de diffusion pour toutes les directions. La courbe de variation de β_θ en fonction de θ (soit en coordonnées polaires, soit, plus usuellement, en coordonnées cartésiennes) est appelée "indicatrice de diffusion". Sa connaissance permet en particulier de calculer par intégration la valeur du coefficient total de diffusion. On établit en effet aisément les relations

$$b = 2\pi \int_0^{180°} \beta_\theta . \sin\theta . d\theta = \iint_{4\pi} \beta_\theta . d\omega$$

4.3. Coefficient d'atténuation

Dans un milieu à la fois absorbant et diffusant, tel que les eaux de mer, les deux processus vus ci-dessus coexistent, et au total la fraction dF de flux perdue lors de la traversée d'une épaisseur infiniment petite dr du milieu est $dF = -(a+b).F.dr = -c.F.dr$.

Le coefficient c égal à la somme des coefficients d'absorption et de diffusion est appelé "coefficient d'atténuation". Il est homogène à l'inverse d'une longueur, et est compté en m^{-1} en océanographie.

Si le pinceau parallèle de rayons lumineux traverse une épaisseur finie r du milieu, on peut écrire $F = F_0 e^{-cr}$, mais avec les réserves faites ci-dessus en ce qui concerne l'effet des diffusions multiples.

On utilise également en océanographie le "facteur de transmission par mètre", T, égal au rapport F/F_0 pour r = 1m. On a donc $T = e^{-c} \simeq 1-c$ si $c \ll 1$. D'où $\log T = -0{,}4343c$ (9). La loi de décroissance du flux avec la longueur r du trajet peut s'écrire

$$F = F_0 . T^r .$$

Signalons enfin qu'on appelle en anglais "optical length" le produit $\tau = c.r$ (10), et "attenuation length" ("longueur d'atténuation" en français) la longueur 1/c telle que $\frac{F}{F_0} = e^{-1} \simeq 0{,}368$.

4.4. Remarques concernant les méthodes de mesure.

On trouvera décrites les techniques de mesure des caractéristiques optiques des eaux de mer notamment dans l'ouvrage de N.G. JERLOV [2], pp. 15 à 22 et 48 à 51. Nous nous limiterons à quelques remarques utiles à la bonne compréhension de ce qui suit.

La caractéristique optique des eaux de mer la plus accessible à l'expérience est en principe le coefficient d'atténuation c : connaissant la longueur r du trajet, il suffit de mesurer F_0 et F pour en déduire c, tel que $F = F_0 e^{-cr}$. Il importe toutefois que toute la lu-

---

(5) C'est le cas pour la fluorescence (du moins celle des solutions).
(6) L'éclairement E de l'élément de volume étant égal au quotient du flux incident F par la section du pinceau, on peut également écrire $dI_\theta = \beta_\theta . E . dv$, où dv est l'élément de volume diffusant.
(7) β_θ ne varie qu'avec l'angle θ, et non avec le plan méridien considéré, que si les phénomènes sont de révolution autour de la direction du pinceau incident, autrement dit que s'il s'agit d'un pinceau de lumière "naturelle", non polarisée. C'est ce que nous admettons implicitement.
(8) En anglais "volume scattering function", alors que b est appelé "scattering coefficient". Les risques de confusion sont ainsi supprimés.
(9) Certains auteurs utilisent encore un coefficient d'atténuation "décimal" (par opposition à "népérien"), k, défini par la relation $F = F_0 . 10^{-kr}$. D'où la relation $\log T = -k$. Mais l'emploi du coefficient d'atténuation décimal peut donner lieu à des confusions. Il est préférable de se limiter au coefficient d'atténuation népérien.
(10) Comme c'est un nombre sans dimensions, l'expression "facteur optique" conviendrait assez bien en français.

mière diffusée soit perdue, autrement dit que lors de la mesure de F le récepteur ne reçoive aucune énergie soustraite au pinceau par diffusion ; sinon on mesurerait une grandeur intermédiaire entre c et a (11).

Les coefficients de diffusion, soit total, soit surtout angulaire, sont également accessibles à l'expérience. Par contre il n'a guère été possible jusqu'à présent de mesurer directement le coefficient d'absorption (12). On en est réduit à l'obtenir par différence entre les valeurs des coefficients d'atténuation et de diffusion totale, méthode d'autant plus imprécise que ces deux paramètres sont plus voisins l'un de l'autre, c'est à dire que le rôle de l'absorption est plus faible par rapport à celui de la diffusion (ce qui se produit surtout pour les radiations bleues et vertes, qui ne sont que relativement peu absorbées par l'eau).

5. CARACTERISTIQUES OPTIQUES DE L'EAU PURE

Pour étudier les caractéristiques optiques des eaux de mer, il est assez instructif de commencer par celles de l'eau pure (13), et de considérer ensuite les modifications apportées par les substances en solution et en suspension présentes dans les eaux de mer.

Le coefficient d'atténuation de l'eau pure, la caractéristique optique en principe la plus aisée à obtenir expérimentalement, n'est guère connu avec précision. La figure 5 ,

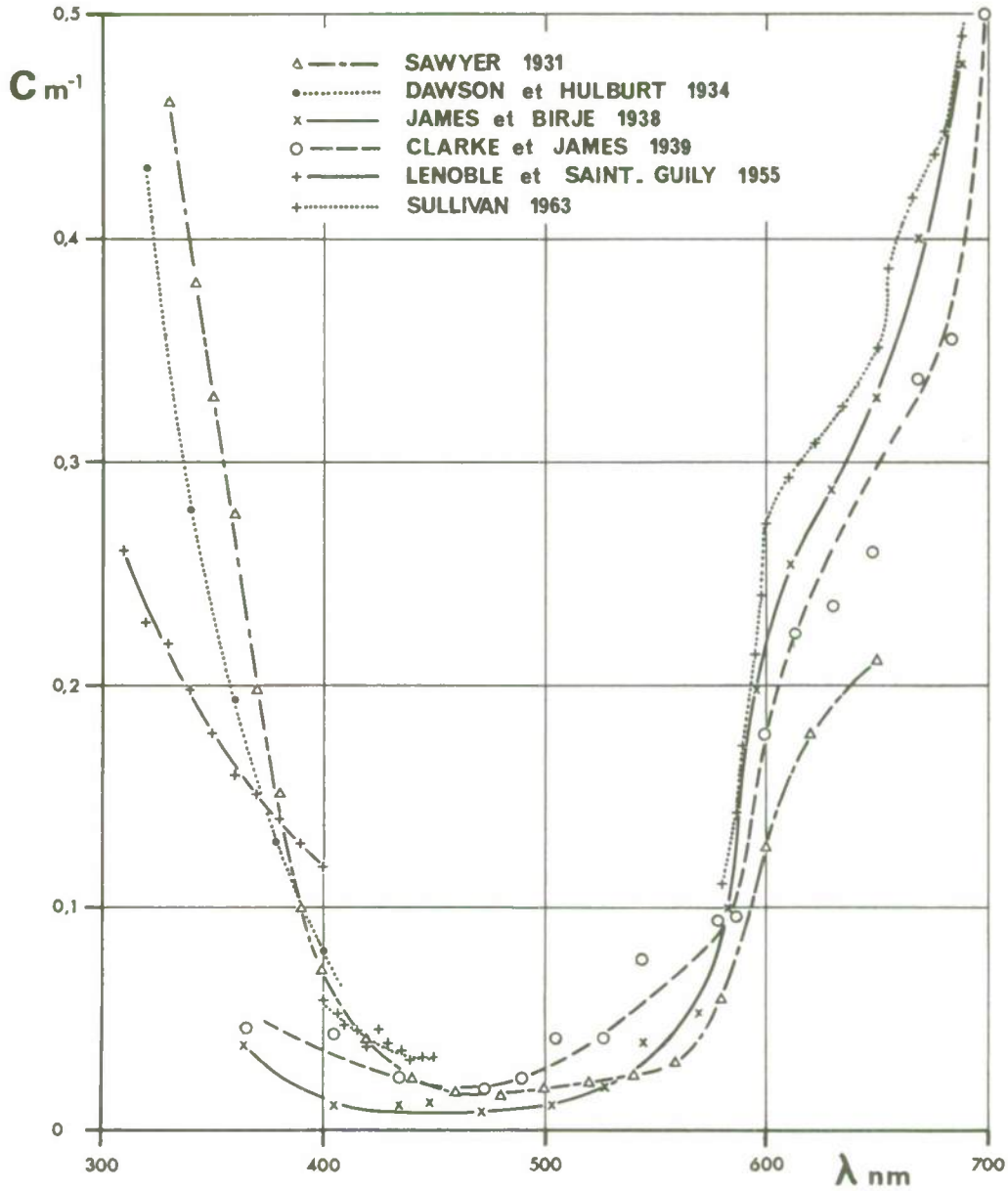


Figure 5
Coefficient d'atténuation de l'eau pure

(11) A la limite, si l'on procède en sorte que le récepteur reçoit au contraire toute la lumière diffusée, on aurait $F = F_0 e^{-ar}$, autrement dit on mesurerait le coefficient d'absorption a (nous y reviendrons au paragraphe 7.2). Mais ceci est encore plus difficile à réaliser avec rigueur.

(12) et (13) voir page suivante

qui traduit les diverses mesures faites, montre que l'accord entre les différents au-

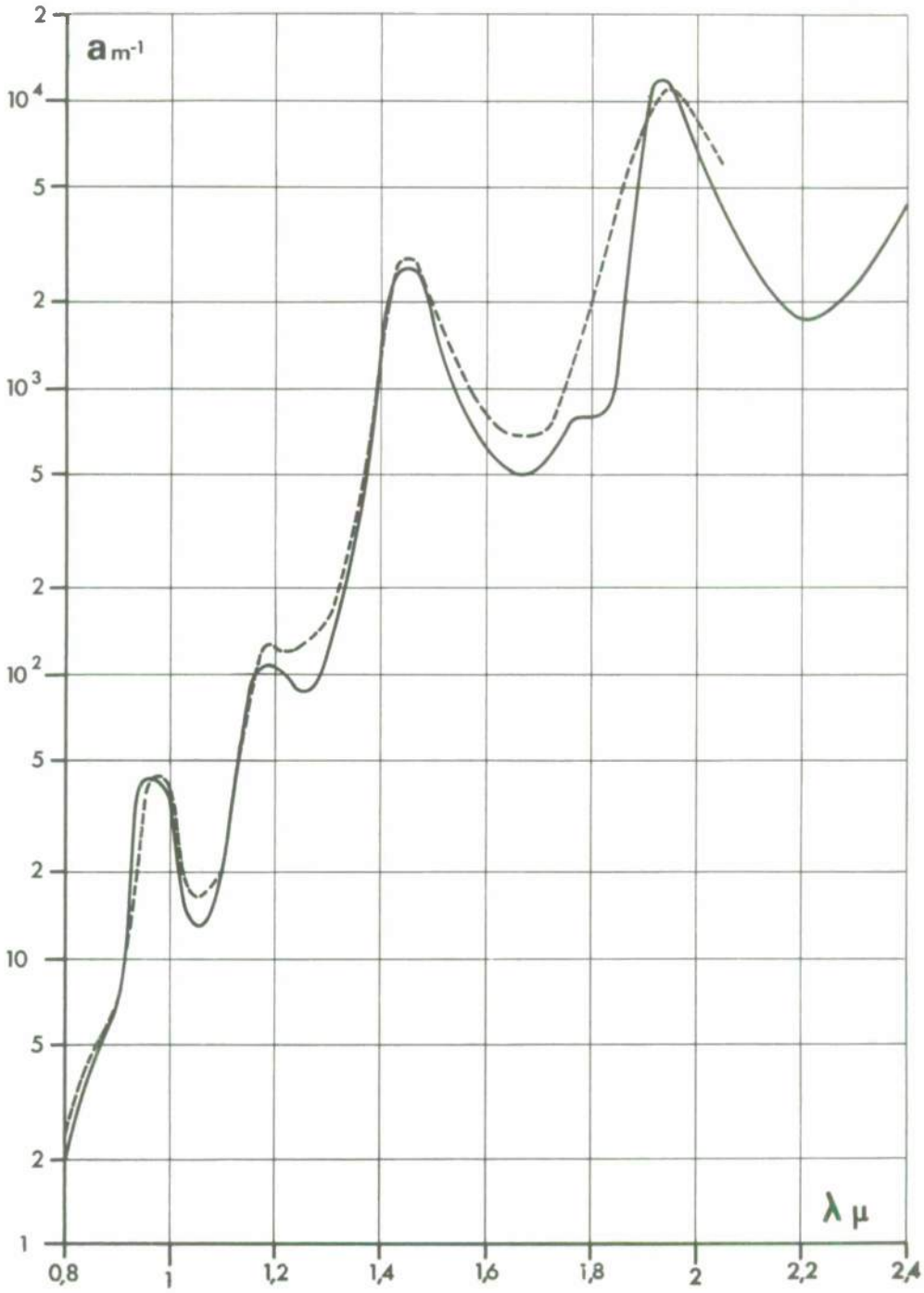


Figure 6
Coefficient d'absorption de l'eau pure dans le proche infra-rouge, selon J.R. COLLINS [7] (en trait discontinu) et selon J.A. CURCIO et C.C. PETTY [8] (en trait plein)

---

(12) Deux appareils, identiques de principe, ont toutefois été réalisés récemment en vue de la mesure directe et in situ du coefficient d'absorption de l'eau de mer, l'un par R.C. HONEY et G.P. SORENSON [5] , l'autre par D. BAUER, J.C. BRUN-COTTAN et A. SALIOT [6].
(13) Il n'est pas facile de préparer de l'eau optiquement pure, ne contenant aucune substance à l'état particulaire ou à l'état colloïdal. Diverses méthodes ont été utilisées : filtration, centrifugation, co-précipitation, évaporation sous vide. Cette dernière manière de procéder semble donner les meilleurs résultats.

teurs est loin d'être satisfaisant, les eaux étudiées ayant vraisemblablement des degrés de pureté différents, et les montages de mesure n'étant pas les mêmes (14).

On voit que le maximum de transparence de l'eau pure se situe vers 475 nm. Il semblerait qu'à ± 20 % près le coefficient d'atténuation minimal est de l'ordre de 0,021 m^{-1}, ce qui correspond à un facteur de transmission par mètre égal à 0,98. Par ailleurs, avec un manque de précision du même ordre, le coefficient d'atténuation de l'eau pure serait inférieur à 0,05 m^{-1} (ce qui correspond à un facteur de transmission par mètre supérieur à 0,95) pour les longueurs d'onde comprises sensiblement entre 410 et 550 nm, nombres qui pourraient constituer en première approximation les limites de la "fenêtre de transparence" de l'eau pure. La valeur de c pour les plus courtes longueurs d'onde est encore plus mal connue. Pour les longueurs d'onde plus grandes, c augmente rapidement ; comme ordre de grandeur, le facteur de transmission par mètre tombe à 0,72 aux environs de 650 nm, et à 0,53 pour 700 nm. Cette rapide augmentation du coefficient d'atténuation est

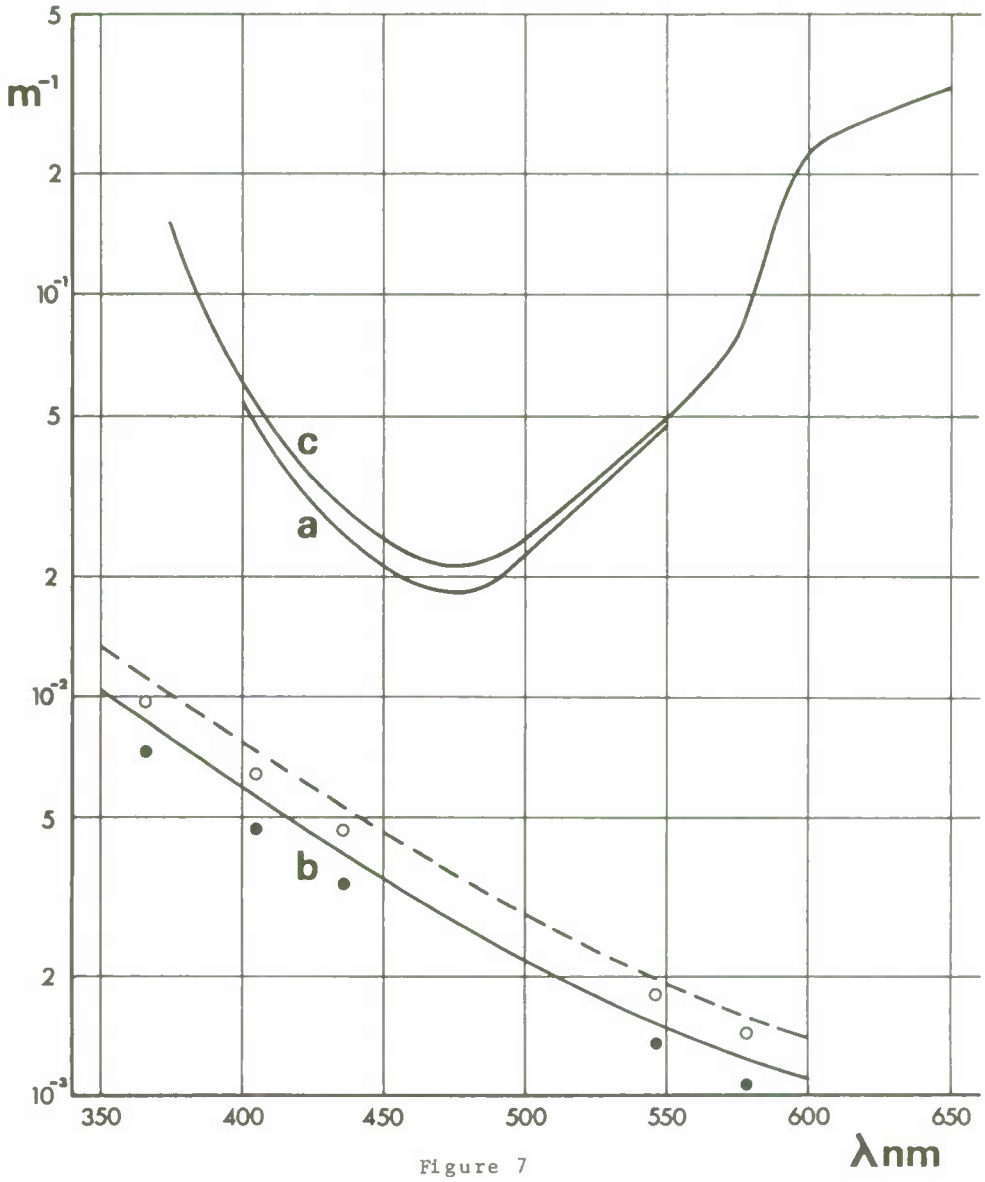


Figure 7

Caractéristiques optiques de l'eau pure : la courbe b en trait plein représente le coefficient de diffusion moléculaire de l'eau calculé par A. MOREL [9] tandis que les cercles pleins indiquent les résultats expérimentaux de cet auteur, la courbe c représente une valeur moyenne du coefficient d'atténuation de l'eau, le coefficient d'absorption a est déduit par différence. La courbe b en trait discontinu représente le coefficient de diffusion moléculaire de l'eau de mer calculé par A. MOREL [9] , tandis que les cercles vides indiquent les résultats expérimentaux de cet auteur.

---

(14) Rappelons que si le récepteur reçoit de la lumière diffusée, il se produit une diminution apparente de c.

λ_{nm}	$\frac{b}{c}$ %
380	6,3
420	12,3
460	13,7
480	12,1
500	8,8
540	3,7
580	1,2
600	0,49

tableau 1

due exclusivement à celle du coefficient d'absorption (15), qui croît très vite dans le rouge et dans l'infra-rouge. La figure 6 fournit les résultats obtenus dans le proche infra-rouge par J.R. COLLINS [7], ainsi que par J.A. CURCIO et C.C. PETTY[8]. Dès que la longueur d'onde est plus grande que 800 nm environ, le coefficient d'absorption de l'eau est supérieur à 2,3 m^{-1}, autrement dit son facteur de transmission par mètre est inférieur à 0,1.
Reste à préciser les parts respectives de l'absorption et de la diffusion (moléculaire) dans l'atténuation exercée par l'eau pure.
La diffusion moléculaire de l'eau (et des liquides en général) peut être évaluée par la théorie des fluctuations de densité de SMOLUCHOWSKI et EINSTEIN. Pour plus de détails voir par exemple l'article de A. MOREL [9]. La courbe b en trait plein de la figure 7 représente les résultats obtenus par cet auteur pour les longueurs d'onde comprises entre 350 et 600 nm. Pour l'eau comme pour les liquides en général, le coefficient de diffusion moléculaire varie plus vite que $1/\lambda^4$.
Plusieurs chercheurs ont par ailleurs mesuré expérimentalement le coefficient de diffusion de l'eau pure. L'une des

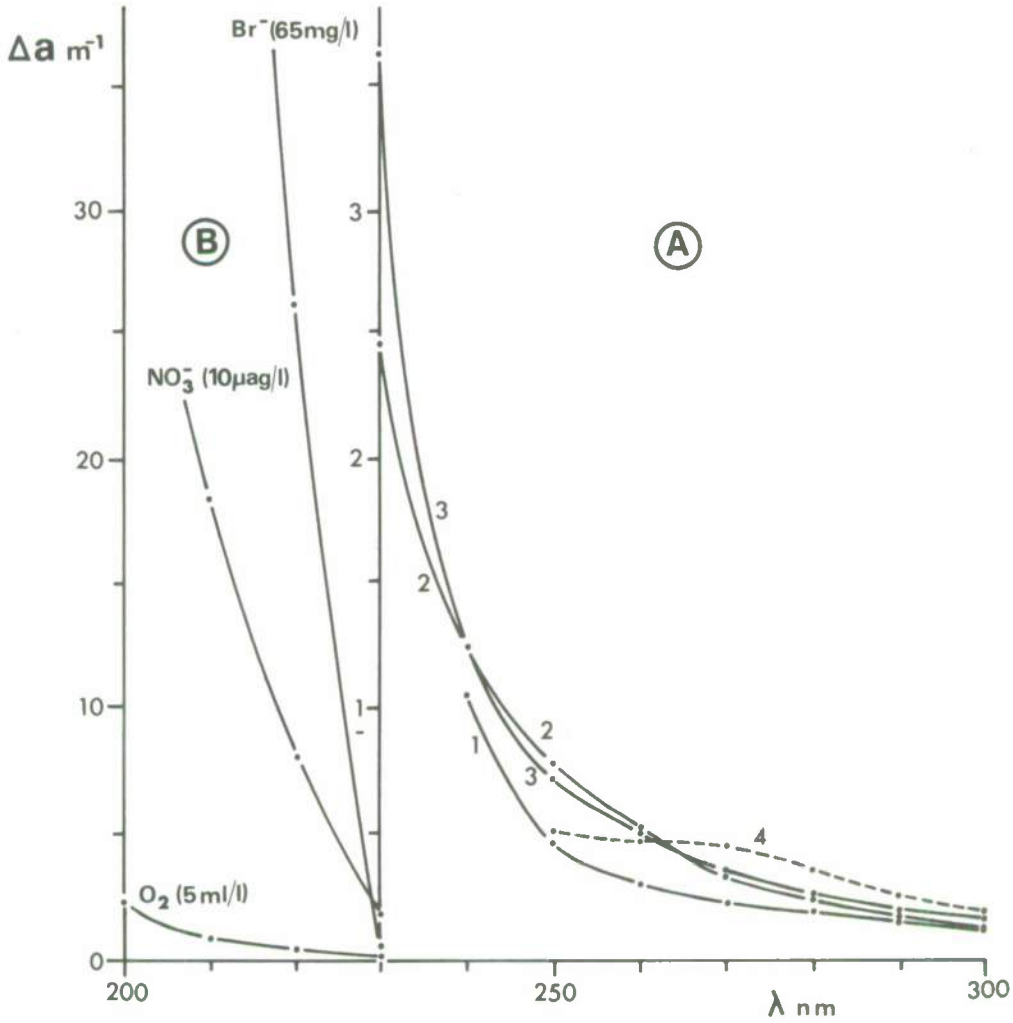


Figure 8

Figure A : Surcroît d'absorption provoqué par les sels dissous aux longueurs d'onde comprises entre 230 et 300 nm. L'échantillon d'eau de mer (eau méditerranéenne de salinité 37,8°/₀₀)a été comparé à de l'eau pure, après éliminition des matières en suspension par filtration, et destruction des substances organiques en solution soit par irradiation à l'ultra-violet (courbe 1), soit par passage sur charbon actif (courbe 2). La courbe 3 correspond à de l'eau méditerranéenne profonde (après filtration) supposée très pauvre en substances organiques absorbant les courtes longueurs d'onde (voir la figure 11). La courbe 4, donnée à titre de comparaison, représente les résultats obtenus en 1956 par J. LENOBLE [11] sur de l'eau de mer artificielle.
Figure B : Surcroît d'absorption provoqué par les bromures, les nitrates et l'oxygène dissous (aux concentrations indiquées, courantes dans les eaux de mer) aux longueurs d'onde comprises entre 200 et 230 nm. D'après G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10].

(15) Voir page suivante

études les plus récentes est celle faite en 1966 par A. MOREL, [9], dont les résultats, représentés figure 7 par les cercles pleins, ne s'écartent que très peu de ceux calculés.

On a également porté figure 7 une moyenne raisonnable des résultats présentés figure 5, concernant le coefficient d'atténuation c de l'eau pure. Ceci permet d'évaluer, du moins en première approximation, les parts respectives de l'absorption et de la diffusion dans l'atténuation exercée par l'eau pure.

Le tableau 1, tiré des courbes b et c de la figure 7, montre que le rapport b/c pourrait dépasser 0,1 aux longueurs d'onde comprises entre 420 et 480 nm. Il est par contre inférieur à 1/100 aux longueurs d'onde supérieures à 580 nm, ainsi que déjà signalé plus haut. Sa valeur dans l'ultra-violet reste actuellement inconnue.

6. EFFETS OPTIQUES DES SELS ET DES SUBSTANCES ORGANIQUES EN SOLUTION

Considérons successivement l'effet sur la valeur de la diffusion moléculaire, et celui sur l'importance des phénomènes d'absorption.

D'après les mesures de A. MOREL [9] citées ci-dessus, le coefficient total de diffusion moléculaire d'une eau de mer optiquement pure (16) est $1,73.10^{-3}$ m^{-1} à 546 nm, alors que celui de l'eau pure est $1,33.10^{-3}$ m^{-1} pour la même longueur d'onde. L'augmentation est donc assez importante (voir la figure 7), et il convient d'en tenir compte chaque fois que le rôle de la diffusion moléculaire cesse d'être négligeable (voir le paragraphe 7.1.3.).

En ce qui concerne l'effet des sels dissous sur le coefficient d'absorption, il apparait qu'aucun d'eux ne présente de propriétés absorbantes particulières, du moins dans le spectre visible et dans le proche ultra-violet, et aux concentrations rencontrées dans les eaux de mer. Ainsi que le montre la figure 8A (d'après G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT[10]), l'absorption exercée par les sels(17), très faible et de ce fait mal connue dans le spectre visible, croît de plus en plus vite dans l'ultra-violet, sans qu'il soit possible de préciser actuellement en dessous de quelle longueur d'onde cet effet des sels devient-il supérieur à celui de l'eau, l'absorption exercée par celle-ci dans l'ultra-violet n'étant pas suffisamment connue. Il est établi par contre qu'aux longueurs d'onde inférieures à 230 nm environ les responsables essentiels de l'absorption sont les bromures (N. OGURA et T. HANYA, [12])et les nitrates (F.A.J. ARMSTRONG, [13] : voir la figure 8B (18).

Du fait de la faible absorption exercée par les sels dissous dans le spectre visible, pour ce dernier les propriétés absorbantes d'une eau de mer puisée au large et soigneusement filtrée (afin d'éliminer les effets optiques des substances en suspension) ne diffèrent généralement que très peu de celles de l'eau pure : voir les courbes 1 et 2 de la figure 9. Par contre une eau de mer côtière, même soigneusement filtrée, présente en général vers les courtes longueurs d'onde une absorption nettement plus importante que l'eau pure : voir à titre d'exemple les courbes 1 et 3 de la figure 9. Ce fait fût attribué dès 1938 par K. KALLE à la présence dans certaines régions océaniques (susceptibles de se trouver ,surtout en certaines saisons, au large) de produits de dégradation d'origine végétale, s'apparentant soit aux mélanoïdines soit aux acides humiques (19), qu'il baptisa "gelbstoff", soit "substances jaunes". Si l'on traite de l'eau de mer préalablement filtrée par un solvant organique tel que l'acétate d'éthyle ou le chloroforme, on obtient effectivement un extrait généralement jaune ou brunâtre. La figure 10, d'après A. SALIOT (communication personnelle), fournit des exemples de spectres d'absorption de tels extraits (20).

La teneur des eaux de mer en "substances jaunes" est très variable, et se trouve probablement liée d'une part à la richesse du peuplement végétal (algues benthiques, phytoplancton, etc.) et d'autre part aux apports fluviaux (les eaux des lacs et des rivières étant généralement riches en produits de décomposition d'origine végétale). La figure 11, d'après G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10] donne des exemples de surcroît d'absorption provoqué entre 300 et 250 nm par les substances jaunes présentes dans les eaux de mer. En comparant à la figure 8A on voit que, du moins pour l'intervalle de longueurs d'onde considéré, l'effet des substances jaunes peut être largement supérieur à celui des sels dissous.

K. KALLE avait observé que les "substances jaunes" sont souvent soit fluorescentes par elles-mêmes soit accompagnées de produits fluorescents. Les eaux de mer sont effectivement légèrement fluorescentes, 3 à 10 fois plus que l'eau pure, et il est vraisemblable que la majeure partie de cette fluorescence est due à des produits de décomposition organiques,

---

(15) Le tableau 1 montre qu'aux longueurs d'onde supérieures à 580 nm le coefficient d'atténuation de l'eau pure est égal à son coefficient d'absorption à moins de 1 % près, l'effet de la diffusion moléculaire devenant négligeable en comparaison de celui de l'absorption. C'est pourquoi sur la figure 6, relative à l'infra-rouge, on a porté en ordonnées le coefficient d'absorption, égal pour ces longueurs d'onde au coefficient d'atténuation.

(16) Une eau de mer optiquement pure est encore plus difficile à préparer qu'une eau distillée optiquement pure, l'évaporation sous vide ne pouvant évidemment plus convenir. Le meilleur procédé semble être la filtration, à condition d'être conduite avec le maximum de soins et de précautions.

(17) Dans les figures 8 et 11 on a assimilé les variations mesurées du coefficient d'atténuation à celles du coefficient d'absorption, le surcroît de diffusion moléculaire dû aux sels dissous et aux substances organiques en solution étant négligeables vis-à-vis de leur effet sur le coefficient d'absorption. Pour la même raison, dans la figure 9 les écarts en coefficient d'atténuation peuvent être assimilés à des écarts en coefficient d'absorption, tandis que les répartitions spectrales du coefficient d'atténuation données figure 10 constituent pratiquement celles du coefficient d'absorption.

(18) Comme le montre cette figure, l'oxygène dissous présente aux très courtes longueurs d'onde un effet absorbant non négligeable (G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10]).

(19) Pour plus de détails, voir [2] p. 55, et la bibliographie correspondante.

(20) A. SALIOT (communication peronnelle) a observé des spectres d'absorption analogues sur des extraits obtenus à partir des matières en suspension recueillies sur les filtres.

puisque le passage sur charbon actif la fait disparaître presque complètement (Ch.DORVILLE, communication personnelle). Par contre si les "substances jaunes"sont en partie fluorescentes, ou sont accompagnées de produits fluorescents, surcroît d'absorption dans les courtes longueurs d'onde et fluorescence sont néanmoins complètement indépendants l'un de l'autre ; nous verrons en particulier que l'absorption dans l'ultra-violet diminue généralement avec la profondeur (figure 50), tandis que la fluorescence au contraire augmente (figure 51) ; les substances organiques responsables de ces deux phénomènes, si parfois elles coexistent ou même sont identiques, semblent donc être en général distinctes, et varier différamment avec la profondeur.

Signalons enfin que les chercheurs ne semblent pas être d'accord sur la répartition spectrale de la fluorescence des eaux de mer, les uns trouvant un maximum aux alentours de 465 nm (21) (voir à titre d'exemple la figure 12), d'autres obtenant une

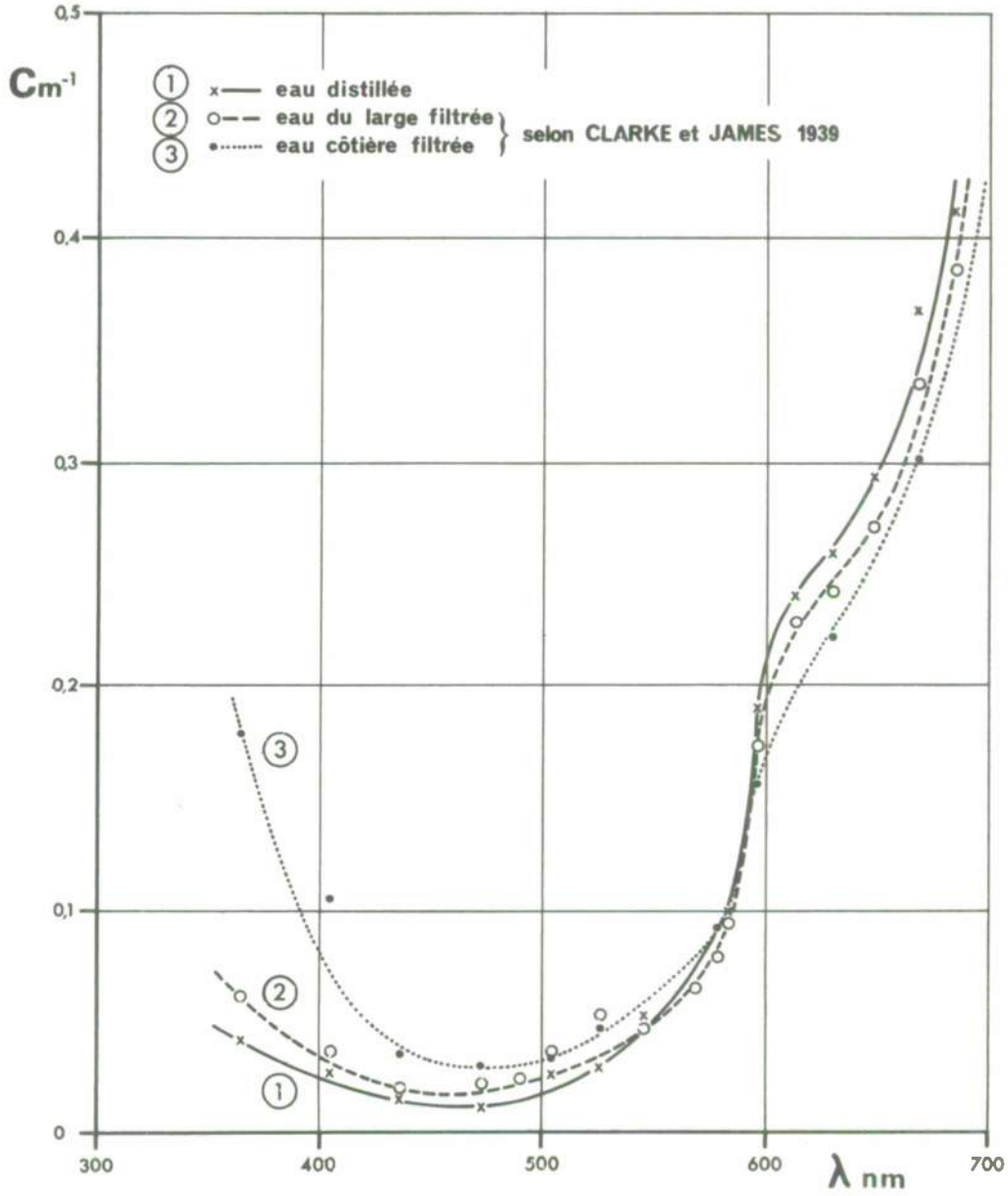


Figure 9
Coefficient d'atténuation de l'eau pure, d'une eau du large filtrée et d'une eau côtière filtrée, selon G.L. CLARKE et H.R. JAMES [14]

(21) Ceci lorsque l'extinction est faite au moyen de la raie 366 nm de la lampe à vapeur de mercure. Or, si la raie 406 nm de cette dernière n'est pas parfaitement éliminée par le filtre utilisé, il lui correspond dans l'eau une raie RAMAN se trouvant précisément à 465 nm, ce qui laisse subsister un doute sur la nature du maximum observé à cette longueur d'onde par certains auteurs.

décroissance progressive aux longueurs d'onde supérieures à 440 nm (voir à titre d'exemple la figure 13). Les extraits obtenus en traitant l'eau de mer par un solvant organique tel que le chloroforme présentent une fluorescence dont la répartition spectrale présente un maximum à une longueur d'onde variable entre 430 et 480 nm (voir à titre d'exemple la figure 14). Mais d'une part seule une partie des substances organiques dissoutes est extraite, et par ailleurs sa fluorescence peut dépendre du solvant.

7. EFFETS OPTIQUES DES MATIERES EN SUSPENSION

Contrairement aux substances dissoutes, qui, comme nous venons de le voir, influent essentiellement sur le coefficient d'absorption, les matières en suspension, elles, augmentent énormément le coefficient de diffusion des eaux de mer, dont la "turbidité" dépend principalement de sa teneur en particules en suspension. Etant donné par ailleurs que les coefficients de diffusion peuvent être mesurés directement alors que celui d'absorption est généralement déduit par différence entre atténuation et

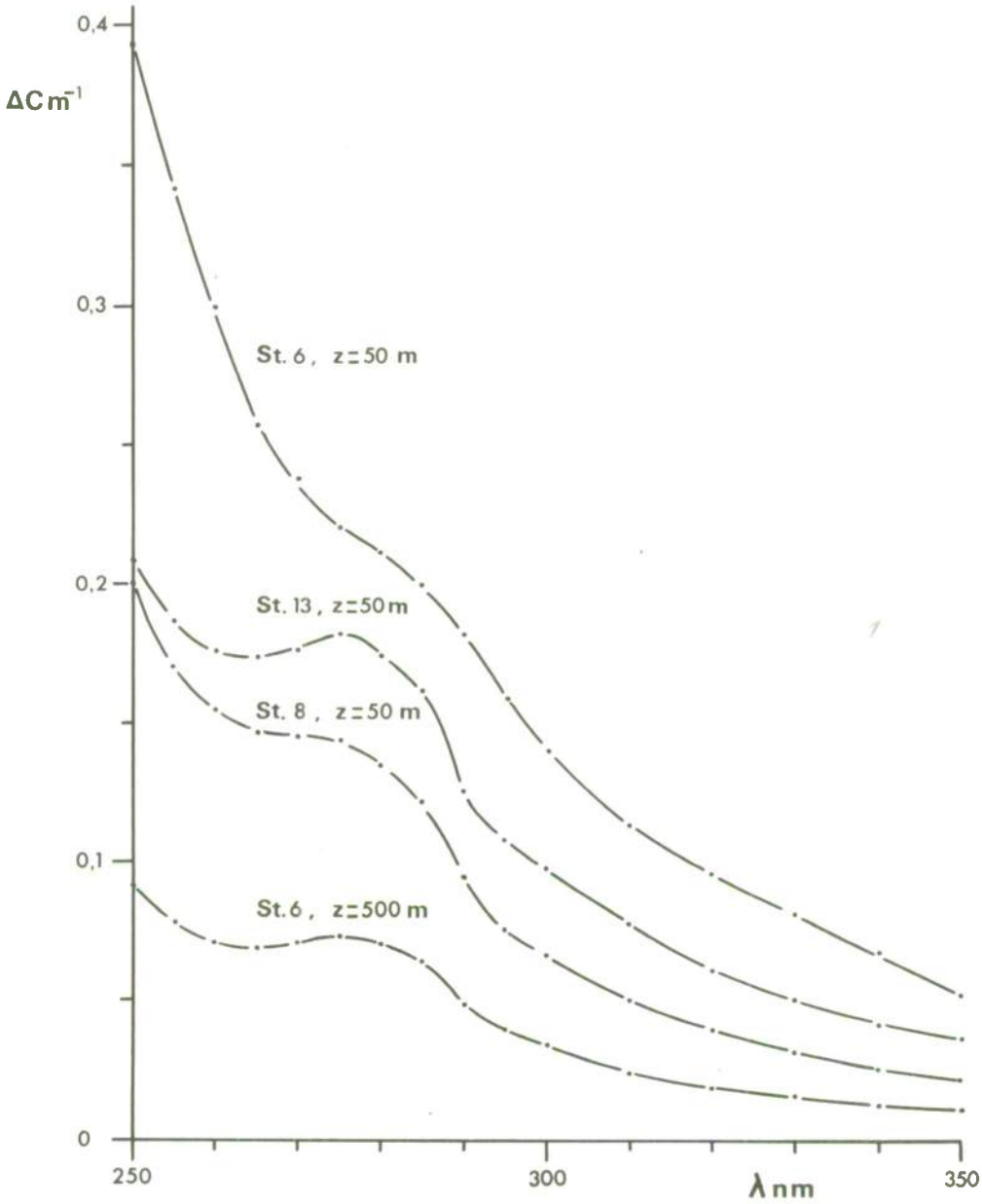


Figure 10

Exemples de spectres d'absorption d'extraits secs obtenus en traitant par le chloroforme 100 l d'eau de mer préalablement filtrée, en dissolvant ces extraits dans 100 cc de chloroforme, et en rapportant le coefficient d'atténuation ainsi mesuré à un volume de 100 l. D'après A. SALIOT (communication personnelle). Stations "Harmattan" (Atlantique Equatorial Est, Mai 1971).

diffusion (paragraphe 4.4.), les propriétés diffusantes des particules en suspension dans les eaux de mer sont beaucoup mieux connues que leurs propriétés absorbantes. Pour ces diverses raisons, c'est par elles que nous allons commencer.

7.1. Propriétés diffusantes des matières en suspension

Ainsi que nous l'avons vu au paragraphe 4.2., les propriétés diffusantes d'un milieu sont définies (pour une longueur d'onde donnée) par l'indicatrice de diffusion. Celle des eaux de mer a donné lieu à de nombreuses recherches tant expérimentales que de nature théorique.

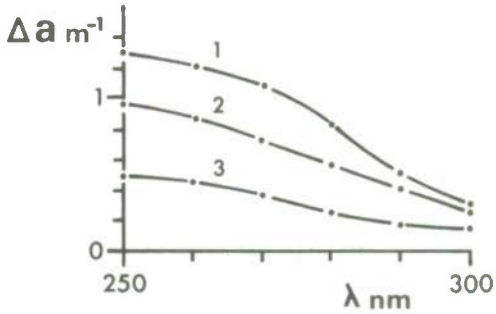


Figure 11
Exemples de surcroît d'absorption provoqué par les "substances jaunes" entre 250 et 300 nm (on a comparé deux parties d'un même échantillon d'eau de mer filtrée, l'une d'elles ayant été préalablement irradiée par une lampe à vapeur de mercure pour détruire les substances organiques dissoutes). Les courbes 1, 2 et 3 correspondent respectivement à une eau côtière relativement turbide, à une eau du large prélevée à 50m de profondeur et à une eau du large prélevée à 300 m de profondeur. D'après G.COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10] .

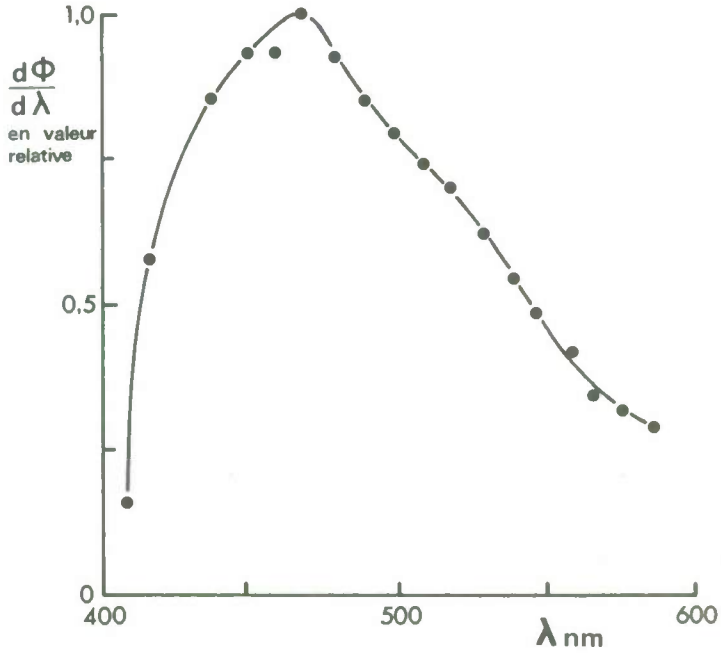


Figure 12
Répartition spectrale de la fluorescence d'eaux de la Mer Baltique, d'après G.S. KARABASHEV, K.P. ZANGALIS, A.N. SOLOVYEV et V.V. YAKUBOVICH [15] . Excitation par une lampe à vapeur de mercure précédée d'un filtre centré sur la raie 366 nm.

7.1.1. Considérations théoriques.

La diffusion de la lumière par des particules de dimensions suffisantes relève des phénomènes de réflexion, de réfraction et de diffraction. Celle par des particules très petites est par contre traitée par la théorie du dipôle rayonnant de RAYLEIGH. Mais dans les deux cas, ainsi que dans celui des particules de dimensions intermédiaires, les propriétés diffusantes peuvent être déterminées (du moins en se limitant à des particules sphériques) par la théorie électromagnétique de MIE (1908). D'un emploi laborieux jusqu'à l'avénement des ordinateurs, cette théorie a pris un grand essor durant ces dernières années et a permis d'étudier les propriétés diffusantes des suspensions "polydispersées", c'est-à-dire des ensembles de particules définis par une ceraine loi de distribution en taille (et par un indice moyen). Simultanément, la mise au point entre 1960 et 1965 du compteur COULTER a fait faire de grands progrès à la granulométrie des particules en suspension dans les eaux de mer, et a permis notamment d'établir que leur loi de répartition en taille suivait, du moins en première approximation, une loi de distribution de la forme

$$\frac{dN}{d\phi} = C\phi^{-M}$$

où dN est le nombre de particules de diamètre compris entre $\phi - \frac{d\phi}{2}$ et $\phi + \frac{d\phi}{2}$ .L'application

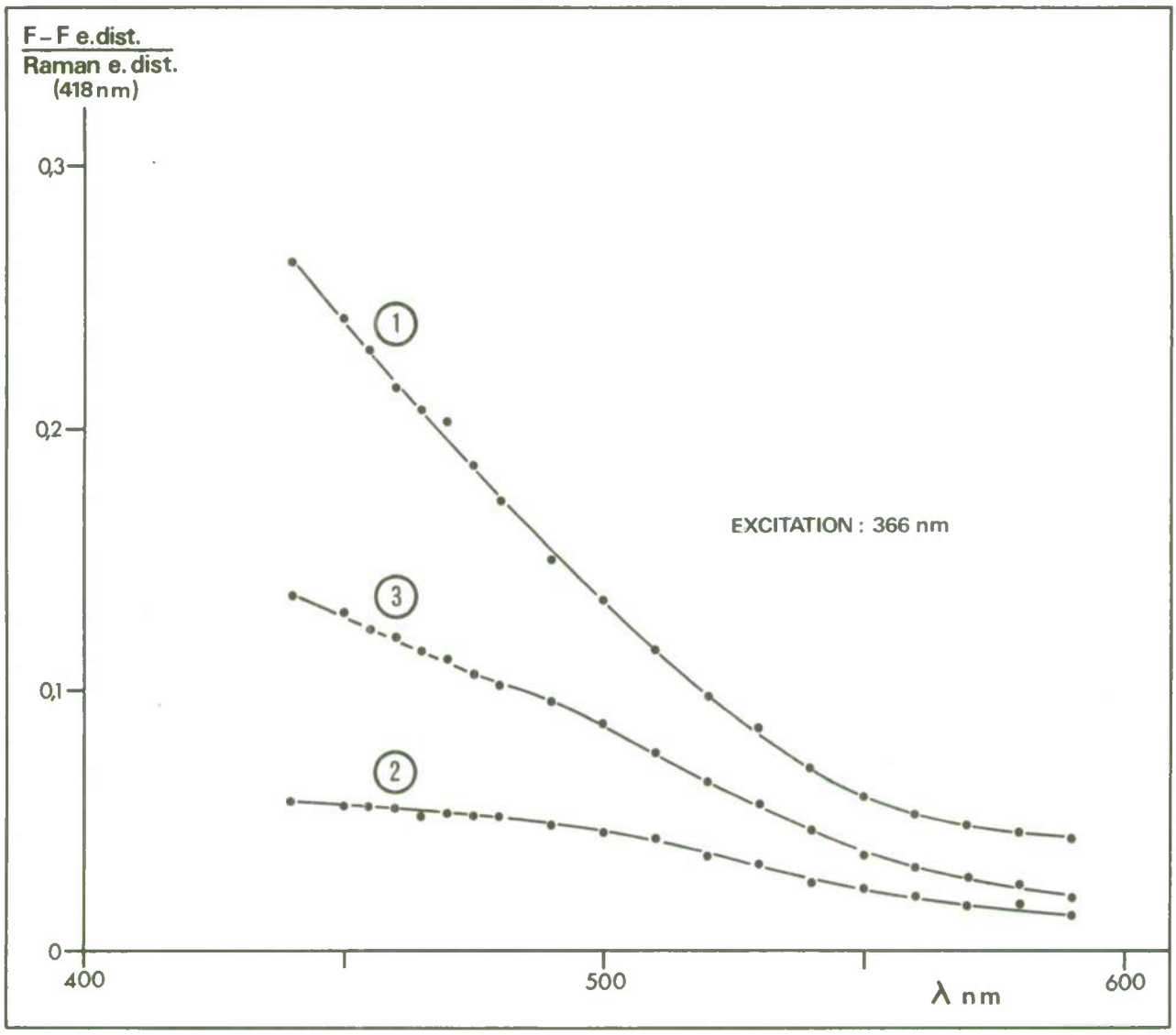


Figure 13
Répartition spectrale de la différence entre la fluorescence de diverses eaux méditerranéennes et celle de l'eau pure, rapportée à l'intensité de la raie RAMAN correspondant à la raie excitatrice (366 nm, isolée à l'aide d'un monochromateur à réseau). Les courbes 1, 2 et 3 correspondent respectivement à de l'eau côtière, à de l'eau superficielle du large, et à de l'eau profonde. D'après A. MOREL [16] .

de la théorie de MIE à une telle fonction de distribution a fait l'objet de plusieurs travaux dont celui, très complet, de A. MOREL, présenté plus loin. Nous laisserons donc de côté les considérations théoriques concernant les propriétés diffusantes des particules en suspension dans les eaux de mer, en priant le lecteur de se reporter aux conférences 3.1 et 3.2.

7.1.2. Indicatrices de diffusion des eaux de mer. Indicatrice de diffusion des particules en suspension.

De nombreux auteurs ont déterminé expérimentalement des indicatrices de diffusion des eaux de mer, soit sur échantillons, soit, ce qui en principe est préférable, à l'aide de diffusiomètres fonctionnant in situ (22). La figure 15 fournit quelques exemples. Etant donné que pour l'instant nous nous intéressons uniquement à la forme des indicatrices de diffusion, celles-ci sont normalisées sur la figure à $\theta = 90°$.
On constate que :
- Toutes les indicatrices présentent une diffusion croissant rapidement aux petits angles, ce qui est caractéristique des particules de taille supérieure à la longueur d'onde.
- La plupart des indicatrices ne présentent guère d'ondulations, ce qui est en accord avec les résultats obtenus par la théorie de MIE appliquée aux suspensions polydispersées.
- Les écarts entre les diverses indicatrices sont importants surtout aux angles supérieurs à 90°.

Ce dernier point s'explique en partie par le fait qu'une indicatrice de diffusion d'eau de mer combine les propriétés diffusantes des particules en suspension et celles de l'eau. Les premières diffusant essentiellement aux petits angles, alors que l'indicatrice de diffusion moléculaire est symétrique par rapport à $\theta = 90°$, la diffusion moléculaire de l'eau intervient surtout aux angles supérieurs à 90°, et ce d'autant plus que les eaux contiennent moins de particules en suspension. Ceci est illustré par la figure 16 (d'après A. MOREL [18]), montrant l'évolution de l'indicatrice de diffusion d'une eau de mer avec

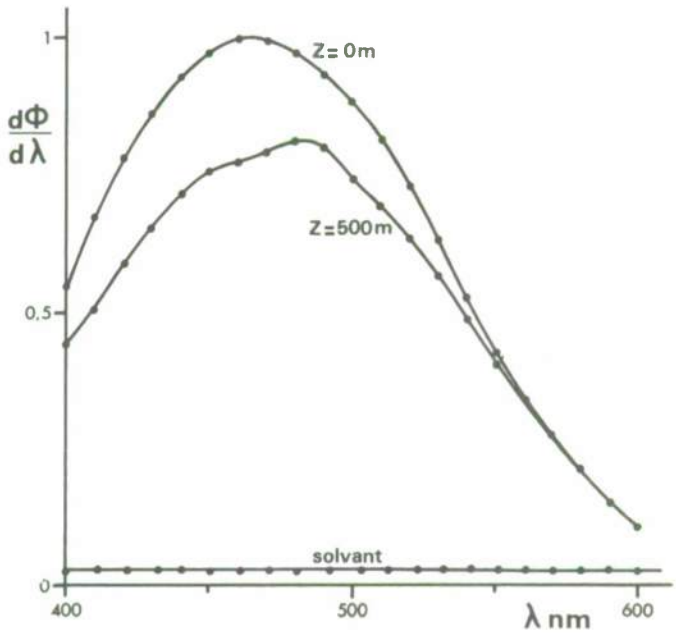


Figure 14

Répartition spectrale de la fluorescence de deux extraits par le chloroforme d'eaux méditerranéennes filtrées. D'après A. SALIOT [17] .

(22) Pour des raisons techniques, ces mesures se sont généralement limitées aux angles de diffusion compris entre 10 ou 20 et environ 160°.

la turbidité de celle-ci (chiffrée dans le cas présent par la valeur du coefficient de diffusion à 90°).

Pour étudier le seul effet des particules en suspension il convient donc de "retrancher" des indicatrices de diffusion des eaux de mer celle correspondant à la diffusion moléculaire de l'eau pour la longueur d'onde considére (voir paragraphe 5).La figure 17 fournit quelques résultats ainsi obtenus, normalisés cette fois à θ = 20°, les particules diffusant surtout aux petits angles (23). On constate que l'indicatrice de diffusion des particules ne varie que très peu quant à sa forme (du moins aux angles inférieurs à 90° environ).

La quasi constance de l'indicatrice de diffusion des particules a pu être expliquée par A. MOREL (1973) dans le cadre de la théorie de MIE par le fait que la forme de l'indicatrice reste sensiblement la même si l'exposant M de la fonction de distribution reste compris entre 3,8 et 4,4, et si l'indice relatif moyen reste compris entre 1,02 et 1,055 (24). Pour les angles supérieurs à 10° l'indice peut même varier beaucoup plus sans que cela affecte la forme de l'indicatrice.

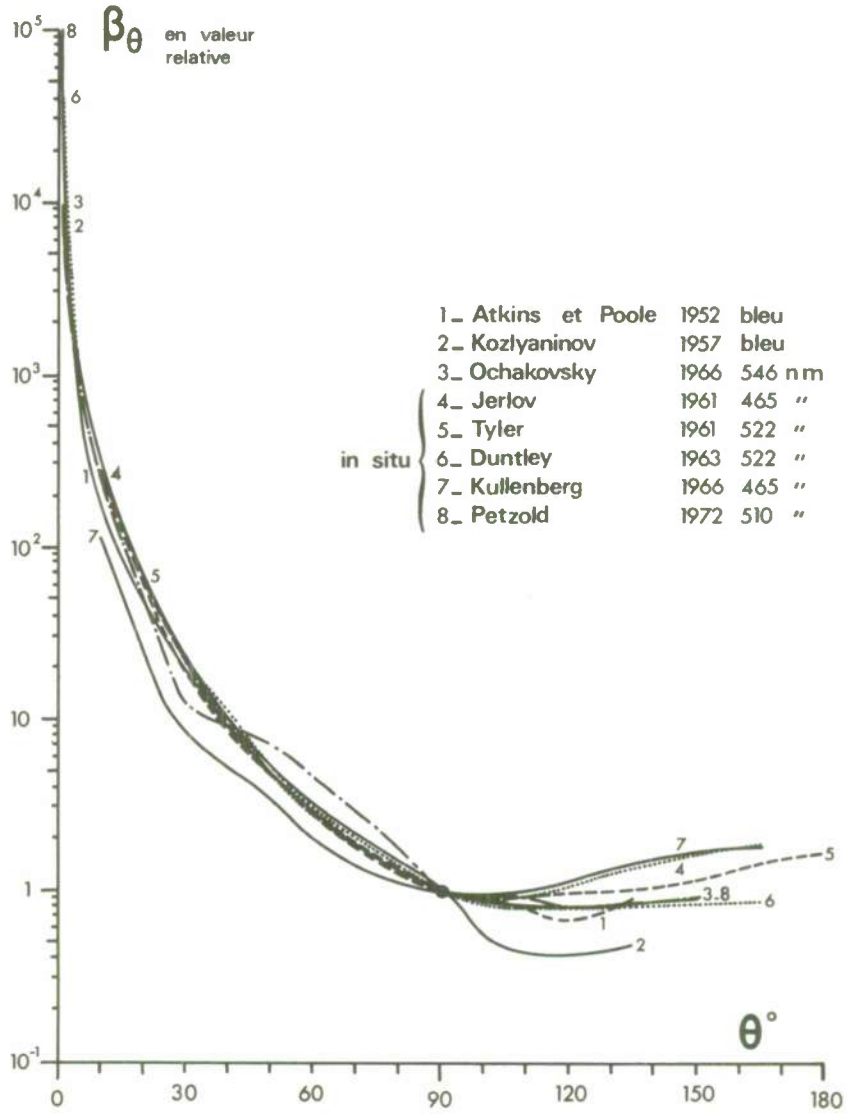


Figure 15
Exemples d'indicatrices de diffusion d'eaux de mer, normalisées à θ = 90°

(23) Ce qui a nécessité la réalisation de diffusiomètres permettant de faire des mesures à des angles aussi petits que possible (D. BAUER, A. IVANOFF et A. MOREL[19][23],G. KULLENBERG [20] , Visibility Laboratory [21] , V.I. MANKOVSKY [22]).
(24) Par contre ces divers paramètres influent notablement sur les propriétés polarisantes des particules, qui sont effectivement beaucoup plus variables, ainsi que nous le verrons au paragraphe 7.1.5.

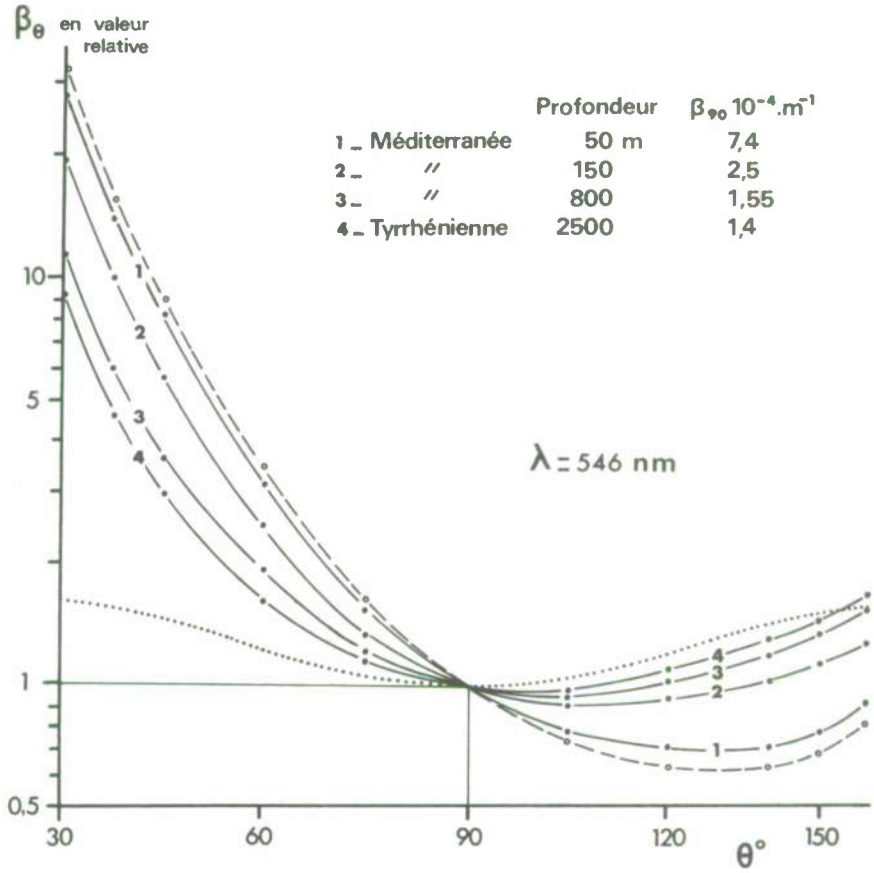


Figure 16

Evolution de l'indicatrice de diffusion des eaux de mer avec leur turbidité. La courbe en trait discontinu représente l'indicatrice de diffusion des particules en suspension, tandis que celle en pointillé correspond à la diffusion moléculaire de l'eau. D'après A. MOREL [18] .

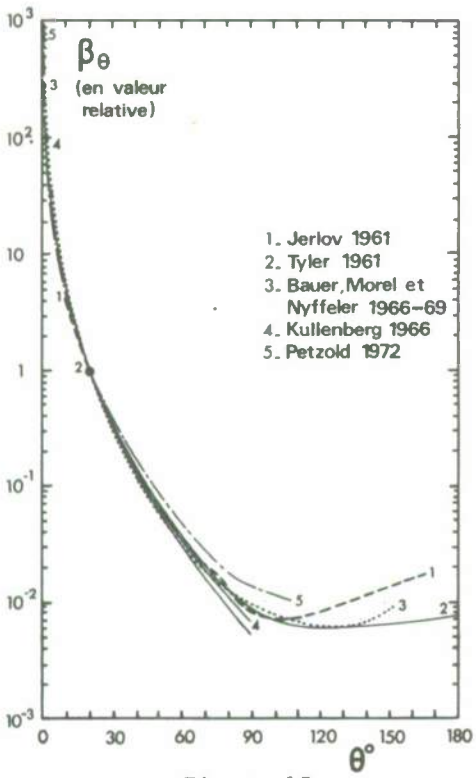


Figure 17

Exemples d'indicatrices de diffusion des particules en suspension dans les eaux de mer, normalisées à θ = 20°.

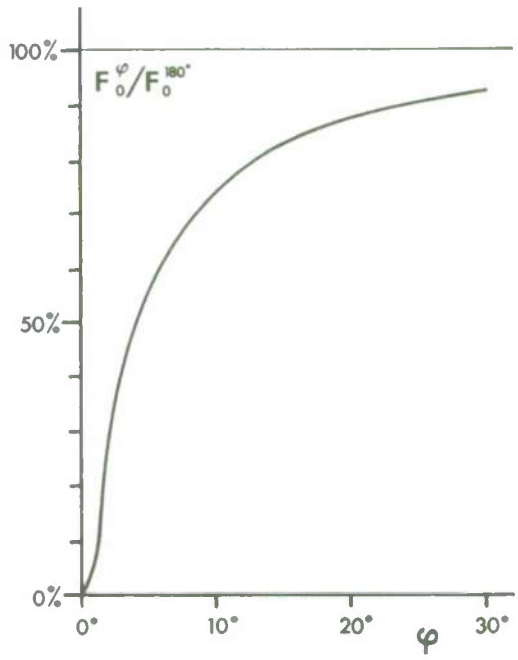


Figure 18

Variations du rapport du flux diffusé par les particules dans un cône de demi-angle au sommet φ au flux total diffusé. d'après D. BAUER et A. MOREL [23] .

La forte prédominance de la diffusion aux petits angles est mise en évidence figure 18 (d'après D. BAUER et A. MOREL, [23]), représentant les variations avec l'angle φ du rapport $\int_0^{\varphi} \beta_\theta . \sin\theta . d\theta \,/\, \int_0^{180°} \beta_\theta . \sin\theta . d\theta$ du flux F_o diffusé dans un cône de demi-angle au sommet φ au flux total diffusé $F_o^{180°}$. On voit que ce rapport atteint déjà 55 % pour $\varphi = 5°$ et dépasse 85 % pour $\varphi = 20°$.

Remarquons enfin que si l'on admet la constance de l'indicatrice de diffusion par les particules, le coefficient total de diffusion par les particules est proportionnel à tout coefficient angulaire de diffusion. En fait on a constaté des variations légères mais significatives de l'indicatrice de diffusion des particules, et selon V.I. MANKOVSKY [22], c'est le coefficient angulaire de diffusion à 4,5° qui présente la meilleure corrélation avec le coefficient total de diffusion par les particules. Ce qui est en accord avec les résultats obtenus par la théorie de MIE : voir la conférence 3.2.

7.1.3. Coefficient total de diffusion des eaux de mer. Part due à la diffusion moléculaire.

Si la forme de l'indicatrice de diffusion des particules varie peu, les valeurs absolues des coefficients angulaires de diffusion et du coefficient total de diffusion des eaux de mer dépendent essentiellement de leur teneur en matières en suspension (voir le paragraphe suivant), et sont susceptibles de varier dans un rapport supérieur à 100. Les tableaux 2 et 3 fournissent un certain nombre de valeurs du coefficient total de diffusion b

	λnm	$b_m - 1$	$\frac{b_o}{b}$ %
Mer des Sargasses	440	0,043	7,8
Mer des Caraïbes	440 655	0,063 0,061	5,3 1,1
Pacifique équatorial central	440	0,053	6,3
Fosse de la Romanche	440	0,073	4,6
Iles Galapagos	440 655	0,083 0,071	4 0,9
Kattegat	380 655	0,166 0,151	3,8 0,4
Mer Baltique	380 655	0,216 0,201	2,9 0,3
Golfe de Botnie	380 655	0,316 0,286	2 0,2

Tableau 2
Quelques valeurs du coefficient total de diffusion b et de l'importance relative b_o/b de la diffusion moléculaire.
D'après N.G. JERLOV [2]

obtenues par N. G. JERLOV [2] et par A. MOREL [18].

Connaissant la valeur du coefficient total de diffusion moléculaire b_o de l'eau pour la longueur d'onde considérée (voir paragraphe 5), on peut évaluer dans chaque cas

l'importance relative b_o/b de la diffusion moléculaire. Cette importance diminue lorsque la longueur d'onde augmente, la diffusion moléculaire variant sensiblement en $1/\lambda^4$. Par ailleurs, ainsi que le montre la figure 19 (d'après A. MOREL [18]), le rapport b_o/b diminue très rapidement avec la turbidité de l'eau. Pour 546 nm, il dépasse 10 % pour les eaux océaniques les plus limpides, est généralement inférieur à 5 % pour les eaux du large, devient négligeable pour les eaux côtières.

	b_m^{-1}	$\frac{b_o}{b}$ %
Méditerranée Orientale :		
z = 100 à 3000 mètres	0,035 à 0,015	5 à 12
Mer Tyrrhénienne :		
z = 100 à 2500 mètres	0,05 à 0,02	4 à 12
z = 0 à 50 mètres	0,06 à 0,05	3 à 4
Mer Ligure :		
z = 200 à 1000 mètres	0,09 à 0,03	2 à 6
z = 0 à 150 mètres	0,16 à 0,06	1 à 3
. Baies de VILLEFRANCHE et de BEAULIEU	0,50 à 0,16	0 à 1
La Manche :		
. Large	0,37 à 0,16	0 à 1
. Côtier (Baie de MORLAIX)	2,0 à 0,37	≈0

Tableau 3
Quelques valeurs du coefficient total de diffusion b (pour λ = 546 nm) et de l'importance relative b_o/b de la diffusion moléculaire. D'après A. MOREL[18].

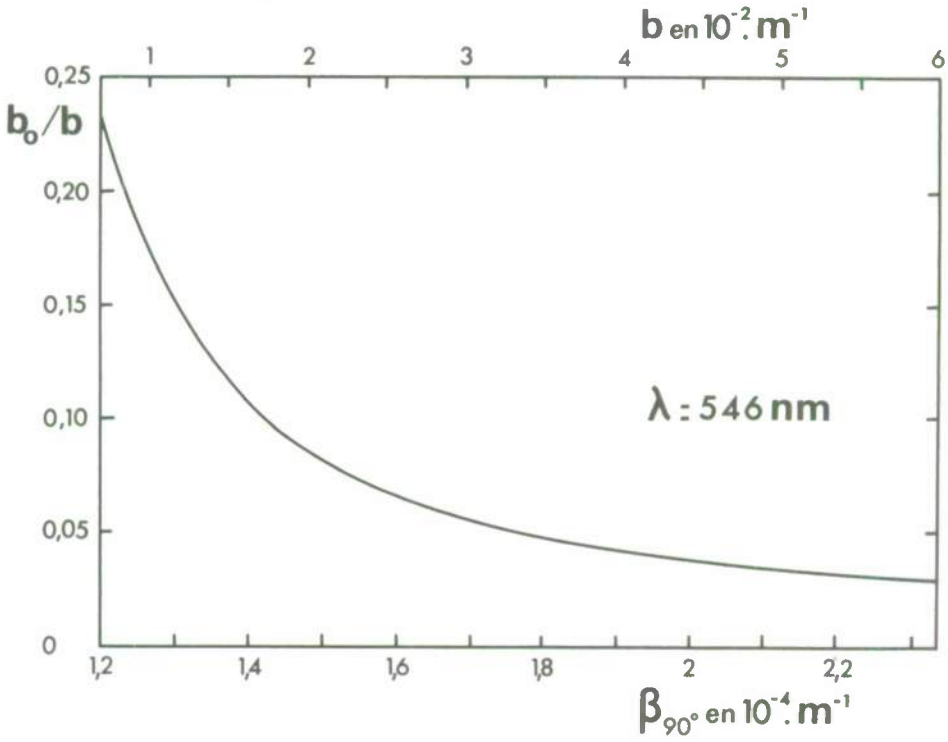


Figure 19
Variations de l'importance relative b_o/b de la diffusion moléculaire avec la turbidité de l'eau. D'après A. MOREL [18] .

Il est évident toutefois que c'est surtout aux petits angles que la diffusion par les particules est prédominanante, étant donnée la forme "pointue" de leur indicatrice. Si l'on considère non plus le coefficient total de diffusion mais les coefficients angulaires , l'importance relative de la diffusion moléculaire peut devenir notable, surtout aux angles supérieurs à 90°. Le tableau 4, d'après A. MOREL[18] , montre qu'à 546 nm et pour $\theta = 135°$ elle peut atteindre plus de 10 % même dans le cas d'eaux côtières relativement turbides, et dépasser 80 % pour les eaux exceptionnellement limpides. Si le rôle de la diffusion moléculaire est généralement faible ou négligeable dans l'atténuation d'un pinceau lumineux ou dans la diffusion aux petits angles, il peut devenir important ou même prépondérant dans les phénomènes faisant intervenir la "rétrodiffusion", c'est-à-dire la diffusion aux angles supérieurs à 90°.

	30°	45°	90°	135°	150°
devant Roscoff, surface $\beta_{90°} = 2,1.10^{-3}$ m	0,3 %	0,9 %	5 %	11 %	9,5 %
devant Villefranche/Mer z = 50 m $\beta_{90°} = 0,74.10^{-3}$ m	0,8 %	2,6 %	14,5 %	29 %	26 %
Tyrrhénienne z = 2500 m $\beta_{90°} = 0,14.10^{-3}$	13 %	36 %	77 %	82 %	74 %

Tableau 4
Importance relative β_o/β de la diffusion moléculaire pour diverses valeurs de l'angle de diffusion θ. D'après A. MOREL[18] .

Signalons enfin que d'après certains chercheurs (W.V. BURT [25], A. MOREL [26]) le coefficient total de diffusion par les particules en suspension dans les eaux de mer serait, en première approximation, inversement proportionnel à la longueur d'onde. Etant donné que la diffusion moléculaire, elle, suit sensiblement une loi en $1/\lambda^4$, elle augmente, et ce d'autant plus que les eaux sont plus limpides, la sélectivité de la diffusion globale. D'après ce que nous avons vu ci-dessus, cette augmentation de la sélectivité de la diffusion doit se faire sentir surtout aux angles supérieurs à 90°.

7.1.4. Relation entre coefficient de diffusion et teneur en matières en suspension.

L'un des intérêts essentiels de la détermination du coefficient de diffusion optique des eaux de mer réside dans la possibilité d'en tirer une information rapide sur la teneur de celles-ci en matières en suspension, alors que les mesures directes de cette teneur sont fort longues par suite de la nécessité de filtrer des volumes d'eau importants. Toutefois, comme nous allons le voir, dans l'état actuel de nos connaissances cette information manque encore de précision et ne peut fournir qu'un ordre de grandeur moyen.

La théorie de MIE permet de calculer (voir la conférence 3.2.) le rapport Q (appelé "facteur d'efficacité") du flux total $dF = b.E.dv$ diffusé par des particules au flux incident intercepté par la somme A des aires de leurs sections, flux égal à E.A. Ce facteur d'efficacité $Q = \frac{b.dv}{A}$ permet donc de relier le coefficient total de diffusion b à la somme A des aires des sections des particules diffusantes (rapportée à l'unité de volume du milieu). Sa valeur dépend de la loi de répartition en taille des particules, et de leur indice moyen. Il est à présumer que pour les eaux du large le facteur d'efficacité varie relativement peu, mis à part des cas particuliers tel qu'un afflux de particules minérales provenant d'apports éoliens ou fluviaux. Mais l'importance de l'erreur que l'on introduirait en admettant tout simplement un facteur d'efficacité constant reste inconnue pour l'instant.

Par ailleurs, ce qui intéresse l'océanographe, c'est non pas tant la valeur de

la section totale A des particules en suspension, mais plutôt celle de leur masse totale (par unité de volume d'eau de mer). Or si la section totale A est en relation directe avec la surface totale (du moins en assimilant les particules à des sphères), la relation entre cette dernière et le volume total dépend de la loi de répartition en taille, tandis que celle entre le volume total et la masse totale dépend de la valeur moyenne de la masse volumique (25). Admettre un facteur de proportionnalité constant entre le coefficient de diffusion et la teneur des eaux en seston implique donc des hypothèses supplémentaires (en particulier la constance de la valeur moyenne de la masse volumique) dont le degré de validité reste à préciser.

Par contre notre connaissance de l'indicatrice de diffusion des particules permet d'affirmer qu'au lieu de déterminer le coefficient total de diffusion b il suffit de connaître un coefficient angulaire de diffusion β_θ, ces deux paramètres étant pratiquement proportionnels entre eux par suite de la très faible variabilité de la forme de l'indicatrice de diffusion des particules. Etant donné que les mesures faites sur les eaux de mer font intervenir la diffusion moléculaire de l'eau et qu'il convient de retrancher celle-ci des résultats obtenus, on a intérêt à mesurer le coefficient de diffusion pour un angle assez petit, l'importance relative de la diffusion moléculaire devenant alors très faible, ou même négligeable.

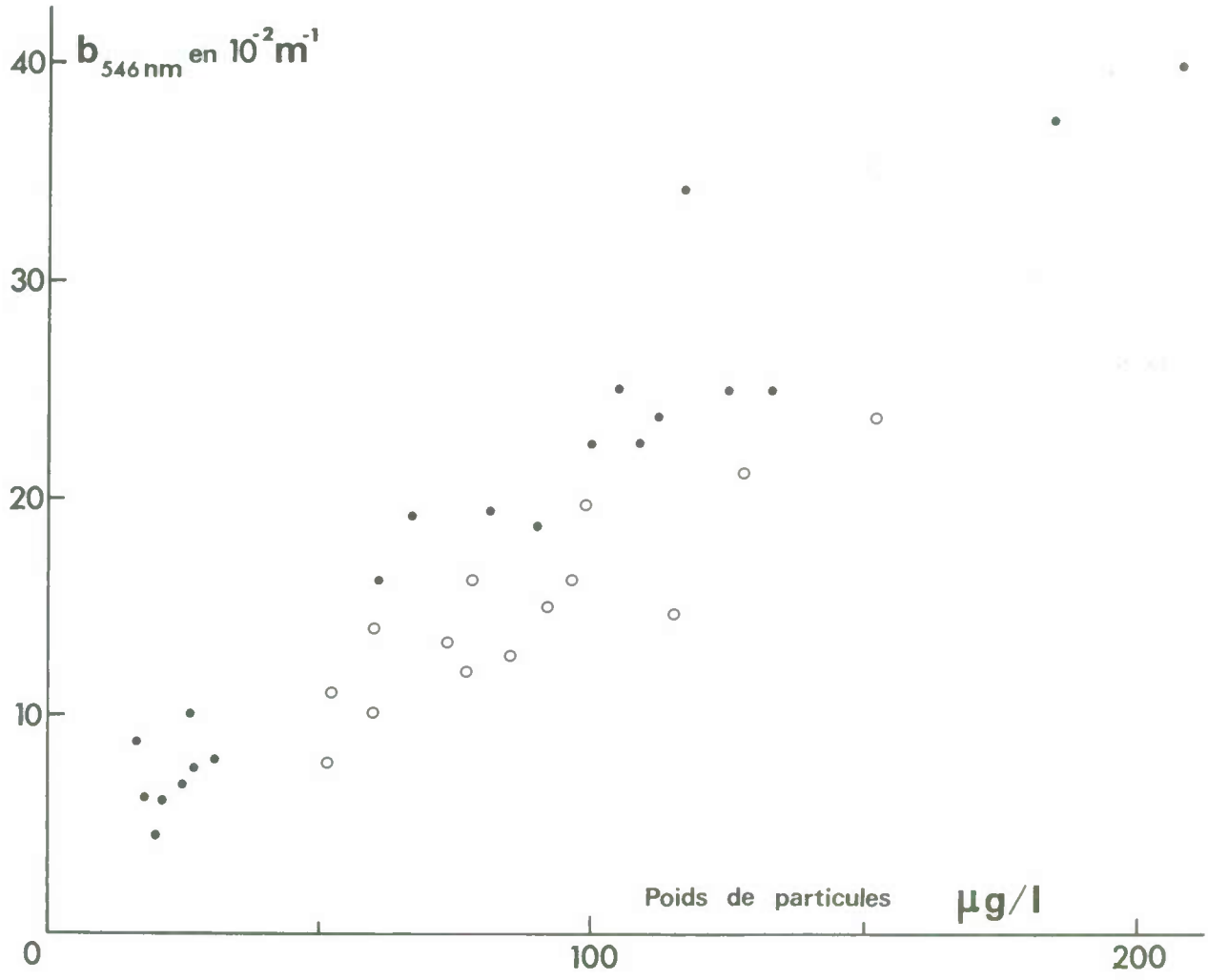


Figure 20

Exemple de corrélation entre le coefficient de diffusion et la teneur des eaux en particules. Golfe de Lion (mission "Mediprod III", à bord du "Jean Charcot", Juin 1972), profondeur inférieure à 100 m. Les cercles vides se rapportent aux stations plus voisines de la côte. D'après G. COPIN-MONTEGUT (communication personnelle).

La figure 20 fournit un exemple de corrélation entre le coefficient total de diffusion (à 546 nm) et la teneur des eaux en seston, telle que déterminée directement par filtration et pesée. Elle se rapporte à des eaux superficielles de la zône de divergence du golfe du Lion, en période de poussée phytoplanctonique, donc à des eaux relativement riches en particules en suspension. Les cercles pleins correspondent à des stations situées au large, tandis que les cercles vides se rapportent à des stations plus voisines de la côte. On voit que la corrélation entre le coefficient de diffusion et la teneur des eaux en seston est satisfaisante en moyenne, mais que, appliqué à un échantillon isolé, un facteur de proportionnalité constant peut conduire à des erreurs importantes. On remarquera par ailleurs que pour une même teneur en particules, les eaux plus voisines de la côte présen-

(25) Voir page suivante.

tent systématiquement un coefficient de diffusion plus faible, soit vraisemblablement une surface totale et un volume total des particules plus petits. Ceci peut signifier que pour ces eaux la valeur moyenne de la masse volumique des particules est plus grande, par suite par exemple de la présence d'un plus grand nombre de particules minérales.

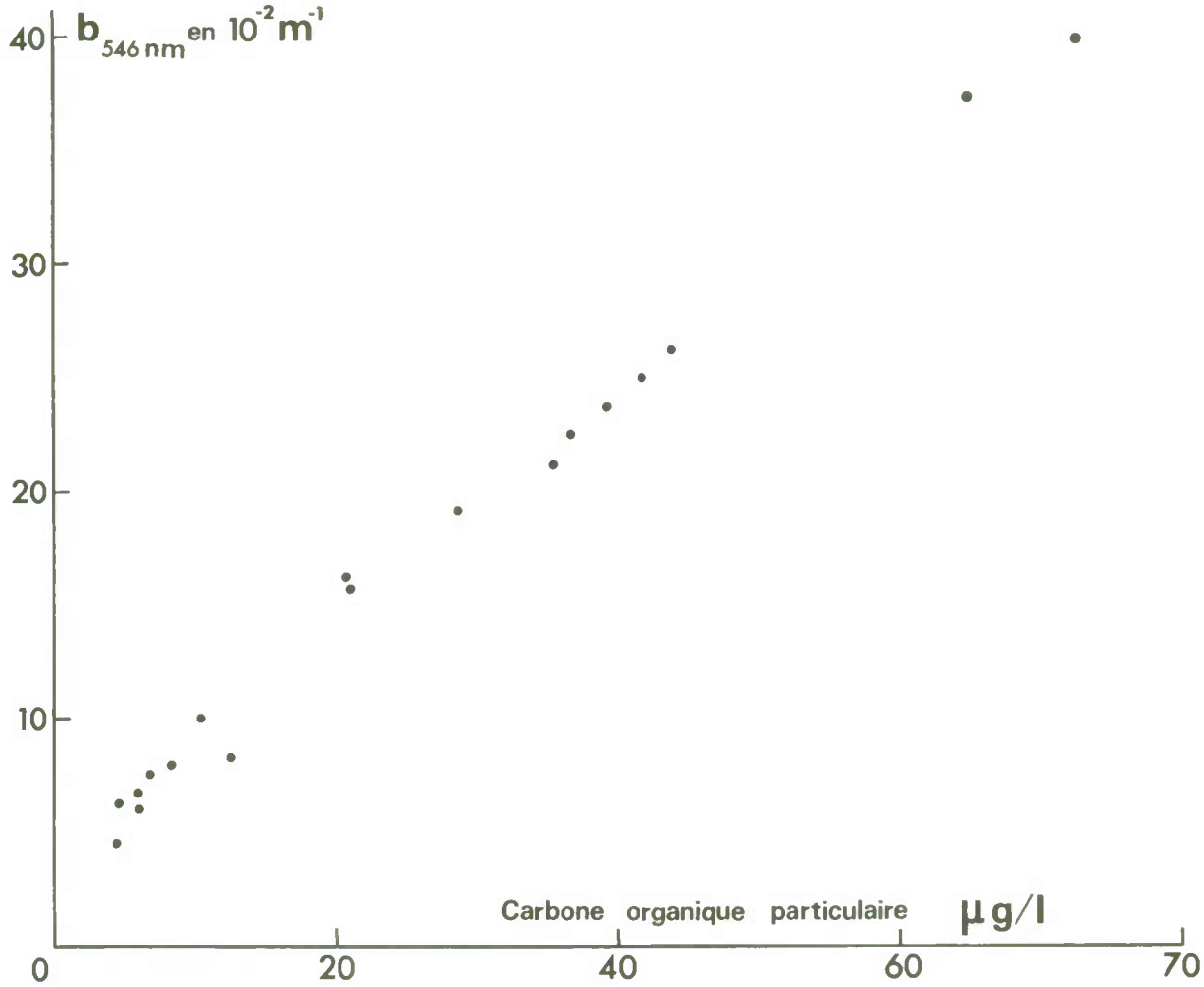


Figure 21
Exemple de corrélation entre le coefficient de diffusion et la teneur des eaux en carbone organique particulaire. Les échantillons analysés sont les mêmes que ceux correspondant aux cercles pleins de la figure 20. D'après G. COPIN-MONTEGUT (communication personnelle).

Si l'on considère non plus la teneur des eaux en particules en suspension mais sa concentration en carbone organique particulaire, dont la détermination est plus précise, la corrélation avec le coefficient de diffusion est généralement meilleure, du moins tant que la teneur des particules en carbone organique varie peu : voir la figure 21.

Remarquons enfin que pour la figure 20 comme pour la figure 21, la droite passant au mieux par les points expérimentaux coupe l'axe des abscisses pour une valeur négative de la teneur en particules ou en carbone particulaire. Ceci peut être expliqué, au moins en partie, par le fait que lors de la filtration (en vue de la pesée du seston ou de la détermination de sa concentration en carbone organique) on ne recueille pas les plus petites particules [26]. Ni la méthode optique ni la méthode chimique ne peuvent prétendre à une bonne rigueur. Mais la méthode optique est certainement plus rapide.

7.1.5. Propriétés polarisantes des particules en suspension.

D'après la théorie de MIE appliquée aux suspensions polydispersées le taux de polarisation de la lumière diffusée par une telle suspension est toujours positif (champ élec-

---

(25) La définition même de la masse de seston (et par conséquent celle de sa masse volumique) soulève d'ailleurs de sérieux problèmes, notamment lorsqu'il s'agit de matières en suspension de nature spongieuse. Faut-il dans ce cas tenir compte de l'eau incluse ? Les volumes mesurés au compteur Coulter ou au microscope inversé en tiennent compte. Par contre lors de la détermination directe de la teneur des eaux de mer en seston, la dessication du filtre, même à température modérée, en élimine vraisemblablement une fraction notable.

(26) Par ailleurs la dessication du filtre, même à température modérée, entraîne des modifications difficiles à analyser.

trique prédominant normal au plan de diffusion), varie d'une manière continue avec l'angle de diffusion θ, est maximal pour une valeur de θ généralement supérieure à 90°, et est beaucoup plus sensible que la forme de l'indicatrice de diffusion aux différents paramètres définissant la suspension, à savoir l'exposant M de la fonction de distribution, les limites ϕ_{min} et ϕ_{max} adoptées pour la répartition en taille, et l'indice moyen n. En particulier, le taux de polarisation diminue avec la prise en considération des particules les plus grosses, ainsi que lorsque l'indice augmente.

Il est donc à présumer que le taux de polarisation de la lumière diffusée par les eaux de mer doit donner sur les particules en suspension des informations que ne fournit pas la seule connaissance du coefficient de diffusion.

Les propriétés polarisantes des particules en suspension dans les eaux de mer ont été peu étudiées jusqu'à présent. Une étude systématique du taux de polarisation de la lumière diffusée par les particules en suspension dans les eaux de mer a néanmoins été effectuée par A. IVANOFF [27][28][29], tant sur échantillons que in situ. Elle se limite à la mesure du taux de polarisation $P_{90°}$ correspondant à θ = 90°, soit sensiblement au taux de polarisation maximal. La figure 22 rassemble, à titre d'exemple, les résultats obtenus durant une mission dans la région de Monaco, en Avril 1960. On constate tout

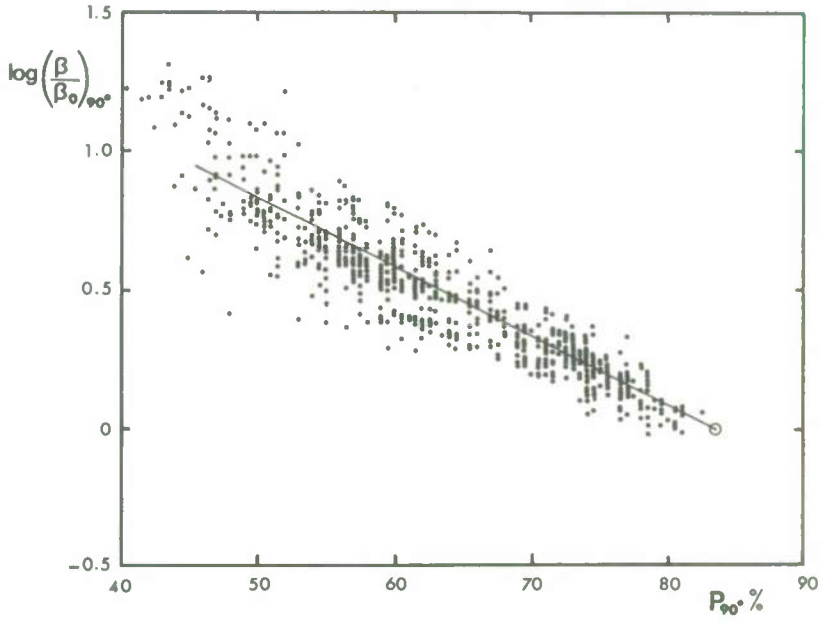


Figure 22
Coefficient angulaire de diffusion β (rapporté à celui de l'eau pure, β_0) pour θ = 90°, et taux de polarisation correspondant, pour tous les échantillons d'eau de mer prélevés en Avril 1960 durant une campagne à bord du "Winaretta Singer", dans la région de Monaco. D'après A. IVANOFF [28]. Le cercle vide correspond à l'eau pure.

d'abord qu'il existe dans les eaux de mer une relation statistique entre le coefficient de diffusion à 90° et le taux de polarisation correspondant, les eaux les plus limpides présentant en général les taux de polarisation les plus élevés (27). Ceci peut être interprété, du moins qualitativement, par le fait que la lumière diffusée est la somme de celle diffusée par les molécules, à laquelle correspond un taux de polarisation égal à 83,5 % environ, et de celle diffusée par les particules en suspension, pour laquelle le taux de polarisation est en général plus faible, d'autant plus faible qu'il y a plus de grosses particules et que leur indice est plus grand. Plus les eaux sont limpides, plus la part de la diffusion moléculaire est importante, et le taux global de polarisation plus élevé (il est également possible que les particules qui subsistent dans les eaux limpides sont en moyenne plus petites, et par conséquent provoquent par elles mêmes une polarisation plus importante). Mais le fait qu'en moyenne $P_{90°}$ varie sensiblement en $1/\log\beta_{90°}$ n'a pas été expliqué à notre connaissance. (28)

La figure 22 montre par ailleurs que pour une même valeur du coefficient de diffusion $\beta_{90°}$ le taux de polarisation correspondant peut varier notablement d'une eau de mer à une autre. Ceci est en accord avec les résultats obtenus par la théorie de MIE ; il semblerait bien que les propriétés polarisantes des particules sont susceptibles de varier beaucoup plus que ne le fait la forme de leur indicatrice de diffusion.

---

(27) Cette règle présente toutefois des exceptions dont nous parlerons au paragraphe 9.1.
(28) Il semblerait de plus que la pente de la droite de régression $P_{90°} = f(\log\beta_{90°})$ varie avec la région étudiée, donc vraisemblablement avec la nature des particules en suspension (pour plus de détails, se reporter à [29]).

7.2. Propriétés absorbantes des particules en suspension.

Ainsi que nous l'avons déjà dit, les propriétés absorbantes des particules en suspension dans les eaux de mer sont beaucoup moins bien connues que leurs propriétés diffusantes, aucune méthode de mesure directe du coefficient d'absorption des eaux de mer, et à fortiori des particules, n'existant à l'heure actuelle.

Négligeant les propriétés diffusantes des substances en solution (voir paragraphe 6) on peut mettre le coefficient d'atténuation c d'une eau de mer sous la forme

$$c = c_o + a_s + a_p + b_p ,$$

où c_o est le coefficient d'atténuation de l'eau pure, a_s le coefficient d'absorption des substances en solution, a_p celui des particules en suspension, et b_p le coefficient total de diffusion des particules en suspension. Mesurant c et soustrayant la somme des termes c_o, a_s et b_p, qui sont tous connus ou déterminables avec une précision satisfaisante, on peut en principe obtenir la valeur du coefficient d'absorption a_p des particules. Mais l'erreur faite est évidemment d'autant plus importante que le terme a_p est plus petit en comparaison des autres, de b_p en particulier.

	λnm	$(c-c_o)_m^{-1}$	$(a_s)_m^{-1}$	$(b_p)_m^{-1}$	$(a_p)_m^{-1}$
Mer des Caraïbes	655	0,06	0	0,06	0
Iles Galapagos	655	0,11	0	0,07	0,04
Kattegat	655	0,23	0	0,15	0,08
	380	0,54	0,11	0,16	0,27
Mer Baltique	655	0,27	0	0,20	0,07
	380	1,15	0,68	0,21	0,26
Golfe de Botnie	655	0,38	0	0,28	0,10
	380	1,72	1,08	0,31	0,33

Tableau 5
Quelques exemples de coefficient d'absorption a_p par les particules, tel que déduit par différence. D'après N.G. JERLOV [2].

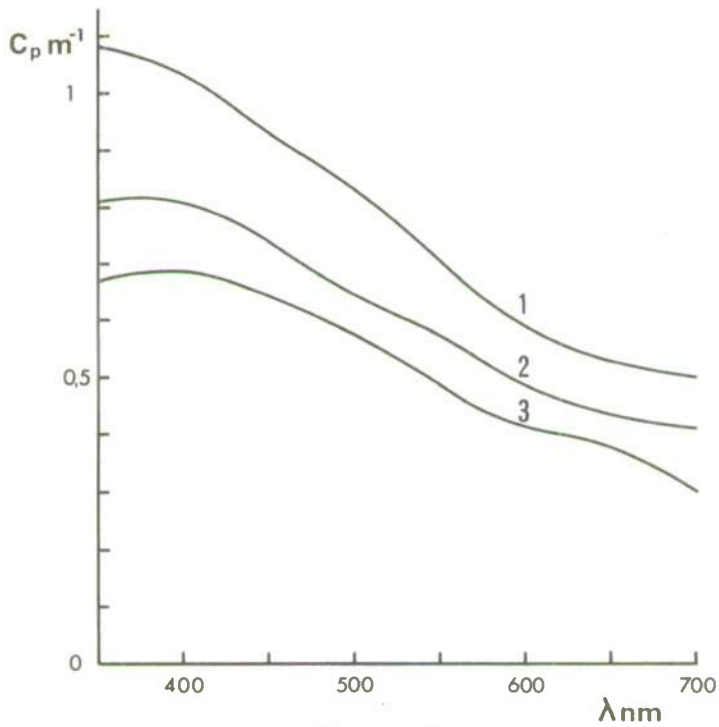


Figure 23
Exemples de surcroît d'atténuation dû aux particules. Les courbes 1, 2 et 3 se rapportent respectivement à de l'eau prélevée sur la plage de Roscoff, dans la baie de Morlaix, et à une station située légèrement plus au large. D'après A. MOREL [26] .

Le tableau 5 fournit quelques résultats obtenus de cette manière par N.G. JERLOV [2] , et selon lesquels a_p serait négligeable vis-à-vis de b_p dans le cas d'eaux du large limpides, mais deviendrait du même ordre que b_p pour les eaux côtières (vraisemblablement par suite de la présence de particules minérales).

Les autres données expérimentales que l'on possède concernent uniquement le surcroît d'atténuation dû aux particules

$$c_p = a_p + b_p = c - c_o - a_s$$

sans que les parts respectives de l'absorption et de la diffusion soient précisées. A titre d'exemples, la figure 23 représente les résultats obtenus par A. MOREL [26] dans les eaux côtières de la Manche, tandis que la figure 24 traduit certaines des mesures faites dans l'ultra-violet par G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10] , en Manche comme en Méditerranée.

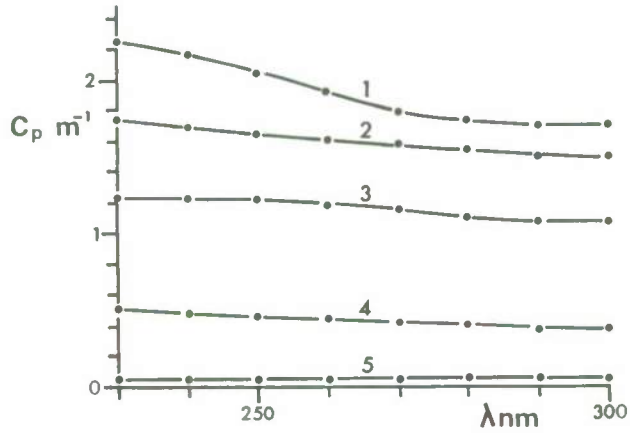


Figure 24
Exemples de surcroît d'atténuation dans l'ultra-violet dû aux particules. Les courbes 1, 2 et 3 se rapportent à des eaux côtières (1 et 3 à Roscoff, 2 à Villefranche sur Mer), tandis que les courbes 4 et 5 correspondent à des eaux prélevées au large de Villefranche sur Mer (respectivement à 50 et à 300 m de profondeur). D'après G. COPIN-MONTEGUT [10] et A. SALIOT (communication personnelle).

D'après ces résultats le coefficient d'atténuation $c_p = a_p + b_p$ par les particules varierait sensiblement en $1/\lambda$, ce qui laisse subsister un doute concernant les importances relatives de ces deux termes (du moins dans les eaux côtières), car si l'on admet avec W.V. BURT [25] et avec A. MOREL [26] que le terme b_p varie lui-même approximativement en $1/\lambda$, ceci signifierait soit que a_p varie également en $1/\lambda$, alors que divers résultats expérimentaux tels que ceux présentés ci-dessous figure 25 laissent penser que l'absorption par les particules est généralement beaucoup plus sélective, soit que a_p est négligeable vis-à-vis de b_p dans les eaux côtières comme dans les eaux du large, ce qui est en contradiction avec les valeurs données dans le tableau 5 (29).

Signalons enfin une méthode permettant d'étudier les variations spectrales de l'absorption exercée par les particules (mais ne constituant guère une mesure précise de a_p en valeur absolue). Utilisée par K. SHIBATA [30] , elle a été adaptée aux besoins océanographiques par C.S.YENTSCH [31] . Son principe consiste à mesurer le rapport F/F_o du flux transmis au flux incident, égal comme nous l'avons vu au paragraphe 4.3. à $e^{-(a+b)r}$, en procédant de manière telle que le récepteur reçoit la majeure partie du flux diffusé, auquel cas le rapport F/Fo tend vers e^{-ar}, et fournit donc une valeur approximative du coefficient d'absorption a. La figure 25 représente des exemples de spectres d'absorption ainsi obtenus par C.S.YENTSCH [32] à partir des filtres ayant servi à retenir les particules contenues dans des échantillons d'eau de mer prélevés à diverses profondeurs. On voit que, du moins dans l'exemple considéré, l'absorption exercée par les particules augmente rapidement vers les courtes longueurs d'onde (30). Par ailleurs on voit apparaitre sur les échantillons prélevés à moins de 200 m de profondeur les bandes d'absorption des pigments chlorophylliens (l'une vers 440 et l'autre vers 675 nm), alors qu'elles ne peuvent être décelées dans la répartition spectrale de la somme $a_p + b_p$ (figure 23). Ceci constituerait un argument supplémentaire pour attribuer à a_p une valeur négligeable vis-à-vis de celle de b_p.

8. REPARTITION DES CARACTERISTIQUES OPTIQUES DES EAUX SUPERFICIELLES.

L'étude des effets optiques des substances en solution et des matières en suspension dans les eaux de mer, faite dans les paragraphes 6 et 7, montre que les propriétés optiques des eaux de mer dépendent essentiellement :
- de leur concentration en matières organiques dissoutes, qui provoquent un surcroît d'absorption dans les courtes longueurs d'onde (et entraînent une augmentation de la fluorescence de l'eau)
- de leur teneur en matières en suspension, avec laquelle croît le coefficient de diffusion des eaux.

Les répartitions spatiale et temporelle des caractéristiques optiques des eaux de mer traduisent donc celles de leur concentration en substances organiques dissoutes et celles de leur teneur en matières en suspension. Pour les eaux du large ces répartitions sont liées

---

(29) Il nous semble probable que les valeurs de b_p données dans le tableau 5 sont sous-estimées, ce qui a entraîné une sur-évaluation du coefficient d'absorption a_p des particules.

(30) Rappelons à ce propos que les extraits obtenus par A. SALIOT à partir des matières en suspension présentent des spectres d'absorption analogues à ceux des "substances jaunes" (voir paragraphe 6).

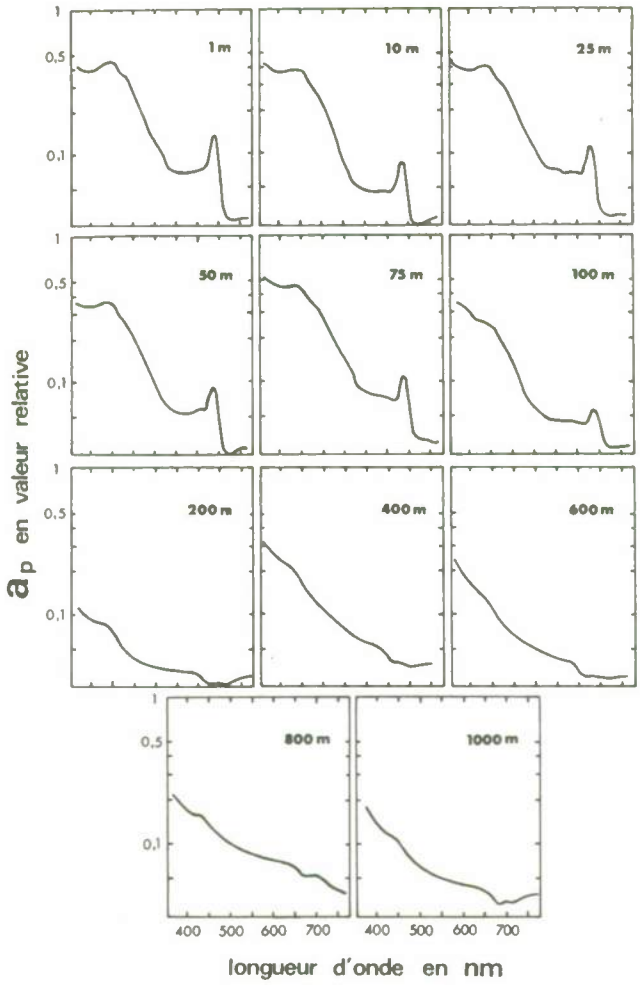


Figure 25
Spectres d'absorption de particules prélevées aux profondeurs indiquées (70°20'W,38°46'N, Décembre 1960). D'après C.S.YENTSCH [32].

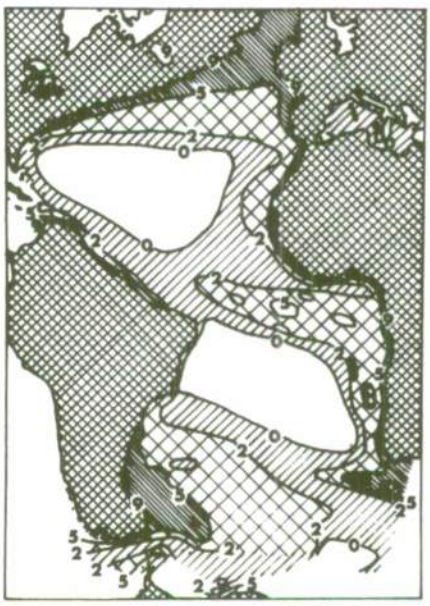


Figure 26
Répartition de la couleur de l'Océan Atlantique dans l'échelle de couleurs de FOREL (le 0 correspond à un bleu profond, tandis que le 9 est un jaune-vert). D'après G. SCHOTT (1935).

principalement à la production primaire et au cycle de la matière organique (31), qui définissent la répartition des apports en substances optiquement actives, et de la situation dynamique (courants, diffusion turbulente, ondes internes etc), qui régit leur distribution à partir de leur lieu de formation. Pour les eaux côtières, interviennent également (mais leur effet peut parfois être prépondérant) les apports fluviaux, l'érosion des côtes et du plateau continental, et enfin tous les déchets de l'activité humaine.

Nous commencerons par le cas le moins compliqué, celui des eaux du large, en nous limitant pour l'instant à la couche superficielle, siège de la photosynthèse, et par conséquent source des substances biogéniques. Nous verrons au paragraphe suivant les conséquences optiques de l'évolution de la matière organique avec la profondeur.

D'après ce que nous avons dit plus haut, les paramètres optiques les plus intéressants à considérer sont le coefficient d'atténuation (ou d'absorption) dans l'ultra-violet, qui dépend essentiellement de la concentration des eaux en certaines substances organiques dis-

(31) Voir page suivante.

soutes [32], et le coefficient de diffusion, lié à la teneur en matières en suspension. Malheureusement, très peu de mesures de ces paramètres ont été effectuées jusqu'à présent (surtout en valeur absolue), et il ne peut être question d'analyser leurs répartitions spatiale et temporelle. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'en règle générale les eaux superficielles du large sont d'autant plus limpides qu'elles sont plus pauvres sur le plan biologique (c'est le cas en particulier des régions de convergence, peu fertiles en raison du manque de sels nutritifs, tandis qu'inversement les zones de divergence peuvent devenir très turbides), et que par ailleurs la transparence de ces eaux suit les variations saisonnières de la production primaire, avec maximum de turbidité au printemps et minimum en hiver.

Les seules cartes de propriétés optiques que l'on a tenté de dresser ont trait non pas aux caractéristiques optiques des eaux de mer mais à des paramètres liés à la pénétration de la lumière du jour dans les océans et à sa rétrodiffusion [33] : couleur de la mer, coefficient d'extinction de l'éclairement sous-marin, profondeur de disparition du disque de SECCHI. Ainsi la figure 26 représente la répartition de la couleur de l'Océan Atlantique [34] (d'après G. SCHOTT, 1935), tandis que la figure 27 indique les profondeurs de disparition du disque de SECCHI dans l'Atlantique Nord (d'après M.A. FREDERICK [33]). Sur les deux figures on voit que les eaux superficielles les plus limpides (et par conséquent les plus bleues) se trouvent aux latitudes de l'ordre de 20 à 30°, c'est-à-dire dans les zones de convergence subtropicale. Mais aucun des paramètres utilisés ne constitue une caractéristique physique bien définie.

L'étude systématique des variations spatiale et temporelle des propriétés optiques des eaux de surface reste à faire. Bien qu'en toute logique les paramètres les plus indiqués seraient, comme nous l'avons dit, le coefficient d'atténuation (ou d'absorption) dans l'ultra-violet et le coefficient de diffusion, il est vraisemblable que pour des raisons pratiques les efforts s'orientent vers la mesure à trois longueurs d'onde du rapport du flux de lumière du jour retrodiffusé par la mer au flux incident, ce qui pourrait se faire au moyen d'un récepteur disposé sur un avion, et permettrait ainsi d'étudier rapidement des zones océaniques étendues. Il semblerait que moyennant un choix judicieux des trois longueurs d'onde on puisse obtenir ainsi des informations assez précises tant en ce qui concerne la concentration des eaux en substances jaunes qu'en ce qui concerne leur teneur en matières en suspension.

Dans les eaux côtières, non seulement les processus biologiques sont généralement plus intenses (d'où une plus forte teneur en substances organiques tant particulaires que dissoutes), mais de plus interviennent, et cela d'une manière parfois prépondérante comme nous l'avons déjà dit, les apports fluviaux, les produits de l'érosion des côtes et les déchets déversés par l'homme. Au total, les eaux côtières sont pratiquement toujours nettement plus turbides que les eaux superficielles du large (voir la figure 27), et leur turbidité est essentiellement variable avec la proximité, le débit et la direction d'écoulement des fleuves, avec la nature des côtes, l'état d'agitation de la mer et l'ampleur des marées, avec enfin l'intensité et la forme de l'activité humaine. Chaque région doit être étudiée par elle-même, et des valeurs numériques constitueraient des exemples dépourvus d'intérêt, les caractéristiques optiques des eaux côtières pouvant varier entre celles d'eaux superficielles du large et celles d'un fleuve charriant des masses de matières terrigènes en suspension. Signalons toutefois deux applications : la mesure du "débit solide" des fleuves au moyen des coefficients de diffusion ou d'atténuation, et l'étude de l'écoulement et du mélange des apports fluviaux par l'intermédiaire d'une propriété optique telle que le coefficient de diffusion ou la fluorescence. A titre d'exemple la figure 28 (d'après CH. DORVILLE, communication personnelle) montre les variations comparées de la salinité, de la fluorescence et de la concentration en silicium dissous [35] suivant une coupe en surface de l'estuaire du Var. On voit que tant les variations de la fluorescence que celles de la teneur en silicium sont régies par les phénomènes de mélange, et suivent de très près cel-

---

(31) Peuvent intervenir également les apports éoliens ainsi qu'une fraction des produits d'érosion des côtes et des apports fluviaux, dont une partie semble pouvoir être transportée par les courants à des distances importantes.

(32) La fluorescence serait également intéressante à considérer à ce point de vue, mais pour l'instant sa mesure n'est effectuée que par quelques rares chercheurs.

(33) Les auteurs de langue anglo-saxonne appellent "inherent properties" les caractéristiques optiques proprement dites (à savoir les coefficients d'absorption, de diffusion et d'atténuation), et "apparent properties" les divers paramètres liés à l'étude de la pénétration de la lumière solaire dans les océans, paramètres qui généralement dépendent non seulement des caractéristiques optiques des eaux de mer mais également des conditions d'éclairement en surface (et en particulier de la distance zénithale du soleil) ainsi que de la profondeur (même si les eaux sont homogènes). A notre avis ces paramètres ne constituent pas des "propriétés" de l'eau de mer, mais par contre ils sont parfaitement réels, et non "apparents".

(34) Selon E. STEEMANN NIELSEN [34] , il existe une corrélation étroite entre les répartitions de la couleur de l'Océan Atlantique Sud, telle que fournie par cette carte, et celle de la production primaire dans ces régions. La couleur de la mer dépend en effet essentiellement de la teneur des eaux en substances jaunes, qui, au large, sont des produits de dégradation du phytoplancton.

(35) Les eaux fluviales se distinguent des eaux de mer par de nombreuses propriétés physiques (optiques ou électriques par exemple) et chimiques (la salinité bien entendu, mais également la teneur en sels nutritifs, en calcium, en certains éléments traces, etc..). Dans chaque problème particulier il convient de choisir le paramètre le plus intéressant à considérer. Ainsi par exemple, alors que la salinité ne permet pas de distinguer les apports fluviaux des eaux de précipitation, diverses propriétés optiques ou chimiques le permettent.

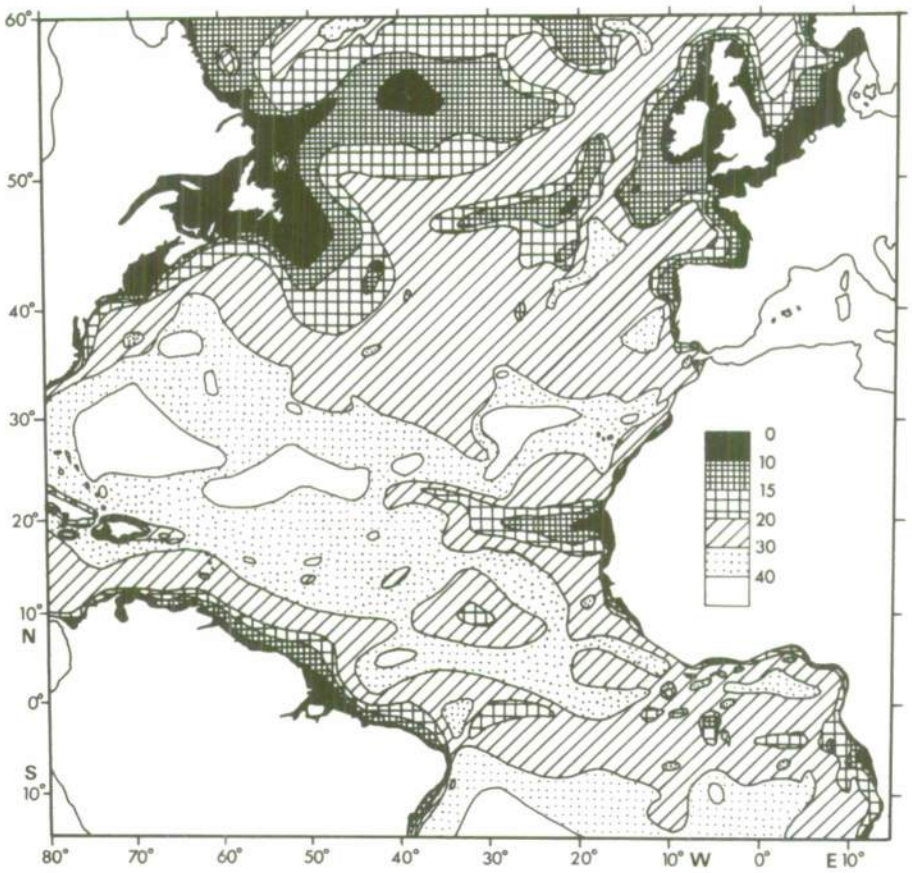


Figure 27
Profondeur de disparition du disque de SECCHI (en mètres) dans l'Atlantique Nord. D'après la bibliographie faite par M.A. FREDERICK [33] .

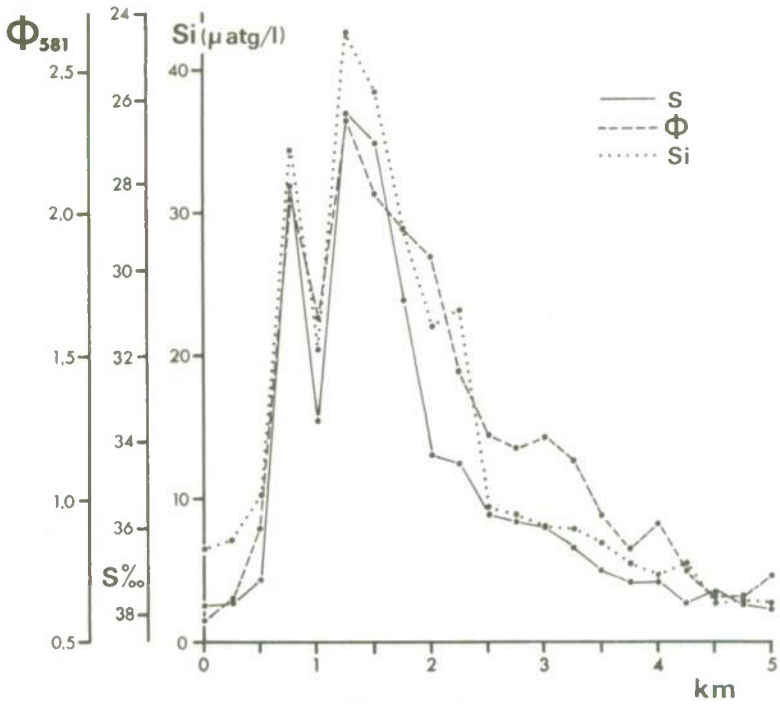


Figure 28
Variations comparées de la salinité, de la fluorescence (à 581 nm) et de la concentration en silicium dissous, suivant une coupe superficielle de l'estuaire du Var, entre 7°11'44,4"E 43°38'24,4"N et 7°15'28,9"E 43°38'37,3"N (à bord du "Korotneff", Janvier 1971). D'après CH.DORVILLE (communication personnelle).

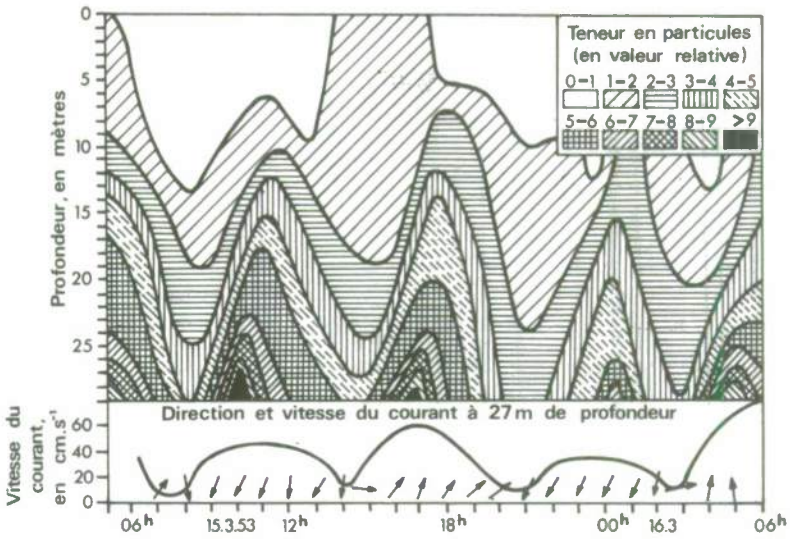


Figure 29
Exemple de variations de la turbidité au voisinage du fond au rythme de la marée. D'après J. JOSEPH [34] .

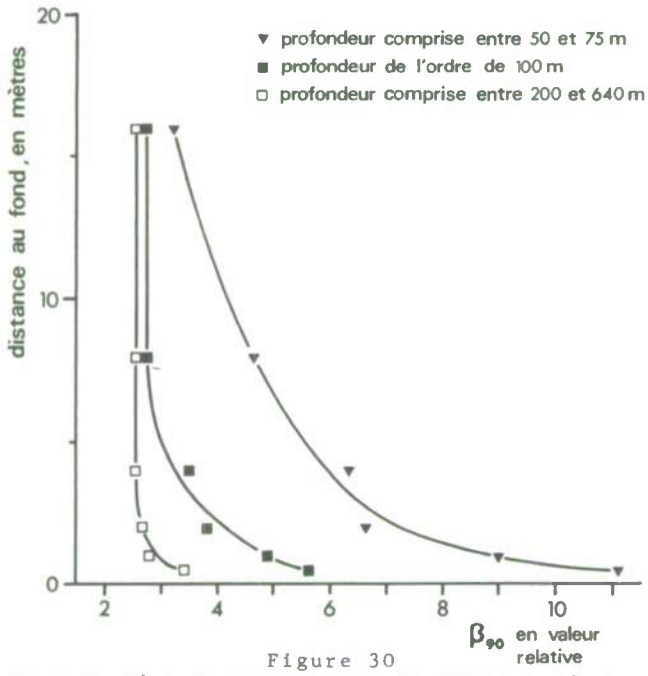


Figure 30
Exemple d'atténuation avec la distance à la côte de la couche turbide se trouvant près du fond, due à la mise en suspension des particules de la couche superficielle des sédiments sous l'effet de l'agitation de l'eau. Mesures faites au large de Monaco à bord du "Winaretta Singer" en Novembre 1959 et en Avril 1960. Les trois courbes constituent des moyennes sur 21 séries de mesures faites à diverses profondeurs. D'après A. IVANOFF [28].

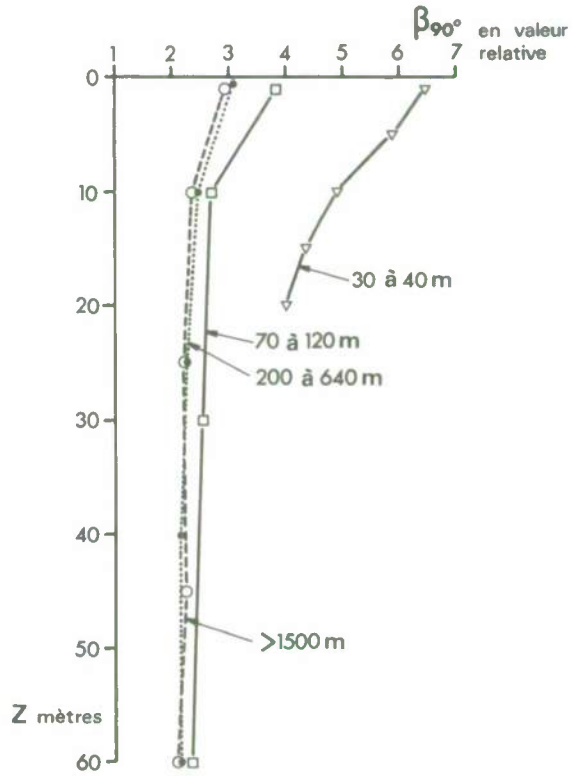


Figure 31
Exemple de variations avec la distance à la côte (auprès de chaque courbe est indiquée la profondeur) de la répartition verticale du coefficient de diffusion. Mesures faites au large de Monaco à bord du "Winaretta Singer" par A. IVANOFF (non publié).

les de la salinité [36].

Les effets des mouvements de l'eau, qui en particulier soulèvent les particules de la couche superficielle des sédiments (voir à titre d'exemple la figure 29, d'après J. JOSEPH [35]) et provoquent ainsi une augmentation de la turbidité vers le fond, décroissent rapidement avec la profondeur ; ceci est illustré par la figure 30 (d'après A. IVANOFF [28]). D'une manière générale, l'influence des côtes sur les caractéristiques optiques des eaux de mer s'atténue d'autant plus rapidement avec la distance à la côte que la profondeur augmente plus vite, c'est-à-dire que la pente du plateau continental est plus accentuée. Voir à titre d'exemple la figure 31, d'après A. IVANOFF (non publié).

Les particules en suspension et les substances en solution constituant des "traceurs" entraînés par les courants, des relations entre la répartition de divers paramètres optiques et la situation hydrologique ont souvent été signalées. Nous y reviendrons au paragraphe suivant. A titre d'exemple "côtier", la figure 32 (d'après J.JOSEPH et G. DIETRICH, [36]) montre la moindre turbidité des eaux atlantiques (de salinité plus élevée) pénétrant dans la mer du Nord par la Manche.

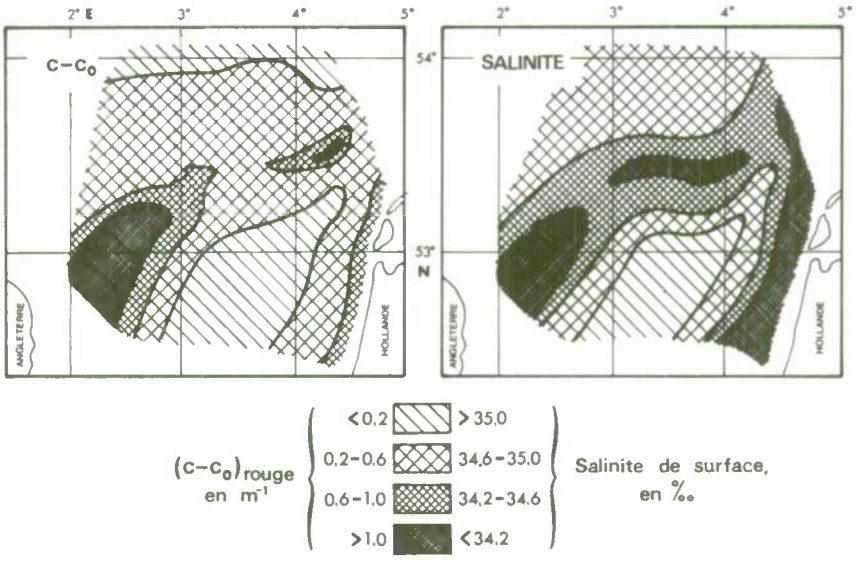


Figure 32
Moindre turbidité (celle-ci étant exprimée par la différence entre les coefficients d'atténuation de l'eau de mer et de l'eau pure, dans la partie rouge du spectre) des eaux atlantiques (de salinité plus forte) pénétrant dans la Mer du Nord par la Manche. D'après J. JOSEPH et G. DIETRICH [36].

9. VARIATIONS DES CARACTERISTIQUES OPTIQUES DES EAUX DU LARGE AVEC LA PROFONDEUR.

Tandis que pour les eaux côtières la répartition verticale des propriétés optiques peut dépendre énormément des apports terrigènes, essentiellement variables, pour les eaux du large on peut admettre en première approximation [37] que cette répartition est régie uniquement par les processus biologiques (à savoir la production primaire et la minéralisation de la matière organique) et par la situation dynamique (notamment par la répartition verticale du gradient de densité et du coefficient de mélange, ainsi que par les processus d'advection).

9.1. Répartition verticale du coefficient de diffusion

La teneur en matières en suspension est pratiquement toujours maximale dans la couche de photosynthèse, atteignant 100 à 150 m d'épaisseur (voir les figure 37,38,39 et 40). On y observe souvent une ou même deux couches d'accumulation de particules. Ces accumulations ont donné lieu à des essais d'interprétation que nous allons résumer brièvement.

Si l'on se limite aux mélanges à la verticale, les variations de la teneur C en matières en suspension dues aux phénomènes de diffusion turbulente suivent l'équation

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{D_z}{\rho}\ \frac{\delta C}{\delta z}\right)$$

(où D_z est le coefficient de diffusion turbulente, et ρ la masse volumique), tandis que

(36) Il est vraisemblable que les relations entre fluorescence ou teneur en substances jaunes et salinité, signalées par certains auteurs, découlent pareillement du mélange d'une eau peu ou pas salée, mais fortement fluorescente et riche en substances jaunes, avec des eaux plus salées, mais moins fluorescentes et plus pauvres en substances jaunes.
(37) C'est-à-dire en supposant négligeables les apports éoliens et fluviaux, et en laissant de côté les augmentations de turbidité observées parfois au voisinage du fond (nous y reviendrons à la fin du paragraphe 9.1.).

celles dues à la sédimentation sont données par

$$\frac{\delta C}{\delta t} = -\frac{\delta}{\delta z}(Cv) = -v\frac{\delta C}{\delta z} - C\frac{\delta v}{\delta z} ,$$

où v est la vitesse "moyenne" de sédimentation (38).

En additionnant ces deux équations et en ajoutant le taux T de formation ou au contraire de passage en solution des particules, on obtient

$$\frac{\delta C}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{D_z}{\rho}\frac{\delta C}{\delta z}\right) - v\frac{\delta C}{\delta z} - C\frac{\delta v}{\delta z} + T.$$

En absence d'advection et pour un régime stationnaire on a donc finalement

$$(1) \qquad \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{D_z}{\rho}\frac{\delta C}{\delta z}\right) - v\frac{\delta C}{\delta z} - C\frac{\delta v}{\delta z} + T = 0.$$

Etant donné toutefois que les termes D_z, v et T ne sont guère connus, et que leurs variations avec la profondeur le sont encore moins, les résultats obtenus à partir de cette équation dépendent essentiellement des hypothèses introduites et ne présentent donc qu'un intérêt limité.

G.A. RILEY, H. STOMMEL et D.F. BUMPUS [37] ont considéré un océan à deux couches, la couche supérieure, correspondant à la photosynthèse, étant caractérisée par un taux de production T positif (et supposé proportionnel à C), tandis que dans la couche inférieure T était pris négatif pour traduire le passage en solution des particules organiques. Admettant par ailleurs un coefficient de diffusion turbulente et une vitesse de sédimentation indépendantes de la profondeur, G.A. RILEY, H. STOMMEL et D.F. BUMPUS ont montré qu'il se forme dans ces conditions une couche d'accumulation de phytoplancton au

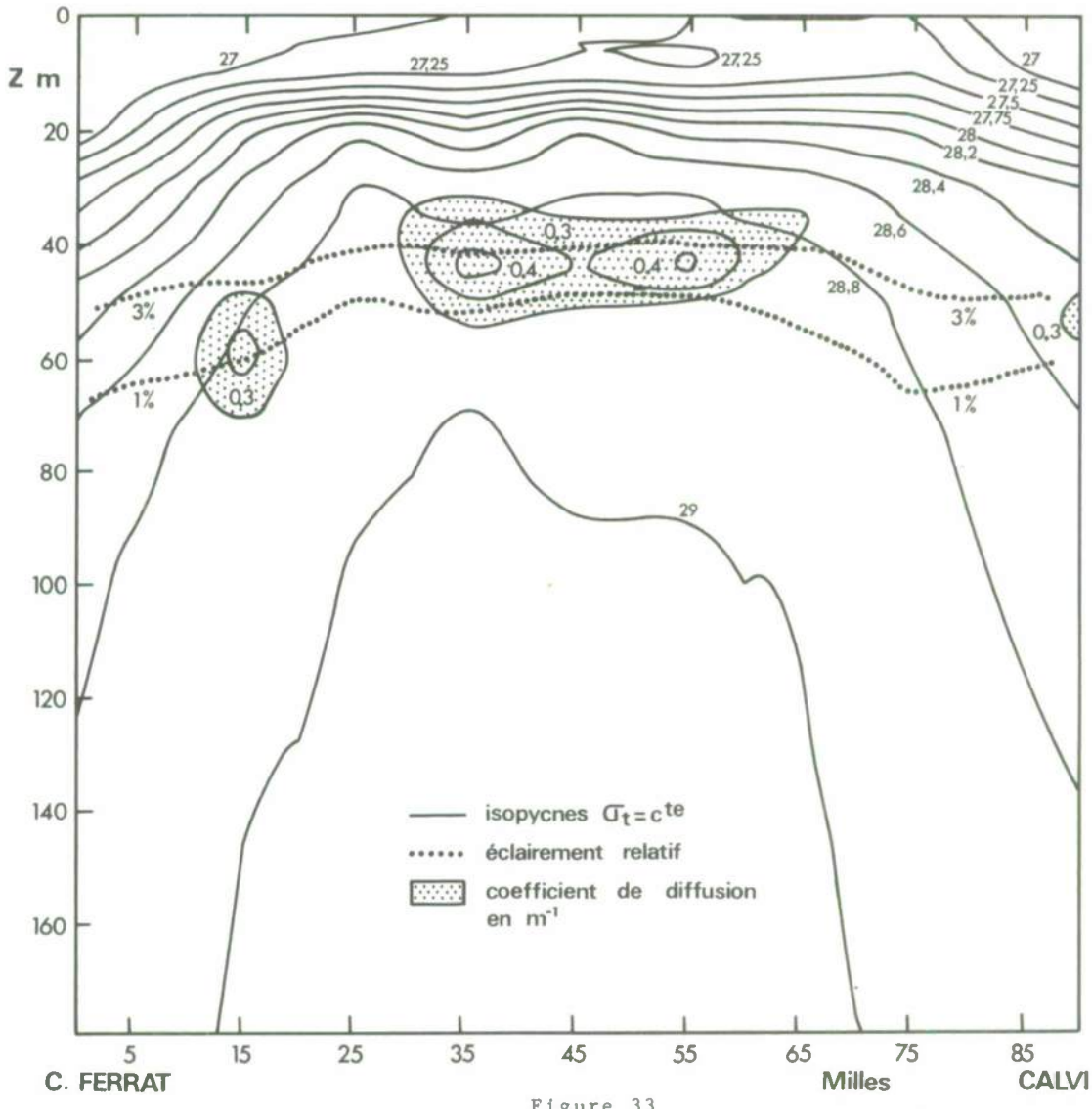


Figure 33
Zones de turbidité (coefficient total de diffusion supérieur à $0,3m^{-1}$) observées entre le Cap Ferrat et la Corse en Juillet 1970 (à bord du "Korotneff"). D'après L. PRIEUR [38] .

(38) Voir page suivante.

voisinage de la limite inférieure de la zone de photosynthèse, couche d'autant plus dense que le coefficient de diffusion turbulente est plus faible. Effectivement, au printemps et en été on observe souvent (mais non systématiquement) une zone de turbidité aux profondeurs telles que la valeur de l'éclairement énergétique est de l'ordre de 1 à 3 % de celui à la surface de la mer, profondeurs coïncidant souvent avec le bas de la pycnocline saisonnière. Voir à titre d'exemple la figure 33, d'après L. PRIEUR [38] .

Tenant compte des variations de D_z avec la profondeur, ce qui est certainement plus conforme à la réalité, N.G. JERLOV [39] a été amené à conclure qu'une accumulation de particules s'effectue au niveau du gradient maximal de densité, et que par conséquent, d'après la théorie faite par G.A. RILEY, H. STOMMEL et D.F. BUMPUS, cette accumulation est plus dense lorsque le gradient maximal coïncide avec la limite inférieure de la

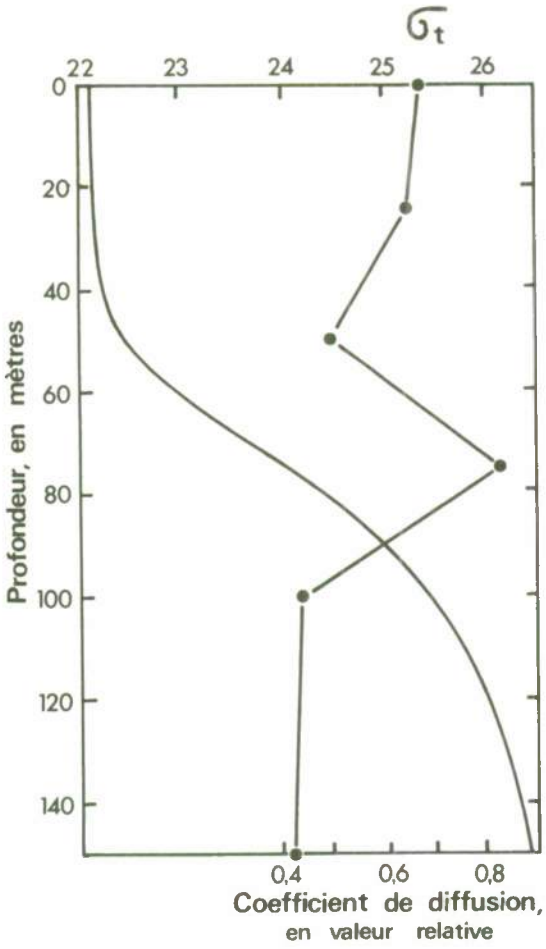


Figure 34
Exemple d'accumulation de particules au milieu de la pycnocline (dans le Pacifique Equatorial Est). D'après N.G. JERLOV [39] .

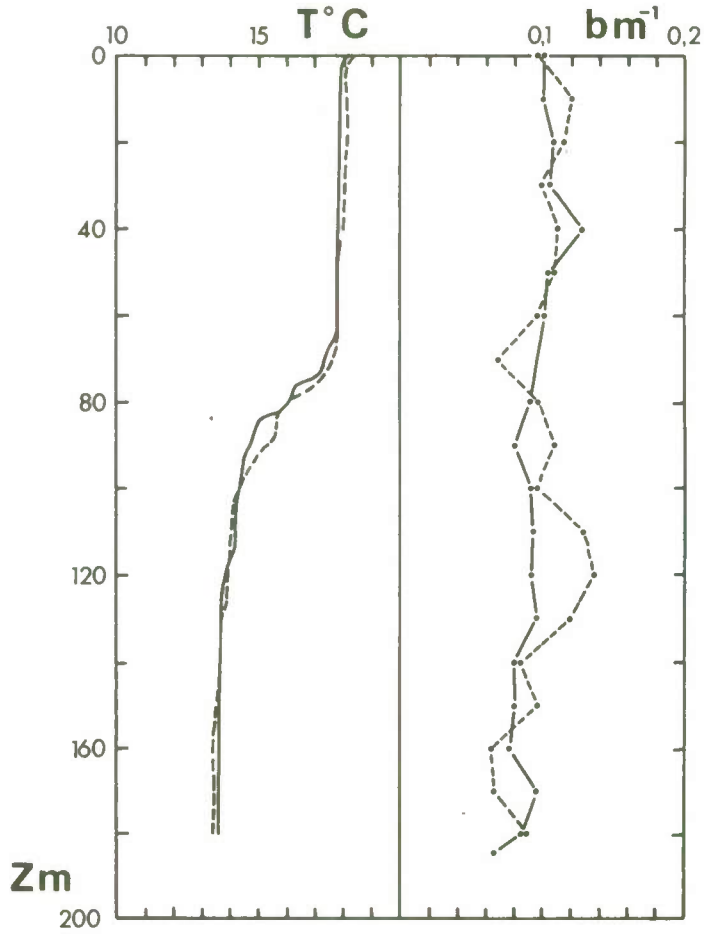


Figure 35
Deux exemples d'absence de couche d'accumulation malgré la présence d'une thermocline. Novembre 1970, au large de Villefranche sur Mer . Les courbes en trait discontinu et en trait continu correspondent à deux stations du "Korotneff" situées respectivement à 2,5 et à 5 milles au S.E. du Cap Ferrat. D'après A. MOREL (communication personnelle).

couche de photosynthèse. La figure 34 (d'après N . G. JERLOV [39]) fournit un exemple d'une telle accumulation de particules située au milieu de la pycnocline.

Il est certain que dans certains cas les accumulations de particules observées dans la couche superficielle sont liées à la présence d'une pycnocline. Mais celle-ci ne constitue pas une condition suffisante, sa présence n'entrainant pas systématiquement l'existence d'une couche d'accumulation de particules (voir à titre d'exemple la figure 35). L'étude des effets combinés de la production primaire, de la diffusion turbulente, de la sédimentation, et le cas échéant de l'advection, est complexe, et l'interprétation des résultats est vraisemblablement variable avec le lieu et surtout avec la saison.

---

(38) Cette vitesse moyenne est donc définie en écrivant que lorsqu'il y a sédimentation en absence de turbulence la masse de particules en suspension traversant par unité de temps et par unité de surface un plan horizontal $z = c^{te}$ est égale à Cv, C étant la teneur en matières en suspension à la profondeur z.

Signalons que certaines couches d'accumulation de particules présentent des propriétés polarisantes particulières ; contrairement à la règle générale énoncée au paragraphe 7.1.5., au niveau de ces couches le coefficient de diffusion $\beta_{90°}$ et le taux de polarisation correspond $P_{90°}$ augmentent simultanément. Voir à titre d'exemple la figure 36, d'après A. IVANOFF. Il est vraisemblable que ces "couches polarisantes" correspondent à des accumulations de particules particulièrement petites et sphériques (qui n'on pu être identifiées).

Soulignons enfin la nécessité de ne pas manquer les couches d'accumulation de phytoplancton lors des mesures de production primaire. Il est donc utile sinon indispensable de choisir les profondeurs de prélèvement en fonction de la répartition verticale du coefficient de diffusion (ou d'atténuation), déterminée au préalable.

Aux immersions comprises entre 50 et 100 m et environ 200 m, la teneur en particules en suspension décroît rapidement avec la profondeur par suite de la minéralisation et du passage en solution des déchets organiques, et les coefficients angulaires et total de diffusion font donc de même. Leur diminution avec la profondeur devient plus lente aux immersions supérieures à 200 m. Les eaux profondes sont généralement très

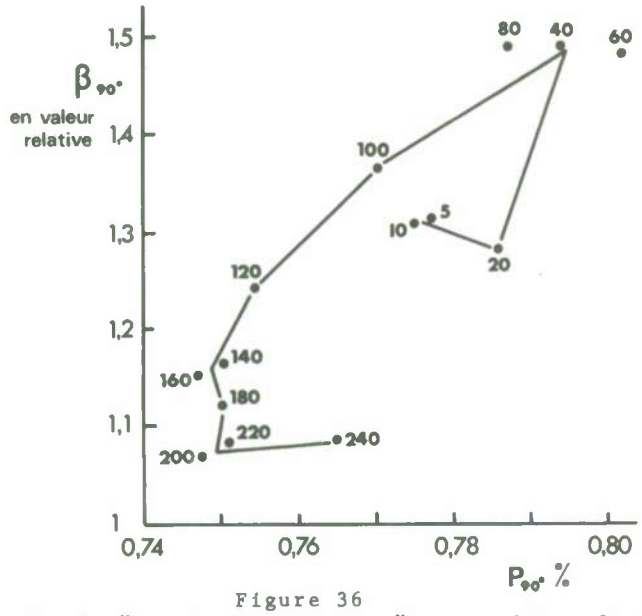


Figure 36
Exemple de "couche polarisante" entre 40 et 80 m de profondeur (Iles Bermudes, Juillet 1958). D'après A. IVANOFF (non publié).

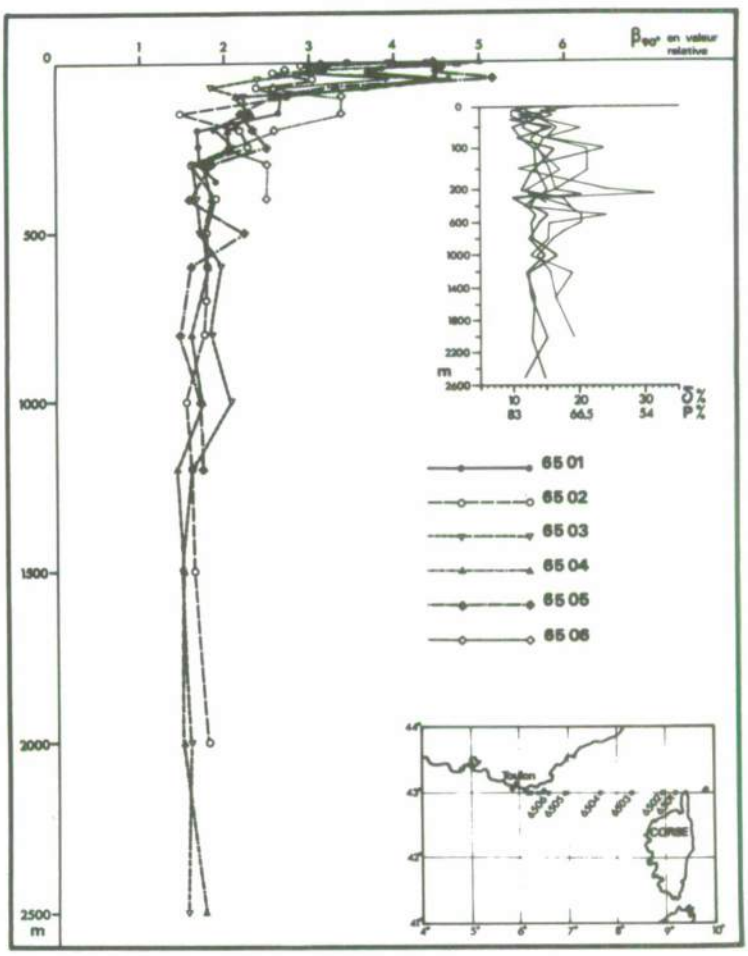


Figure 37
Répartition du coefficient angulaire de diffusion $\beta_{90°}$ suivant une coupe Cap Corse - Ile du Levant (stations "Calypso", Mai 1965). D'après A. IVANOFF [41].

limpides, et assez homogènes (39) (du moins en absence de phénomènes d'advection). Voir à titre d'exemples les figures 37, 38, 39, 40.

Les phénomènes d'advection peuvent évidemment modifier la répartition verticale de la teneur des eaux de mer en matières en suspension (40), et par conséquent celle de leurs propriétés diffusantes. Dans son article sur la répartition verticale des particules dans les eaux de mer, N.G. JERLOV [39] considère deux mécanismes, parfois difficiles à distinguer : d'une part les masses d'eau considérées peuvent présenter des concentrations en seston différentes (auquel cas les particules en suspension servent de "traceurs"), et d'autre part leur intrusion peut perturber les répartitions verticales de la densité et surtout du coefficient de diffusion turbulente, et par conséquent modifier la loi de

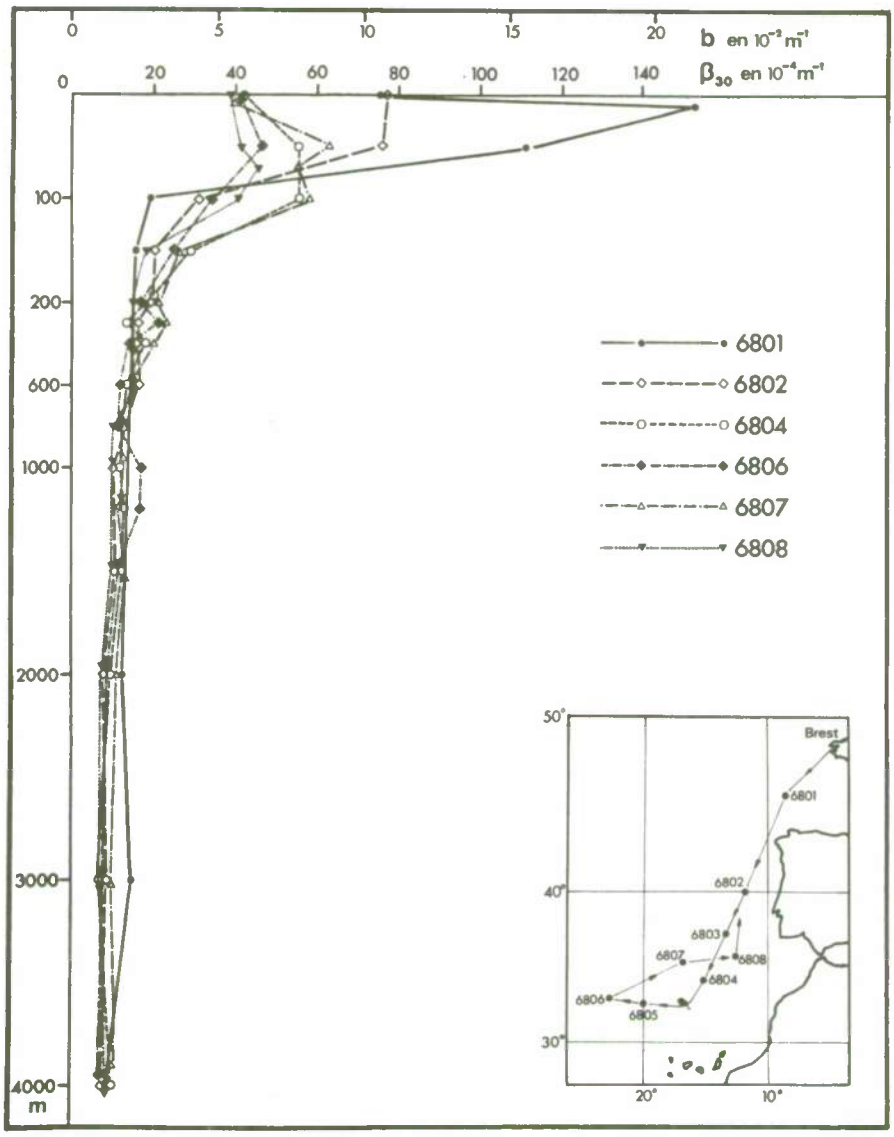


Figure 38
Répartition verticale du coefficient angulaire de diffusion $\beta_{30°}$ (dont on a déduit la valeur du coefficient total de diffusion b en admettant une indicatrice de diffusion par les particules constante) pour diverses stations dans l'Atlantique Nord Est (campagne "Hydratlante III du"Jean Charcot", Octobre 1968). D'après A. MOREL (non publié).

---

(39) Il serait toutefois hasardeux dans l'état actuel de nos connaissance de comparer les propriétés diffusantes des eaux profondes des diverses parties de l'océan mondial.

(40) Surtout s'il y a advection de matières terrigènes; mais pour l'instant nous laissons ce cas de côté.

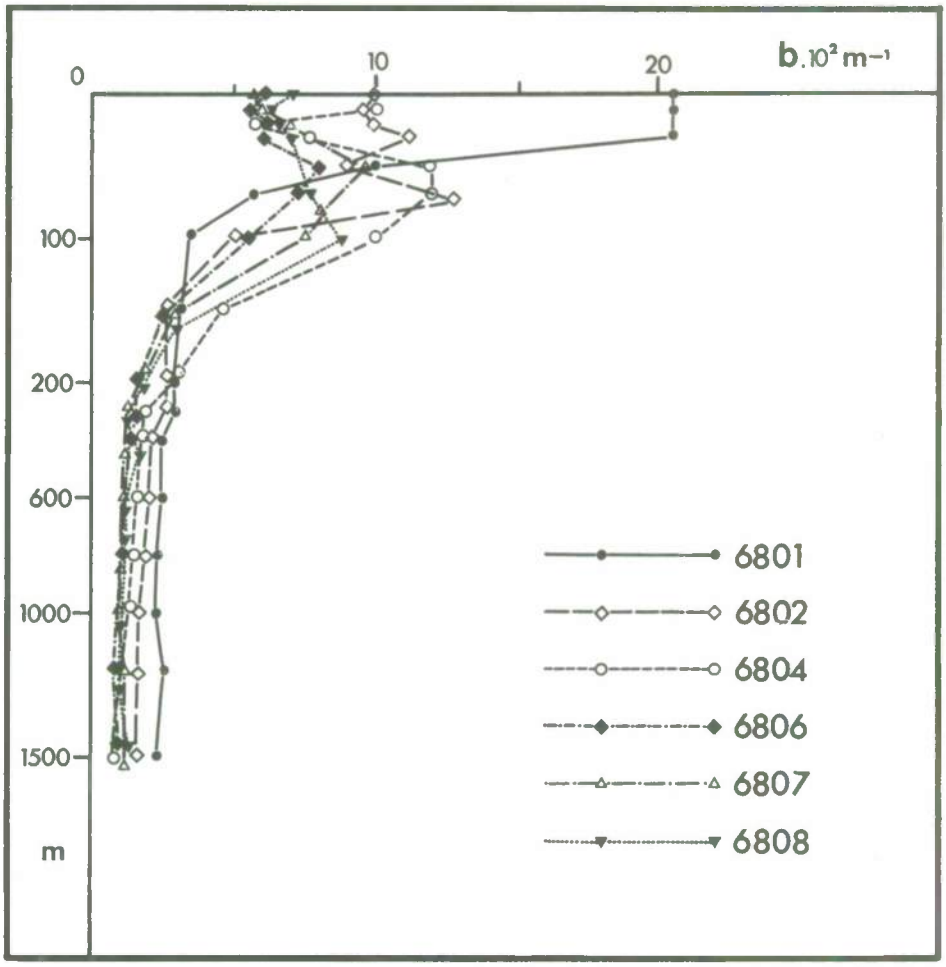


Figure 39

Répartition verticale du coefficient total de diffusion (mesuré directement et in situ à l'aide du "diffusiomètre-intégrateur" de D. BAUER et A. IVANOFF [19]) pour les mêmes stations que celles de la figure 37. D'après D. BAUER (non publié).

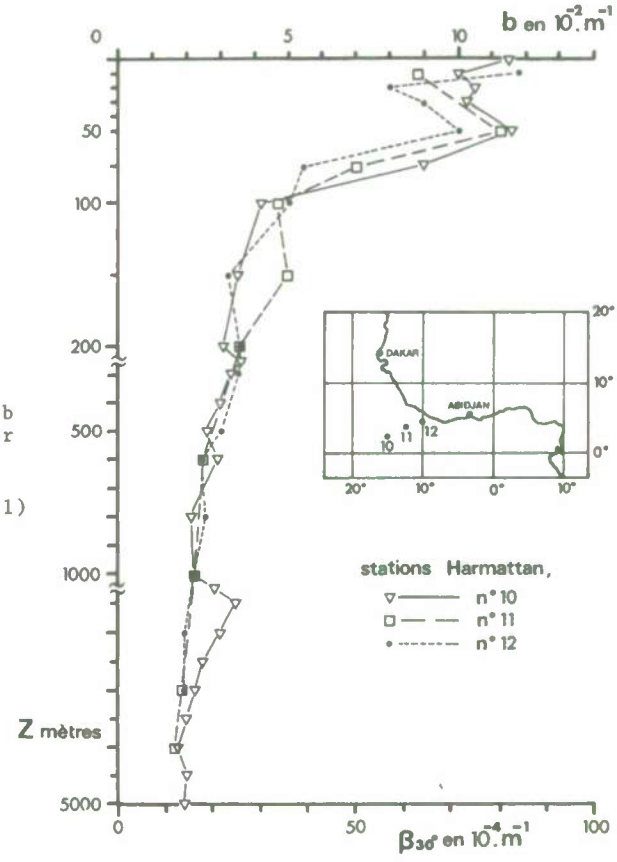


Figure 40
Répartition verticale du coefficient angulaire de diffusion $\beta_{30°}$ (dont on a déduit la valeur du coefficient total de diffusion b en admettant une indicatrice de diffusion par les particules constante), pour trois stations de l'Atlantique Equatorial Est (campagne "Harmattan" du "Jean Charcot", Mai 1971) D'après A. MOREL (non publié).

distribution des particules avec la profondeur. La figure 41 illustrerait ces deux mécanismes : dans cette partie de l'Océan Pacifique, les valeurs élevées du coefficient de diffusion observées au niveau de la couche de salinité maximale seraient dues à une plus forte turbidité de l'eau provenant de la convergence subtropicale, tandis que celles observées au niveau du minimum de salinité (vers 750m de profondeur) seraient provoquées par une augmentation du coefficient de diffusion turbulente aux plus grandes immersions, jointe à une diminution de la vitesse de sédimentation. Mais tout ceci reste à vérifier.

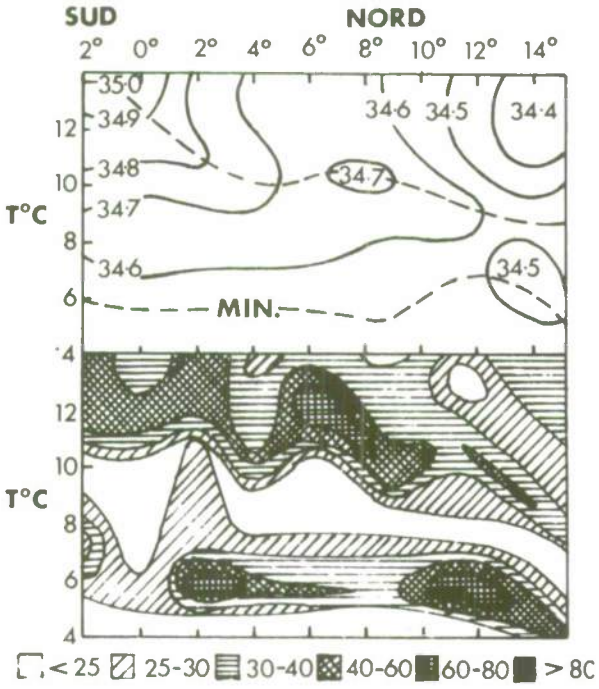


Figure 41
Répartitions de la salinité et du coefficient de diffusion (en valeur relative) suivant une coupe sensiblement méridienne faite dans le Pacifique Central entre 2° de latitude Sud et 15° de latitude Nord. D'après N.G. JERLOV [39].

Ainsi que nous l'avons déjà signalé au paragraphe précédent, de nombreux chercheurs ont trouvé des relations entre la répartition de divers paramètres optiques et la circulation des masses d'eau. Il convient d'être extrêmement prudent dans ce genre d'"hydrologie optique", les paramètres optiques n'étant guère conservatifs, et leur répartition étant régie par des lois complexes. Si dans certains cas des masses d'eau différentes présentent des propriétés optiques distinctes, ceci est loin de constituer une règle générale. Ainsi par exemple les profils optiques de la figure 37 ne mettent guère en évidence l'eau méditerranéenne "intermédiaire" de salinité maximale s'écoulant dans cette région vers 400 à 500 m de profondeur, de même ceux des figures 38 et 39 ne révèlent à aucune station la présence de l'eau d'origine méditerranéenne se trouvant vers 1000 à 1200 m de profondeur. Inversement, des propriétés optiques distinctes ne correspondent pas systématiquement, loin de là, à des masses d'eau différentes ; par exemple, alors que les coupes de coefficient de diffusion et de salinité des figures 42 et 43 pourraient laisser

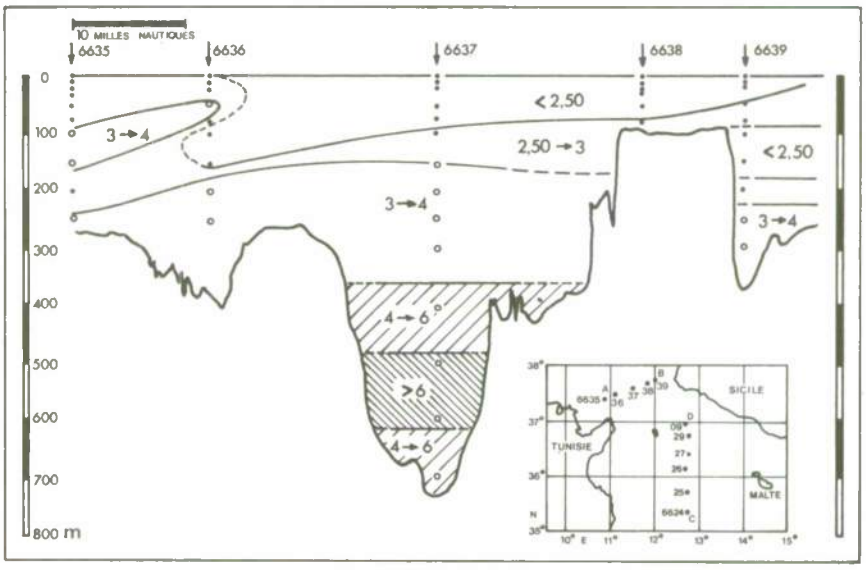


Figure 42
Répartition du coefficient angulaire de diffusion $\beta_{90°}$ à 546 nm (en m^{-1}) suivant la coupe AB faite dans le Canal de Sicile à bord du "Calypso" en Juillet 1966. D'après A. MOREL [41].

croire que les eaux profondes et salées provenant du bassin méditerranéen oriental sont caractérisées par une plus forte concentration en particules, les coupes des figures 44 et 45, situées un peu plus au Sud-Est, montrent qu'il n'en est rien, la répartition des propriétés optiques des eaux du canal de Sicile étant régie essentiellement par les courants de turbidité (voir plus loin) provenant de la Tunisie et de la Sicile, et par l'éro-

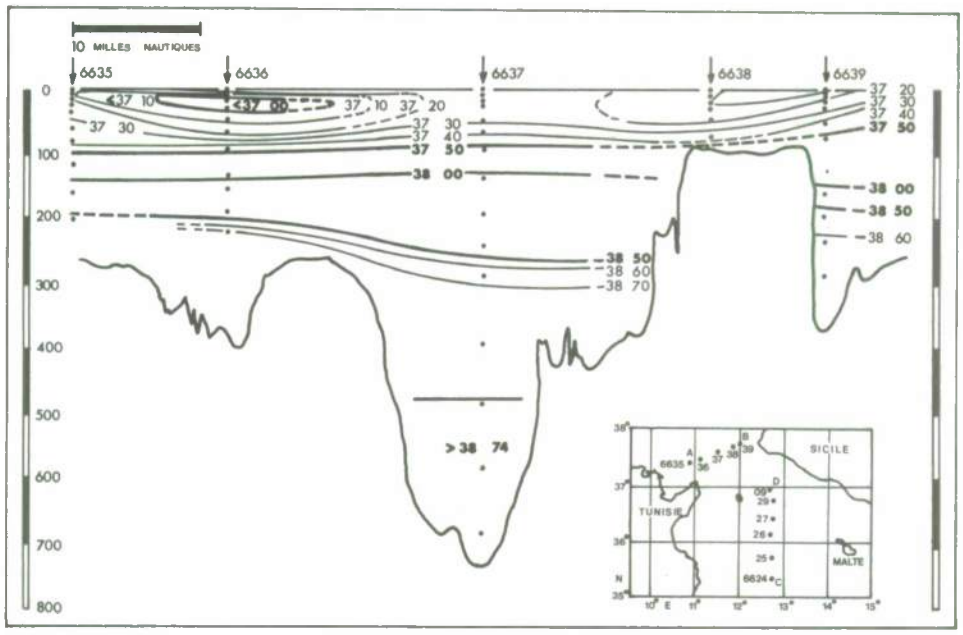


Figure 43
Répartition de la salinité suivant la coupe AB de la figure 42.

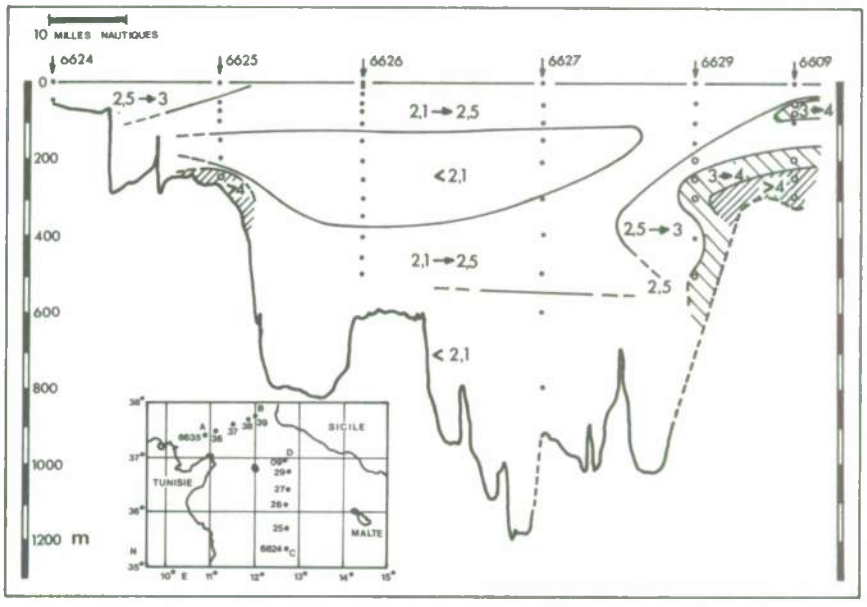


Figure 44
Répartition du coefficient angulaire de diffusion $\beta_{90°}$ à 546 nm (en m^{-1}) suivant la coupe CD

sion du relief du fond, très complexe dans cette région.

Cet exemple montre qu'en matière de répartition des propriétés optiques il ne faut jamais se hâter de conclure, même si l'on constate une certaine analogie entre les résultats optiques et la situation hydrologique. Si la température et la salinité d'une masse d'eau n'évoluent que progressivement avec les mélanges qu'elle subit, ses caractéristiques optiques peuvent changer brutalement en une certaine région (où à une certaine époque). Mais les propriétés optiques qu'elle acquiert de cette manière ne sont pas conservatives. Au mieux, elles peuvent dans certains cas servir à caractériser la masse d'eau d'une manière limitée dans l'espace et dans le temps.

Quant aux déductions concernant la répartition des masses d'eau que l'on serait tenté de tirer de mesures uniquement optiques, elles ont toutes les chances d'être complètement erronées (41).

Ainsi que nous venons de le voir sur les figures 42 et 44, des zones de turbidité peuvent apparaitre au voisinage du fond, soit lorsque le relief de celui-ci est compliqué et donne lieu à des produits d'érosion entrainés par les courants, soit surtout lorsque proviennent du talus continental ou des canyons des "courants de turbidité" consécutifs

(41) Voir page suivante.

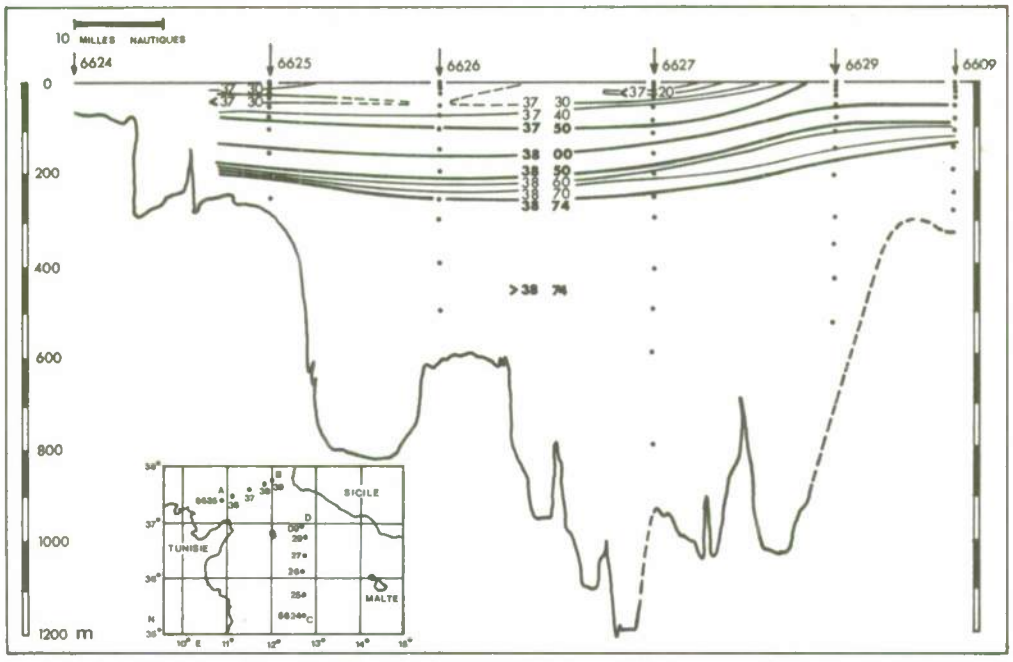
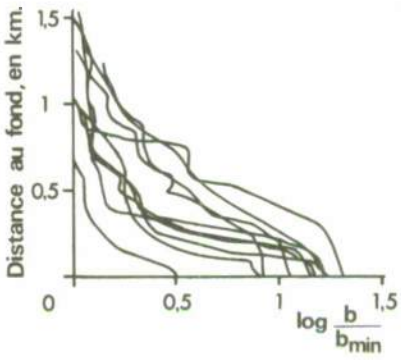


Figure 45
Répartition de la salinité suivant la coupe CD de la figure 44

Figure 46

Exemples de profils de diffusion optique au large de la partie nord (entre 33° et 39° de latitude) du talus continental de l'Amérique du Nord. b est le coefficient de diffusion mesuré à la profondeur considérée, tandis que b_{min} est celui correspondant aux eaux les plus limpides du profil. D'après M. EWING et ses collaborateurs [43] .



à des avalanches de sédiments. Il se forme dans ces conditions par mélange turbulent des couches d'accumulation profondes de particules essentiellement minérales, dont l'épaisseur et la densité varient avec la vitesse des courants de fond, avec la distance à la "source" et avec l'ampleur de celle-ci. L'exemple le plus connu de ces "nepheloïd layers" est la couche turbide profonde située au large du talus continental de l'Amérique du Nord, découverte et étudiée par M. EWING et ses collaborateurs [43] . La figure 46 reproduit quelques profils optiques obtenus par ces auteurs.

Une augmentation logarithmique de la concentration en matières en suspension au voisinage du fond a parfois été constatée dans les eaux côtières peu profondes (voir à titre d'exemple la figure 47). Si l'on admet que pour ces eaux les particules sont essentiellement minérales, $\frac{dv}{dz}$ et T sont pratiquement nuls, et l'équation (1) se réduit à

$$\frac{D_z}{\rho} \frac{\delta C}{\delta z} - vC = 0$$

(ce qui signifie que pour un régime stationnaire, en absence d'advection et dans les conditions considérées, il y a équilibre entre les phénomènes de sédimentation et de diffusion

(41) C'est le cas pour notre "Essai d'hydrologie optique entre Nice et la Corse"[42] , fait tout au début de nos mesures de coefficient de diffusion, par une méthode qui s'est révélée par la suite inopérante dans le cas des eaux limpides du large. Non seulement nous avions eu le grand tort de tirer des conclusions hydrologiques de mesures uniquement optiques, mais de plus ces dernières étaient fausses, puisqu'en fait les eaux profondes de cette région sont sensiblement homogènes sur le plan optique, comme le montrent les résultats obtenus sept ans plus tard, présentés ci-dessus figure 37.

turbulente). D'où la valeur

$$\frac{D_z}{\rho} = \frac{v}{\frac{\delta}{\delta z} \text{Log } C}$$

du coefficient de diffusion turbulente, si l'on mesure v (qui est accessible à l'expérience dans le cas des particules minérales) et C = f(z) (A. IVANOFF, [44]). A une valeur de Dz indépendante de la profondeur correspondrait une variation logarithmique de C.

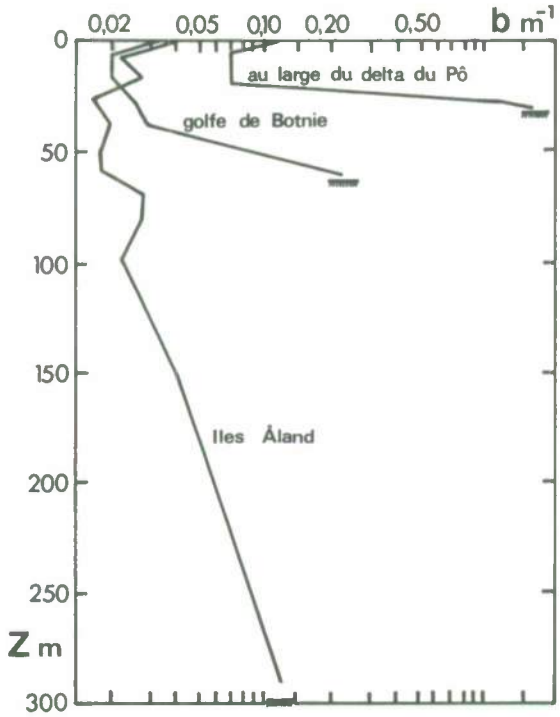


Figure 47
Exemples de variations logarithmiques du coefficient de diffusion au voisinage du fond. D'après N.G. JERLOV [2].

Signalons enfin que J.R.V. ZANEVELD a récemment conçu un modèle mathématique plus élaboré de la répartition verticale des particules, permettant en particulier de déterminer les variations de leur distribution en taille avec la profondeur. Voir la conférence 2.3.

9.2. Répartitions verticales de la teneur en substances jaunes et de la fluorescence.

La difference $c - c_o$ entre le coefficient d'atténuation d'une eau de mer et celui de l'eau pure traduit la somme des effets de diffusion par les particules, et d'absorption (par les particules, les sels et les substances jaunes). Dans le spectre visible (surtout pour les grandes longueurs d'onde), ces effets d'absorption sont généralement faibles vis-à-vis de la diffusion exercée par les particules, et dans ces conditions les variations du coefficient d'atténuation suivent de près celles du coefficient de diffusion, traitées au paragraphe précédent. Dans l'ultra-violet, l'absorption exercée par les particules, mais surtout par les sels et par les substances jaunes, augmentant rapidement (figures 8, 11 et 25), les variations du coefficient d'atténuation traduisent à la fois celles de la teneur en particules et celles de la concentration en substances jaunes (l'effet des sels étant en général peu variable (42). Il est néanmoins possible (J. JOSEPH [45] et N.G. JERLOV [46]) de déduire le seul effet des substances jaunes de la mesure du coefficient d'atténuation pour deux longueurs d'onde, une dans le rouge (à 655 nm par exemple) et l'autre dans l'ultra-violet (à 380 nm par exemple). On a en effet

$$(c - c_o)_{655} = (a_s)_{655} + (a_p + b_p)_{655} \simeq (a_p + b_p)_{655} \quad (43)$$

et

$$(c - c_o)_{380} = (a_s)_{380} + (a_p + b_p)_{380} .$$

Si l'on pose

$$(a_p + b_p)_{380} = K\ (a_p + b_p)_{655} \qquad (2)$$

on obtient

$$(c - c_o)_{380} = (a_s)_{380} + K\ (c - c_o)_{655} .$$

En portant $(c - c_o)_{380}$ en fonction de $(c - c_o)_{655}$ pour des eaux de propriétés diffusantes variables mais de même concentration en substances jaunes, on obtient en effet une droite,

(42) Du moins si l'on procède à une longueur d'onde supérieure à 240 nm pour éliminer l'action des nitrates (voir figure 8), dont la concentration dans les eaux de mer est susceptible de varier énormément.

(43) La signification des divers termes étant la même qu'au paragraphe 7.2.

qui fournit la valeur du facteur K et celle du coefficient d'absorption $(a_s)_{380}$ correspondant aux substances jaunes et aux sels dissous à la longueur d'onde considérée. Voir à titre d'exemple la figure 48. Les points qui s'écarteraient de la droite représenteraient des eaux dont la concentration en substances jaunes est différente, et la variation correspondante $(\Delta a_s)_{380}$ serait facile à déterminer, du moins en admettant que le facteur K reste le même.

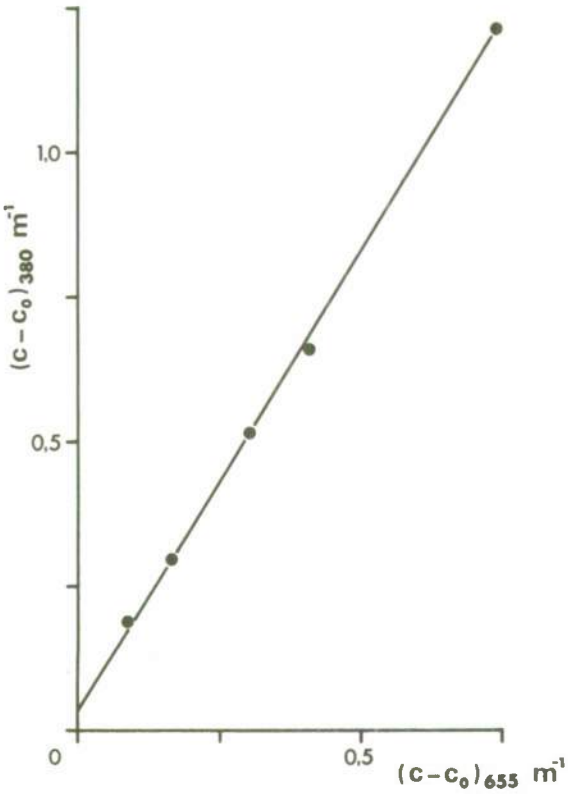


Figure 48
Exemple de mesures de la différence entre le coefficient d'atténuation c d'une eau de mer et celui, c_0, de l'eau pure, à 380 et à 655 nm, pour des eaux ayant la même concentration en substances jaunes (mais des propriétés diffusantes variables). Mesures faites aux Iles Bermudes par N.G. JERLOV [29] .

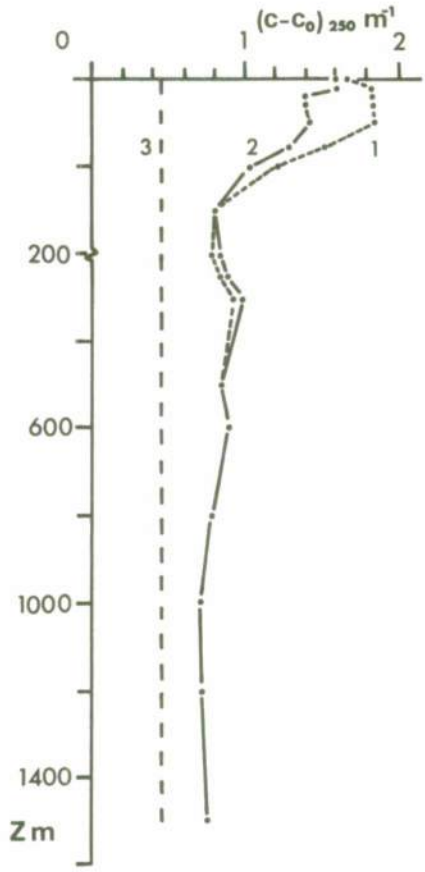


Figure 49
La courbe 1 correspond à de l'eau de mer non filtrée, auquel cas

$c - c_0 = a_{sels} + a_{s.j.} + (a_p + b_p)$,

tandis que la courbe 2 traduit les mesures faites sur l'eau de mer filtrée (auquel cas $c - c_0 = a_{sels} + a_{s.j.}$). La droite 3 représente approximativement le coefficient d'absorption a_{sels} par les sels (en négligeant les variations de la salinité avec la profondeur). Le coefficient d'absorption $a_{s.j.}$ par les substances jaunes (à 250 nm) est donc fourni par la différence entre les abscisses des courbes 2 et 3. Echantillons d'eau de mer prélevés à 5 milles au Sud du Cap Ferrat (S≈37,8°/∘∘). D'après G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10] .

Cette méthode a été utilisée par N.G. JERLOV [2] ,[29] ,[46] , mais n'a pas été appliquée à notre connaissance à une étude systématique de la répartition verticale de la concentration en substances jaunes.

Une méthode plus directe consiste à mesurer le coefficient d'atténuation dans l'ultra-violet (45) après avoir filtré l'échantillon d'eau de mer considérée pour éliminer

(44) En fait ce facteur semble être légèrement variable, puisque d'après N.G. JERLOV il est égal à 2,0 pour les eaux de la mer Baltique, et à 1,6 pour celles des Iles Bermudes. Si l'on admet que a_p est négligeable vis-à-vis de b_p (voir paragraphe 7.2.), la relation (2) se réduit à $(b_p)_{380} = K(b_p)_{655}$ et il apparait que le facteur K est le quotient des coefficients de diffusion des particules aux deux longueurs d'onde considérées. En admettant une loi de variation de b_p en $1/\lambda$, on aurait $K = \frac{655}{380} = 1,72$. Les légères variations de K peuvent donc correspondre à des modifications de la sélectivité de la diffusion par les particules (où à une intervention du terme a_p).

(45) A une longueur d'onde aussi courte que possible pour augmenter l'effet mesuré, mais néanmoins supérieure à 240 nm pour éviter l'action des nitrates, dont la concentration est très variable.

l'effet des particules en suspension [46]. La figure 49 représente des résultats ainsi obtenus à 5 milles au Sud du Cap Ferrat [47] (G. COPIN-MONTEGUT et A. SALIOT [10]), tandis que la figure 50 fournit ceux correspondant à plusieurs stations effectuées dans l'Atlantique Equatorial Est [48] (A. SALIOT, communication personnelle). On voit que d'une ma-

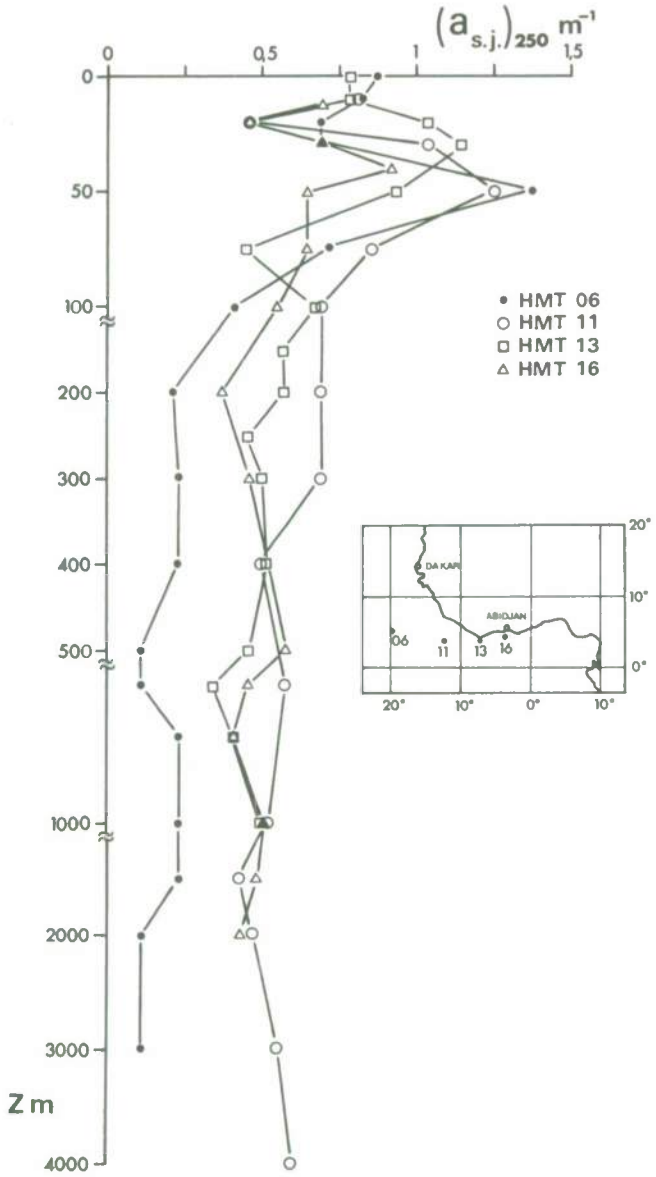


Figure 50
Exemples de variations avec la profondeur du coefficient d'absorption $a_{s.j.}$ par les substances jaunes (à 250 nm). Mission "Harmattan" du "Jean Charcot", Mai 1971. D'après A. SALIOT (communication personnelle).

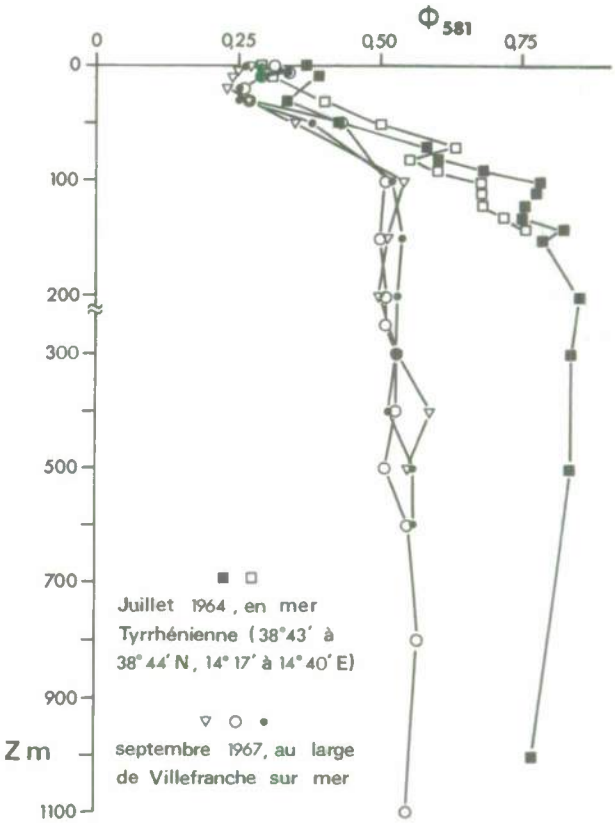


Figure 51
Exemples de variations avec la profondeur de la fluorescence des eaux de mer (à 581 nm, l'excitation étant provoquée par la raie 365 nm de la lampe à vapeur de mercure), mesurée en valeur relative par rapport à un étalon de verre. Missions à bord du "Calypso" en Mer Tyrrhénienne [41] et à bord du "Korotneff" au large de Villefranche sur Mer (non publié). D'après A. IVANOFF.

nière générale la teneur en substances jaunes décroit principalement aux profondeurs comprises entre environ 50 ou 100 et 200 m, pour conserver aux grandes immersions une valeur de l'ordre de la moitié ou du quart de celle correspondant à la couche superficielle. Autrement dit une fraction importante des substances jaunes serait rapidement dégradable.

(46) En fait, comme pour les résultats présentés figure 8, on mesure la différence des coefficients d'atténuation de l'eau de mer filtrée et de l'eau pure, d'où le coefficient d'atténuation, pratiquement égal à celui d'absorption $a_s = a_{s.j.} + a_{sels}$, correspondant aux substances jaunes et aux sels dissous. Ce dernier étant connu avec une précision satisfaisante (figure 8 A), on en déduit $a_{s.j.}$.

(47) On a également représenté sur cette figure les résultats de mesures faites avant filtration des échantillons d'eau de mer, fournissant l'effet des particules en suspension.

(48) Sur cette figure on a retranché l'effet des sels et considéré directement la répartition verticale du coefficient d'absorption $a_{s.j.}$ par les substances jaunes.

La répartition verticale de la fluorescence naturelle des eaux de mer est sensiblement inverse ; des mesures commencées en 1961 [47]nous ont montré que, contrairement au coefficient d'absorption dans l'ultra-violet, la fluorescence augmente rapidement à des profondeurs comprises entre un peu moins de 50 et 100 m, pour atteindre aux grandes immersions une valeur de l'ordre de 2 à 4 fois celle correspondant aux eaux superficielles. Voir à titre d'exemple la figure 51 relative à la mer Méditerranée, et la figure 52 fournissant les résultats obtenus dans l'Atlantique Nord Est. Dans ce dernier cas on observe une nouvelle augmentation de la fluorescence aux immersions comprises entre 200 et 1000 m environ, pour des raisons non élucidées.

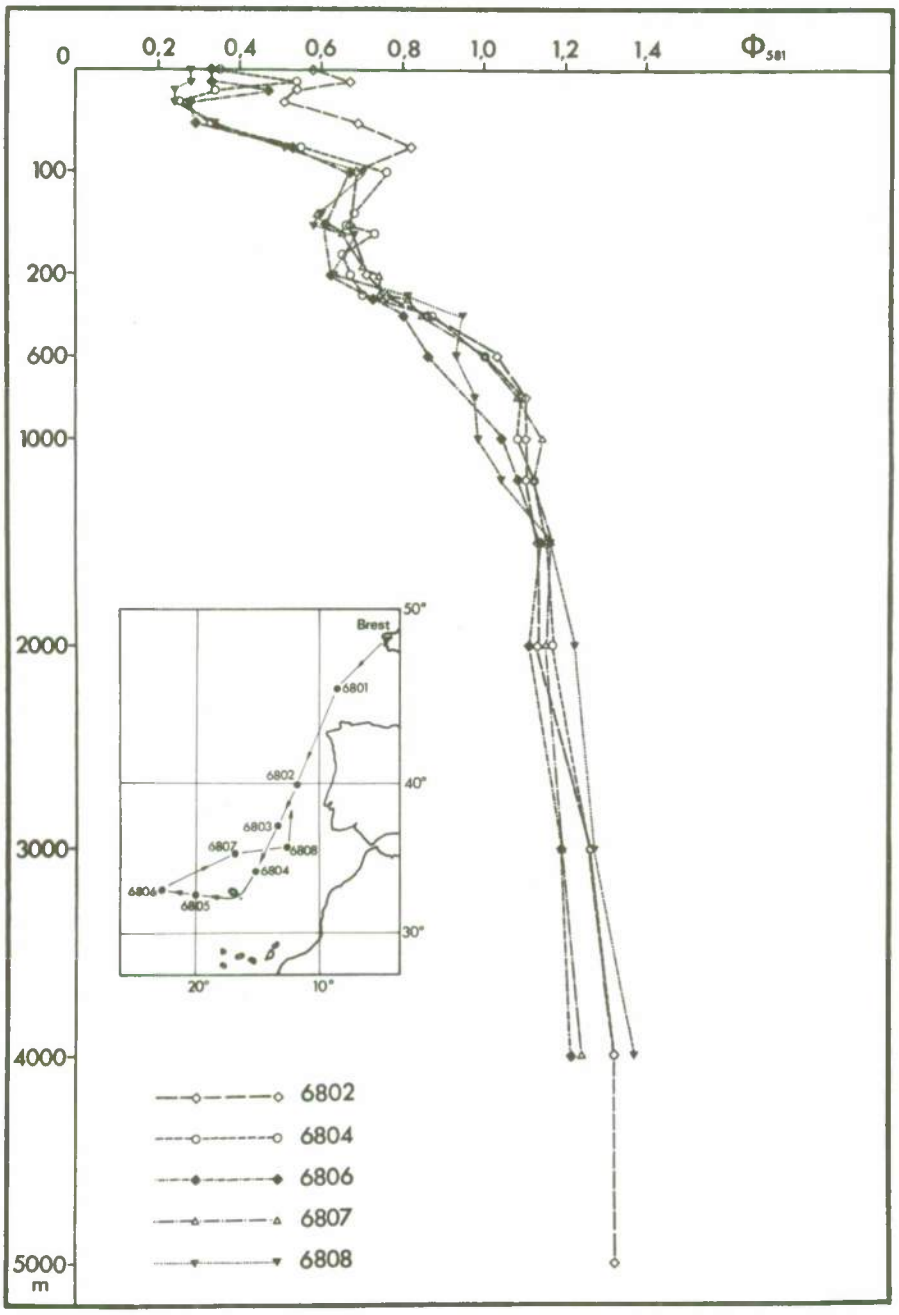


Figure 52
Exemples de variations avec la profondeur de la fluorescence des eaux de mer (mêmes conditions de mesure que pour la figure 51) dans l'Atlantique Nord Est (mission "Hydratlante III" à bord du "Jean Charcot", Octobre 1968). D'après A. IVANOFF (non publié).

Signalons enfin que l'exposition d'un échantillon d'eau de mer à la lumière solaire semble diminuer en général notablement sa fluorescence (CH. DORVILLE, communication personnelle), ce qui expliquerait peut-être, du moins en partie, la plus faible fluorescence des eaux de la couche superficielle.

Les variations sensiblement inverses l'une de l'autre de la teneur des eaux de mer en substances jaunes et de sa fluorescence sont évidemment liées à l'évolution des substances organiques dissoutes avec la profondeur, évolution dont on sait peu de chose. La fluorescence semble être due en majeure partie à des composés particulièrement stables

(du moins à l'obscurité). Il serait intéressant de préciser entre autres son lien avec la valeur de la production primaire, ses variations saisonnières, sa répartition dans les eaux profondes de l'océan mondial.

10. INDICE DE REFRACTION DES EAUX DE MER.

Jusqu'à ces dernières années l'indice de réfraction des eaux de mer n'a intéressé les Océanographes que dans la mesure où sa détermination permettait d'obtenir la valeur de la salinité. Par contre il n'intervenait que très peu en Optique Marine, où il suffisait en général de le prendre égal à 4/3. Jusqu'au jour où certains chercheurs firent remarquer que, d'une manière analogue à ce qui se passe dans l'atmosphère, les fluctuations de l'indice de l'eau de mer, provoquées par celles de la température, de la salinité et peut-être de la pression, peuvent entraîner une diffusion de la lumière aux petits angles, et intervenir ainsi d'une manière importante tant dans la propagation d'un pinceau lumineux que dans la vision des objets immergés.

A défaut d'une étude directe des fluctuations de l'indice, on peut rattacher ces fluctuations à celles de la température et de la salinité (l'effet des fluctuations de pression étant semble-t-il du second ordre). C'est le sujet de la conférence 2.2 de ce volume, et par conséquent nous n'en parlerons pas. Il faut ensuite connaître les variations $\frac{\delta \bar{n}}{\delta \bar{T}}$ et $\frac{\delta \bar{n}}{\delta \bar{S}}$ de l'indice moyen $\bar{n}$ en fonction de la température moyenne $\bar{T}$ et de la salinité moyenne $\bar{S}$, ainsi que les fluctuations de température, de salinité et de courant. La connaissance de ces fluctuations constitue la difficulté majeure, leur étude (surtout celle des fluctuations de salinité) n'étant pas encore suffisamment avancée. Nous nous limiterons à exposer ce que l'on sait des variations de l'indice moyen avec la température, la pression et la salinité, puisque ces notions fondamentales sont indispensables à l'étude des fluctuations de l'indice (49).

Commençons par examiner les variations de l'indice avec la longueur d'onde, la température et la pression, pour une eau de mer de salinité moyenne, égal à 35°/₀₀.

Le tableau 6 fournit, d'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48], les variations entre 4047 et 6438 A de l'indice d'une eau de mer "normale" de chlorinité 19,373°/₀₀

T = 20°C		Cl = 19,373°/₀₀	
λ_A°	n	λ_A°	n
4047	1,34950	5461	1,34092
4358	1,34688	5770	1,33979
4678	1,34471	5791	1,33972
4800	1,34401	5893	1,33938
5085	1,34253	6438	1,33781

Tableau 6
Variations de l'indice avec la longueur d'onde pour une eau de mer de chlorinité 19,373°/₀₀ (S≃35°/₀₀), à 20°C. D'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48].

(soit de salinité 34,998°/₀₀), à 20°C et sous la pression atmosphérique. La figure 53 traduit ces résultats, ainsi que ceux concernant l'eau pure à la même température. La différence entre l'indice de l'eau de mer de salinité 35°/₀₀ et celui de l'eau pure (à 20°C) varie entre 0,00635 à 6438 Å et 0,00676 à 4047 Å. L'eau de mer est donc légèrement plus refringeante, et aussi un peu plus dispersive.

Le tableau 7 et la figure 54 (d'après A. MEHU et A.JOHANNIN-GILLES [48])fournissent les variations de l'indice d'une eau de mer "normale" de chlorinité 19,373 °/₀₀ (soit de salinité 34,998 °/₀₀)avec la température, pour diverses longueurs d'onde. A titre de comparaison, on a représenté par la courbe en trait discontinu les résultats concernant l'eau pure à 5893 Å. La différence entre l'indice de l'eau de mer de salinité 35°/₀₀ et celui de l'eau pure varie (à 5893 A) entre 0,00686 à 1°C et 0,00630 à 30°C. L'effet de la température est donc légèrement plus prononcé pour l'eau de mer. Suivant la température, il varie entre une demi et une unité de la 4ème décimale par °C.

---

(49) Ce qui suit est extrait en majeure partie du paragraphe consacré à l'indice de réfraction dans le tome II de notre traité sur les propriétés physiques et chimiques des eaux de mer [4], à paraître prochainement.

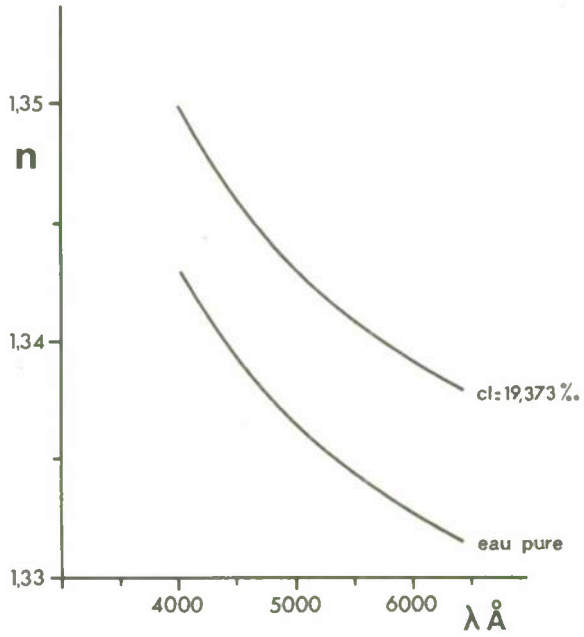


Figure 53
Variations avec la longueur d'onde des indices de l'eau pure et d'une eau de mer de chlorinité 19,373 °/₀₀ (S≈35°/₀₀), à 20°C. D'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48] .

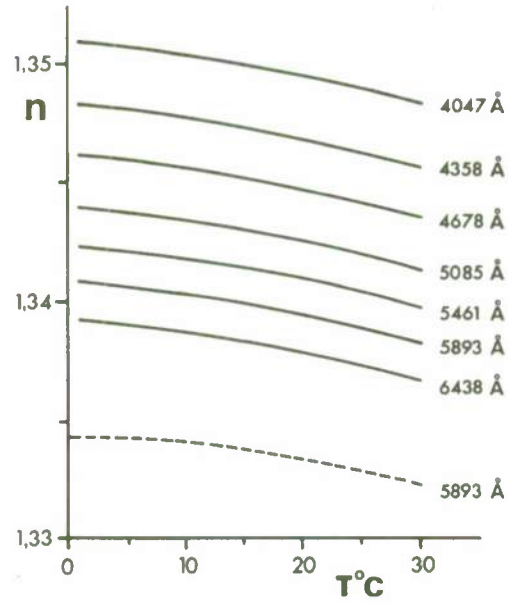


Figure 54
Variations de l'indice d'une eau de mer de chlorinité 19,373°/₀₀ (S≈35°/₀₀) avec la température, pour diverses longueurs d'onde. D'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48] .

λ (Å)	Température (°C)						
	1	5	10	15	20	25	30
5893	1,34081	1,34063	1,34030	1,33987	1,33938	1,33883	1,33824
5461	1,34235	1,34215	1,34183	1,34140	1,34092	1,34037	1,33977
5085	1,34397	1,34378	1,34344	1,34302	1,34253	1,34199	1,34138
4800	1,34544	1,34525	1,34492	1,34450	1,34401	1,34345	1,34284
4678	1,34615	1,34596	1,34563	1,34520	1,34471	1,34416	1,34355
4047	1,35093	1,35072	1,35040	1,34999	1,34950	1,34984	1,34831

Tableau 7

Variations de l'indice d'une eau de mer de chlorinité 19,373 °/₀₀ (S≈35°/₀₀) avec la température, pour diverses longueurs d'onde. D'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48] .

La courbe en trait discontinu de la figure 55 représente, d'après E.M. STANLEY [49] , l'augmentation de l'indice d'une eau de mer de salinité 35 °/₀₀ avec la pression (à 24,99°C et pour 6328 Å). Aux faibles pressions, la variation de l'indice, légèrement plus petite pour l'eau de mer que pour l'eau pure, est de l'ordre de 1,5 unités de la 5ème décimale pour une variation de pression de 1 bar.

L'influence de la salinité sur l'indice de réfraction a été étudiée notamment par C.L. UTTERBACK, T.G. THOMPSON et B.A. THOMAS [50] , par W. BEIN, H.G. HIRSEKORN et L. MOLLER [51] , par Y. MIYAKE [52] , par Y.A. VELIMOZH NAYA [53] , par J.S.M. RUSBY [54] , par A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES[48] . Ainsi que le montre la figure[56](d'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48]), l'augmentation de l'indice est sensiblement proportionnelle à la valeur de la chlorinité :

$$\Delta n = k.Cl \ °/_{00} \ ,$$

le coefficient de proportionnalité k variant légèrement avec la longueur d'onde et avec la température (ainsi qu'avec la pression). Toutefois les différents auteurs ne sont pas parfaitement d'accord sur la valeur de ce coefficient de proportionnalité k. Ainsi, pour 5893 A, à 25°C et à la pression atmosphérique, k est respectivement égal à $3,28.10^{-4}$, $3,34.10^{-4}$ et $3,24.10^{-4}$ selon les mesures de C.L. UTTERBACK, T.G. THOMPSON et B.A. THOMAS, celles de Y. MIYAKE , et celles de A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES. De toute manière ce coefficient de proportionnalité ne constitue qu'une approximation ne pouvant servir à la détermination précise de la chlorinité par réfractométrie (pour une telle détermination voir

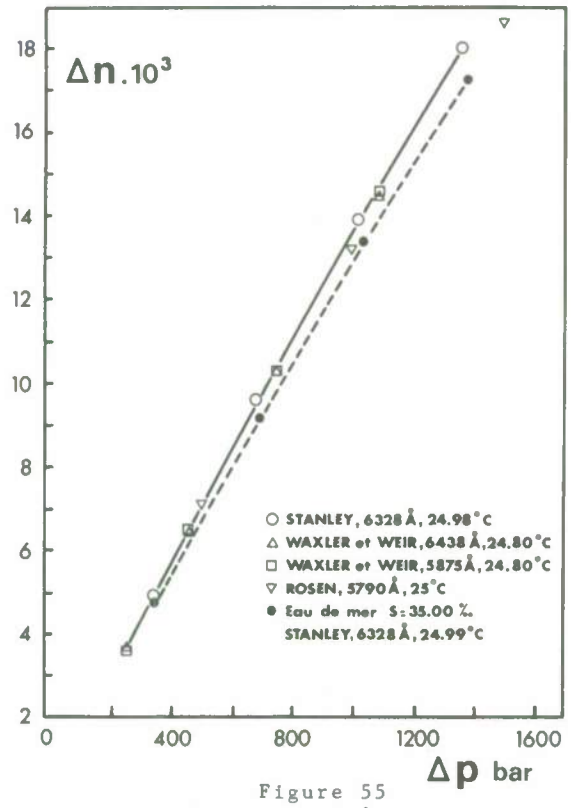


Figure 55
Variations de l'indice de l'eau pure (en trait plein) et d'une eau de mer de salinité 35°/oo (en trait discontinu) avec la pression.

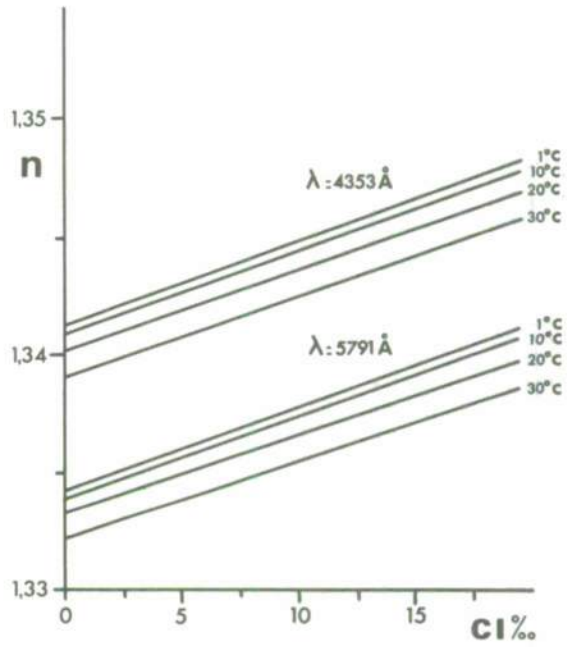


Figure 56
Variations de l'indice avec la chlorinité, pour diverses températures et longueurs d'onde. D'après A. MEHU et A. JOHANNIN-GILLES [48] .

l'article de J.S.M. RUSBY [54]), mais suffisante pour l'étude des fluctuations de l'indice. A

$$k = \frac{\Delta n}{\Delta Cl°/oo} \simeq \frac{1,8.\Delta n}{\Delta S°/oo} \simeq 3,3.10^{-4}$$

correspond une variation de l'indice légèrement inférieure à 2 unités de la 4ème décimale par °/oo de salinité.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] JERLOV, N.G. (1964). "Standard terminology on Optics of the Sea", chronique de l'U.G.G.I., n°57, pp. 246-251.
[2] JERLOV, N.G. (1968). "Optical Oceanography", Elsevier Publishing Company, 194 pages.
[3] IVANOFF, A. et MOREL, A. (1970). "Terminologie concernant l'Optique Océanographique", Cah. Océanogr. XXII, 5, pp. 457-468.
[4] IVANOFF, A. (1972). "Introduction à l'Océanographie : propriétés physiques et chimiques des eaux de mer", Librairie Vuibert, Paris, T.I, 208 pages, T. II à paraitre.
[5] HONEY, R.C. et SORENSON, G.P. (1970). "Optical absorption and turbulence induced narrow-angle forward scatter in the sea", A.G.A.R.D. conference proceedings n°77 on Electromagnetics of the Sea, pp. 39-1 à 39-7.
[6] BAUER, D., BRUN-COTTAN, J.C. et SALIOT, A. (1971). "Principe d'une mesure directe dans l'eau de mer du coefficient d'absorption de la lumière", Cah. Oceanogr., XXIII, pp. 841-858.
[7] COLLINS. J.R. (1925)."Change in the infrared absorption spectrum of water with temperature". Phys. Rev., 26, pp. 771-779.
[8] CURCIO, J.A. et PETTY, C.C. (1951). "The near infrared absorption spectrum of liquid water", J. Opt. Soc. Am., 41, pp. 302-304.
[9] MOREL, A. (à paraitre). "Optical properties of pure water and pure sea water", dans "Optical Aspects of Oceanography", Academic Press.
[10] COPIN-MONTEGUT, G., IVANOFF, A. et SALIOT, A. (1971). "Coefficient d'atténuation des eaux de mer dans l'ultra-violet", Comp. Rend. Ac. Sc., 272, pp. 1453-1456.
[11] LENOBLE, J. (1956). "L'absorption du rayonnement ultraviolet par les ions présents dans la mer", Rev. Opt., 35,10, pp. 526-530.
[12] OGURA, N. et HANYA, T. (1966). "Nature of ultra-violet absorption of sea water", Nature, 212,12, p. 758.
[13] ARMSTRONG, F.A.J. (1963). "Determination of nitrate in water by ultraviolet spectrophotometry", Anal. Chem., 35, pp. 1292-1293.
[14] CLARKE, G.L. et JAMES, H.R. (1939). "Laboratory analysis of the selective absorption of light by sea water", J. Opt. Soc. Am., 29 pp. 43-55.

[15] KARABASHEV, G.S., ZANGALIS, K.P., SOLOVYEV, A.N. et YAKUBOVICH, V.V. (1971). "New data on sea water photoluminescence", Bull. (Izv). Acad. Sc. USSR, Atmos. and Oceanic Phys. Ser., 7,1, pp. 60-68.
[16] IVANOFF, A. et MOREL, A. (1971). "Spectral distribution of the natural fluorescence of sea-waters", The Ocean World (Proc. of Joint Oceanographic Assembly in Tokyo, Sept. 1970), pp. 178-179.
[17] SALIOT, A. (1969). "Contribution à l'étude des substances organiques dissoutes dans l'eau de mer", Thèse de Doctorat 3e cycle, Université de Paris, 106 pages.
[18] MOREL, A. (1965). "Résultats expérimentaux concernant la pénétration de la lumière du jour dans les eaux méditerranéennes", Cah. Oceanogr., XVII, pp. 177-184.
[19] BAUER, D. et IVANOFF, A. (1965). "Au sujet de la mesure du coefficient de diffusion de la lumière par les eaux de mer pour des angles compris entre 14° et 1°30'",Comp. Rend. Ac. Sc., 260, pp. 631-634.
[20] KULLENBERG, G. (1968). "Scattering of light by Sargasso Sea water", Deep-Sea Res., 15,4, pp. 423-432.
[21] PETZOLD, T.J. (1972). "Volume scattering functions for selected ocean waters", Tech. Rep. S.I.O. ref. 72-78, 79 pages.
[22] MANKOVSKY, V.I. (1971). "Au sujet de la relation entre le coefficient total de diffusion des eaux de mer et leur coefficient de diffusion dans une direction donnée", Bull. de l'Inst. Hydroph. Mar. de Sebastopol, 6,56, pp. 145-154.
[23] BAUER, D. et MOREL, A. (1967). "Etude aux petits angles de l'indicatrice de diffusion de la lumière par les eaux de mer", Ann. Géophys., 23, pp. 109-123.
[24] MOREL, A. (1968). "Relations entre coefficients angulaires et coefficient total de diffusion de la lumière par les eaux de mer", Cah. Oceanogr., XX, pp. 291-303.
[25] BURT, W.V. (1955). "Distribution of suspended materials in Chesapeake Bay", J. Mar. Res., 14, pp. 47-62.
[26] MOREL, A. (1970). "Examen de résultats expérimentaux concernant la diffusion de la lumière par les eaux de mer", A.G.A.R.D. conference proceedings n°77 on Electromagnetics of the Sea, pp. 30-1 à 30-9.
[27] IVANOFF, A. (1959). "A new water sampler and a new scattering-polarizing-meter for optical investigation of the oceans", International Oceanographic Congress, Preprints, The american association for the advancement of science, pp. 553-555.
[28] IVANOFF, A. (1961). "Quelques résultats concernant les propriétés diffusantes des eaux de mer", I.U.G.G. Symposium on radiant energy in the sea, monographie n°10 de l'U.G.G.I. pp. 45-51.
[29] IVANOFF, A., JERLOV, N. et WATERMAN, T.H. (1961). "A comparative study of irradiance, beam transmittance and scattering in the sea near Bermuda", Limn. and Oceanogr., 6,2, pp. 129-148.
[30] SHIBATA, K., BENSON, A.A. et CALVIN, M. (1954). "The absorption of suspensions of living micro-organisms", Biochem. Biophys. Acta, 15, pp. 461-470.
[31] YENTSCH, C.S. (1957). "A non-extractive method for the quantitative estimation of chorophyll in algal cultures", Nature, 179, pp. 1302-1304.
[32] YENTSCH, C.S. (1962). "Measurement of visible light absorption by particulate matter in the ocean", Limn. and Oceanogr., 7,2, pp. 207-217.
[33] FREDERICK, M.A. (1970). "An Atlas of Secchi Disk Transparency Measurements and Forel-Ule color codes for the Oceans of the World", Thesis, U.S. Naval Postgraduate School.
[34] STEEMANN NIELSEN, E. (1963). "Fertility of the ocean", dans "The Sea", Interscience, vol. 2, pp. 129-164.
[35] JOSEPH, J. (1955). "Extinction measurements to indicate distribution and transport of watermasses", Proc. U.N.E.S.C.O. Symp. Phys. Oceanogr., Tokyo, pp. 59-75.
[36] JOSEPH, J. et DIETRICH, G. (1953), Ber. Dtsch. Wiss. Komm. Meeresforsch., 13.
[37] RILEY, G.A., STOMMEL, H. et BUMPUS, D.F. (1949). "Quantitative ecology of the plankton of the western North Atlantic", Bull. Bingham Oceanogr. Coll., 12, pp. 1-169.
[38] PRIEUR, L. (à paraitre). "Interprétation d'une zone de forte turbidité sur la radiale Nice-Calvi", Proc. Verb. XXIII Congrès Assemb. plén. de la C.I.E.S.M.M. à Athènes.
[39] JERLOV, N.G. (1959). "Maxima in the vertical distribution of particles in the sea", Deep-Sea Research, 5, pp. 173-184.
[40] Erreur de numérotation.
[41] Laboratoire d'Océanographie Physique de la Faculté des Sciences de Paris (1969). Résultats des observations effectuées à bord du N.O. "Calypso" en Mer Tyrrhénienne (en Juillet 1964) et dans le détroit de Sicile (en Mai 1965 et Juillet 1966), Cah. Oceanogr., XXI, suppl. n°2, pp. 193-243.
[42] IVANOFF, A. (1958). "Essai d'hydrologie optique entre Nice et la Corse", Comp. Rend. Ac. Sc.,246, p. 3492.
[43] EITTREIM, S., EWING, M. et THORNDIKE, E.M. (1969). "Suspended matter along the continental margin of the North American Basin", Deep-Sea. Res., 16,6, pp. 613-624.
[44] IVANOFF, A. (1967). "Méthode de mesure optique du coefficient de diffusion turbulente des eaux à la verticale", communication à la XIVe assemblée générale de l'U.I.G.G. à Berne, non publié.
[45] JOSEPH, J. (1949). "Durchsichtigkeitsmessungen im Meere im ultravioletten Spektralbereich", Deut. Hydrograph. Z., 2, pp. 212-218.
[46] JERLOV, N.G. (1955). "Factors influencing the transparency of the Baltic waters", Medd. Oceanog. Inst. Göteborg, 25, 19 pages.
[47] IVANOFF, A. (1962). "Au sujet de la fluorescence des eaux de mer", Comp. Rend. Ac. Sc., 254, pp. 4190-4192.
[48] MEHU, A. et JOHANNIN-GILLES, A. (1968). "Variations de l'indice de réfraction de l'eau de mer étalon de Copenhague et de ses dilutions en fonction de la longueur d'onde, de la température et de la chlorinité", Cah. Oceanogr., XX, pp. 803-812.
[49] STANLEY, E.M. (1971). "The refractive index of seawater as a function of temperature, pressure and two wavelengths", Deep-Sea Res., 18, pp. 833-840.
[50] UTTERBACK, C.L., THOMPSON, T.G. et THOMAS, B.A. (1934). "Refractivity-chlorinity-temperature relationship of ocean waters", J. Cons. perm. int. Explor. Mer, 9, pp. 35-38.

[51] BEIN, W., HIRSEKORN, H. et MOLLER, L. (1935). "Konstanten bestimmungen des Meerwassers und Ergebnisse über Wasser Körper", Veröff. Inst. f. Meereskunde, Univ. Berlin, N.F. Reihe A, 28, 240 pages.

[52] MIYAKE, Y. (1939). "Chemical studies of the western Pacific Ocean-IV. The refractive index of sea-water", Bull. Chem. Soc. Japan, 14, pp. 239-242.

[53] VELIMOZHNAYA, Y.A. (1960). "On the prospects of using the interferometer for the determination of salinity of seawater", Trudy morsk. gidrofiz. Inst., 22, pp. 26-32.

[54] RUSBY, J.S.M. (1967). "Measurements of the refractive index of sea-water relative to Copenhagen Standard Sea Water", Deep-Sea Res,, 14, pp. 427-439.

REFRACTIVE INDEX FLUCTUATIONS IN SEAWATER

Henri Hodara
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

The purpose of this lecture is to develop the mathematical tools and gather the necessary data for predicting the effects of thermal and saline inhomogeneities on optical imaging systems.

Temperature and salinity variations cause corresponding fluctuations in the refractive index that are responsible for loss of resolution in the water. Some useful cook-book formulae are developed for the refractive index changes in terms of their gradient with respect to salinity and temperature. The formulae are found to agree well with laboratory measurements and in-situ measurements. The latter are carefully reviewed and used to extract the scales of turbulence and calculate image resolution loss. We find that the dual-scan system is fairly immune to temperature and salinity fluctuations.

Refractive Index Fluctuations

The refractive index of seawater is a function of several parameters, particularly salinity, temperature and pressure. It is also dependent on the wavelength of light which accounts for the chromatic aberration experienced in underwater daylight photography. In this lecture, we are only interested in refractive index fluctuations and their effect on image resolution. Honey [1970] was one of the first ones to demonstrate experimentally image blurring caused by temperature and salinity fluctuations.

To put the reader in the proper frame of reference, we show in Fig. 1, temperature-salinity (TS) diagrams (Montgomery [1963]) of seawater density and refractive index. As we shall see later, simple formulae can be derived to estimate refractive index fluctuations by assuming proportionality between refractive index and density. In general, this assumption is subject to errors and the two sets of curves of Fig. 1 allow us to determine the magnitude of the error involved.

After this brief orientation we now proceed to calculate refractive index fluctuations encountered in the ocean. We call the refractive index n (p, S, T), a function of pressure, salinity and temperature respectively. A small variation in index is represented by

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial p}\,\Delta p + \frac{\partial n}{\partial S}\,\Delta S + \frac{\partial n}{\partial T}\,\Delta T \tag{1}$$

Pressure variations are negligible so we set $\Delta p = 0$. It is a good approximation to take temperature and salinity as independent random variables, so that the resultant rms index fluctuations add as

$$\langle \Delta n^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial S}\right)^2 \langle \Delta S^2 \rangle + \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)^2 \langle \Delta T^2 \rangle} \tag{2}$$

A convenient way to interpret the above expression is as a sum of contributions from salinity and temperature,

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \sqrt{\langle \Delta n_S^2 \rangle + \langle \Delta n_T^2 \rangle} \tag{2a}$$

To calculate $\langle \Delta n_S^2 \rangle$, we need to know fluctuations in salinity and temperature, $\langle \Delta S^2 \rangle$, $\langle \Delta T^2 \rangle$, and their gradient, $\partial n/\partial S$, $\partial n/\partial T$. Note that the gradients are calculated at the mean salinity and temperature, i.e., $\partial n(\langle S \rangle, \langle T \rangle)/\partial S$, $\partial n(\langle S \rangle, \langle T \rangle)/\partial T$. Data on gradients are available from laboratory experiments, while fluctuation quantities $\langle \Delta S^2 \rangle$, $\langle \Delta T^2 \rangle$ come from power spectrum calculations derived from in-situ measurements. Before going on to the data we develop some simple-minded but useful cook book formulae to estimate the refractive index fluctuations caused by salinity and temperature.

Cook-Book Formulae for $\langle \Delta n_S^2 \rangle^{1/2}$ and $\langle \Delta n_T^2 \rangle^{1/2}$

We start off from the generalization of the Clausius-Mossotti relation, known in optics as Lorentz-Lorenz (Pancfsky and Phillips [1955])

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N}{3}\left(\alpha + \frac{p_o^2}{3\epsilon_o kT}\right) \tag{3}$$

Density is expressed as the number of molecules/cm^3, N. The first term in the parenthesis accounts for induced electronic polarization; the second term is due to orientation polarization; α is the polarizability, p_o the dipole moment of water, ϵ_o the free space permittivity, and kT the thermal energy.

The refractive index change is proportional to a corresponding change in density and it

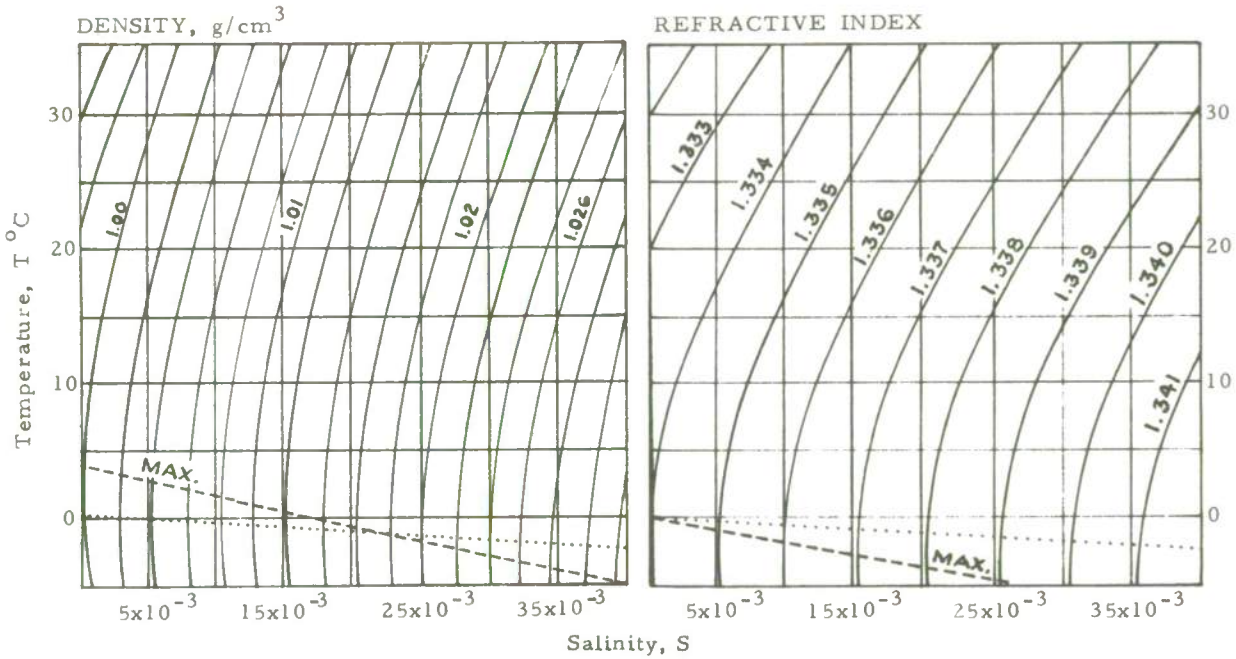


Fig. 1: TS Diagrams for Seawater Density and Refractive Index

follows from (3), that

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{N} \left(\frac{n^2 - 1}{3}\right) \left(\frac{n^2 + 2}{2n}\right) \tag{4}$$

We have assumed that a small change in refractive index does not affect the polarizability, i.e., p_o and α remain constant. In fact, the second term in the parenthesis of (3), $p_o^2/3\epsilon_o kT << \alpha$.

Let us derive now $\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2}$. We define salinity as the ratio of weights of sodium chloride to weight of seawater per unit volume,

$$S = \frac{W_{NaCl}}{W_{H_2O} + W_{NaCl}} \simeq \frac{W_{NaCl}}{W_{H_2O}} \tag{5}$$

The approximation in this equation is totally justified since salt concentrations occur as a very small fraction of the total weight of seawater, of the order of parts per thousand. A change in salinity is roughly proportional to a change of concentration, hence a change in density. Avogadro's number, A relates weight and number of molecules/cm^3,

$$W = \frac{N}{A/M} \tag{6}$$

M is the molecular weight of the substance in question. Expressing salinity in terms of N, by substituting (6) in (5) gives

$$S = \frac{N_{NaCl}\, M_{NaCl}}{N_{H_2O}\, M_{H_2O}} \tag{7}$$

so that

$$\Delta S \simeq \frac{\Delta N}{N} \frac{M_{NaCl}}{M_{H_2O}} \tag{8}$$

We have dropped subscripts because $N \simeq N_{H_2O}$, and $\Delta N_{NaCl} = \Delta N$.

Substituting (8) in (4) gives

$$\Delta n_s = \frac{M_{H_2O}}{M_{NaCl}} \left(\frac{n^2 - 1}{3}\right) \left(\frac{n^2 + 2}{2n}\right) \Delta S \tag{9}$$

The ratio of water to sodium chloride molecular weight is approximately 1/3. Refractive index for typical waters T = 20°C, S = 35 x 10^{-3} is n = 1.34 as seen from Fig. 1. Substituting these values in (9) yields the final expression for the rms refractive index fluctuations,

$$\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2} \simeq .1 \langle \Delta S^2 \rangle^{1/2} \tag{10}$$

The coefficient of $\langle \Delta S^2 \rangle^{1/2}$ is the salinity gradient for the mean temperature and salinity selected. We shall see later that this number is in good agreement with experimental data. For instance, a typical salinity rms fluctuation is .002 parts per thousand, i.e., $\langle \Delta S^2 \rangle^{1/2} = 2 \times 10^{-6}$. This gives a corresponding refractive index fluctuation of $.2 \times 10^{-6}$.

To derive $\langle \Delta n_T^2 \rangle^{1/2}$ we go back to (4). Here the density change is caused by thermal volume expansion of the water. The coefficient of expansion, expressed per degree centigrade, is defined by

$$\frac{\Delta N}{N} = -\beta \Delta T \tag{11}$$

Table 1 (Neumann and Pierson [1966]) gives values of β at various pressures including sea level, and as a function of salinity and temperature. Note that negative values of β exist only at low salinities not usually encountered in the ocean. Using again standard temperature 20°C and salinity 35 x 10^{-3} near sea level yields $\beta = 2.5 \times 10^{-4}$/°C. After substitution of (11) in (4) we have the required expression for rms refractive index fluctuation

$$\langle \Delta n_T^2 \rangle^{1/2} = .9 \times 10^{-4} \langle \Delta T^2 \rangle^{1/2} \tag{12}$$

Typical temperature fluctuations of the order of $\langle \Delta T^2 \rangle^{1/2} = 10^{-3}$°C yield a corresponding index fluctuation of the order of 10^{-7}. Note that for this case temperature fluctuations are about equal to salinity fluctuations.

Combining (10) and (12) gives our final cook book formula

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \sqrt{(.1)^2 \langle \Delta S^2 \rangle + (.9 \times 10^{-4})^2 \langle \Delta T^2 \rangle} \tag{13}$$

Measurements of $\partial n/\partial S$ and $\partial n/\partial T$

To calculate refractive index fluctuations, not only salinity and temperature fluctuations $\langle \Delta S^2 \rangle^{1/2}$ and $\langle \Delta T^2 \rangle^{1/2}$ must be measured but the refractive index gradients $\partial n/\partial S$, $\partial n/\partial T$ must be known.

The best gradient data to our knowledge come from Rusby [1967] who very carefully measured in the laboratory refractive index difference between seawater and that of water of salinity 35×10^{-3} by varying both S and T independently. We have converted his data to gradients as a function of mean salinity and temperature over a range of interest for seawater. The results are shown in Tables 2A and 2B. The first table lists gradients with respect to salinity, downward as a function of salinity and across as a function of temperature. For instance the gradient at 20.1°C for a mean salinity between 34.747×10^{-3} and 35.685×10^{-3} is

$$\partial n/\partial S\,(S = 35 \times 10^{-3},\ T = 20°C) = .1854 \tag{14}$$

This is in good agreement with our order of magnitude calculation of .1 given in (10). The gradients with respect to temperature are listed in the second table, again downward as a function of salinity and across as a function of temperature. The data show quite a few blanks due to measurement uncertainties. In addition the gradient seems to go through a minimum as a function of salinity, which we cannot explain. At any rate, picking out a mean salinity of 35×10^{-3} and a mean temperature of 20°C and interpolating the data in the table we get

$$\partial n/\partial T\,(S = 35 \times 10^{-3}, T = 20°C) = 1.5 \times 10^{-5} \tag{15}$$

This differs by a factor of 6 with the gradient given by our cook book formula (12). However, our gradients extracted from Rusby's data reflect large measurement uncertainties around 35 parts per thousand, in addition to exhibiting an unexplained minimum around this salinity. The gradients in the table around 34 parts per thousand are more consistent and definitely in better agreement with our formula, within a factor of two.

TABLE 1

Coefficient of thermal expansion of sea water, $\beta \times 10^6$, as a function of temperature and salinity at the sea surface (p = 0).

S% \ t°	-2	0	5	10	15	20	25	30
0	-105	-67	17	88	151	207	257	303
10	- 65	-30	47	113	170	222	270	314
20	- 27	5	75	135	188	237	281	324
25	- 10	21	88	146	197	244	287	329
30	7	36	101	157	206	251	292	332
40	38	65	126	177	222	263	301	337

Increase of $\beta \times 10^6$ per pressure increase of 1000 dbar over the values given above.

S% \ t°	0	10	20	30
0	37	25	15	8
10	35	23	14	7
20	32	21	13	7
30	30	19	12	6
40	28	18	11	6

Measurements of $\langle \Delta S^2 \rangle^{1/2}$ and $\langle \Delta T^2 \rangle^{1/2}$

We now turn our attention to in-situ measurements of salinity and temperature fluctuations.

Salinity fluctuations were monitored with special conductivity meters converted to read salinity directly. The resolution is of the order of 10^{-5}. A typical run in shallow Bahamas waters by L. Mertens is shown in Fig. 2. The data yield a calculated rms fluctuation

$$\langle \Delta S^2 \rangle^{1/2} = 2 \times 10^{-6} \tag{16}$$

TABLE 2A:
REFRACTIVE INDEX GRADIENT WITH RESPECT TO SALINITY

$10^3 S$	$10 \frac{\partial}{\partial s} n(S, 17.3°C)$	$10 \frac{\partial}{\partial s} n(S, 20.1°C)$	$10 \frac{\partial}{\partial s} n(S, 25.3°C)$	$10 \frac{\partial}{\partial s} n(S, 30.1°C)$
33.827				
	1.851	1.847	1.839	1.863
34.082				
	1.844	1.813	1.806	1.825
34.242				
	1.865	1.850	1.836	1.825
34.254				
	1.856	1.826	1.824	---
34.747				1.814
	1.861	1.854	1.833	---
35.685				
	1.850	1.859	1.826	1.812
35.898				
	1.851	1.836	1.834	---
36.179				1.813
	1.938	1.864	1.825	---
36.451				
	1.763	1.841	1.792	1.763
36.658				
	1.894	1.889	1.922	---
36.857				
	2.000	1.625	---	---
36.889				

TABLE 2B:
REFRACTIVE INDEX GRADIENT WITH RESPECT TO TEMPERATURE

T°C	17.3	20.1	25.3	30.1
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(33.827 \times 10^{-3}, T)$	5.714	3.269	2.708	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(34.082 \times 10^{-3}, T)$	5.357	2.885	3.958	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(34.242 \times 10^{-3}, T)$	3.571	2.692	4.583	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(34.254 \times 10^{-3}, T)$	---	1.346	2.083	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(34.747 \times 10^{-3}, T)$	1.786	1.154	---	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(35.685 \times 10^{-3}, T)$	.714	2.692	2.292	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(35.898 \times 10^{-3}, T)$	0	4.038	2.917	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(36.179 \times 10^{-3}, T)$	1.429	---	---	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(36.451 \times 10^{-3}, T)$	---	5.385	3.542	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(36.658 \times 10^{-3}, T)$	2.857	7.308	4.792	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(36.857 \times 10^{-3}, T)$	3.214	---	---	
$10^5 \frac{\partial}{\partial T} n(36.889 \times 10^{-3}, T)$	7.500	---	8.958	

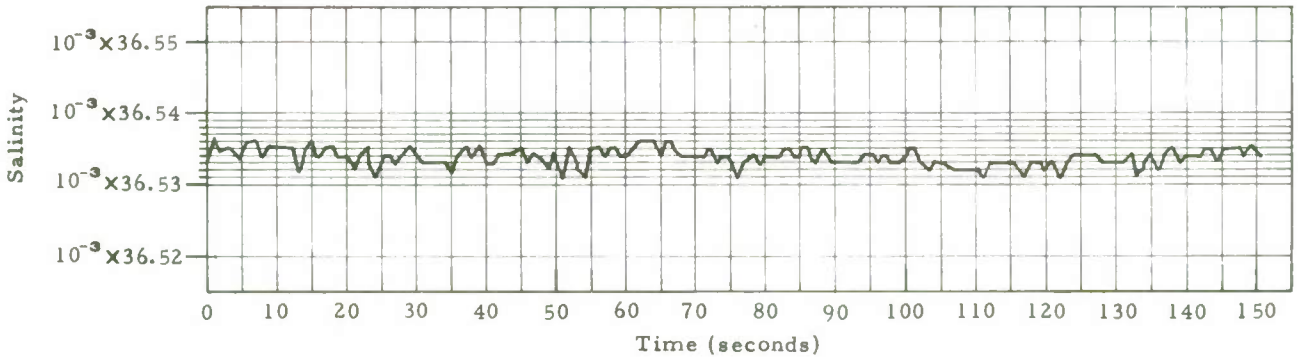


Fig. 2: Salinity Fluctuation in Bahamas Waters

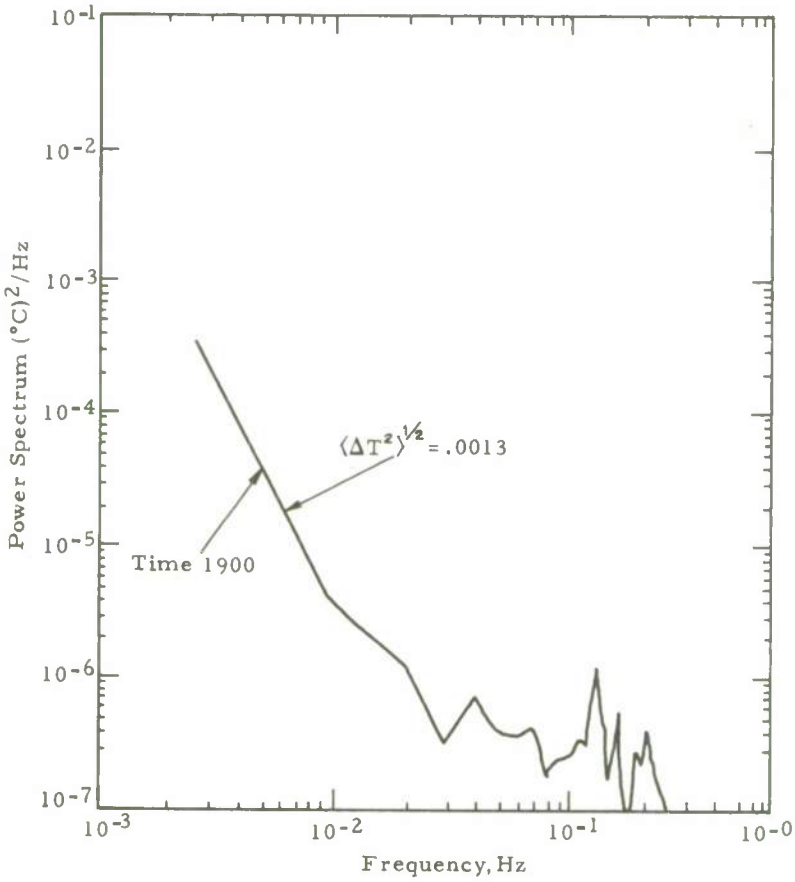


Fig. 3: Temperature Power Spectrum in Bahamas Waters

Temperature fluctuations were also measured by Mertens with a high frequency thermistor. The calculated power spectrum shown in Fig. 3 yields an rms fluctuation

$$\langle \Delta T^2 \rangle^{1/2} = 1.3 \times 10^{-3}\,^{\circ}C \tag{17}$$

If we insert the gradient values from (14) and (15) and the measured fluctuations (16) and (17) in (2), we find

$$\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2} = 3.7 \times 10^{-7}$$

$$\langle \Delta n_T^2 \rangle^{1/2} = 2.0 \times 10^{-8}$$

Observe that the refractive index fluctuation in these shallow waters is mostly due to salinity fluctuation. This is very plausible as considerable evaporation occurs at sea level. We cannot conclude that this is always the case and quite often, particularly in deeper water the reverse is true. There are no simple rules to predict whether salinity or temperature fluctuations are more important contributors to the refractive index variations. There is no doubt that more accurate measurements are badly needed both in-situ and in the laboratory.

Scale of Turbulence

Data on underwater turbulence are rather scant and not very reliable. To gain confidence in the numbers we are going to use, we review different experiments, extract the scale sizes from the measurements and verify that they are consistent with each other.

Thermistor measurements of temperature fluctuations made by Mertens at two different depths yielded the power spectra shown in Fig. 4. Both spectra cut-off below 1 Hz. In order to extract scale size some assumption must be made concerning the mechanism of turbulence. We picture the turbulent inhomogeneities to consist of blobs of various size L and temperature T flowing past the probe with an rms velocity, u. Naturally the temperature and the velocity differ from blob to blob and vary in a random manner. One possible mechanism for turbulence is caused by water currents mixing ocean masses with different temperature and salinity. As they mix, the flow breaks up into turbulence and the momentum of water particles carried by the drift current velocity U is transferred to a turbulent rms velocity u. In short, some of the energy of the main flow is diverted into turbulent motion so that $u \leq U$. Turbulence theory as well as measurements (Hinze [1959], Bowden [1962]) seem to indicate a value

$$u \sim .2\ U \tag{18}$$

The scale size is then

$$L_c = .2\ U/f \tag{19}$$

The shortest scale size occurs at the high frequency cut-off, which is .2 Hz in Fig. 4. Currents encountered while the data were taken were of the order of U = 1 m/sec so that the inner scale of the turbulence is

$$L_{min} = .2\ U/f_{max} \simeq 1.0\ m$$

In Fig. 4 the power spectrum rises with decreasing frequency telling us that the larger blobs, which correspond to lower frequencies, exhibit larger temperature difference among themselves. However we cannot tell the largest scale size because the temperature record was too short, approximately 150 sec. so that the spectrum never levels off. The calculated rms fluctuation shown as inserts in Fig. 4 are for the whole range of frequencies. The effective temperature fluctuation "felt" by an optical imaging system may be much less because it is only affected by a narrower range of frequencies. This range is easily calculated by referring to Fig. 5. There is no limit to the highest frequency as they they all affect resolution but for practical purposes we take it where the spectrum "cuts-off",

$$f_{max} \leq .2\ Hz \tag{20}$$

The lowest frequency is determined by the large turbulence and depends essentially on exposure time. In other words slow temperature fluctuations will not affect the system as long as their period, t_T is much larger than the exposure time, t_e, say $t_T \simeq 10 t_e$. The minimum frequency to affect imaging is then

$$f_{min} \simeq \frac{1}{20\, t_e} \tag{21}$$

Thus for an exposure time of 5 seconds, the frequencies of turbulence that degrade the system exceed .01 Hz. We note from Eqs. (20) and (21) that the spectral range over which turbulence degrades system operation ranges from .01 Hz to .2 Hz.

We now turn our attention to the problem of extracting turbulence scale from another type of measurement in order to provide an independent check on the scale size we found above. Mertens has measured the temperature structure function, $\langle (T_1 - T_2)^2 \rangle^{1/2}$ by monitoring the rms temperature difference between two thermistors as a function of their spacing. Results are shown in Fig. 6. As the spacing increases the two temperatures progressively decorrelate so that the correlation $\langle T_1 T_2 \rangle$ in the expression below

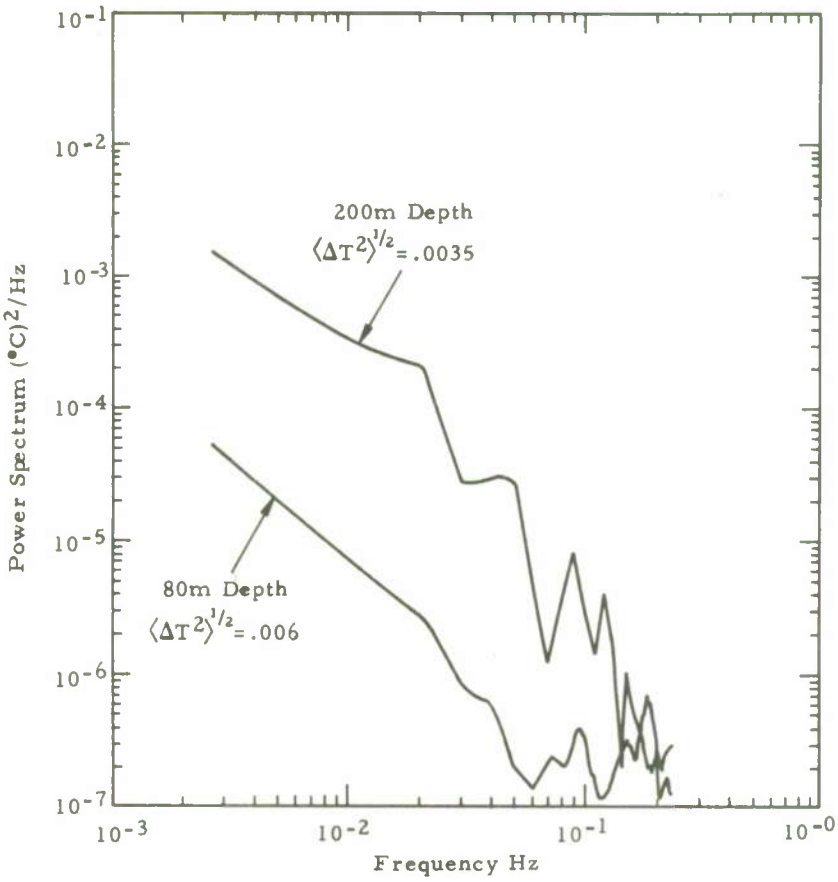


Fig. 4: Temperature Power Spectrum at Two Different Depths in Bahamas Waters

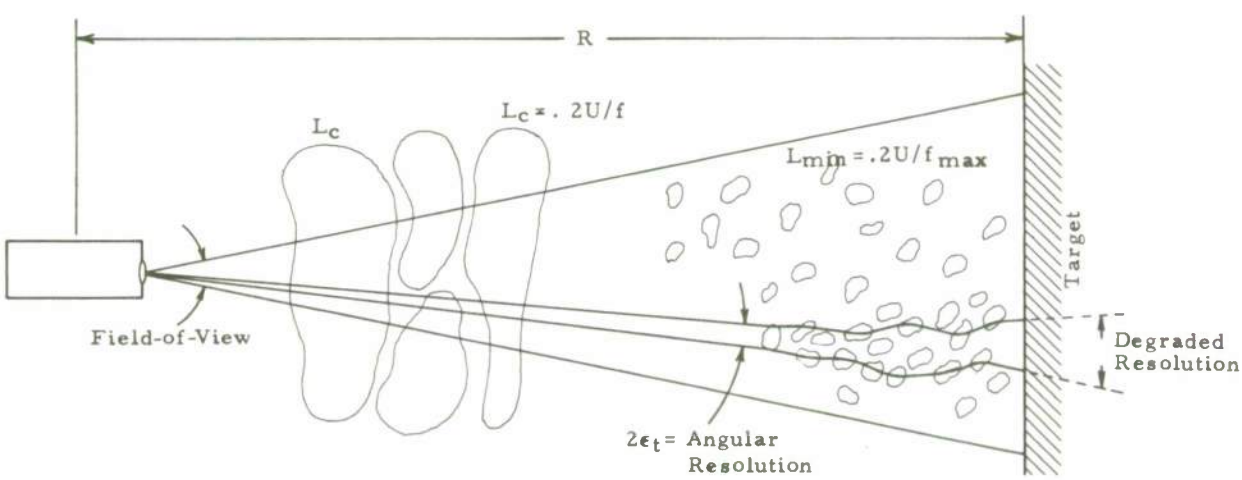


Fig. 5: Effect of Turbulence Scale on Optical Imaging

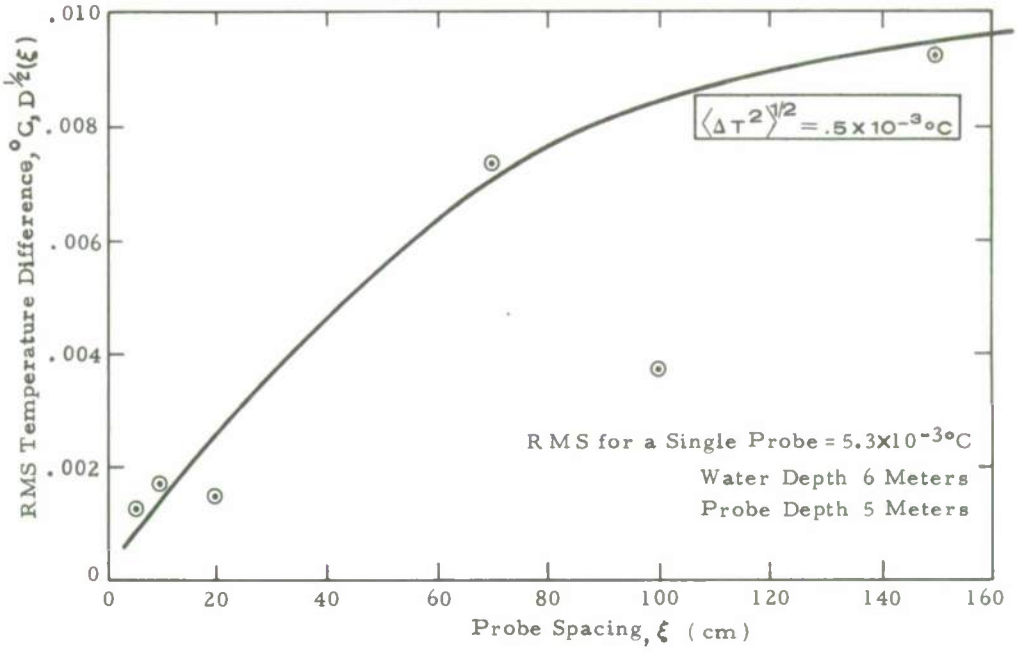


Fig. 6: Temperature Difference Between Two Points in Bahamas Waters

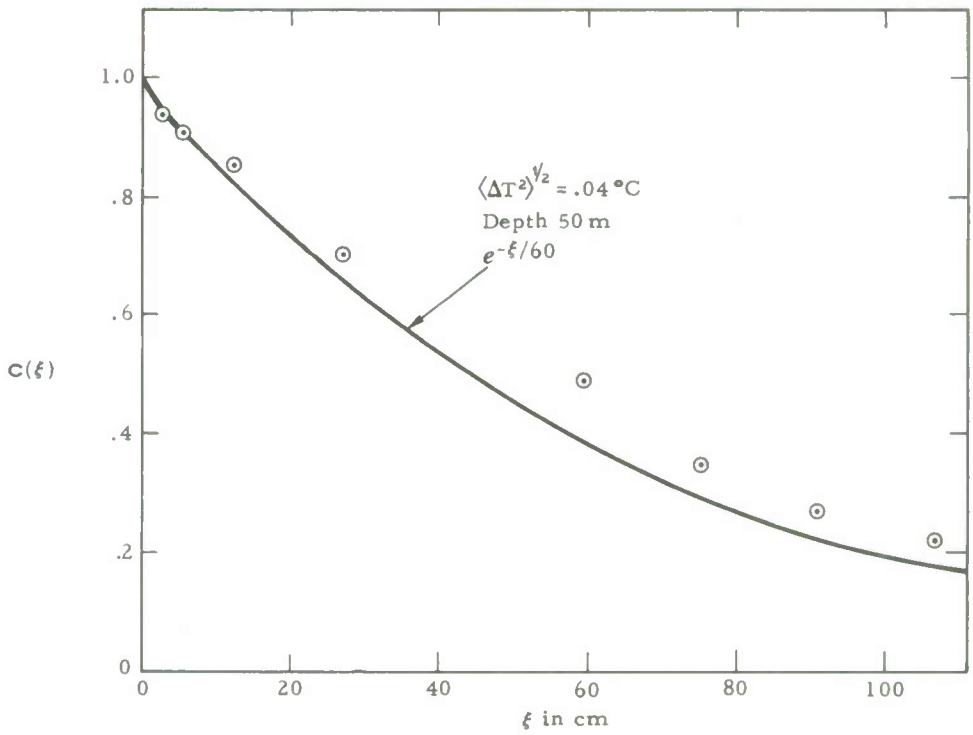


Fig. 7: In-situ Temperature Correlation Function Averaged Over Several Waters

$$\left\langle [T_1(x_1) - T_2(x_2)]^2 \right\rangle = \langle [(T_1 - \langle T \rangle) - (T_2 - \langle T \rangle)]^2 = \left\langle \Delta T_1^2 \right\rangle + \left\langle \Delta T_2^2 \right\rangle - 2\left\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \right\rangle \tag{22}$$

eventually vanishes. Note that the mean square temperature fluctuation should be the same for both probes, $\left\langle \Delta T_1^2 \right\rangle = \left\langle \Delta T_2^2 \right\rangle = \left\langle \Delta T^2 \right\rangle$. Furthermore, if the process is stationary, the statistics are only dependent on $\xi = x_2 - x_1$ which simplifies Eq. (22) to

$$D(\xi) = \left\langle (T_1 - T_2)^2 \right\rangle = 2\left\langle \Delta T^2 \right\rangle \left\{ 1 - \frac{\left\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \right\rangle}{\left\langle \Delta T^2 \right\rangle} \right\}$$

where $D(\xi)$ is the structure function as a function of probe separation.

The normalized correlation function is

$$C(\xi) \equiv \left\langle \Delta T_1 \Delta T_2 \right\rangle / \left\langle \Delta T^2 \right\rangle \tag{23}$$

so that

$$D(\xi) = 2\left\langle \Delta T^2 \right\rangle \left\{ 1 - C(\xi) \right\} \tag{24}$$

The scale size can be defined at the separation where the decay rate of the correlation function begins to level off and has decreased to some sufficiently small number like $1/e = .37$. Noting that $\left\langle \Delta T^2 \right\rangle^{1/2} = 5.3 \times 10^{-3}$ °C from the insert in Fig. 6, we find an rms temperature difference, $D^{1/2}(\xi) = .006$. This value $\xi = .60$ m agrees with the 1 m scale size estimated from the turbulence measurement. Note that we could have arrived at the same order of magnitude (1 meter) by simply noting the separation ξ where the rms temperature difference begins to level-off. It is instructive however to approach the same problem in many ways.

For an additional check on scale size, we refer to temperature measurements by Liberman [1951], made at 50 m depth in several types of water from Alaska to California. The resultant correlation function $C(\xi)$ did not vary too much in different waters and a typical one is shown in Fig. 7. The slope of $C(\xi)$ at the origin intersects the ξ-axis at $\xi = .60$ m. The correlation function at this point has decayed to $1/e$ verifying once again a scale size of the order of one meter.*

Estimation of Resolution Limit of Dual Scan Due to Turbulence

We conclude our lecture by applying the above results to estimate the resolution degradation of an advanced long range viewing system. The geometry of this system is illustrated in Fig. 8. The light beam illuminates one resolution cell at a time and the detector field-of-view only accepts this cell. The light beam from the source and the detector virtual beam subtend a common cell which they scan synchronously. To understand the mechanism of turbulent blurring refer to Fig. 9. The target subtends a field-of-view of the order of 12° x 10° or approximately .036 steradians. Choosing a square resolution cell, .3 mrad side, gives an angular subtense of 9×10^{-8} steradian. In short, the complete image of the target consists of 4×10^5 resolution cells, and if the frame time (time to scan entire target) is one second, each resolution cell is scanned in approximately 2.5 microseconds. During this short time, the turbulent motion is essentially frozen, and image blur is mainly caused by the rays from the target being randomly refracted through the temperature blobs lying along the beam.

We show in the Appendix (Eq. 11) that angular blurring $\left\langle \Delta\theta^2 \right\rangle^{1/2}$ is of the order

$$\left\langle \Delta\theta^2 \right\rangle^{1/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\left\langle \Delta n^2 \right\rangle^{1/2}}{n} \sqrt{\frac{R}{L_{min}}}$$

We now require $\left\langle \Delta\theta^2 \right\rangle^{1/2} = 300$ microradian for a target range $R = 100$ m. This implies a linear resolution of 3 cm, an outstanding system indeed! Taking $L_{min} = 1$ m, $n = 1.34$, we solve for the refractive index fluctuation necessary to blur such a high resolution system:

$$\left\langle \Delta n^2 \right\rangle^{1/2} = 10^{-4}$$

If it is all due to temperature effects, Eq. (12) gives

$$\left\langle \Delta T^2 \right\rangle^{1/2} = 1°\,C$$

a large and not common temperature fluctuation. If only salinity effects come into play, Eq. (10) gives

$$\left\langle \Delta S^2 \right\rangle^{1/2} = 10^{-3}$$

or one part per thousand. Recall that the data of Fig. 3 showed .002 parts per thousand (2×10^{-8}). We conclude that a Dual Scan System is fairly immune to resolution degradation caused by temperature and salinity fluctuations.

* - The agreement with $\xi = .60$ m in the preceding paragraph is coincidental.

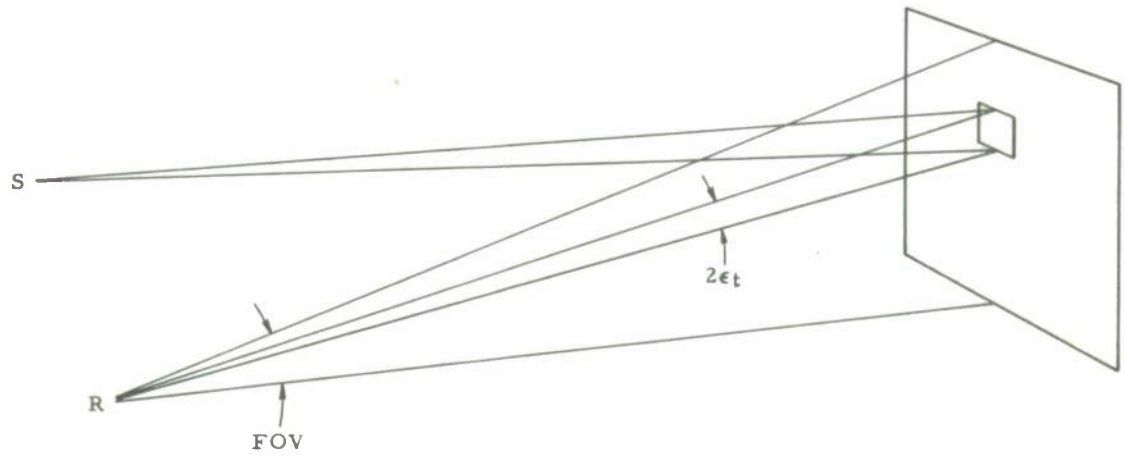


Fig. 8: Geometry of Dual Scan Imaging System
(S = Source, R = Receiver)

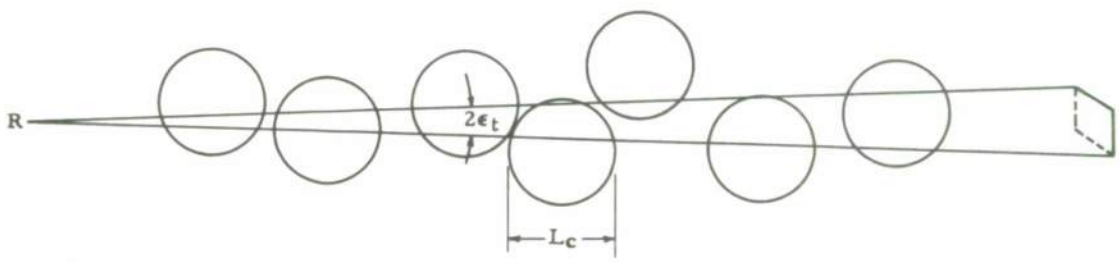


Fig. 9: Resolution Element and Turbulences Subtended by the Dual Scan System

References

Bowden, K. F. (1962), "Turbulence in The Sea", Vol. 1, A, ed. M. N. Hill, Interscience Publications, New York; Section VI, p. 802.

Hinze, J. O. (1959), "Turbulence", Chapter 6, McGraw Hill, New York.

Honey, R. C. and G. P. Sorenson (1970), "Optical Absorption and Turbulence Induced Narrow Angle Forward Scatter in the Sea", AGARD Conference Proceeding No. 77 on Electromagnetics of the Sea.

Lieberman, L. (1951), "The Effect of Temperature Inhomogeneities in the Ocean on the Propagation of Sound", J. Opt. Soc. Am., 23, 5, p. 563.

Montgomery, R. B. (1963), "Oceanographic Data", In American Institute of Physics Handbook, Chapter 2k, ed. D. E. Gray, p. 2-123.

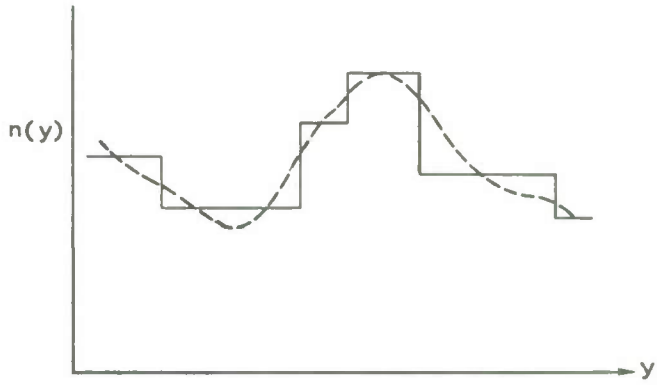
Neumann, Gerhard and W. J. Pierson (1966), "Principles of Physical Oceanography", Prentiss-Hall.

Panofsky, W. K. H. and M. Phillips (1955), "Classical Electricity and Magnetism", Adison-Wesley, Cambridge, Massachusetts, p. 85.

Rusby, J. S. M. (1967), "Measurements of the Refractive Index of Seawater Relative to Copenhagen Standard Seawater", Deep Sea Research 14, p. 427.

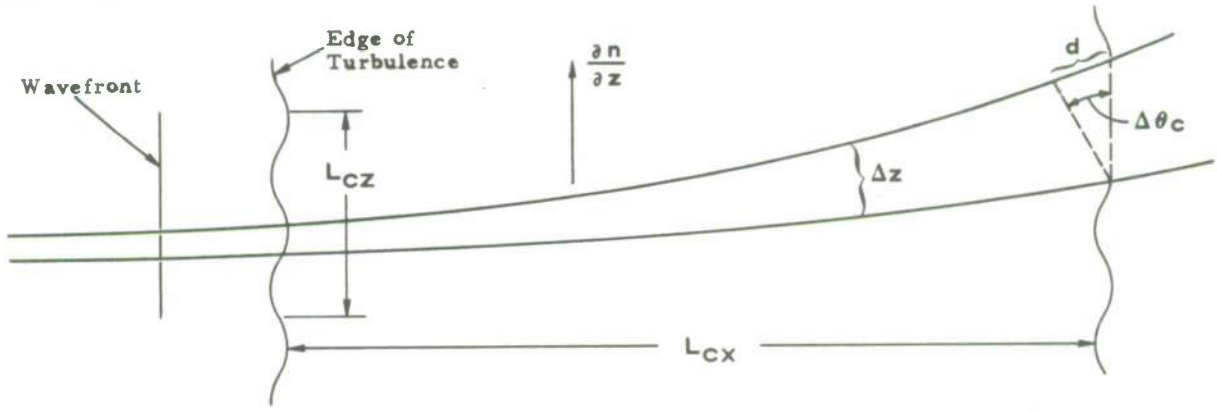
APPENDIX: Ray Bending Caused by Turbulence

Turbulent blobs act as weak lenses on light rays because their refractive index varies little with respect to the mean index of the medium. The scale size of the turbulence or its coherence length is in essence the size of an imaginary blob over which the refractive index is approximately uniform. However the index varies randomly from one blob to another as illustrated by the solid lines of the figure below.



Of course nature never shows such discontinuities and we refine the picture by assuming a smooth gradient $\partial n/\partial y$ as shown by the dotted line, which in turn is approximately constant over a scale equal to the blob size.

If we now consider a light beam going through such a medium, the refractive bending is easily estimated from the figure below.



The ray bending $\Delta\theta_c$ through one coherence length L_{cx} is caused by the relative delay of one part of the wavefront with respect to the other. The path length difference, d is readily seen to be approximately $L_{cx}/n - L_{cx}/(n + \Delta z \partial n/\partial y)$, i.e.,

$$d = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial n}{\partial y}\Delta z\right) L_{cx} \tag{1}$$

From geometry, $\Delta\theta_c \simeq \frac{d}{\Delta z}$ or

$$\Delta\theta_c = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} L_{cx} \tag{2}$$

The refractive index as discussed in the text is a function of salinity and temperature, n(S, T), so consider for instance salinity, then (2) can be rewritten as

$$\left\langle \Delta\theta_s^2 \right\rangle^{1/2} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial S}\left\langle \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right\rangle^{1/2} L_{cx} \tag{3}$$

L_{cx} is the coherence length of the random fluctuations in salinity in the x-direction. The rms salinity fluctuations are given by

$$\left\langle \Delta S^2 \right\rangle^{1/2} = \left\langle \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 \right\rangle^{1/2} L_{cy} \tag{4}$$

L_{cy} being the correlation length along the gradient. The resultant rms blurring per blob is

$$\left\langle \Delta\theta_s^2 \right\rangle^{1/2} = \frac{1}{n}\left[\frac{\partial n}{\partial S}\left\langle \Delta S^2 \right\rangle^{1/2}\right]\frac{L_{cx}}{L_{cz}} \tag{5}$$

We recognize the square bracket as the rms refractive index fluctuation caused by salinity, $\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2}$. The resultant rms angle fluctuation per blob is

$$\langle \Delta \theta_c^2 \rangle^{1/2} = \frac{\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2}}{n} \frac{L_{cx}}{L_{cz}}$$

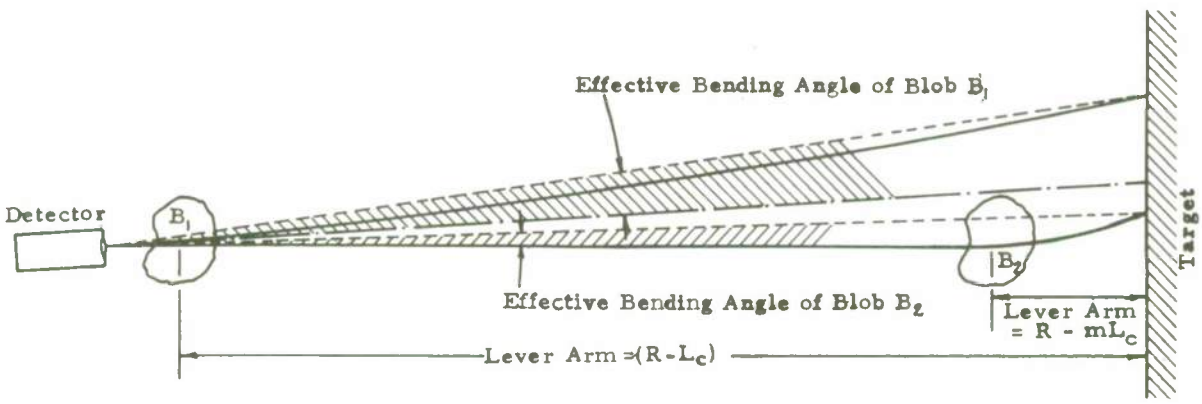
with a corresponding term to account for temperature. Note that scale sizes in the vertical direction, L_z may be quite different from those in the horizontal direction. However we do not expect too much preferential direction along horizontal x or y axis so that the above expression can be multiplied by $\sqrt{2}$ to account for total ray bending in the horizontal plane,

$$\langle \Delta \theta_c^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{2} \frac{\langle \Delta n_s^2 \rangle^{1/2}}{n} \frac{L_{CH}}{L_{CV}} \tag{6}$$

Subscripts H and V refer to horizontal and vertical direction. Bear in mind that refractive index fluctuations caused by temperature have different L_c's just as they have a different $\langle \Delta n^2 \rangle^{1/2}$. Although L_{CH} and L_{CV} may differ considerably in the ocean, there is such a variety of conditions possible that we assume them equal for order of magnitude calculations. The resultant angular bending across a blob is

$$\langle \Delta \theta_c^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{\langle \Delta n_s^2 \rangle + \langle \Delta n_T^2 \rangle}}{n^2} \right]^{1/2} \tag{7}$$

The total ray bending is easily calculated as a random walk from blob to blob. We must however bear in mind that the blobs close to the detector contribute more blurring than those near the target as seen in the figure below.



The effective bending angle is the displacement of the ray at the target divided by the lever arm or distance from observer to target. Adding thus the angular deviations caused by each blob on a mean square basis and taking into account the lever arm effect gives

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \frac{1}{R^2} \sum_{m=0}^{M} (R - mL_c)^2 \langle \Delta \theta_c^2 \rangle \tag{8}$$

M is the total number of blobs between target and detector,

$$M = \frac{R}{L_c} \tag{9}$$

If we expand (8) above, we have

$$\langle \Delta \theta \rangle^2 = \sum_{m=0}^{M} \left[1 - 2m \frac{L_c}{R} + m^2 \left(\frac{L_c}{R} \right)^2 \right] \langle \Delta \theta_c^2 \rangle$$

with each term inside the bracket contributing

$$\frac{\langle \Delta \theta \rangle^2}{\langle \Delta \theta_c \rangle^2} = M - 2 \frac{M(M-1)}{2} \frac{L_c}{R} + \frac{M(M-1)(2M-1)}{6} \left(\frac{L_c^2}{R^2} \right) \tag{10}$$

In the limit of large M

$$\langle \Delta \theta \rangle^2 = \langle \Delta \theta_c \rangle^2 \frac{1}{3} \frac{R}{L_c} \tag{11}$$

The factor 1/3, which accounts for the lever arm effect has been derived in Lecture 3.3.

VARIATION OF OPTICAL SEA PARAMETERS WITH DEPTH

By

J. Ronald V. Zaneveld

School of Oceanography

Oregon State University

Corvallis, Oregon 97331, U.S.A.

ABSTRACT

This paper deals with the depth dependence of light scattering and attenuation parameters in the ocean. The theoretical dependence of optical parameters on the concentration, size distribution and physical parameters of the particulate matter is discussed. A simple model for the depth dependence of particulate matter concentrations is presented. Results agree qualitatively with observed distributions. The interrelation of optical parameters, particle concentration and hydrographic parameters as obtained from experimental observations in several areas is discussed.

BASIC CONSIDERATION

Optical imaging in the undersea environment is rapidly becoming of great significance. Advanced underwater television and camera systems have been developed. Underwater optical communications systems as well as optical detection and ranging methods are now being investigated. In order to properly design and evaluate these advanced systems a great deal of knowledge of the medium itself, seawater, is required. This paper deals with the distribution in both space and time, of optical parameters which have a bearing on the performance of underwater optical systems. Elementary theory will be presented to relate the distribution of optical parameters in terms of the dynamics of the light-scattering particles. First we will take a look at the definitions and interrelationships of the various optical parameters.

The optical properties that describe the sea water are the volume scattering function, $\beta(\gamma)$, the total scattering coefficient b, the absorption coefficient a, and the beam attenuation coefficient c. It should be noted that these properties depend upon the wavelength of light, so that the following relationships hold only when monochromatic light is considered. A beam is attenuated by both scattering from the beam and absorption, so that

$$a + b = c \tag{1}$$

The propagation of a beam of light through sea water is then given by:

$$L(r) = L(o)\, e^{-(a+b)r} = L(o)\, e^{-cr} \tag{2}$$

where L is the radiance (radiant flux per unit solid angle per unit area of surface), and r is the distance traversed by the beam. The absorption, scattering and beam attenuation coefficients may be defined precisely as follows (1). The absorption coefficient $a(m^{-1})$ is the internal absorptance (ratio of the radiant flux lost from a beam by means of absorption to the incident flux) of an infinitessimally thin layer of the medium normal to the beam, divided by the thickness of the layer.

The total scattering coefficient $b(m^{-1})$ is the internal scatterance (ratio of the radiant flux scattered from a beam, to the incident flux) of an infinitessimally thin layer of the medium normal to the beam divided by the thickness of the layer.

The total attenuation coefficient $c(m^{-1})$ is the internal attenuance (scatterance plus absorptance) of an infinitessimally thin layer of the medium normal to the beam, divided by the thickness of the layer.

The directional light scattering properties of sea water are expressed by means of the volume scattering function. This function is obtained by measuring the radiant intensity $I(\gamma)$ (watts/steradian) at some angle γ with respect to the direction of the incident beam (Figure 1). We then have:

$$dI(\gamma) = E\, dV\, \beta(\gamma) \tag{3}$$

E is the irradiance (watts/m^2) incident upon the volume element dV, and $\beta(\gamma)$ is the volume scattering function (m^{-1} steradian $^{-1}$).

The total scattering coefficient and the volume scattering function are then related by

$$b = 2\pi \int_0^{\pi} \beta(\gamma) \sin\gamma \, d\gamma \tag{4}$$

Some typical volume scattering functions are given in Figure 2. The dominance of near-forward angle scattering in oceanic water (including impurities) compared to the theoretical curve of pure water should be noted. When γ approaches O Mie theory indicates that the derivative of $\beta(\gamma)$ with γ also approaches O. For the case of light scattering by turbulent fluctuations no prediction as to how $\beta(\gamma)$ approaches $\gamma = 0$ can be made. Some typical values of a, b and c for various water types are given in Table 1.

The scattering of visible light in sea water can primarily be attributed to scattering by pure water, by suspended particulate matter, and to turbulent fluctuations in the density of the water. Little is as yet known about the influence of turbulence on image degradation. Optical turbulence may limit underwater resolution measurements in clear water (4). If thermal variations in clear natural bodies of water have low frequency components Fourier techniques for underwater image prediction may lead to inaccurate predictions (5). There is at present no evidence to suggest that turbulence is the dominant scatterer in the oceans. Particle-dominated volume scattering functions measured in vitro have been quite successful in predicting the behavior of light underwater (6, 7, 8).

The scattering due to pure water has been investigated by many authors. A fluctuation theory first proposed by Smoluchowski (9) and Einstein (10) seems to conform best to experimental observations. In this theory the volume scattering function for pure water may be expressed as

$$\beta_w(\gamma) = \beta_w(90^\circ)\left(1 + \frac{1-\delta}{1+\delta}\cos^2\gamma\right) \tag{5}$$

$\beta_w(90^\circ)$ is dependent upon the thermal compressibility, refractive index and absolute temperature of the water; δ is the depolarization ratio $\delta = 0.090$ (1). Using equation (5) LeGrand (11) has calculated a theoretical scattering function for pure water (Table 2). Pure sea water (free of particles) scatters more than pure water due to the influence of dissolved salts. This increase in scattering amounts to 30% for sea water of 35 o/oo - 38 o/oo salinity (12).

In most ocean waters scattering by the pure sea water accounts for not more than 7% (13). The greatest contribution to the volume scattering function is due to suspended particulate matter. Understanding of the distribution and dynamics of the particulate matter in the oceans is thus imperative if imaging predictions are to be made.

Particulate matter in the ocean varies widely in terms of concentration, size and composition. Some approximations must be made if we wish to relate the particulate matter theoretically to the observed volume scattering function. Mie (14) has developed a theory giving the scattering characteristics for a spherical particle of uniform composition, and with a given index of refraction. It is this theory that is usually applied to oceanic suspensions. Typical oceanic particulate matter consists of life biological particles, detritus, and material of terrestial origin. The shapes of these particles are usually not spherical. Hodkinson (15) has shown, however, that nonabsorbing, nonspherical randomly oriented particles produce the same diffraction patterns to first order as spherical particles of the same cross-sectional area. Furthermore, opaque particles produce the same diffraction pattern as transparent ones. Volume scattering functions measured in sea water are dominant in the near-forward direction, in which diffraction predominates. Particle shape and index of refraction play secondary roles compared to particle size in light scattering in the ocean (1). If the particles are separated by distances at least equal to three times their radii, which is usually the case in the oceans, one is justified in summing their individual contributions to obtain the volume scattering function for particulate matter.

We have thus seen that if the particle size distribution is known, and an average index of refraction has been determined, Mie theory may be used to obtain the volume scattering function.

A size distribution of particulate matter, f(D)dD, gives the number of particles per unit volume between diameters D and D + dD. The cumulative particle size distribution g(D) is the number of particles per unit volume with diameters larger than D.g(D) may be obtained from f(D) by integration:

$$g(D) = \int_D^{\infty} f(D')\, dD' \tag{6}$$

g(D) is the distribution usually measured in experimental work.

For a particle of diameter D and (complex) index of refraction relative to the surrounding medium m, Mie theory predicts a scattering function β (γ, D, m) (ster^{-1} m^2). If this scattering function is integrated over all angles the scattering coefficient for the particle b(D,m) is obtained in a similar manner as in equation (4). When the scattering coefficient for a particle is divided by its cross-sectional area the effective area coefficient K_{sca} or scattering efficiency factor is obtained:

$$K_{sca}(D,m) = \frac{4\, b(D,m)}{\pi D^2} \tag{7}$$

The scattering efficiency is a function of both size and index of refraction, as can be seen from the diagram of Burt (16) in Figure 3. Similar efficiencies exist for absorption, K_{abs}, and for attenuation, K_{att}. We now can write equations relating the observed optical quantities to the particle parameters.

$$\beta_p(\gamma) = \int_0^{\infty} f(D)\, \beta(\gamma, D, m)\, dD \tag{8}$$

is the volume scattering function (units of steradian^{-1} m^{-1}) for a collection of particles with a size distribution f(D)dD and with a relative index of refraction m. To this must be added the scattering function of water $\beta_w(\gamma)$, and scattering due to other sources such as turbulence, bubbles, etc.

The total scattering coefficient b_p, the total absorption coefficient a_p, and the total attenuation coefficient c_p for particles are also obtained by integration over the particle size distribution.

$$b_p = \int_0^{\infty} f(D)\, K_{sca}(D,m)\, \frac{\pi D^2}{4}\, dD \tag{9}$$

$$a_p = \int_0^{\infty} f(D)\, K_{abs}(D,m)\, \frac{\pi D^2}{4}\, dD \tag{10}$$

$$c_p = \int_0^{\infty} f(D)\, K_{att}(D,m)\, \frac{\pi D^2}{4}\, dD \tag{11}$$

To these must also be added contributions due to water and other material. In the case of absorption the contribution from yellow matter (decayed organic substances) may not be neglected.

From the brief theoretical treatment it is seen that the important particle parameters in the ocean are the size distribution and the index of refraction. Typical particle size distributions are shown in Figure 4 (17). This figure uses relative cumulative frequency, which is the fraction of the particulate matter larger than a given size. As the smallest diameter observed using a Coulter Counter, was 2.2 μm, the relative cumulative frequency for that size is 1.

The basic principle behind the Coulter Counter is to pass a conducting fluid which contains dielectric particles through a small orifice. By placing an electrode to either side of the orifice, and setting up a potential difference between them, a particle passing through the orifice causes a voltage pulse. The voltage pulse is proportional to the particle volume. Using a pulse height analyzer one may thus obtain a particle volume or size distribution. The particle size distribution of the particles which contribute significantly to light scattering does not vary much in the oceans. This is an important conclusion as it paves the way to several significant simplifying empirical relationships between the various optical parameters.

Let us assume that the shape of the particle size distribution is approximately constant, and is given by $f^*(D)dD$, which is normalized so that

$$\int_0^\infty f^*(D)\,dD = 1 \tag{12}$$

Any observed size distribution then only depends on the total number of particles present per unit volume, N. Hence

$$f(D)\,dD = N f^*(D)\,dD \tag{13}$$

is the approximate particle size distribution.

From equations (9), (10) and (11) we may then calculate b^*, a^* and c^* from $f^*(D)dD$. We then immediately obtain the results:

$$b_p = N b^* \tag{14}$$

$$c_p = N c^* \tag{15}$$

This is very similar to results of Kalle (18) and Jerlov (19) who used total particulate cross section per unit volume rather than the total number of particles per unit volume.

The normalized volume scattering function (units of steradian^{-1} m^{-1}) is obtained from equation (8),

$$\beta^*(\gamma) = \int_0^\infty f^*(D)\,\beta(\gamma, D, m)\,dD \tag{16}$$

so that

$$\beta_p(\gamma) = N\beta^*(\gamma) \tag{17}$$

Since $\beta^*(\gamma)$ is assumed to be a constant over the oceans, we may set

$$b^* = P(\gamma)\beta^*(\gamma) \tag{18}$$

where $P(\gamma)$ is a proportionality constant. b^* has units of m^{-1}. Combining equations (18), (17) and (14) gives:

$$b_p = Nb^* = NP(\gamma)\beta^*(\gamma) = P(\gamma)\beta_p(\gamma) \tag{19}$$

Since the $P(\gamma)$'s are constant, equation (19) implies that the measurement of the volume scattering function at an angle will yield the total scattering coefficient, if the constant of proportionality is known. This idea was first developed by Jerlov (19) and has recently been verified by Kopelevich and Burenkov (13). Kopelevich and Burenkov conclude that the angles smaller than 15° yield the best results, although not a great deal of improvement is obtained compared with larger angles. Many optical workers have used the light scattered at 45° to obtain b_p.

Experimental tests of these hypotheses were carried out by Beardsley et al. (20) using seventeen samples obtained in the Panama Basin. Figure 5 shows a scatter diagram correlating $\beta_p(45°)$ and b_p. A correlation coefficient of 0.94 was found. Equation (14) in combination with (19) may be tested by correlating N and β_p (45°) which are related by:

$$N = \frac{P(45°)\,\beta_p(45°)}{b^*} \tag{20}$$

Testing equation (20), a correlation coefficient of 0.90 was found for N and $\beta_p(45°)$ (Figure 6).

The use of $\beta_p(45°)$ by oceanographers to describe spatial distributions of b_p or N is justified in the above manner. It should be kept in mind that equations (12) through (20) only hold true under the condition of constant shape of the particle size distribution and if the index of refraction of the particles does not change much. Clearly these conditions are more nearly met if small areas in the ocean are considered. It has therefore been found that the proportionality constants $P(\gamma)$ change somewhat from location to location in the ocean, and show large changes when locations such as harbors or coastal waters are considered. Even for localized areas with water quite different from the ocean, equations (12) through (20) are found to hold but f*(D) is dependent on the location and must be changed accordingly.

The index of refraction of the suspended particles is an important parameter in ocean optics. The index of refraction must enter into all Mie scattering calculations. It is thus of interest to describe a method developed by Zaneveld and Pak (21) by which the index of refraction of suspended particles in a sample may be obtained. This method permits one to study the spatial distribution of the index of refraction, which is of great interest if one wishes to predict the imaging properties of the ocean.

The index of refraction of a collection of suspended particles m, enters into the expression for the total scattering coefficient b_p, by way of the scattering efficiency:

$$b_p = \int_0^\infty f(D)\, K_{sca}(D,m)\, \frac{\pi D^2}{4}\, dD \tag{9}$$

Each particle has, of course, its own index of refraction, but there is one index of refraction that will connect the observed particle size distribution and the observed total scattering coefficient. This is the index of refraction we are seeking as it is an "optical average" of all the indices of refraction of the various particles in the sample.

Even though the same methods may be applied to obtain a complex index of refraction for the particles, we will consider here only real indices of refraction, so that the particles are considered to be non-absorbing. The great majority of scattering calculations for oceanic suspensions have been made based on this approximation. Although this is no justification in itself, good results have been obtained using this approximation (Jerlov, 1968). In that case the scattering efficiency may be represented (22) by

$$K_{sca} = 2 - \frac{4}{\rho}\sin\rho + \frac{4}{\rho^2}(1-\cos\rho) \tag{21}$$

where

$$\rho = \frac{2\pi D}{\lambda}|m-1|$$

This equation holds only when $|m-1| \ll 1$. This condition is generally satisfied in the ocean. Another condition is $\frac{\pi D}{\lambda} \gg 1$, so that equation (21) holds only for particles larger than the wavelength of light. Carder (23) has shown that nearly all the observed particle size distributions fit a two-parameter exponential distribution of the type

$$f(D)\,dD = NAe^{-AD}\,dD \tag{22}$$

Substitution of equations (22) and (21) into equation (9) and integrating results in the following solution:

$$b_p = N\pi\left[\frac{1}{A^2} + \frac{k^2 - A^2}{(k^2+A^2)^2}\right] \tag{23}$$

where $k = \frac{2\pi}{\lambda}|m-1|$, λ is the wavelength in water and m is the ratio of the particle index of refraction n_p to that of water, m_w. Equivalently, we have

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{vacuum}}|n_p - m_w| \tag{24}$$

Equation (23) is displayed graphically on Figure 7. Equation (23) thus implies that if we know any four of the parameters b_p, N, λ, A, and $|n_p - m_w|$ we may solve for the fifth. Usually we observe a particle scattering coefficient b_p at a certain wavelength λ_{vac} and we measure a particle size distribution which will yield the two parameters N and A. From these observations one can then use equation (23) or Figure 7 to obtain the particle index of refraction n_p. Generally it is difficult to obtain an exact value for b_p. In order to still be able to calculate the particle index of refraction when only light scattering measurements at fairly large angles can be obtained, we must use some approximations. We have already seen that at a given location in the ocean the total scattering coefficient is proportional to the light scattered at 45° (equation (19)). The constant of proportionality is given for a certain wavelength of light. A small change of the wavelength is equivalent to a slight change in the size distribution with constant wavelength. This shows that the constant of proportionality undergoes at most a very small change, and we may set

$$\frac{b_p(\lambda_1)}{b_p(\lambda_2)} = \frac{\beta(45°,\lambda_1)}{\beta(45°,\lambda_2)} \tag{25}$$

which is obtained by dividing two equations (19) for different wavelengths. A further assumption is that the index of refraction does not change much with wavelength. Combining equation (25) with (23) results in

$$\frac{\beta(45^\circ,\lambda_1)}{\beta(45^\circ,\lambda_2)} = \frac{1/A^2 + (k_1^2 - A^2)/(k_1^2 + A^2)^2}{1/A^2 + (k_2^2 - A^2)/(k_2^2 + A^2)^2} \qquad (26)$$

where $k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1}|n_p - m_w|$; $k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}|n_p - m_w|$

Although use of equation (23) is much to be preferred, equation (26) permits an approximate evaluation of the index of refraction of suspended particles by means of readily measured optical parameters. Equation (26) is solved graphically on Figure 8. To get some feeling for the range of values expected in the ocean, two stations taken off the coast of Ecuador are shown in the figure. This completes a brief review of the theoretical concepts. Application of the theory permits one to experimentally obtain the distribution in the ocean of the parameters that play a part in the prediction of imaging.

PARTICLE DYNAMICS

We have described the interrelationship of the particle size distribution and the observed optical parameters. If we wish to relate the optical parameters with the physical and chemical parameters in the ocean, we must first understand the relationship of the suspended particulate matter and these physical and chemical parameters. This is no easy task, as most parameters such as temperature, salinity, oxygen concentration, nutrients, phytoplankton population, etc. are all interrelated. Each parameter P obeys the diffusion equation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_x \frac{\partial P}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[A_y \frac{\partial P}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[A_z \frac{\partial P}{\partial z}\right] - \frac{\partial}{\partial x}[uP] - \frac{\partial}{\partial y}[vP] - \frac{\partial}{\partial z}[wP] + \frac{\partial P}{\partial t} = G \qquad (27)$$

A_x, A_y and A_z are the kinematic eddy diffusion coefficients and u, v and w are the velocities in the x, y and z directions. Z increases positively with increasing depth. G is a term which describes all consumption or production terms. If P represents oxygen for example, G would be the difference between oxygen consumption due to processes such as respiration, oxydation, etc. and oxygen generation by phytoplankton. Some parameters such as salinity are conservative, and have no sources or sinks in the ocean, in that case G would be zero. If we thus wish to completely analyze the ocean system in relation to particle dynamics and we are considering n parameters, we must solve n simultaneous equations (27). For simplified cases such a solution can be approximated using numerical techniques on high-speed digital computors (24). This is the area of quantitative ecology that is just now being developed. In this paper we will limit ourselves to some relatively simple but common situations. We will look at the particulate matter as a function of such paramters as the density distribution, eddy diffusion and growth rate of the particles.

Most light scattering particles are generated or enter the ocean in the euphotic zone. In this zone, usually limited by the depth at which the light is reduced to 1% of the surface value, plant life is possible. The phytoplankton generated in this region form the basis of the food chain for the higher organisms, zooplankton and fish. The plankton are, in effect, the source of almost all light scattering particles produced in the ocean. A considerable part of the suspended material may, however, be of terrestrial, non-biological origin. The concentration of phytoplankton depends on the availability of nutrients, light energy and the correct temperature and salinity range. Any of the parameters may be the limiting factor in the development of a large plankton population. Usually the limiting factor is the nitrate or phosphate concentration in the sea water (25).

The various interrelationships can best be shown on a flow map such as figure 9. This figure is modified from (24).

The thermocline usually occurs at the bottom of the euphotic zone, and is a region of large vertical gradients in temperature. The thermocline is accompanied by an increase in water density and is a region of minimum turbulence (26). Little photosynthesis and hence particle generation takes place below the thermocline. For the waters beneath the thermocline, the thermocline is considered to be the source of particles (27).

If conditions for particle generation are uniform over a given region, so that the source for particles is horizontally uniform, large horizontal differences in the inherent optical properties can still be observed (28, 2). Thus, if a horizontal maximum in light scattering is observed, sinking or mixing may be expected. Similarly, a horizontal minimum indicates upwelling or mixing. It is usually assumed that a light scattering minimum is accompanied by a lower particle concentration, and a light scattering maximum by a particle concentration maximum. This is not necessarily so, as a change in particle size may account for a change in the inherent optical properties without changing the total particle concentration, since the intensity of light scattered depends on the size of the particle.

Previous efforts to undertand the particle dynamics in the oceans have used the particle concentration as the dependent variable (29, 25, 26, 30). This method of attack ignores the importance of the size distribution of the particles. This is an important omission as the optical properties of sea water are dependent not only on the concentration of particles but also on their size distribution (31). In order to understand the reasons why the optical properties of sea water change, we must first understand the mechanisms by which the particle size distributions in the ocean are altered. The problem in this section is to introduce the particle size into the theoretical considerations. The following analysis is taken largely from Zaneveld (27).

In order to obtain a manageable set of equations, we will make the following assumptions:

a. All particles have the same density.

b. The particles are spherical.

c. The particles grow or decay in some way that is related to their surface area.

d. The density of the particles does not change with depth.

The first assumption is not a stringent one, as the density enters parametrically and may be changed in the final solution. The relative density of the particles involved in light scattering varies a great deal. The relative density of a particle with respect to sea water may be given by:

$$\rho' = \frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \tag{28}$$

where ρ_p is the density of the particle and ρ_w is the density of the water. The particle size distribution may always be considered to be the sum of several particle size distributions, each with a different density. In that case the solutions will still be valid.

The assumption of sphericity is made in order to be able to assume equal sinking rates for particles with the same diameter, and to obtain a simple expression relating the surface area to the diameter. The particles of interest are small, with a diameter less than 20 microns. The Stokes' settling velocity is thus a reasonable approximation. For life phytoplankton the sinking rate may differ from the Stokes' approximation, although the settling rate is still proportional to the square of the diameter (32).

As we have seen, it is extremely difficult to completely model the growth of the particulate matter in the ocean. In order to get a feeling for what occurs we will permit the particles to grow at some rate related to their diameters. At each depth the population is also being depleted by the grazing of zooplankton. After the dependence of the size of the particle on growth rate, depth, density, etc. has been found we may include this factor, but we will ignore it for the present discussion. Beneath the euphotic zone the particles decay by means of many mechanisms, such as oxidation of organic matter, bacterial activity, dissolution of calcite shells, etc. We will assume that the particles decay at a rate which is related to their diameter. Bacterial activity is probably the fundamental process by which the particle size is reduced in the oceans (26). In that case it is reasonable to assume that the rate of mass loss is proportional to the surface area of the particle. In the case of mass dissolution (decay by solution) it can be shown that the rate of mass loss for particles with a diameter of less than 20 microns is proportional to the particle diameter (33).

The particles usually will change their density somewhat while they are settling, particularly if they consist of a hard inner or outer shell and protoplasm.

Some particles in the ocean, such as materials of terrestrial origin do not decay at all in the oceans. The percentage of organic matter in particulate matter in sea water varies from 14% to 62% (1).

It is clear that any solution obtained using these rather stringent restrictions should not be considered as quantitatively useful, but should be looked upon as a first order solution indicating possible relationships between the particle size distribution and hydrographic features.

We had assumed that the particle is being decayed or grows at a rate related to its diameter. Its rate of change of mass with time is given by:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\rho_p \frac{\pi D^3}{6}\right] \tag{29}$$

where M is the total mass of the particle, and D is the diameter. Since we have assumed that the density of the particle does not change with depth, we may write:

$$\frac{dM}{dt} = \rho_p\left[\frac{d}{dt}\frac{\pi D^3}{6}\right] = \rho_p \frac{\pi D^2}{2}\frac{dD}{dt} \tag{30}$$

or,

$$\frac{dM}{dt} = \rho_p \frac{\pi D^2}{2} R(D) \tag{31}$$

$R(D) = \frac{dD}{dt}$ is a constant if the particles grow or decay at a rate proportional to their surface area. R(D) is inversely proportional to D in the case of mass dissolution. In order to maintain generality we will assume that R(D) is some function of the particle diameter. We will carry the calculations as far as possible without assuming a particular form for R(D).

The particles are assumed to be settling at the Stokes' velocity w_s, which is a good approximation if the Reynolds' number is less than 0.5 (34). We will show that for the small particles under consideration the Reynolds' number is always less than 0.5, so that the Stokes' approximation may be used with confidence.

The Stokes' settling velocity is given by:

$$w_s = \frac{2}{9} g \frac{D^2}{4}\frac{1}{\nu}\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} \tag{32}$$

where D is the diameter of the particle, g the acceleration due to gravity, and ν the kinematic viscosity of sea water, and $\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w}$ is the relative density term already described. Some reasonable values are:

$$g = 980 \text{ cm sec}^{-2}$$
$$\nu = 0.016 \text{ cm}^2\text{sec}^{-1}$$
$$\frac{\rho_p - \rho_w}{\rho_w} = 1.0$$
$$D = 20\mu m \text{ at most}$$

Substituting these values into Equation 33, we see that the maximum Stokes' velocity in our case is approximately:

$$w_s = 2 \times 10^{-2} \text{ cm sec}^{-1}$$

The Reynolds' number is given by:

$$Re = \frac{w_s D}{\nu} \tag{34}$$

The largest Reynolds' number to be expected is:

$$Re = 4 \times 10^{-3}$$

Since the largest Reynolds' number is much less than 0.5, we can use the Stokes' approximation.

The constants in the Stokes' equation (Equation 33) can be combined to give:

$$w_s = \eta D^2 \tag{35}$$

where:

$$\eta = \frac{2}{9} g \frac{1}{4} \frac{\rho_p - \rho_w}{\nu \rho_w} \tag{36}$$

The rate of change of diameter with time was given by:

$$R(D) = \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dz}\frac{dz}{dt} = w_s \frac{dD}{dz} \tag{37}$$

since $\frac{dz}{dt}$ is the settling rate given by the Stokes' velocity, w_s, we may substitute Equation (35) into (37):

$$w_s \frac{dD}{dz} = \eta D^2 \frac{dD}{dz} \tag{38}$$

so that:

$$R(D) = \eta D^2 \frac{dD}{dz} \tag{39}$$

We now integrate from $z = z_0$ to $z = z$ and set $D(z) = D$; $D(z_0) = D_0$:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\eta} = \int_{D_0}^{D} \frac{D^2 dD}{R(D)} \tag{40}$$

The integrals may be left in that form if we wish to consider the change of relative density and kinematic viscosity with depth, or if R is considered to be a function of D.

For a homogeneous layer in the ocean and particles growing or decaying at a rate proportional to their surface area we may assume c constant and R independent of D. The equation may then be simplified:

$$R(z - z_0) = \frac{\eta}{3}(D^3 - D_0^3) \tag{41}$$

Equations 39 through 41 describe the change in size of a spherical particle with depth, relating the change to the density difference and kinematic viscosity represented by the constant c, and a change in size due to the rate of growth R. Equation (36) shows that the constant c is proportional to the density difference and inversely proportional to the kinematic viscosity. From equation (39) it is thus seen that the rate of change of diameter with depth is proportional to the rate of growth of the particles and to the viscosity, and inversely proportional to the relative density. The faster particles grow, the faster they will be able to reproduce, so that we postulate from the equations just developed that higher light scattering will be observed when the relative density decreases, or when the viscosity or rate of growth increases. The development so far has only included the particle size, and not the particle size distribution itself. If the particle size distribution at a depth z is given by f (D,z), equation (41) shows that

$$f(D,z) = f(D_o, z_o) \tag{42}$$

if no grazing takes place. The particles with size D_o at Z_o have grown to size D at depth z. We may assume that small particles (of size D = O) are generated at depth z' in proportion to the total concentration of suspended matter, with a constant of proportionality ω (25). These particles grow and contribute to the particle size distribution at depth z. We then have:

$$f(D,z) = f(D_o,z_o) \qquad \text{for } D^3 \geq \frac{3R(z-z_o)}{\eta}$$

$$\left.\begin{aligned} f(D,z) = f(o,z') = \omega \int_0^\infty f(D,z')\,dD \\ \text{where} \quad z' = z - \frac{\eta D^3}{3R} \end{aligned}\right\} \text{for } D^3 < \frac{3R(z-z_o)}{\eta} \tag{43}$$

We conclude that more particles are generated in a layer the slower the particles are settling, due to either decreased relative density or increased viscosity. In order to assess the effects of vertical eddy diffusion and advection we have to modify the above development. If A_z is the vertical eddy diffusion coefficient, then the flux of particles F of a given size is given by

$$F = -A_z \frac{\partial f(D,z)}{\partial z} + w f(D,z)$$

where w is the total vertical velocity due to both settling and advection. Let W_o be the vertical advective velocity and ηD^2 is the Stokes' settling velocity as before. The flux due to eddy diffusion contributes an effective advective velocity v*.

$$-A_z \frac{\partial f(D,z)}{\partial z} = v^* f(D,z)$$

or,

$$v^* = -\frac{A_z}{f(D,z)} \frac{\partial f(D,z)}{\partial z} \tag{44}$$

It is seen from equation (44) that whenever the concentration is high, eddy diffusion tends to lower the concentration. That is, the effective velocity v* is always away from a maximum and towards a minimum. Whenever the eddy diffusion is low it will be easier to develop a maximum. Consequently we may expect the concentration in a maximum to be negatively correlated with the eddy diffusion. We will now apply the concepts of diffusion and advection to our earlier development.

If, besides Stokes' settling vertical advection and turbulence is present, we must set:

$$W = W_s + W_o + v^* = \eta D^2 + W_o + v^* \tag{45}$$

Then,

$$R(D) = \frac{dD}{dt} = w\frac{dD}{dz} = (\eta D^2 + W_o + v^*)\frac{dD}{dz} \tag{46}$$

and proceeding as previously:

$$\int_{z_o}^{z} dz = \int_{D_o}^{D} \frac{(\eta D^2 + W_o + v^*)\,dD}{R(D)} \tag{47}$$

Considering R, η, v*, and w_o constant then gives:

$$R(z-z_o) = \frac{\eta}{3}(D^3 - D_o^3) + W_o(D-D_o) + v^*(D-D_o) \tag{48}$$

Equation (46) can be rewritten as

$$\frac{dD}{dz} = \frac{R(D)}{\eta D^2 + W_o + v^*} \tag{49}$$

This equation summarizes the various elementary relationships between particulate matter and environmental parameters. If conditions are suited for phytoplankton growth, with high availability of nutrients as the prime criterion, R(D) will be positive and large resulting in a positive rate of increase of particle size. As in equation (43) increasing particle size implies an increase in total particle concentration. When $\frac{dD}{dz}$ is positive v* must be negative (equation 44) and tends to counter act the magnitude of the increase, the larger the turbulence, the larger v* and hence the smaller the rate of increase of particle size and hence particle concentration. The thermocline is a region of minimum turbulence (26) and usually occurs near the bottom of the euphotic zone. The thermocline usually is accompanied by an increase in light scattering as three separate conditions contribute. First, in the euphotic zone particles grow and the

concentration increases with depth. In the thermocline the large concentration of particles in the euphotic zone, is in a region of minimum turbulence so that turbulent transport is small, tending to preserve the maximum. Furthermore, the density of the water increases considerably in the thermocline, reducing the relative density, which slows down the settling particles.

Calculations based on equation (48) have been carried out parametrically and are shown on figure 10. The particle diameter is plotted as a function of $-\frac{Rz}{\eta} \times 10^{-11}$, for various ratios of the vertical velocities $w_0 + v^*$ and η, the Stokes' constant. Since R and η are considered to be constant throughout the water column, the ratio $-\frac{Rz}{\eta} \times 10^{-11}$ is proportional to the depth z. Similarly the ratio $(w_0+v^*)/\eta$ is proportional to the vertical velocity w. A reasonable value for η is 10^{+3} cm^{-1} sec^{-1}, so that a value of 10^{-6} for $(w_0+v^*)/\eta$ on the figure corresponds approximately to a vertical velocity of $w_0 + v^* = 10^{-3}$ cm sec^{-1}.

Some relevant conclusions may be drawn from Figure 10. The percentage of particles observed in nature larger than 20 microns is negligible (1). As an example we will consider the particles in the ocean to be of two types, non-decaying "background" particles, and decaying particles with diameters less than 20 microns. When all particles which are subject to decay with a diameter equal to or less than 20 microns have decayed entirely, the light scattering will be reduced to the scattering due to the non-decaying "background" particles. From Figure 1 we can observe that for $\frac{w_0+v^*}{\eta} = 0$, $-\frac{Rz}{c} = 267 \times 10^{-11}$ cm^3 when the 20 micron particles are entirely decayed. If we assume that the depth at which all decaying particles have disappeared is known, we may calculate a value for R. Carder (1970) indicates that below approximately 1000 m depth the particle size distribution changes very little. If we let $z = 10^5$ cm, and take $\eta = 10^3$ cm^{-1} sec^{-1}, we obtain $R = -2.67 \times 10^{-11}$ $\frac{cm}{sec}$.

For $\frac{w_0+v^*}{\eta} = -10^{-6}$ cm^2, which means a vertical advective velocity upward of approximately 10^{-3} $\frac{cm}{sec}$, the decaying particles would penetrate to 510 meters depth before being forced upward by vertical advection exceeding the Stokes' settling rate.

Figure 10 also shows that for values of $\frac{w_0+v^*}{\eta} > 10^{-5}$ the particle settling velocity is negligible compared to the vertical velocity. This occurs when the advective velocity is larger than 10^{-2} $\frac{cm}{sec}$. Knauss (35) estimated an average vertical velocity of approximately 10^{-3} $\frac{cm}{sec}$ in the Cromwell current area. It thus appears that even in such a turbulent area as the Cromwell current, the particle settling velocity cannot be ignored.

It should be noted that the results in Figure 10 are independent of the particle size distribution. Since the trajectories of the particles are now known, the size of each particle may be calculated at any depth. If we know the particle size distribution at any depth z_0, we may then calculate the particle size distribution at any depth z by means of Equation (48) if we know the manner in which the particles grow and decay.

Very little data is currently available to describe the depth dependence of the $\frac{b}{c}$ or $\frac{a}{b}$ ratios, as simultaneous measurements to great depths of b and c or a and b are difficult to obtain with current instrumentation. The development of an approximate theory for the $\frac{a}{b}$ ratio as a function of depth is thus largely based on conjecture. Nevertheless, the approximation to be developed appears to give reasonable results for the few observations available.

As we have seen, light scattering in the ocean is primarily due to suspended matter and water itself. If we wish to obtain information concerning the ratio of the total scattering coefficient and the total attenuation coefficient, $\frac{b}{c}$, we must take into account the absorption of light. Light absorption can play a major role in total attenuation. (See for instance Table 1) An important contributor to light absorption is the so-called yellow matter. These dissolved substances are by-products of the decay of organic materials. In the ocean the yellow matter is thus produced when phytoplankton are decaying. The light absorption by yellow matter increases sharply with decreasing wavelength of light. In the surface layers yellow matter is consumed by living organisms. Near the surface of the ocean, there is therefore consumption, and little generation of yellow matter. As we descend into the oceans, consumption will decrease and generation of yellow matter will continue until all material that can decay has in fact decayed. As we have mentioned before, beneath some depth in the ocean the particle concentration changes very little. Beneath this depth no generation of yellow matter is likely to take place. The concentration of yellow matter in the deep ocean will thus probably maintain a fairly constant value due to downward diffusion of yellow matter. Beneath the euphotic zone no consumption of yellow matter is likely to occur, so we expect the concentration to increase with depth below the euphotic zone as generation only takes place. In the euphotic zone itself yellow matter concentration should be at a minimum due to high consumption and low generation.

The shape of the particle size distribution stays relatively constant with depth, so that if the index of refraction does not change too much the ratio $\frac{b}{c}$ for particles will also be relatively constant. The major changes of $\frac{b}{c}$ as a function of depth will thus be attributed to yellow matter generation and consumption.

Keeping the above heuristic model in mind, we can construct a very simple model for the depth dependence of $\frac{b}{c}$ or $\frac{a}{b}$. First, we will make the usual assumption that the total scattering coefficient b is proportional to some volume scattering observation at an angle γ, $\beta(\gamma)$. A reasonable assumption for the yellow matter concentration at a depth z, Y(z) would be that it is proportional to the total amount of particulate matter that has decayed down to that depth.

If we assume that the concentration of particulate matter is proportional to the observed light scattering we have:

$$Y(z) \propto \beta_\gamma(z=0) - \beta_\gamma(z) \qquad (50)$$

Since the concentration of yellow matter is thought to be proportional to the absorption coefficient, we may postulate that

$$\frac{a}{b} \propto \frac{\beta_\gamma(0) - \beta_\gamma(z)}{\beta_\gamma(z)} \tag{51}$$

From equation (51) we can obtain a qualitative description of the depth dependence of the $\frac{a}{b}$ ratio from scattering observations alone. The ratio $\frac{b}{c}$ is proportional to $\beta_\gamma(z)/c$. In order to test the theory a set of observations of $\beta_{6\circ}(z)$ and c(z) obtained by Matlack (36) were used (see Figure 11). Since

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} - 1 \tag{52}$$

we can get

$$r_1 \frac{c(z)}{\beta_\gamma(z)} = r_2 \frac{\beta_\gamma(0) - \beta_\gamma(z)}{\beta_\gamma(z)} + 1 \tag{53}$$

where r_1 and r_2 are undetermined constants. From the observations best values for r_1 and r_2 can be determined. In figure 12 are shown the $\frac{c}{b}$ ratio from c(z) and $\beta_\gamma(z)$ observations, as well as $\frac{a}{b}$ ratios obtained from equation (52) using c(z) and $\beta_\gamma(z)$ data alone. It is seen that the shape of the depth dependence is similar for $\frac{a}{b}$ ratios determined by the two methods.

It is also seen that the relative importance of absorption in attenuation increases downward from the surface, reaches a maximum and finally becomes constant. An approximate shape of the depth dependence of $\frac{a}{b}$ can thus be obtained from equation (51), although absolute values cannot currently be obtained with currently available instrumentation.

EXPERIMENTAL RESULTS

In the previous sections we have obtained qualitative relationships between the observed optical parameters and the physico-chemical observables in the ocean. In this section we will take a look at observed horizontal and vertical distributions of the paramters in the light of the simple theory presented.

Figure 13 (36) is a vertical profile of the beam attenuation coefficient c at two wave lengths combined with a profile of temperature. In the first 55 m the temperature is nearly constant. A sharp break in the temperature profile at 55 m indicates the beginning of the thermocline. Near the beginning of the thermocline, which here coincides with the bottom of the euphotic zone, c begins to increase reaching a maximum at about 65 m depth. This is a typical response of the settling particulate matter to a decrease in mixing (increased stability) and a decrease in relative density.

Since particle generation and growth does not take place beneath the euphotic zone (here 0 to about 45 m), the particle must decay. From the maximum downward we thus observe a steady decrease in particle concentration and hence beam attenuation. Figure 12 (36) is similar to figure 13, but the depth scale has been decreased to show that at a certain depth (here 500 m) the beam attenuation no longer decreases, but becomes approximately constant. All material that can be oxidized has been decayed at that depth. As was pointed out in the theoretical section the depth at which total decay has occurred can be used to obtain an approximate value for the decay rate of the particulate matter. Figures 13 and 14 represent very typical profiles for the deep ocean. Near the coast the profiles will often be changed due to advective processes and increased mixing.

Upwelling occurs along many of the commercially important coasts of the world. Areas in which this phenomenon occurs provide a good laboratory for the study of particulate matter in relation with physico-chemical parameters. Figures 15, 16 and 17 (37) are transects of temperature, density and light scattering taken off the Oregon coast at two different times. The t_2 stations were taken after a period of calm weather, whereas the t_3 stations were taken after the wind had increased considerably for a period of more than a day. Station DB-15, furthest to the West is relatively free of coastal influences. It is seen that the t_2 station shows a higher density gradient and turbidity (light scattering) gradient than the t_3 station. This is in accordance with our earlier theoretical observation than increased mixing (caused by the increased surface wind stress) tends to lower the particle gradients due to turbulent vertical transport away from the maximum. Shoreward of station DB-10 active upwelling takes place with deduced vertical velocities of approximately 10^{-2} cm/sec. Equation 48 and figure 10 had shown us that for such a large vertical velocity the particulate matter is eventually embedded in the fluid as the settling velocity has become negligeable. In such a case the distribution of particulate matter should be well correlated with the distribution of temperature. This is indeed the case. Figures 15 and 17 show a tongue of cold, clear water extending from 30 m at DB-7 to the surface at DB-1. This is water in the process of upwelling. As a water particle decreases in depth, photosynthesis becomes possible and a large number of particles is generated due to advection of nutrients by the upwelling water. This process results in maximum turbidity near the coast in shallow water where all conditions for maximum growth (large concentration of nutrients and sunlight) are met. The upwelled water becomes warmer and more turbid and proceeds to sink along constant density lines which slope upward towards the coast (figure 16). The descending warm, turbid water subsequently forms a temperature and turbidity inversion (t_2 stations, figures 15 and 17). The t_3 stations show no temperature inversion and a weaker turbidity inversion due to increased mixing. The coastal upwelling regime is thus an example of a region in which the distribution of optical observations can at least qualitatively be related to the dynamics of the physico-chemical parameters.

The Oregon coastal region also affords a study of the horizontal distribution of the parameters under consideration. Figure 18 (28) shows the influence of the Columbia River on the physical properties and light scattering offshore. The influence of a river outflow on nearshore parameters is of interest as many coastal areas are influenced by such a source. Usually a river is a source of warm, fresh and particle-rich water. As can be seen in figure 18, the river plume is clearly visible as a tongue extending southward. The sections were taken during late June and early July. The southward flow may be attributed to the north or northwesterly winds that prevail in the summer. This wind also is the cause of upwelling near the coast. We have seen already upwelling results in high light scattering and low temperatures. The upwelling influences the near-shore distribution of the parameters as can be seen in figure 18. The Columbia River is a typical example of an advective source of particulate material. Such a source often constitutes a different water-mass and exhibits different physical properties as well. Further away from the source the characteristics of the advected water-mass become less distinct due to horizontal and vertical mixing. The light scattering is also diminished by settling of the particles. Pak et. al. (28) attribute the fact that toward the south the light scattering decreases more rapidly than temperature or salinity, to vertical settling of the particulate matter.

Figures 19 and 20 show the light scattering at 45° and total suspended matter distributions in a large ocean area. The figures cover a cross-section along the equator from Ecuador on the right, to just north of Santa Cruz island of the Galapagos group on the left. Both the light scattering and suspended matter show a surface maximum and decreasing concentration with depth down to 1000 m. Near the coast of Ecuador at 1200 m depth a source of particulate matter can be seen. Some of the material is advected at depth towards the west, and another part settles into the trench. The trench is a sink for particulate matter and shows increasing light scattering and suspended matter concentration as a function of depth. This is an example of a nepheloid layer, a layer of high particle concentration and light scattering at a great depth. The mechanisms by which these layers are maintained are as yet unclear, (17) but included in possible mechanisms must be decreased relative density, decreased turbulence and advective processes. The deep nepheloid layer is seen to extend over most of the near-bottom region in the cross-section. The high concentration of matter and light scattering at station 26 is probably related to erosion and subsequent advection of particulate matter from a saddle in the Carnegie Ridge, just to the south of the cross-section. The distributions shown are representative of areas with rugged topography. In these areas bottom-generated clouds of particles are often encountered. In an area of subdued bottom topography the upper 1000 m would be similar but once a minimum has been reached no subsequent increases in concentrations would be observed, unless a water-mass with larger particle concentration enters the region.

As a final example of the distribution of optical parameters in the ocean, we will consider the equatorial region just west of the Galapagos Islands. In this area a major subsurface current, the Cromwell current exists. The Cromwell current usually extends from about 2° N latitude to 2° S latitude between the depths of approximately 50 m and 250 m. The eastward flowing Cromwell current is embedded in the westward flowing South Equatorial current. The Cromwell current is a region of high turbulence, resulting in more uniform properties within the current region. First, we will look at the hydrographic properties, after which we will analyze the distribution of optical properties in comparison with the physical properties. (27, 38)

The presence of the Cromwell current can be inferred from the temperature structure near the equator. The presence of the Cromwell current is indicated by deepening of isothermal surfaces beneath the thermocline and to a lesser extent by shallowing of the isothermal surfaces above the thermocline (39, 40).

Figure 21 shows the temperature structure as observed at 92°00'W during the Yaloc '69 expedition of Oregon State University in February 1969. A strong thermocline exists clearly to the South of 3° S at approximately 50 m depth. A slightly weaker thermocline is apparent to the North of 1° N, also at 50 m depth. The most nearly level isotherm in the Cromwell current region is the 20° C isotherm at approximately 60 m depth. Between 2° S and 1° N the thermocline is weakened considerably.

In the Atlantic Ocean the Equatorial Undercurrent is associated with a salinity maximum (41). In the Pacific Ocean a tongue of high salinity water extends from the South into the Cromwell current at a depth of approximately 100 meters (35). This feature was observed during Yaloc '69 (Figure 22).

Beneath the high velocity core the Cromwell current region is characterized by extremely small vertical oxygen content gradients of less than 0.01 ml/l/m (42). We observed a similar feature at 92°00'W (Figure 23). The minimum vertical oxygen content gradient we observed occurred between 0°30'S and 0°15'N, and between 100 m and 300 m depth. This area has an almost uniform oxygen content between 3.00 ml/l and 2.75 ml/l. The vertical oxygen content gradient in this area is less than 0.002 ml/l/m.

Our observed hydrographic properties at 92°00'W thus resemble those further upstream. The vertical gradients of the hydrographic properties in the Cromwell current were much smaller than the yearly averages upstream.

We showed that the hydrographic properties at 92°00'W indicated that the Cromwell current was present. Since the Cromwell current is characterized by typical hydrographic properties, such as spreading of isograms, it seems likely that the Cromwell current would exhibit its own typical light scattering distributions, and its own typical particle count distributions.

Figure 24 shows the distribution of light scattering at 45° from the forward direction, $\beta(45)$, for the meridional section at 92°00'W. The distribution of light scattering in the Cromwell current is in many ways similar to the distribution of the hydrographic properties.

Figure 24 shows that at 1°00'N latitude and at 3°00'S latitude there are well-developed vertical gradients of light scattering associated with the thermocline at approximately 50 m depth. The thermocline exists to the North and South of the Cromwell current, but the temperature gradient is weakened in the Cromwell current. The same is true for light scattering. The mechanism that maintains the high scattering gradient is weakened in the Cromwell current. The same is true for light scattering. The

mechanism that maintains the high scattering gradient near 50 m depth to the North and South of the Cromwell current is probably the same as the mechanism maintaining the thermocline itself. The thermocline is a region of minimal vertical eddy diffusion as the stability is large (Jerlov, 1959). As was shown in the theoretical section a minimum in eddy diffusion can be related to high scattering gradient. The high light scattering gradients to the South of 3°S and to the North of 1°N at approximately 50 m depth in the region of the thermocline can thus be accounted for.

In the surface layer between 0 m and 50 m depth small light scattering gradients can be observed. The surface layer is well-mixed so that the theory predicts low light scattering gradients.

A related feature is a meridional surface minimum in $\beta(45)$ above the Cromwell current. This observation must be compared with those of Jerlov taken during the Swedish Deep-Sea expedition. Jerlov (19) describes a particle concentration maximum between 2°N and 2°S latitude. Jerlov's surface maximum in particle concentration may be explained by increased plankton activity due to upwelling water that is rich in nutrients. We observed a narrow minimum in light scattering above the Cromwell current between 1°S and 0° latitude. The narrow minimum we observed is embedded in the broader maximum observed by Jerlov and ourselves. The region of minimum light scattering at the surface must be attributed to mixing or upwelling of the deeper and clearer water. Once at the surface this water is carried away from the equator, and induces increased plankton growth as it is rich in nutrients.

Observations of particle counts typically show greater variability than light scattering measurements and hence do not show the same detail. A feature which is clearly present is the deepening of the particle concentration isograms beneath 50 m depth in the region between 0°30'N and 1°00'S latitudes (Figure 25).

CONCLUSIONS

The optical parameters in the ocean depend on the size distribution, shape and complex index of refraction of the suspended particulate matter. To the light scattering and attenuation due to particulates must be added the usually minor contributions of dissolved materials and water itself.

The distribution of particulate matter in the ocean largely determines the distribution of the optical parameters. Particulate matter concentrations and size distributions depend on many processes. The distribution of particulate matter is influenced by horizontal and vertical advection, settling, decay and mixing. Near the surface biological activity and advection by wind constitute a source of particulate matter. A maximum in particle concentration is often encountered at the top of the thermocline due to decreased mixing and decreased relative density. Quantitative predictions of the increased concentration should be possible by means of the diffusion equation if the advective velocities of the particles, their mixing coefficients and rates of decay or growth are known. This is, however, rarely the case. Beneath the euphotic zone particles decay and the concentration decreases to a broad minimum. Near the bottom upward diffusion of particles eroded by bottom currents may generate a bottom nepheloid layer. At any depth advection of particle rich waters may create a local particle maximum.

The optical properties generally show the same depth dependence as the particulate matter.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the Office of Naval Research contract ONR NOOO 14-67-A-0369-0007.

REFERENCES

1. Jerlov, N. G. "Optical Oceanography" Elsevier, Amsterdam, 1968.
2. Jerlov, N. G. "Optical studies of ocean water". Reports of the Swedish Deep-Sea Expedition 3:1-59, 1951.
3. Jerlov, N. G. "Factors influencing the transparency of the Baltic waters". Medd. Oceanog. Inst. Göteborg, 25, 1955.
4. Honey, R. C. and G. P. Sorensen in "Electromagnetics of the Sea" AGARD Conference Proceedings No. 77 p. 39, 1970.
5. Hodgson, R. T. and D. R. Caldwell "Application of Fourier techniques to underwater image transmission: a test of the linear-invariant hypothesis". J. Opt. Soc. Am. 62, 1434-1437, 1972.
6. Preisendorfer, R. W. "Radiative transfer on discrete spaces". Pergamon Press, Oxford, 1965.
7. Joseph, J. "Untersuchungen über Ober-und Unterlicht-messungen im Meere und über ihren Zusammenhang mit Durchsichtigkeitsmessungen". Deut. Hydrograph. Z., 3:324-335, 1950.
8. Tyler, J. E. "Observed and computed path radiance in the underwater light field". J. Marine Res., 18:157-167, 1960.
9. Smoluchowski, M. "Molekular-kinetische Theorie der Opaleszenz von Gasen im kritischen Zustande, sowie einiger verwandter Erscheinungen". Ann. Physik, 25:205, 1908.
10. Einstein, A., "Theorie der Opaleszenz von homogenem Flüssigkeitsgemischem in der Nähe des kritischen Zustandes". Ann. Physik, 33:1275, 1910
11. Le Grand, Y., "La pénétration de la lumière dans la mer". Ann. Inst. Océanog., 19:393-436, 1939.
12. Morel, A., "Optical properties of pure water and pure sea water". To be published in "Optical Aspects of Oceanography". N. G. Jerlov, Ed. Academic Press, London, 1973.

13. Kopelevich, O. V. and V. I. Burenkov, "The nephelometric method for determining the total scattering coefficient of light in sea water". Izv., Atmosph. Ocean. Physics, 7:1280-1289, 1971.

14. Mie, G., "Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidalen Metallösungen". Ann. Physik., 25:377, 1908.

15. Hodkinson, J. R. "Light scattering and extinction by irregular particles larger than the wavelength". I.C.E.S. Electromagnetic Scattering, Pergamon, London, 5:37-100, 1963.

16. Burt, W. V., A light scattering diagram". J. Marine Res., 15:76-80, 1956.

17. Plank, W. S., H. Pak and J. R. V. Zaneveld, "Light scattering and suspended matter in nepheloid layers". J. Geophys. Research, 77:1689-1694, 1972.

18. Kalle, K., "Bericht Z. Teilfahrt der deutsche nordatlantische Expedition " Meteor." V. Die chemischen Arbeiten auf der" Meteor" - Fahrt, Januar bis Mai 1938." Ann. Hydrograph Maritimen Meteorol., Beih. Z., (Januar) 23-30, 1939.

19. Jerlov, N. G. "Particle distribution in the ocean". Rep. swed. Deep-Sea Exped., 3, 73-97, 1953.

20. Beardsley, G. F., Jr., H. Pak, K. Carder and B. Lundgren. "Light scattering and suspended matter in the eastern equatorial pacific ocean". J. Geophys. Res. 75:2837-2845, 1970.

21. Zaneveld, J. R. V. and H. Pak "A method for the determination of the index of refraction of particles suspended in the ocean" J. Opt. Soc. Am. (In Press), 1973.

22. Van de Hulst, H. C., "Light scattering by small particles". John Wiley & Sons, New York, 1957.

23. Carder, K. L. "Particles in the Eastern Pacific Ocean: their distribution and effect upon optical parameters". Ph.D. Thesis, Oregon State University, 1970.

24. O'Brien, J. J. and J. S. Wroblewski "A simulation of the mesoscale distribution of the lower marine trophic levels off West Florida". Submitted to Investigacion Pesquera, 1973.

25. Riley, G. A., H. Stommel and D. F. Bumpus". Quantitative ecology of the plankton of the Western North Atlantic". Bull. Bingham Oceanog. Coll., 12:1-169, 1949.

26. Jerlov, N. G. "Maxima in the vertical distribution of particles in the sea". Deep-Sea Res. 5:178-184, 1959.

27. Zaneveld, J. R. V. "Optical and hydrographic observations of the Cromwell current between 92°00'W and the Galapagos Islands". Ph.D. thesis, Oregon State University, 1972.

28. Pak, H., G. F. Beardsley, Jr. and P. K. Park "The Columbia River as a source of marine light scattering particles". J. Geophys. Res. 75:2837-2845, 1970.

29. Wyrtki, K.,"Über die Beziehungen zwischen Trübung und ozeanographischem Aufbau". Kieler Meeres - forsch., Inst. Meeresk. 7:87-107, 1950.

30. Ichiye, T. "Turbulent diffusion of suspended particles near the ocean bottom". Deep-Sea Res., 43:679-685, 1966.

31. Pak, H., J. R. V. Zaneveld and G. F. Beardsley, Jr. "Mie scattering by suspended clay particles". J. Geophys. Res. 75:2837-2845, 1971.

32. Eppley, R. W., R. W. Holmes and J. D. H. Strickland "Sinking rates of marine phytoplankton measured with a fluormeter". J. exp. mar. Biol. Ecol. 1:191-208, 1967.

33. Pond, S., R. M. Pytkowicz and J. E. Hawley "Particle dissolution during settling in the oceans". Deep-Sea Res. 18, 1135-1139, 1971.

34. Prandtl, L. and O. G. Tietjens "Applied hydro - and aerodynamics". Dover, New York, 1957.

35. Knauss, J. A. "Further measurements and observations on the Cromwell current. J. Marine Res., 24:205-239, 1966.

36. Matlack, D. E. "The Deep Ocean Optical Measurement (DOOM) program". Naval ordinance Laboratory Ref. NOLTR 70-165, 1971.

37. Pak, H., G. F. Beardsley, Jr., and R. L. Smith "An optical and hydrographic study of a temperature inversion off Oregon during upwelling". J. Geophys. Res., 75:629-636, 1970.

38. Zaneveld, J. R. V., H. Pak and W. S. Plank "Optical and hydrographic observations of the Cromwell current between 92°00'W and the Galapagos Islands" J. Geophys. Res. (In Press), 1973.

39. Wooster, W. S. and F. Jennings "Exploratory Oceanographic observation in the eastern tropical Pacific January to March, 1953". California Fish and Game, 41:79-70, 1955.

40. Wooster, W. S. and T. Cromwell "An oceanographic description of the eastern tropical Pacific". Bull. Scripps Inst. Oceanog. I:109-182, 1958.

41. Metcalf, W. G., A. D. Voorhis and M. C. Stalcup "The Atlantic equatorial undercurrent" J. Geophys. Res. 67:2499-2508, 1962.

42. Bennett, E. B. "An oceanographic atlas of the eastern tropical Pacific ocean, based on data from the EASTOPAC Expedition Oct. - Dec. 1955". Int. Amer. Trop. Tuna Comm. Bull. 8:1-165, 1963.

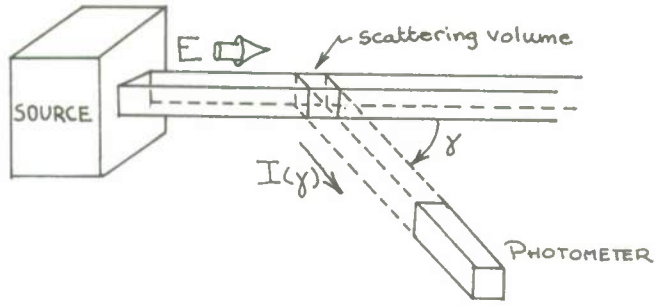


Figure 1. Measurement of the volume scattering function. E is the irradiance incident on the scattering volume. I (γ) is the radiant intensity scattered at an angle γ from the forward.

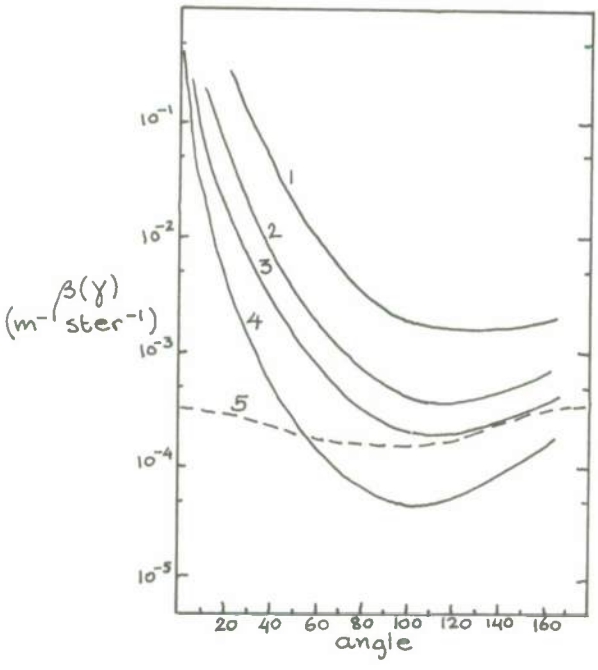


Figure 2. Typical scattering functions. 1, 2, 3 and 4 are particle scattering functions for coastal, turbid, medium and clear ocean water, respectively. 5 is the scattering function for water at 460 mm.

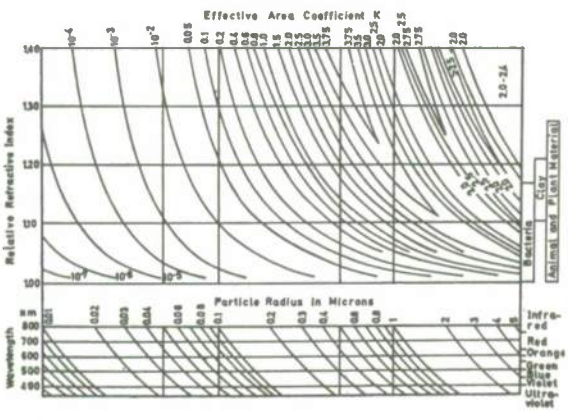


Figure 3. The effective area coefficient K_{sca} as a function of wavelength, index of refraction and particle radius. After (16)

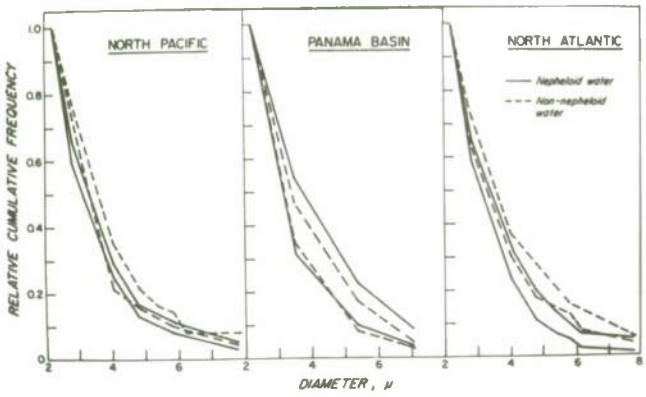


Figure 4. Typical particle size distributions After (17).

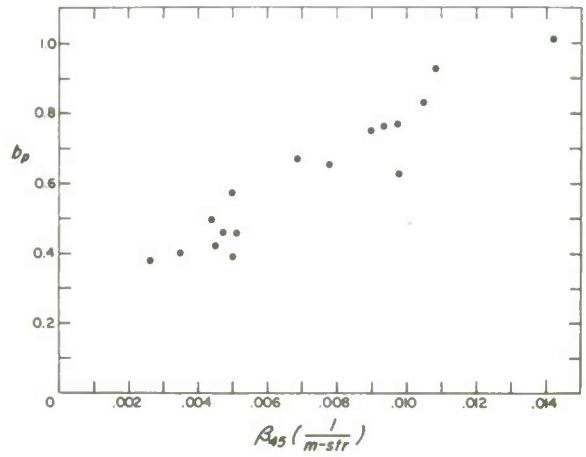


Figure 5. Scatter diagram of the total scattering coefficient due to particles, b_p, and the volume scattering function at 45°, β_p (45°). After (20).

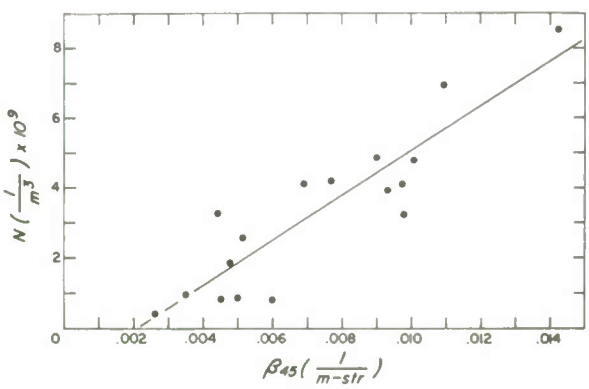


Figure 6. Scatter diagram of the total scattering coefficient due to particles, b_p, and the number of particles larger than 2.2 μm per unit volume After (20).

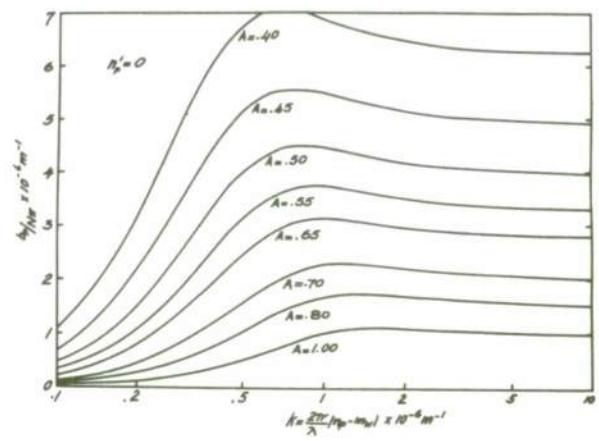


Figure 7. The total scattering coefficient per particle $b_p/N\pi$ as a function of the index of refraction parameter $K = \frac{2\pi}{\lambda}|n_p - m_w|$ and the parameter A of the exponential particle size distribution for the case of nonabsorbing spheres. After(21).

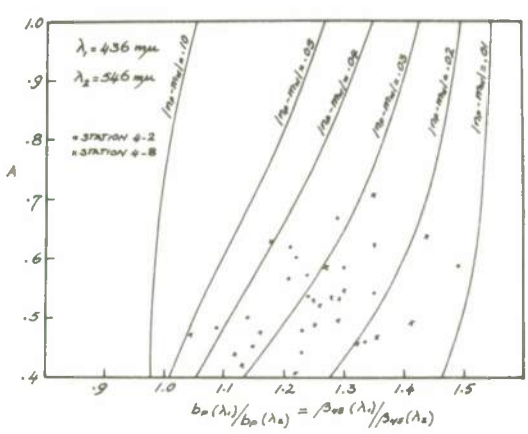


Figure 8. The difference between the particle and water indices of refraction $|n_p - m_w|$ as a function of the exponential particle size distribution parameter A and the ratio of light scattered at 45° for two wavelengths $\beta_{45}(\lambda_1)/\beta_{45}(\lambda_2)$. Dots and crosses mark samples taken from two stations off the coast of Ecuador. After (21).

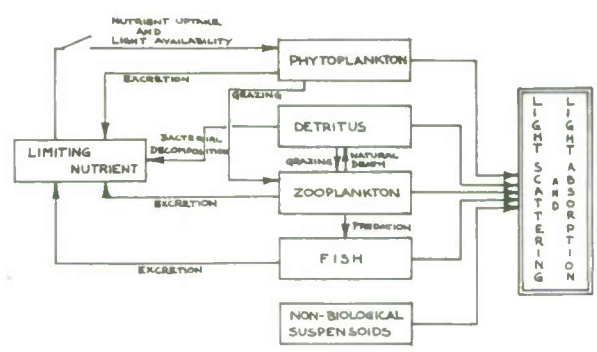


Figure 9. Flow diagram showing the dependence of light scattering and absorption on chemical and biological processes. Modified from (24).

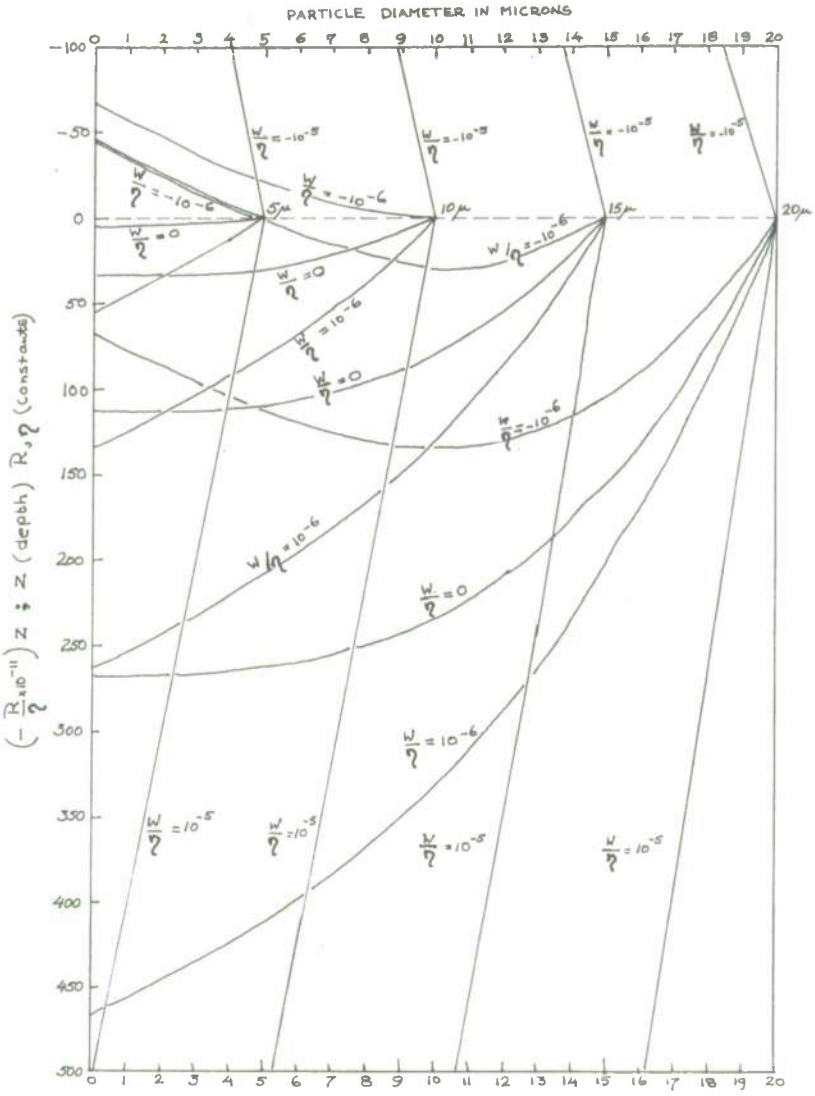


Figure 10. Particle diameter as a function of $\left(-\frac{R}{\eta} \times 10^{-11}\right) Z$ for different values of W/η. $(-R/\eta \times 10^{-11})Z$ is proportional to depth. W/η is proportional to the vertical velocity due to advection and diffusion. The particles are settling at the Stokes' velocity and are decaying at a rate proportional to their surface area. After (27)

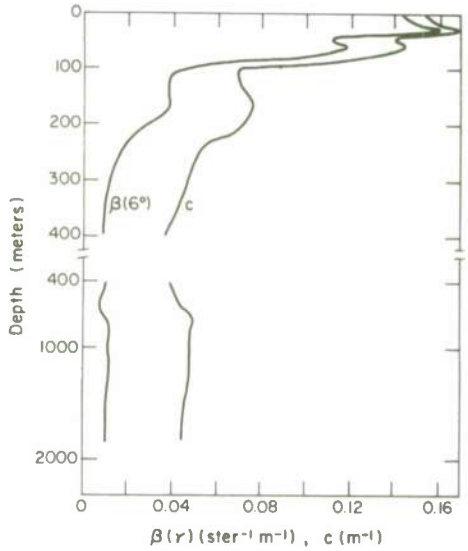


Figure 11. Vertical profiles of light scattering at 6°, β(6°) and the total attenuation coefficient c taken in the North Atlantic. (After (36).

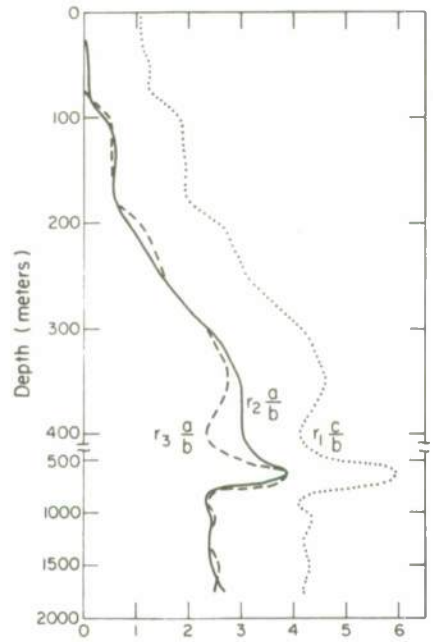


Figure 12. A comparison of vertical profiles of $\frac{a}{b}$ in arbitrary units. $r_1\, c/b$ and $r_3\, a/b$ obtained from both β(6°) and c data whereas $r_2\, a/b$ was obtained from β(6°) data alone.

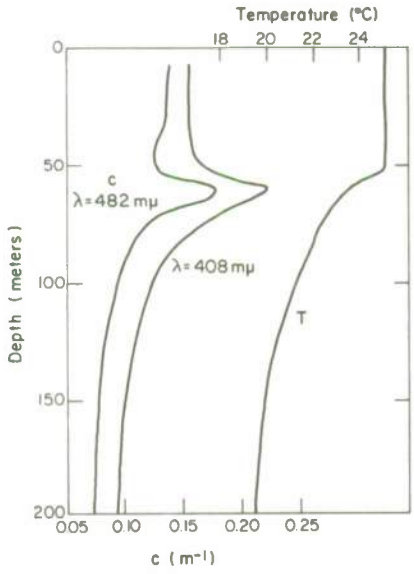


Figure 13. Vertical profiles of the beam attenuation coefficient c for two wavelengths and temperature taken in the North Atlantic. (After 36)

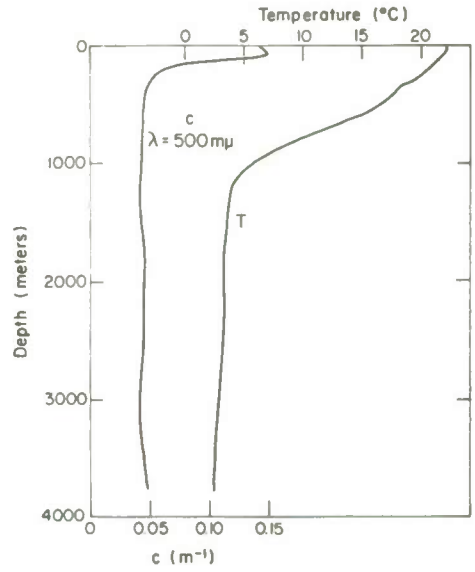


Figure 14. Vertical profiles of the beam attenuation coefficient and temperature in the North Atlantic. After (36).

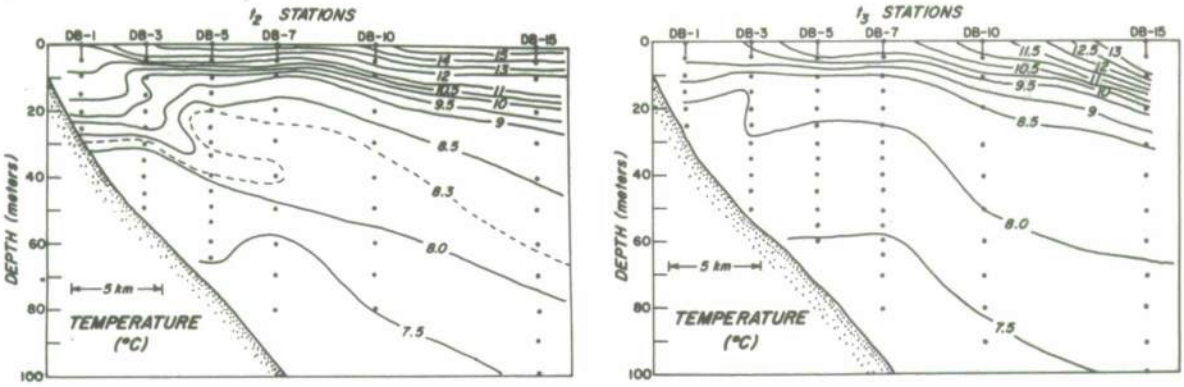


Figure 15. Temperature transects taken off the Oregon coast. t_2 Stations were taken after calm weather, whereas t_3 Stations were taken after the wind had increased considerably. After (37).

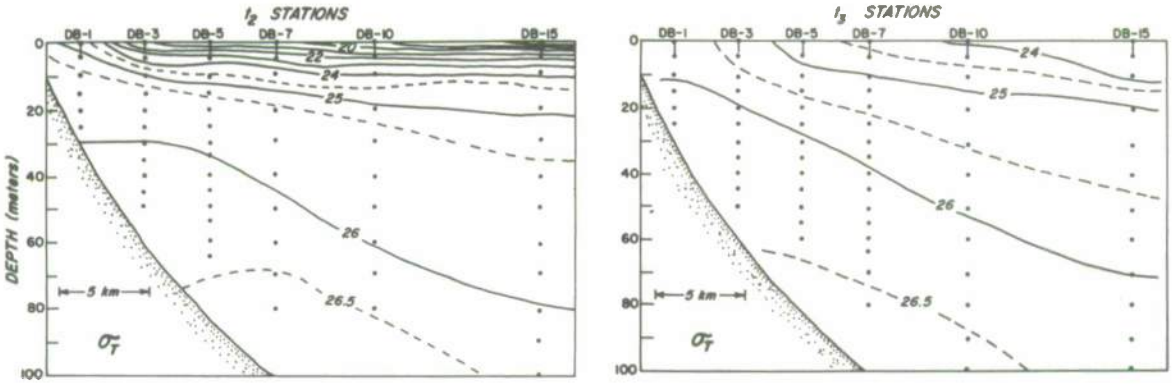


Figure 16. Density (σ_t) transects at the same location and at the same times as in figure 15. After (37).

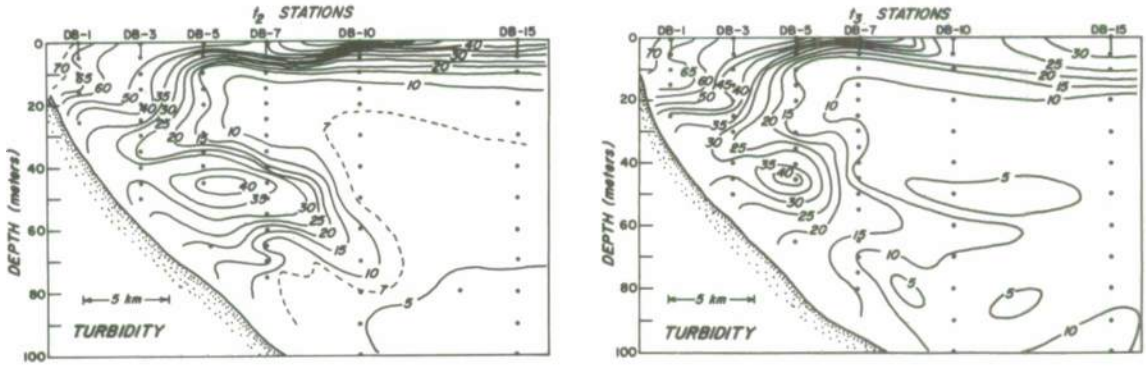


Figure 17. Light scattering at 45° in relative units (turbidity) taken at the same location and at the same times as in figure 15. After (37).

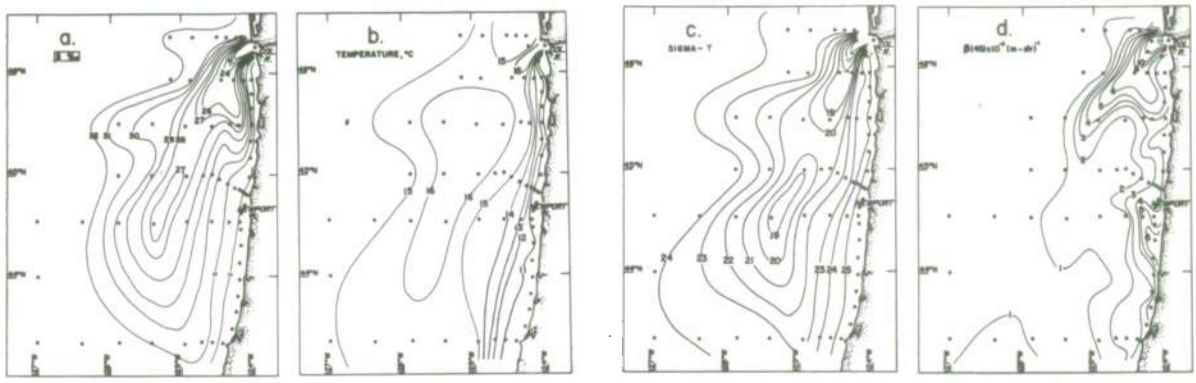


Figure 18. Horizontal distributions of salinity, temperature, density (σ_t) and light scattering at 45°, taken at the surface off the Oregon coast, during early summer, indicating the influence of the Columbia River plume. After (28).

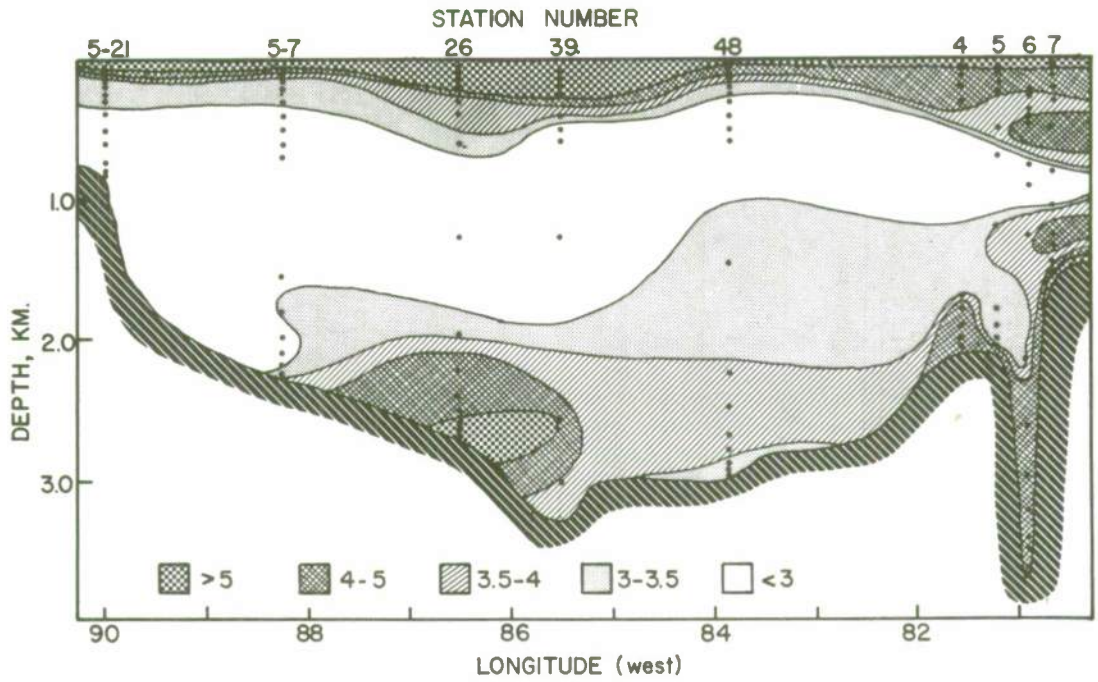


Figure 19. Light scattering at 45° (m^{-1} $ster^{-1}$ x 10^{-3}) taken on a section along the Equator from the coast of Ecuador on the right to just north of Santa Crus island in the Galapagos on the left.

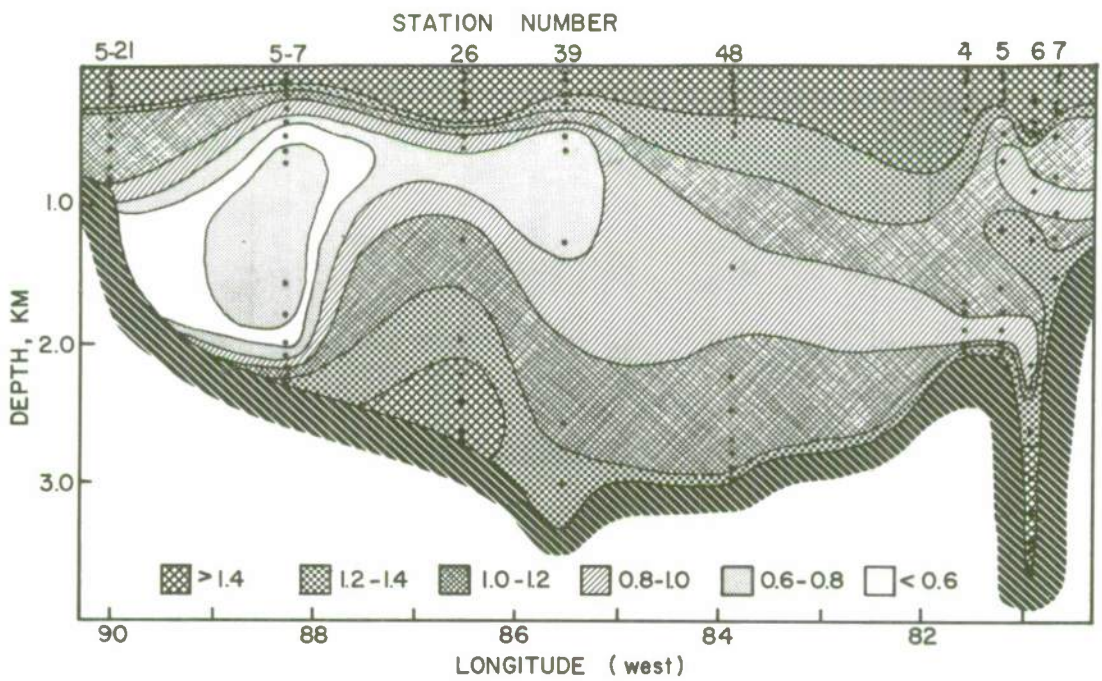


Figure 20. Particle volume concentration in parts per million x 10^{-2} of particle between 2.2 μm and 10.2 μm Diameter.

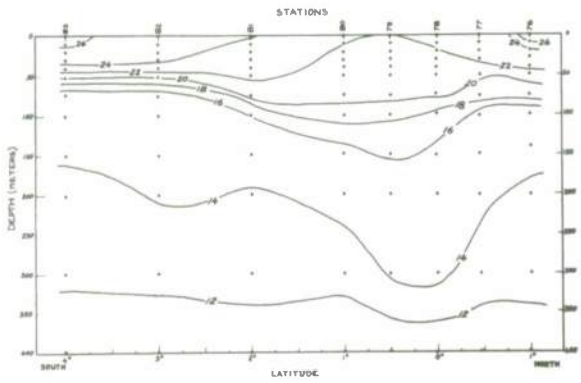


Figure 21. Temperature (°C) at 92°00'W longitude. After (27)

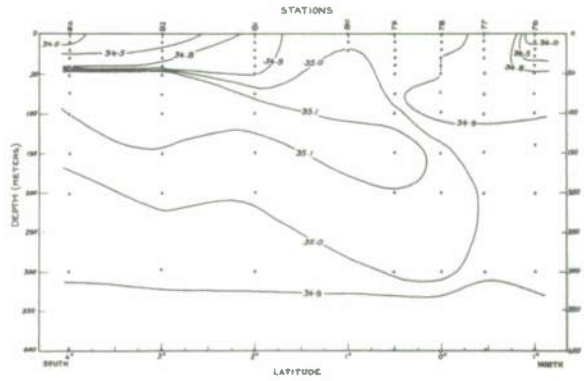


Figure 22. Salinity (‰) at 92°00'W longitude. After 27).

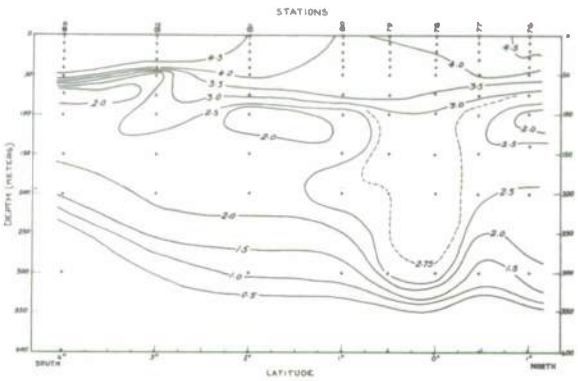


Figure 23. Oxygen content (ml/1) at 92°00'W longitude. After (27).

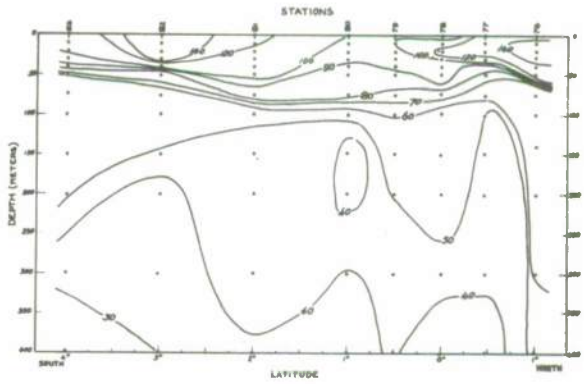


Figure 24. Light scattering at 45° (m-steradian)$^{-1}$ x 10^{-4} at 92°00'W longitude. After (27).

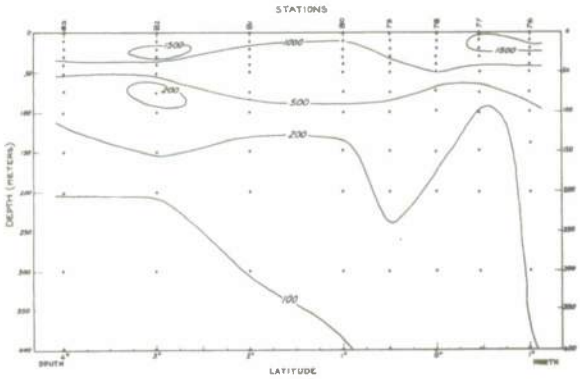


Figure 25. Total particle content per cc for particles with diameters greater than 2.2 μm at 92°00'W. After (27).

TABLES

Location	Wavelength (nm)	$c-c_w (m^{-1})$	$b-b_w (m^{-1})$	$a-a_w (m^{-1})$	Reference
Sargasso Sea	440	0.05	0.04	0.01	(2)
Caribbean Sea	655	0.06	0.06	0.00	(2)
	440	0.09	0.06	0.03	
Equatorial Central Pacific	440	0.09	0.05	0.04	(2)
Romanche Deep	440	0.12	0.07	0.05	(2)
Galapagos Islands	655	0.11	0.07	0.04	(2)
	440	0.24	0.08	0.16	
Kattegat	655	0.23	0.15	0.08	(3)
	380	0.54	0.16	0.38	
South Baltic Sea	655	0.27	0.20	0.07	(3)
	380	1.15	0.21	0.94	
Bothnian Gulf	655	0.38	0.28	0.10	(3)
	380	1.72	0.31	1.41	

Table 1. Typical values of a, b and c. Values for pure water have been subtracted.

Scattering Angle (degrees)	Volume Scattering Function (m^{-1} steradian^{-1}) x 10^{-4}
0	3.17
10	3.13
20	3.00
30	2.80
45	2.45
60	2.11
75	1.86
90	1.74
105	1.86
120	2.11
135	2.45
150	2.80
160	3.00
170	3.13
180	3.17

Table 2. Theoretical Volume Scattering function for pure water at 460 nm. After (6).

DIFFUSION DE LA LUMIERE PAR LES EAUX DE MER.

RESULTATS EXPERIMENTAUX ET APPROCHE THEORIQUE.

par

André Morel

Université de Paris,
Laboratoire d'Océanographie Physique,
Centre de Recherches Océanographiques de Villefranche-sur-Mer.

06230, Villefranche-sur-Mer,
FRANCE

PREAMBULE

En dépit d'un caractère qui parait parfois spéculatif, l'étude de la diffusion de la lumière par les eaux de mer a toujours eu et a de plus en plus des motivations pratiques. Ce phénomène reflète globalement une caractéristique des eaux de mer, essentielle du point de vue de la sédimentologie ou de la géochimie ou encore de la biologie, à savoir la concentration de la matière particulaire en suspension. La diffusion, est en fait, une redistribution spatiale de l'énergie qui ne se fait pas au hasard, mais au contraire selon une loi que précisément décrit "l'indicatrice de diffusion". La détermination de celle-ci, associée à son interprétation théorique, autorise l'espoir d'obtenir sur les particules et leurs propriétés des informations complémentaires à celles que fournit, quelque fois plus difficilement, l'observation directe.

De plus, tous les problèmes de l'optique océanographique, ceux de la propagation ou plus généralement du transfert radiatif de rayonnement, comme ceux de la destruction des contrastes, c'est à dire de l'imagerie, toutes ces questions, qu'elles soient abordées expérimentalement ou théoriquement, impliquent la connaissance de l'indicatrice de diffusion. Pour certaines, interviennent des propriétés telles que la retrodiffusion ou au contraire la diffusion au voisinage de la direction de propagation, lesquelles sont difficilement accessibles à une expérimentation simple ;dans ces cas, la théorie peut s'avérer être d'un secours équivalent ou même meilleur.

Le texte qui suit est divisé en trois parties principales. La première traite uniquement des faits d'expérience, tandis que la seconde indique comment la théorie peut être utilisée et quelle en est l'expression. Enfin, la troisième partie reprend conjointement les résultats expérimentaux et les acquis théoriques, dans une recherche dirigée dans le sens de l'interprétation et des applications.

Dans le but d'alléger le texte lui même, les définitions et certains aspects numériques concernant le calcul sur ordinateur font l'objet respectivement de deux annexes. De même afin de ne pas surcharger inutilement la bibliographie, ont été omises les références aux travaux originaux relatifs à ce qu on dénomme sous le nom de théories de Rayleigh, de Rayleigh-Gans et de Mie. Toutes ces références sont en pratique remplacées par une seule : celle de l'ouvrage désormais classique de H.C. Van de Hulst (1957) qui les englobe toutes.

Note : Les figures sont numérotées avec deux chiffres, le premier étant I, II ou III selon qu'elles appartiennent à la première, seconde ou troisième partie. Les équations ne sont numérotées que dans la seconde partie, également avec deux chiffres, le premier étant 1, 2 ou 3 selon qu'elles apparaissent dans les chapitres 1, 2 ou 3 de cette partie.

SOMMAIRE

1ère PARTIE

AVANT PROPOS

1 - INDICATRICE DE DIFFUSION DES EAUX DE MER

1.1 Forme Générale
1.2 Variations possibles aux angles moyens ($\theta > 30°$)
1.3 Cas des petits angles ($\theta < 30°$)

2 - ROLE DE LA DIFFUSION MOLECULAIRE

2.1 Rappel des valeurs utiles pour l'eau de mer
2.2 Importance relative de la diffusion moléculaire

3 - INDICATRICE DE DIFFUSION DES PARTICULES

3.1 Résultats
3.2 Adoption d'une indicatrice "type" pour les particules

4 - INFLUENCE DE LA LONGUEUR D'ONDE

4.1 Variation de la forme de l'indicatrice
4.2 Sélectivité de la diffusion

4.2.1 Coefficients angulaires de diffusion
4.2.2 Coefficient total de diffusion

5 - POLARISATION

5.1 Résultats
5.2 Variabilité du taux de polarisation à 90°

6 - RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS DE DIFFUSION

2ème PARTIE

AVANT PROPOS

1 - ETAT DE POLARISATION ET DIFFUSION

1.1 Description de l'état de polarisation par les paramètres de Stokes
1.2 Matrices de diffusion

2 - DIFFUSION PAR UNE PARTICULE SPHERIQUE

2.1 Formulation de la théorie de Mie
2.1.1 Les fonctions π_n, τ_n et a_n et b_n
2.1.2 Les fonctions d'intensité
2.2 Résultats numériques et interprétation
2.2.1 Les fonctions $i_T(\theta)\,\alpha^{-4}$
2.2.2 Domaine de la diffusion de Rayleigh
2.2.3 Approximation Rayleigh-Gans
2.2.4 Approximation par la théorie de la diffraction
2.2.5 Rôle de la réfraction et de la réflexion
2.2.6 Remarque générale concernant la dissymétrie de l'indicatrice
2.2.7 Coefficient total de diffusion. Facteur d'efficacité
2.2.8 Facteur d'efficacité et intensité à 0°. Valeurs limites (diffraction)
2.2.9 Approximation de Van de Hulst
2.2.10 Facteur d'efficacité dans les domaines de Rayleigh et de Rayleigh-Gans

3 - DIFFUSION PAR UN ENSEMBLE DE PARTICULES POLYDISPERSE

3.1 Calcul des Propriétés diffusantes
3.1.1 Indicatrice de diffusion pour un nombre donné de particules
3.1.2 Facteur d'efficacité moyen
3.1.3 Indicatrice normalisée
3.2 Prévision concernant le résultat des calculs
3.2.1 Conditions de convergence : influence de la limite supérieure de l'indicatrice
3.2.2 Rôle des petites particules : influence de la limite inférieure de taille sur l'indicatrice
3.2.3 Diffusion totale : influence des limites sur le calcul
3.2.4 Résumé concernant les domaines de validité du calcul
3.2.5 Extension à des lois de distribution différentes de la loi de Junge

3ème PARTIE

AVANT PROPOS

1 - VARIATIONS THEORIQUES DE L'INDICATRICE

1.1 Influence de l'exposant de la loi de distribution sur l'indicatrice
1.2 Influence de l'indice de réfraction sur l'indicatrice
1.3 Conséquences à tirer des variations théoriques de l'indicatrice

2 - INTERPRETATION DES OBSERVATIONS ET APPLICATIONS

2.1 Application des critères vis à vis de l'indice et de l'exposant de la loi de distribution. Rapport des coefficients angulaires
2.2 Relations entre $\beta(45°)$ ou $\beta(90°)$ et b
2.3 Propriétés particulières des coefficients $\overline{\beta}(4°)$ et $\overline{\beta}(6°)$
2.4 Valeurs plausibles d'indice de réfraction et d'exposant de la loi de distribution
2.4.1 Comparaison des indicatrices
2.4.2 Première remarque sur les limites plausibles de la distribution

3 - AUTRES CONSEQUENCES ET APPLICATIONS DES CALCULS THEORIQUES

3.1 Rôles différents des diverses classes de particules
3.1.1 Cas de la diffusion totale
3.1.2 Cas des coefficients angulaires de diffusion
3.1.3 Cas particulier de l'angle 0°
3.2 Dépendance spectrale de la diffusion
3.2.1 Cas général : sélectivité dans le cas d'une distribution de Junge non limitée
3.2.2 Modification dans le cas de distribution non illimitée
3.2.3 Forme de l'indicatrice et longueur d'onde
3.3 Polarisation
3.3.1 Influence des limites et interprétation
3.3.2 Conséquence. Seconde remarque sur la valeur des limites
3.4 Relations entre diffusion et teneur en particules
3.4.1 Remarque générale sur les variations possibles du facteur d'efficacité moyen $\overline{Q}$
3.4.2 Exemples d'application

CONCLUSION

ANNEXE 1 Définitions suivies des Principaux Symboles utilisés.

ANNEXE 2 Conduite du calcul et adaptation à l'ordinateur
1 Calcul par la théorie de Mie des indicatrices individuelles
2 Calcul pour les systèmes polydispersés

BIBLIOGRAPHIE

PREMIERE PARTIE

AVANT PROPOS

La propagation d'un rayonnement lumineux dans tout milieu autre que le vide s'accompagne de deux phénomènes qui déterminent l'affaiblissement du flux : l'absorption et la diffusion. L'énergie absorbée est transformée en chaleur, soit éventuellement réémise partiellement par fluorescence ou effet Raman, mais avec changement de longueur d'onde. Au contraire, l'énergie diffusée n'est pas transformée, mais simplement dispersée dans l'espace. Dans le cas d'un milieu dit "optiquement pur", ce sont les molécules elles-mêmes et elles seules qui provoquent la diffusion. Dans le cas des milieux "troubles", à la diffusion moléculaire s'ajoute la diffusion par les particules en suspension. Pour les radiations visibles, l'eau de mer, même la plus pure se comporte comme un milieu optiquement trouble, en conséquence, pour chaque question envisagée, qu'il s'agisse du coefficient total ou des coefficients angulaires de diffusion, de la forme de l'indicatrice, de la sélectivité, ou encore de la polarisation, il conviendra d'examiner les rôles respectifs de la diffusion moléculaire et de la diffusion par les particules.

Toutes les définitions utiles sont rassemblées *in fine* dans l'annexe 1.

1 - INDICATRICE DE DIFFUSION DES EAUX DE MER

1.1 - FORME GENERALE.

Indépendamment et la même année (1963), N.G. Jerlov et S.Q. Duntley font une revue systématique des mesures effectuées à cette date de l'indicatrice de diffusion pour les eaux de mer. Les résultats que ces auteurs comparent ont été obtenus avec des appareils différents, les uns fonctionnant *in situ*, les autres nécessitant le prélèvement et le transvasement de l'échantillon ; certains utilisent la lumière blanche, d'autres un rayonnement filtré (bleu, bleu-vert, vert, jaune) ; par ailleurs, ces résultats concernent des eaux très diverses quant à la turbidité et à l'origine (Océan Pacifique, Océan Atlantique, Manche, Mer de Chine, et même lacs). Au terme de cette comparaison, et parvenant à des conclusions identiques, N.G. Jerlov et S.Q. Duntley soulignent ce fait remarquable illustré par la figure I.1 : toutes les mesures sont concordantes pour les angles inférieurs à 90°, montrant par là que la forme de l'indicatrice de diffusion varie peu d'une eau de mer à une autre et présente dans tous les cas une très forte dissymétrie. Pour les angles supérieurs à 90° une plus grande dispersion peut être constatée. D'une part, l'angle pour lequel la diffusion est minimale, varie selon les cas entre 100° et 130° approximativement, ce minimum étant lui même plus ou moins accentué.

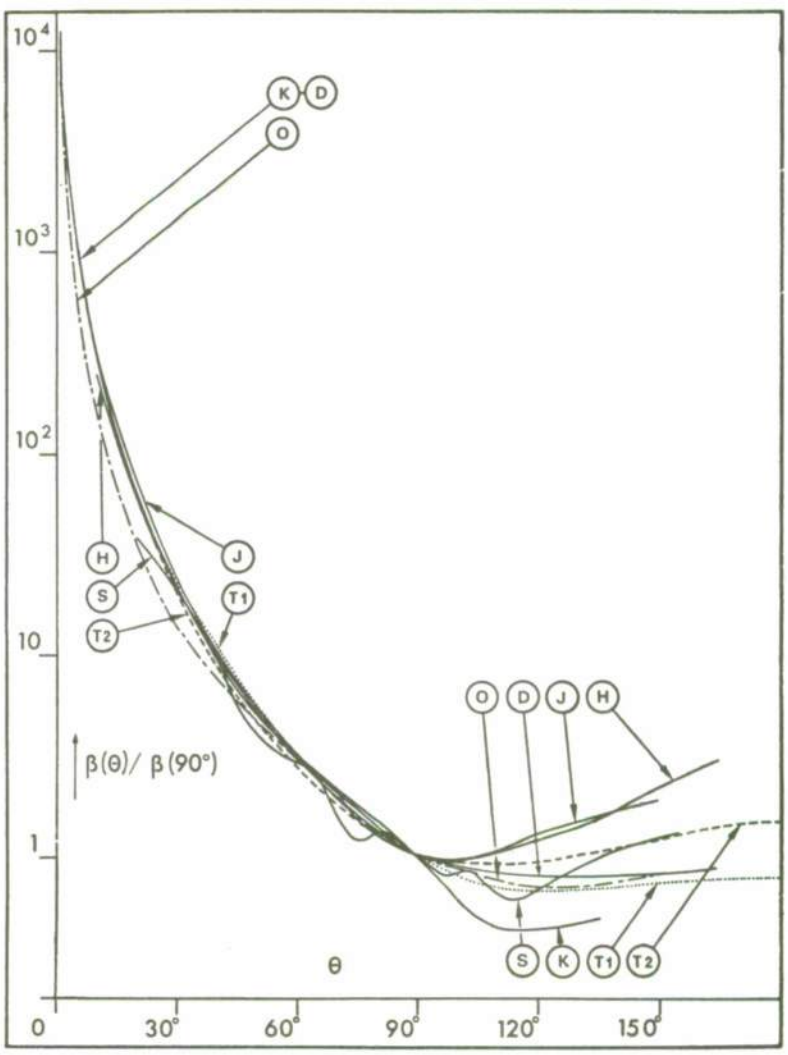


Figure I.1 : Indicatrices de diffusion obtenues par divers auteurs et normalisées à 90°.
H : E.O. Hulburt (1945) Chesapeake bay ;
K : M. Kozlianinov (1957), mer de Chine ;
S : T. Sasaki (1960), Fosse du Japon ;
J : N.G. Jerlov (1961) Atlantique (Madère) ;
T_1/T_2 : J.E. Tyler (1961) Pacifique (San Diego) ;
D : S.Q. Duntley (1963) lac Winnipesakee ;
O : V.E. Otchakovski (1965) Méditerranée.

Il convient de noter que les mesures de Pickard et Giovando (1960) pour des eaux peut être particulières(fjord de la Colombie Britannique), s'écartent notablement de l'ensemble, la croissance vers les petits angles étant plus marquée. Les mesures de Sasaki et al. (1960) d'une certaine façon s'écartent aussi des autres déterminations puisqu'elles révèlent de légères ondulations. Mankovsky et al. (1970) ont également décelé de telles particularités. Cependant d'une façon très générale, les études ultérieures ont toujours confirmé les grands traits qui avaient été dégagés à l'examen de ces premières mesures.

1.2 - VARIATIONS POSSIBLES AUX ANGLES MOYENS ($\theta > 30°$).

En réalité, des études nombreuses faites sur des eaux beaucoup plus variées du point de vue de leur limpidité ont fait apparaître que la forme de l'indicatrice des eaux de mer pouvait notablement varier dans le comaine des angles moyens. La figure I.2 en fournit l'exemple (les courbes sont normalisées à 90°, puisque aussi bien il s'agit de mettre en évidence les modifications de la forme, sans faire intervenir la magnitude de l'indicatrice). Sans multiplier les exemples, la figure I.2 résume en quelque sorte les variations que l'indicatrice est susceptible de présenter dans ce domaine angulaire. La courbe 3 est la forme la plus symétrique qu'on ait pu observer et correspond au cas des eaux très pures profondes (des formes identiques ont été obtenues au dela de 1000 ou 2000 m aussi bien en Méditerranée orientale - équipe lab. 1969 - que dans la région de Madère), la courbe 2 est une courbe intermédiaire et fréquemment observée pour les eaux superficielles océaniques "bleues", la courbe 1 est finalement celle qui prévaut pour de nombreuses eaux superficielles et eaux côtières. Le caractère de dissymétrie est encore légèrement accentué pour les eaux de la Baltique (Station 2, G. Kullenberg (1967), $b_{525} = 0{,}76_{m-1}$). La courbe 5 extraite des mesures de T.J. Petzold (1972) est intermédiaire entre les cas 2 et 3.

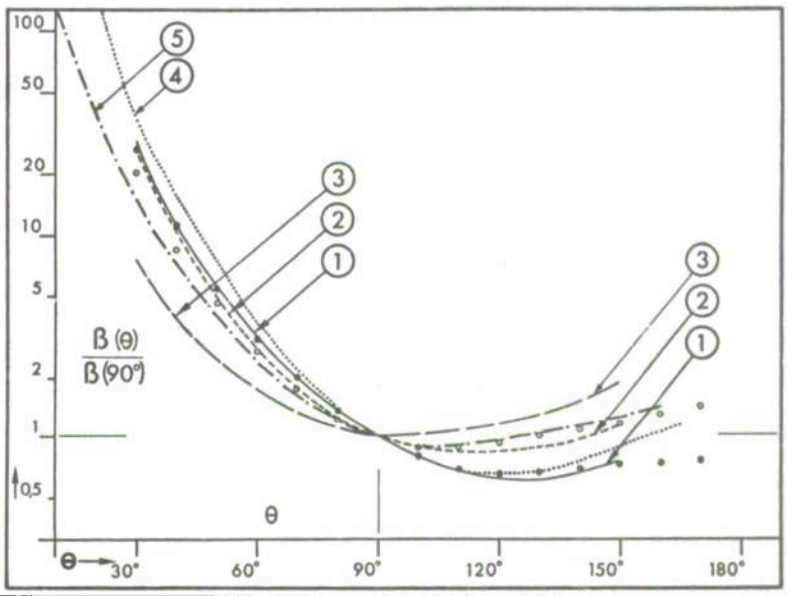


Figure I.2 : Indicatrices normalisées à 90°.
I - Manche (surface, Roscoff, 29-6-63, $b > 0{,}6\ m^{-1}$, $\lambda = 546$ nm) ;
2 - Méditerranée (surface, baie de Villefranche, I6-II-63, $b \sim 0{,}I\ m^{-1}$, $\lambda = 546$ nm) ;
3 - Méditerranée (I500 mètres, Tyrrhénienne, 2I-7-64, $b \sim 0{,}0I5\ m^{-1}$, $\lambda = 546$ nm) (voir également A. Morel, I965) ;
4 - Baltique (5 m, Station 2, I3-6-67, $b = 0{,}76\ m^{-1}$, $\lambda = 525$ nm, G. Kullenberg, I967) ;
5 - Atlantique (I500 mètres, Tongue of the Ocean, I3-7-7I, $b = 0{,}037 m^{-1}$, $\lambda = 5I0$ nm, T.J. Petzold, I972).
Points noirs et creux, respectivement station I et 2 (T_I et T_2 de la figure précédente) (Pacifique, J.E. Tyler, I96I).

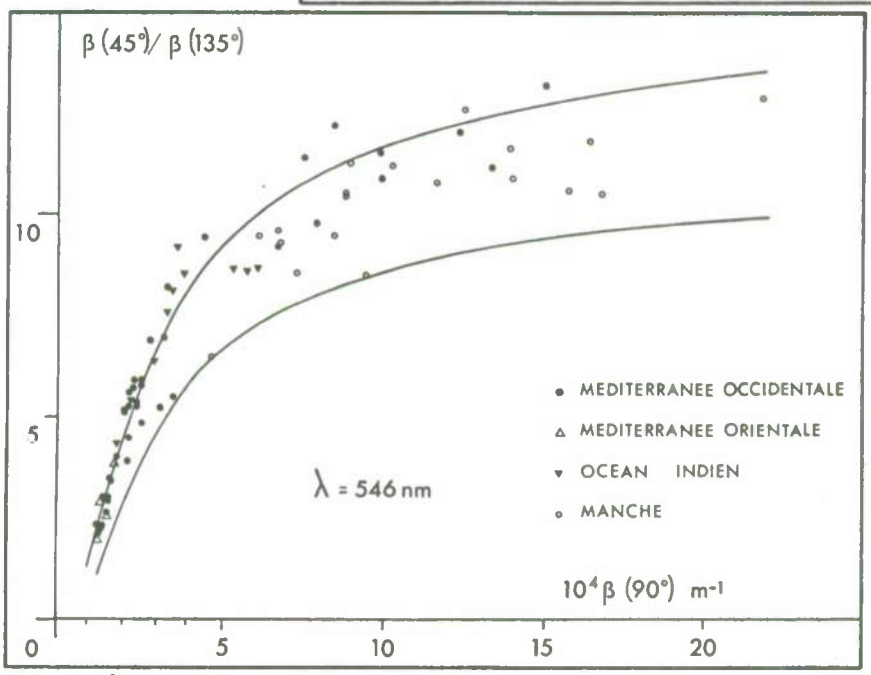


Figure I.3 : Rapport $\beta(45°)/\beta(135°)$ caractérisant la dissymétrie de l'indicatrice des eaux de mer, porté en fonction de $\beta(90°)$ pour diverses eaux de mer ($\lambda = 546$ nm). De l'expression liant $\beta(\theta)$ à $\beta(90°)$ on déduit facilement que ce rapport peut s'exprimer par :

$$\frac{\beta(45)}{\beta(135)} = \frac{R(45)\ (\beta(90))\ + Cste}{R(135)(\beta(90))\ + Cste}$$

et varie selon une loi hyperbolique avec $\beta(90)$. Deux hyperboles sont tracées avec des valeurs moyennes (courbe supérieure) ou extrêmes (courbe inférieure) attribuées à $R(45)$ et $R(135)$.

L'étude systématique de la forme de l'indicatrice conduit à la constatation suivante : entre les deux cas extrêmes présentés, c'est à dire depuis les formes très dissymétriques comme celle de la courbe I jusqu'à la forme plus symétrique de la courbe 3, les diverses formes intermédiaires de l'indicatrice ne sont pas réparties au hasard. Au contraire la tendance à la symétrie a lieu graduellement, au fur et à mesure que l'eau devient moins diffusante, et donc, qu'en valeur absolue, tous les coefficients angulaires décroissent. Avec une bonne approximation, et compte tenu de l'incertitude expérimentale, cette disposition ordonnée des indicatrices a été vérifiée sur plus de 150 échantillons prélevés dans des zones très différentes (Manche, Atlantique, Méditerranée, Océan Indien). Les irrégularités les plus notables car il y en a, concernent presque exclusivement la retrodiffusion ($\theta > 120°$, plus précisément). Cette transformation progressive est également illustrée (Figure I.3) par la variation approximativement régulière du rapport de dissymétrie $\beta(45°) / \beta(135°)$. Ce rapport décroît depuis une valeur voisine de l'ordre de 12 pour atteindre des valeurs aussi faibles que 2 lorsque les eaux, de très diffusantes, deviennent très limpides. Sur la figure I.3 et dans tout ce qui suit, l'unité indiquée pour les coefficients angulaires est m^{-1}, et non comme il conviendrait m^{-1} steradian $^{-1}$ (qui reste sous entendu et a été omis par commodité).

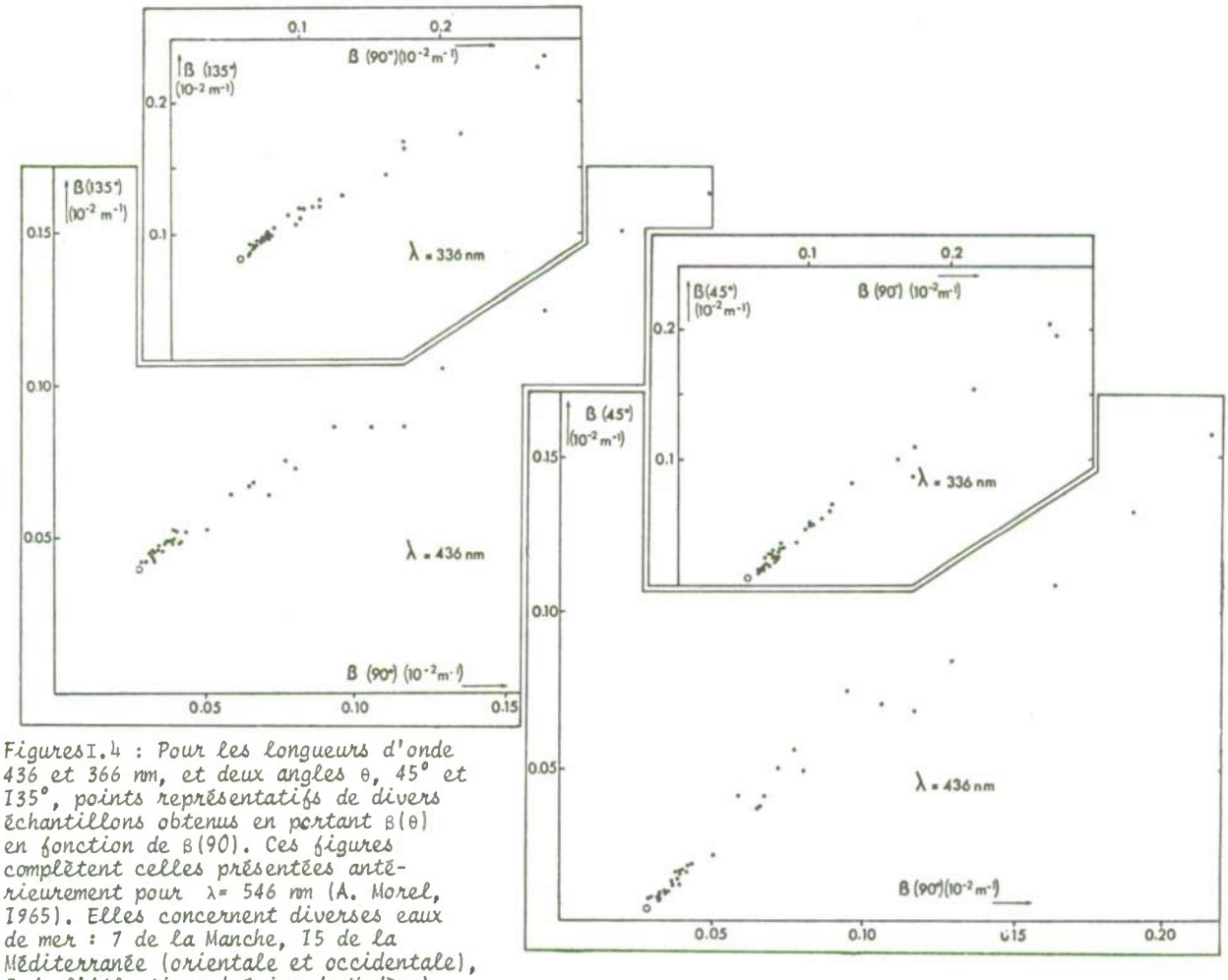
Puisque les eaux turbides présentent des indicatrices assez semblables et très dissymétriques, et que seules les eaux "claires" conduisent à des formes variées et plus symétriques, il est logique d'attribuer cette modification, au moins partiellement, au rôle plus ou moins important de la diffusion moléculaire. Au demeurant, il faut connaître l'effet de cette dernière, pour étudier ensuite les variations résiduelles qui, elles, seraient alors à imputer uniquement aux particules.

Ce point peut être étudié simplement, sans d'ailleurs qu'il soit nécessaire de connaître les valeurs caractéristiques de la diffusion moléculaire (A. Morel, 1965). En désignant par les indices p et o les parts revenant respectivement à la diffusion par les particules et par l'eau elle même, on peut décomposer les coefficients angulaires de diffusion à θ et à 90° :

$$\beta(\theta) = \beta_p(\theta) + \beta_o(\theta) \qquad \beta(90) = \beta_p(90) + \beta_o(90)$$, et en formuler le rapport :

$$\beta(\theta) - \beta_o(\theta) = \frac{\beta_p(\theta)}{\beta_p(90)} \left[\beta(90) - \beta_o(90)\right]$$

Si l'on porte pour divers échantillons $\beta(\theta)$ en fonction de $\beta(90)$, on constate que la distribution des points expérimentaux s'effectue *grosso modo* selon une loi linéaire. Cela signifie qu'en première approximation, le rapport $\beta_p(\theta) / \beta_p(90) = R(\theta)$ est assez constant et caractéristique de la diffusion par les seules particules. Il faut ajouter que cette droite, si la linéarité n'est pas modifiée pour les eaux très peu diffusantes, doit passer par le point figuratif de l'eau optiquement pure, de coordonnées $\beta_o(\theta) - \beta_o(90)$ (indirectement et approximativement la valeur de $\beta_o(90)$ peut ainsi être estimée).



Figures I.4 : Pour les longueurs d'onde 436 et 366 nm, et deux angles θ, 45° et 135°, points représentatifs de divers échantillons obtenus en portant $\beta(\theta)$ en fonction de $\beta(90)$. Ces figures complètent celles présentées antérieurement pour λ = 546 nm (A. Morel, 1965). Elles concernent diverses eaux de mer : 7 de la Manche, 15 de la Méditerranée (orientale et occidentale), 5 de l'Atlantique (région de Madère), 9 de l'Océan Indien (région de Madagascar). Les points creux figurent l'eau optiquement pure (cf. § 2.1).

Les figures I.4 sont des exemples de ce procédé.

Le calcul de régression * fait apparaître que le coefficient de correlation, élevé pour les petits angles (supérieur à 0,96), s'abaisse considérablement pour les grands angles (0,86 à 150°), montrant par là que l'indicatrice, non de l'eau de mer (eau et particules), mais des particules seules présente une variabilité importante. Par contre les valeurs des pentes moyennes, c'est à dire les diverses valeurs de R (θ), ne sont pas significativement distinctes pour les trois longueurs envisagées. En portant R (θ) en fonction de θ, on obtient une représentation de l'indicatrice "moyenne" relative aux seules particules (voir figures I.6, I.9, et III.7 de la 3e partie). C'est bien vers cette forme à dissymétrie maximale que tendent en général, les indicatrices des eaux turbides ; les exemples empruntés à V.W. Reese et S.P. Tucker (1970) constituent de ce point de vue une bonne illustration (cf. figure I.6). Deux remarques doivent être faites au sujet de cette courbe : de par son caractère de courbe moyenne, elle ne décrit que très imparfaitement certains cas particuliers, et de plus, dans cette moyenne, les particules présentes dans les eaux turbides sont en quelque sorte favorisées (en effet les rapports calculés R (θ) sont très dépendants des points les plus éloignés correspondant aux eaux les plus diffusantes). Ces points seront réexaminés plus loin (§ 3.1).

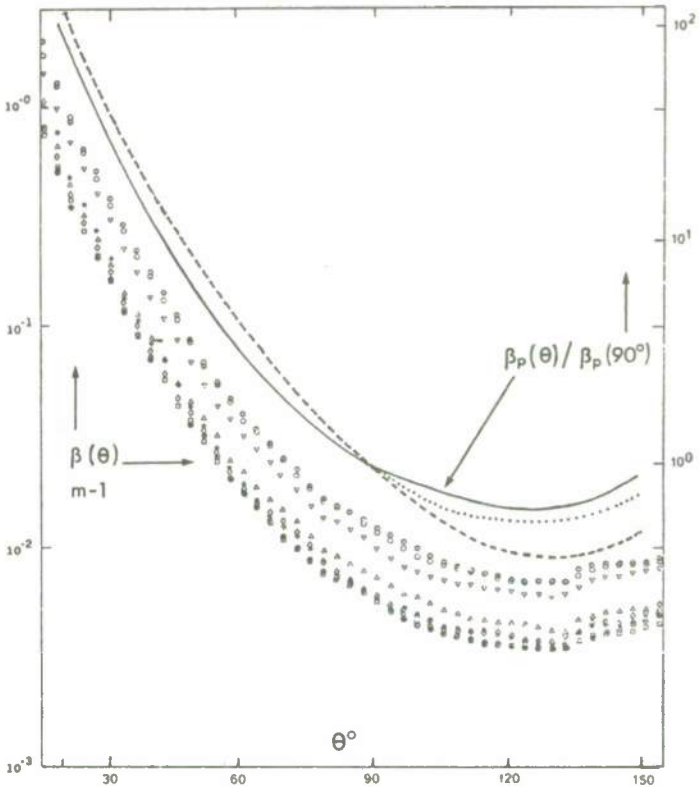


Figure I.6 : Indicatrices de diffusion déterminées par J.W. Reese et S.P. Tucker (1970) dans la baie de San Diego entre 1 et 15 mètres, le 30-6-1967, le coefficient d'atténuation C est supérieur à 1,70 m^{-1} ; les valeurs absolues sont à lire sur l'échelle de gauche. Avec l'échelle de droite, normalisée à 90° indicatrice "moyenne" des particules (A. Morel, 1965) tracée en trait plein; en tireté et en pointillé, indicatrices des particules calculées à partir des mesures de T.J. Petzold (1972) pour les deux mêmes stations que précédemment, respectivement station 8 (Atlantique) et 5 (Pacifique).

1.3 - CAS DES PETITS ANGLES (θ < 30°).

Compte tenu des valeurs très élevées que l'indicatrice des eaux de mer présente dans cette région angulaire (Figure I.1), la diffusion moléculaire n'a plus qu'un rôle négligeable (en effet elle ne varie avec l'angle que dans un rapport inférieur à 2, cf. ci après, § 2.1). La figure I.5 rassemble quelques exemples d'indicatrices dans ce domaine des petits angles. Deux parmi elles sont des courbes moyennes, celle obtenue par D. Bauer et A. Morel (1967) à partir de 58 mesures en Manche et en Méditerranée (à la longueur d'onde 550 nm), et celle de F. Nyffeler (1969-1970) calculée à partir de 66 mesures en Méditerranée (*in situ* aux longueurs d'onde 455, 559 et 599 nm avec l'appareil précédent et *in vitro* aux longueurs d'onde 488,0 et 632,8 nm). D'une façon générale, on peut constater que la variabilité de cette partie de l'indicatrice n'est pas considérable (cf. références ci dessus), et également que l'influence de la longueur d'onde, non décelée, est faible si elle existe. L'accord entre les diverses déterminations est satisfaisant, surtout si l'on considère que pour ces mesures assez délicates, des erreurs systématiques et propres au dispositif expérimental adopté, sont probablement inévitables. Ainsi la légère incurvation et diminution de pente vers 3°-1° que présentent certaines courbes semble plutôt traduire un tel effet instrumental. En effet les mesures récentes de R. Morrison (1970) et T.J. Petzold (1972) effectuées avec l'appareil du "Visibility Laboratory" (Scrips Inst. of Oceanogr.), montrent que la croissance de β (θ), approximativement selon une loi en $\theta^{-1,0}$ entre 10° et 1°, se prolonge pour les angles inférieurs à 1°. Le fait remarquable que ces récentes mesures mettent en évidence est précisément cette croissance rapide ; le coefficient angulaire gagnerait entre 1° et 0°,1 presque 2 ordres de magnitude. Comme on le verra plus loin (3ème partie, § 3.1.3), la valeur même de ces coefficients n'est vraisemblablement pas indépendante de l'échelle à laquelle on se place, (ou si l'on veut du volume diffusant considéré, qui selon sa taille, permet ou non de considérer une particule comme un centre diffusant - cf. 3.1.1, 3.1.3, 3e partie -).

* Effectué pour λ=546nm au maximum sur 112 valeurs et pour λ=436 et 366nm au maximum sur 26 valeurs (sur 36 pour les angles particuliers 45 et 135°). Certains points s'écartent très notablement de la loi linéaire. Le plus souvent, mais non nécessairement, ils correspondent à des échantillons côtiers probablement chargés en particules terrigènes. L'étude systématique de ces écarts reste à faire.

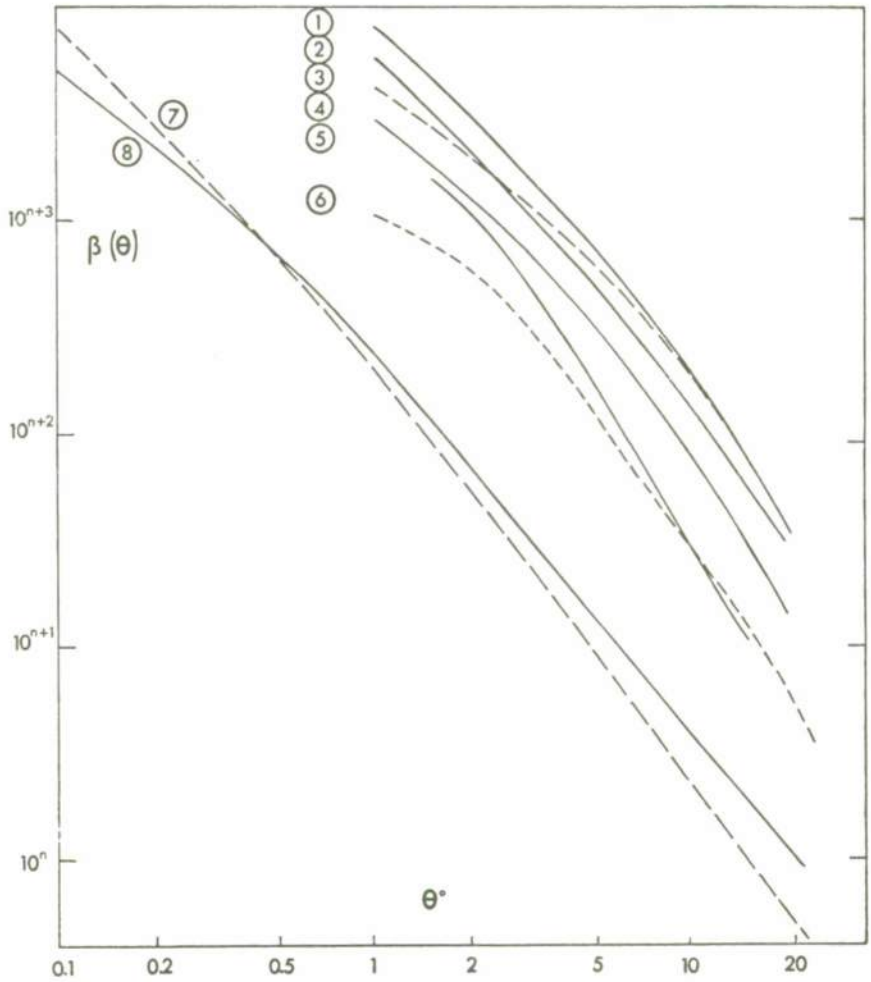


Figure I.5 : Indicatrice de diffusion aux petits angles (les deux échelles sont logarithmiques). Le positionnement des courbes les unes par rapport aux autres est arbitraire.

1 : S.Q. Duntley (1963) ;
2 : V.E. Otchakovski (1965) ;
3 : M. Kozlianinov (1957) ;
4 : G. Kullenberg (1968) ;
5 : D. Bauer, A. Morel (1967) ;
6 : F. Nyffeler (1970) ;
7 et 8 : T.J. Petzold (1972), respectivement station 5 (Pacifique) et 8 (Atlantique) ; C'est à dire respectivement l'eau la plus diffusante ($b=0,27\ m^{-1}$) et la plus claire ($b=0,037\ m^{-1}$) présentées par cet auteur (hormis les eaux portuaires).

2 - ROLE DE LA DIFFUSION MOLECULAIRE.

2.1 - RAPPEL DES VALEURS UTILES POUR L'EAU ET L'EAU DE MER.

Des mesures effectuées sur des eaux de mer optiquement purifiées par filtration répétées ont fourni la valeur des coefficients angulaires pour la diffusion moléculaire. Confirmation de ces valeurs a été recherchée en exécutant également des mesures sur l'eau de mer artificielle, sur des solutions de chlorure de sodium (plus faciles à purifier que l'eau de mer naturelle) et aussi sur l'eau pure préparée cette fois par évaporation sous vide (A. Morel, 1966, 1968 a). Les indicatrices de diffusion que présentent ces diverses solutions et l'eau elle même sont effectivement tout à fait symétriques (ce qui peut constituer un critère de pureté optique) et obéissent à la loi théorique de Rayleigh - en fait à la loi modifiée afin de tenir compte de l'anisotropie des molécules d'eau, qui provoque une dépolarisation partielle - soit : $\beta_o(\theta) = \beta_o(90°)(1 + p_{90}\cos^2\theta)$, p_{90} étant le taux de polarisation à 90° dont la valeur expérimentale est 0,84, correspondant à la valeur 0,09 du facteur de dépolarisation δ -[δ est le rapport $(1-p)/(1+p)$]-. Dans le cas de l'eau, les valeurs absolues du coefficient $\beta_o(90)$ obtenues à 5 longueurs d'onde sont en bon accord avec un certain nombre d'autres déterminations expérimentales (à 546 et 436 nm), et également avec celles que la théorie des fluctuations de densité permet de calculer. Une revue détaillée de ces questions a été faite récemment (A. Morel, 1973 b), d'où est extraite la table ci-après, donnant de 25 en 25 nm les valeurs théoriques de $\beta_o(90)$ et de b_o (coefficient total de diffusion) pour l'eau et l'eau de mer optiquement pures.

On peut noter que si l'on cherche à exprimer la sélectivité de la diffusion moléculaire de l'eau (ou de l'eau de mer) par une loi puissance la meilleure expression est $\lambda^{-4,32}$. Le fait que l'exposant diffère de 4 provient essentiellement de la dispersion de l'indice.

Table I : Valeurs théoriques de $\beta_o(90)$ et de b_o en fonction de la longueur d'onde. Les autres coefficients angulaires $\beta_o(\theta)$ se déduisent de $\beta_o(90)$ au moyen de l'expression ci dessus. L'intégration sur tout l'espace de cette même expression, qui conduit à $b = \frac{8M}{3}\ \beta_o(90)\ \frac{2+\delta}{1+\delta}$, permet de calculer b_o (δ est pris égal à 0,09).

	λ (nm)	350	375	400	425	450	475	500	525	550	575	600
eau	$\beta_{90}(10^{-4}m^{-1})$	6.47	4.80	3.63	2.80	2.18	1.73	1.38	1.12	0.93	0.78	0.68
	b $(10^{-4}m^{-1})$	103.5	76.8	58.1	44.7	34.9	27.6	22.2	17.9	14.9	12.5	10.9
eau de mer S=35/38‰	$\beta_{90}(10^{-4}m^{-1})$	8.41	6.24	4.72	3.63	2.84	2.25	1.80	1.46	1.21	1.01	0.88
	b $(10^{-4}m^{-1})$	134.5	99.8	75.5	58.1	45.4	35.9	28.8	23.3	19.3	16.2	14.1

La diffusion est plus élevée dans le cas des solutions car un terme supplémentaire s'ajoute, expliqué par les fluctuations de concentration. Ce terme est calculable au moins pour les solutions diluées et idéales, à partir de la masse moléculaire du soluté et de l'increment d'indice que sa présence entraine. De cette façon les mesures sur les solutions de chlorure de sodium peuvent être interprétées et par suite fournir un terme de comparaison pour les valeurs relatives à l'eau de mer. Ainsi l'eau de mer présente-t-elle des valeurs supérieures de 6 % à celle d'une solution de chlorure de sodium de même concentration en ion chlorure, et de 30 % supérieures à celles de l'eau.

2.2 - IMPORTANCE RELATIVE DE LA DIFFUSION MOLECULAIRE.

Etant donné la dissymétrie accentuée de l'indicatrice des particules, la diffusion moléculaire est surtout susceptible de jouer un rôle non négligeable pour la partie arrière, en particulier là où l'indicatrice présente un minimum, c'est à dire vers 120 ou 140°. Lorsque les eaux sont turbides la part relative de la diffusion moléculaire devient évidemment négligeable à tout angle ; à l'inverse, pour les eaux claires, il peut être intéressant de déterminer quelle peut être l'influence maximale (tout au moins avec les mesures dont on dispose, étant entendu qu'il n'est nullement exclu qu'existent des eaux plus limpides).

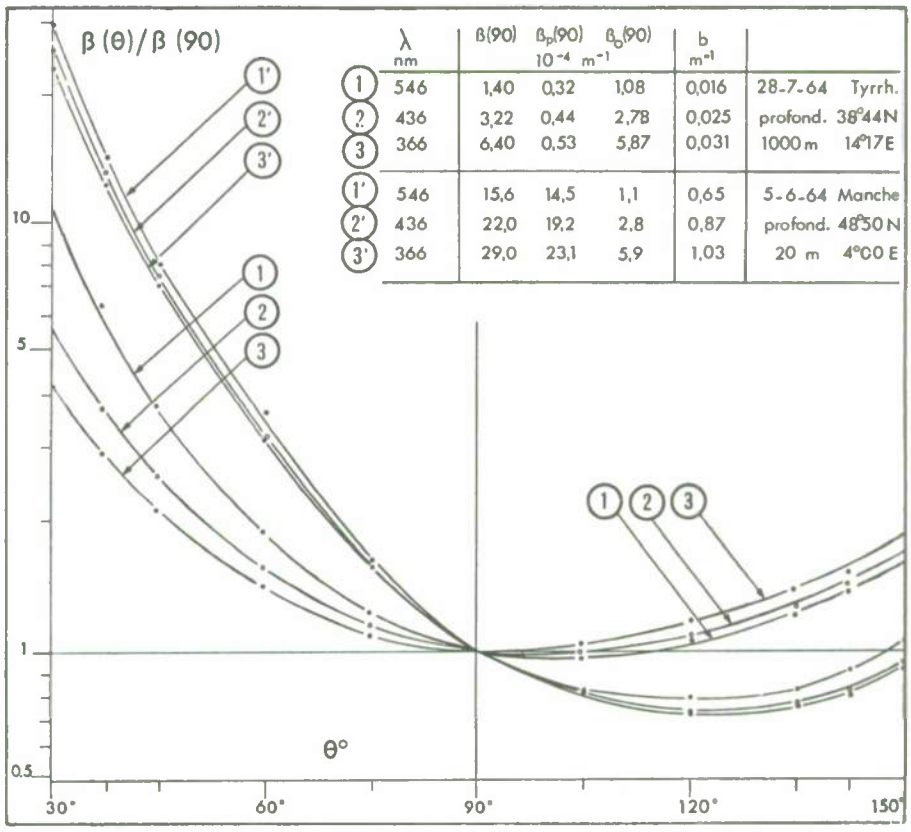
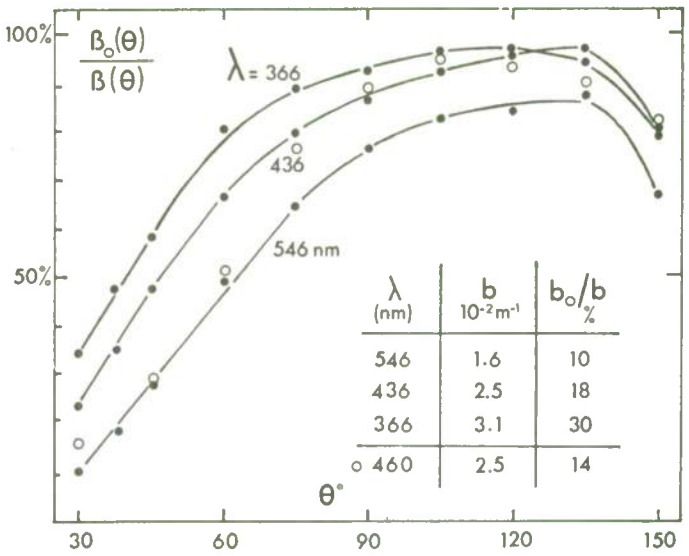


Figure I.7 : Indicatrices normalisées à 90°. Mesures effectuées à trois longueurs d'onde sur un échantillon d'eau de mer turbide (Manche) et sur un autre très limpide (Mer Tyrrhénienne).



λ (nm)	b $10^{-2}m^{-1}$	b_o/b %
546	1.6	10
436	2.5	18
366	3.1	30
o 460	2.5	14

Figure I.8 : Importance relative de la diffusion moléculaire en fonction de l'angle. Les courbes pour trois longueurs d'onde, concernent l'échantillon de la mer Tyrrhénienne (cf. Figure I.7). Les points creux sont déduits des mesures de G. Kullenberg (1968) en mer des Sargasses (10 mètres) à la longueur d'onde 460 nm.

La courbe 3 de la figure I.2 ou les courbes 1, 2 et 3 de la figure I.7 constituent des exemples représentatifs d'eaux claires profondes. A ce titre, on peut à chaque angle former le rapport * de $\beta_o(\theta) / \beta(\theta)$ de la diffusion moléculaire à la diffusion (totale) observée pour l'un de ces cas typiques (celui de la figure I.7), où l'indicatrice est déterminée à 3 longueurs d'onde). On obtient alors les rapports qui sont portés en fonction de l'angle de diffusion sur la figure I.8. En raison de la sélectivité prononcée de la diffusion moléculaire, l'importance relative de celle-ci croît lorsque la longueur d'onde diminue, et dans tous les cas elle est effectivement maximale pour les angles compris entre 90° et 140°. Le coefficient total de diffusion moléculaire b_o peut aussi être comparé au coefficient b de l'échantillon (calculé à partir de $\beta(30°)$, cf. § 6). Le rapport b_o/b s'élèverait, dans le cas de cette eau très pure, à 10 % pour λ = 546 nm et à 30 % pour λ = 366 nm. Il convient d'ajouter que de semblables résultats ont été obtenus également en Méditerranée orientale (Equipe du Lab. 1969) et en Atlantique dans la région de Madère, généralement à des profondeurs supérieures à 1000 mètres, tandis que des mesures de G. Kullenberg (1968) à 10 mètres seulement, mais en mer des Sargasses, on peut déduire des valeurs analogues, prouvant une fois de plus la grande pureté de cette mer.

3 - INDICATRICE DE DIFFUSION DES PARTICULES.

3.1 - RESULTATS.

Une indicatrice "moyenne" a été obtenue par un procédé indirect, qui, rappelons le, est probablement plutôt représentative des particules présentes dans les eaux turbides (§ 1.2). Les indicatrices de particules peuvent être déterminées, cas par cas, en soustrayant** les coefficients angulaires $\beta_o(\theta)$. Les figures I.9 montrent, pour les trois longueurs d'onde indiquées, les domaines à l'intérieur desquels s'inscrivent toutes les indicatrices de particules ainsi calculées (112 pour λ = 546 nm, dont 26 correspondent à des mesures effectuées à trois longueurs d'onde 546, 436 et 366 nm). Seules les parties arrières pour la longueur d'onde 436 nm sont toutes tracées à titre d'exemple.

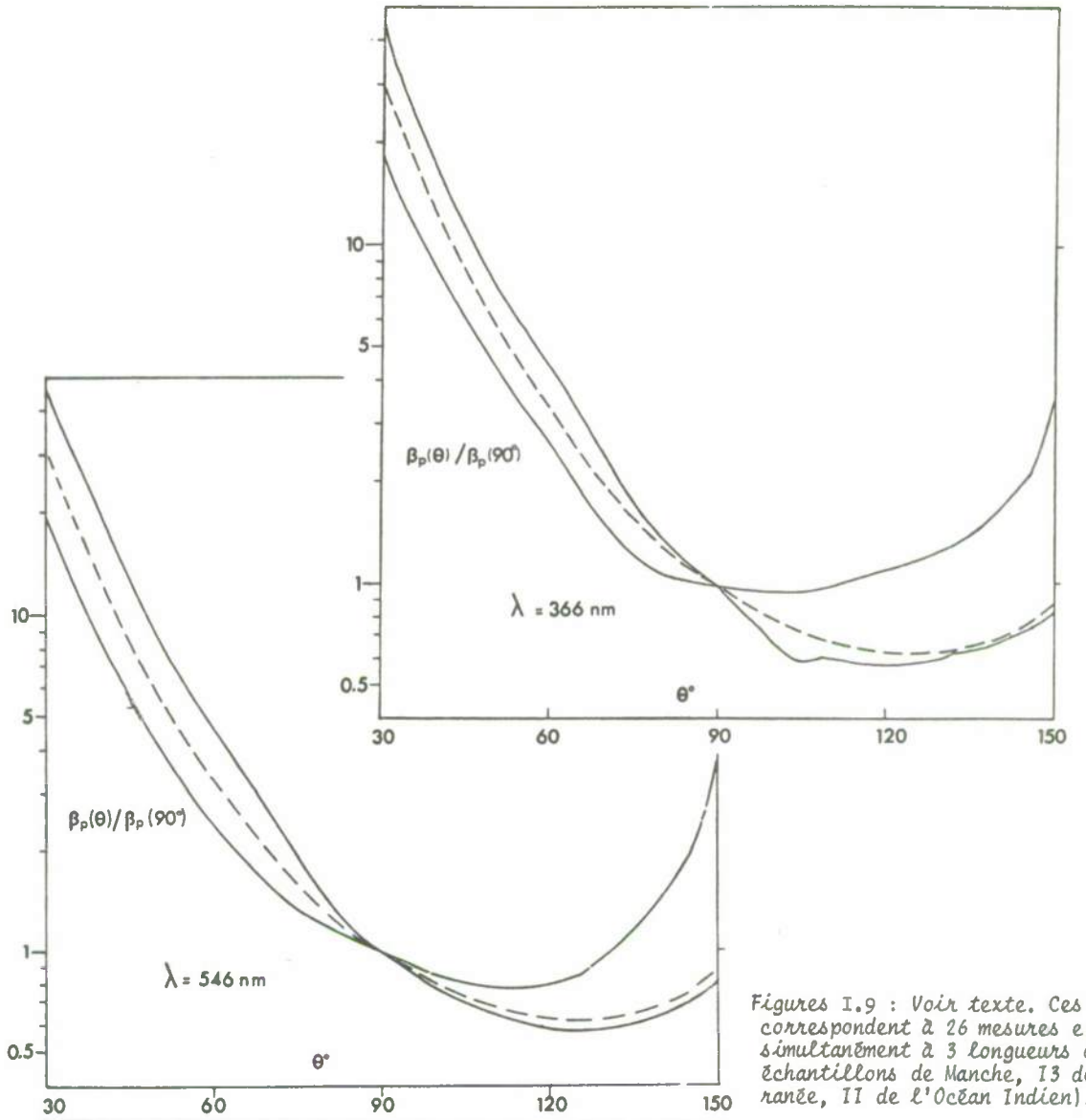
La figure I.6 fournit une autre illustration, le calcul étant fait à partir des mesures de T.J. Petzold (1972) déjà montrées (Figure I.2 et I.5) ; ont été choisies les deux indicatrices qui correspondent respectivement à l'eau la plus claire (1500 m, Atlantique) et à l'eau océanique la plus turbide (côtière, Californie). Après déduction de la part revenant à la diffusion moléculaire, les indicatrices obtenues sont tracées conjointement à l'indicatrice moyenne.

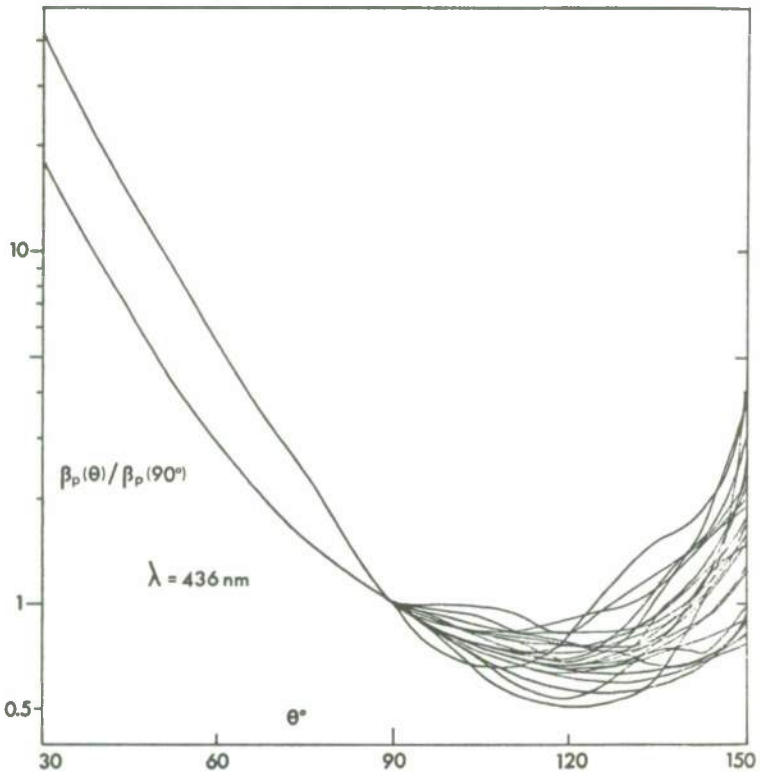
Sans préciser davantage, vu l'incertitude dans le cas des eaux claires, il semble que les particules en suspension précisément dans ces eaux présentent en général une indicatrice à minimum bien marqué, souvent suivi d'une croissance rapide vers 150°. L'indicatrice moyenne, retracée en tireté sur ces figures, est presque confondue avec la courbe constituant, pour les angles supérieurs à 90°, la limite inférieure des domaines ; pour les angles inférieurs à 90°, elle se place sensiblement au centre du domaine.

---

* Pour former ce rapport on a utilisé non les valeurs théoriques de la table I, mais les valeurs expérimentales obtenues sur l'eau de mer purifiée (A. Morel, 1968), légèrement inférieures (de 10% environ). Ceci est jugé préférable car les mesures aussi bien sur l'eau purifiée que sur l'échantillon sont effectuées avec le même appareil et dans les mêmes conditions ; l'incertitude sur les valeurs absolues disparait dans le rapport.

** Le cas des eaux claires demeure ici encore délicat à étudier. D'après ce qui vient d'être dit, la part $\beta_o(\theta)$ à soustraire est prépondérante pour les angles moyens. Donc l'incertitude expérimentale sur $\beta(\theta)$ se reporte en fait intégralement sur $\beta_p(\theta)$, entrainant une erreur relative importante. En conséquence, la partie arrière de l'indicatrice obtenue apparait peut être plus variable qu'elle ne l'est réellement, ceci en dépit du fait que certaines indicatrices aberrantes aient été écartées.





Figures I.9 : Voir texte. Ces courbes correspondent à 26 mesures effectuées simultanément à 3 longueurs d'onde (2 échantillons de Manche, I3 de Méditerranée, II de l'Océan Indien).

3.2 - ADOPTION D'UNE INDICATRICE "TYPE" POUR LES PARTICULES.

Pour la résolution de nombreux problèmes, aussi bien ceux concernant les relations entre propriétés diffusantes et teneur des eaux de matières en suspension, que ceux concernant la visibilité des objets immergés ou la propagation de la lumière du jour et de la lumière artificielle, il est indispensable de connaître l'indicatrice des particules. L'étude du régime asymptotique des luminances sous marines (L. Prieur, A. Morel, 1971) ou plus généralement tous les problèmes liés au transfert radiatif mettent en évidence cette nécessité. Pour ces calculs ou pour ces modèles prévisionnels, il est utile de pouvoir disposer d'une indicatrice de particules "type", c'est à dire constituant une approximation satisfaisante. A cet effet, la courbe "moyenne" obtenue entre 30 et 150° peut êre adoptée et associée à la courbe moyenne pour les angles compris entre 1°,5 et 14°. Le raccordement entre ces deux parties avait été fait (D. Bauer, A. Morel, 1967) en utilisant les mesures de N.G. Jerlov (1961) lesquelles étaient exécutées jusqu'à 10°. Les mesures effectuées ensuite par F. Nyffeler (1969-1970) entre 1° et 25°, ont montré que cette interpolation était correcte. Dans ces conditions, les coefficients de diffusion pour cette indicatrice "type" sont les suivants :

Table II : Indicatrice "type" des particules. 1ère colonne : coefficients angulaires rapportés au coefficient à 90°. 2ème colonne : coefficients normalisés $\overline{\beta}(\theta)$, c'est à dire rapportés à l'intégrale donnant b (cf. Annexe 1). Pour ce calcul de l'intégrale une extrapolation exponentielle a été faite - du type $\beta(\theta) = \exp(-k\theta)$ - entre 1 et 10°. Elle conduit à une valeur de l'intégrale entre 0 et 1° égale à 9,7 % de l'intégrale totale entre 0 et 180°.* Cette valeur est peut être faible, vu les résultats obtenus par T.J. Petzold (1972). Cet auteur calcule entre 0°,1 et 1° des valeurs constituant 20 à 30 % de la valeur finale de l'intégrale (0-180°). Dernières colonnes : composantes polarisées (cf. § 5) perpendiculaire , $\overline{\beta}_1$, et parallèle, $\overline{\beta}_2$, au plan de diffusion, calculées à partir du taux de polarisation :

$$p(\theta) = \frac{\overline{\beta}_1(\theta) - \overline{\beta}_2(\theta)}{\beta_1(\theta) + \beta_2(\theta)} = \frac{\overline{\beta}_1(\theta) - \overline{\beta}_2(\theta)}{\overline{\beta}(\theta)}$$

; les valeurs de $p(\theta)$ utilisées sont présentées sur la figure I.13. l'indicatrice "type" est montrée graphiquement sur la figure III.7 (3ème partie).

θ°	$\frac{\beta(\theta)}{\beta(90)}$	$\overline{\beta}(\theta)$
(1)	34400	77,5
1.5	26100	58,8
2	19100	43,0
3	8500	19,2
4	4750	10,7
5	2990	6,7
6	1920	4,32
7	1300	2,93
8	915	2,06
9	670	1,42
10	500	1,12
12	314	0,71
14	224	0,505
16	168	0,378
18	130	0,298
20	102	0,230
22	75	0,169
24	58	0,130
26	47	0,106
28	38	0,0856

θ°	$\frac{\beta(\theta)}{\beta(90)}$	$\overline{\beta}(\theta)$ x10³	$\overline{\beta}_1(\theta)$ x10³	$\overline{\beta}_2(\theta)$ x10³
30	31,4	70,7	77,5	65,0
45	8,50	19,1	23,3	14,7
60	3,41	7,68	11,2	4,2
75	1,61	3,63	6,1	1,15
90	≡ 1	2,25	4,00	0,50
105	0,74	1,67	2,82	0,50
120	0,65	1,46	2,15	0,75
135	0,65	1,46	1,87	1,05
150	0,87	1,96	2,18	1,75
(165)	0,17	3,8		

* L'intégrale totale a pour valeur 444 si $\beta(90)$ est posé identique à 1. Lorsque ce calcul a été présenté (A. Morel, 1968) une erreur s'est glissée, la valeur indiquée étant $444/\pi$ au lieu de 444. Les coefficients des relations entre $\beta(\theta)$ et b étaient faussés dans le même rapport (cf. correctif, 1970). Les variations possibles de l'indicatrice et de la partie avant particulièrement, entrainent des variations possibles estimées à ± 17 % sur l'intégrale (cf. § 2.2 et 2.3, 3ème partie).

Il faut souligner qu'une telle indicatrice type, par sa nature même, n'est simplement qu'une moyenne jugée satisfaisante. C'est précisément de la variabilité autour de cette moyenne qu'il sera fait usage au cours de l'interprétation théorique (3ème partie, § 2) pour déduire des informations sur la nature des particules (plus exactement leur indice) ainsi que sur la loi qui en régit la distribution.

4 - INFLUENCE DE LA LONGUEUR D'ONDE.

Il faudra distinguer l'aspect qualitatif du problème, c'est à dire l'influence sur la forme de l'indicatrice, de l'aspect quantitatif, c'est à dire l'influence sur la magnitude du phénomène de diffusion.

4.1 - VARIATION DE LA FORME DE L'INDICATRICE.

Cette question a été en fait implicitement examinée précédemment. Pour reprendre brièvement les principaux points : lorsque les eaux sont limpides, l'indicatrice déjà assez symétrique, le devient plus si la longueur d'onde diminue, par suite du rôle croissant de la diffusion moléculaire, très sélective. Au contraire pour les eaux turbides, la forme de l'indicatrice n'est pratiquement pas modifiée par le changement de longueur d'onde, signifiant par là que la diffusion moléculaire est négligeable, et que de plus, l'indicatrice des particules est pratiquement insensible à ce facteur. La figure I.7 donne un exemple de ces deux cas.

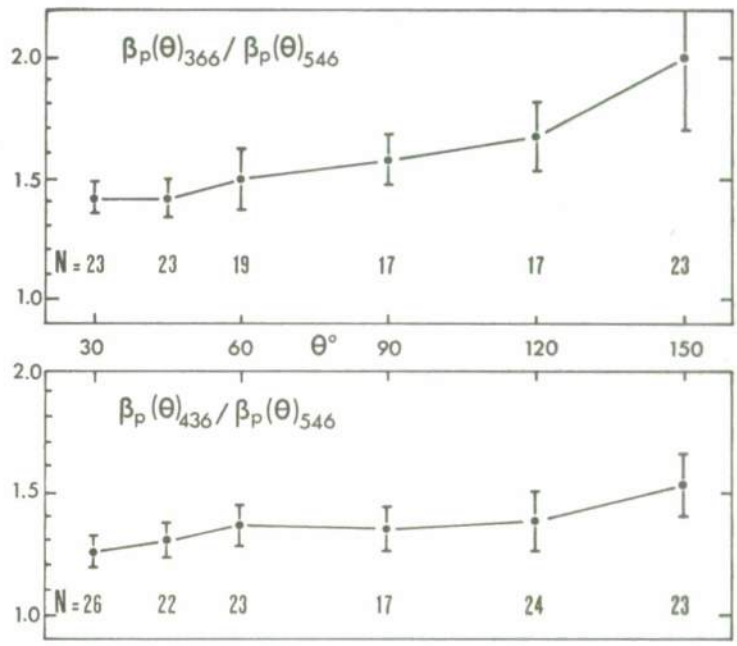
Après déduction de la diffusion moléculaire, la forme de l'indicatrice des particules est effectivement variable selon la longueur d'onde sans qu'une loi systématique ait pu être mise en évidence *. En moyenne, les indicatrices normalisées à 90° sont pratiquement semblables comme le montraient les figures I.9. Les mesures de F. Nyffeler (1970) sont aussi en faveur d'une absence d'influence notable dans le domaine des petits angles.

4.2 - SELECTIVITE DE LA DIFFUSION.

4.2.1 - Coefficients angulaire de diffusion.

Par contre, déduction faite de la diffusion moléculaire, il apparait que $\beta_p(\theta)$ (compté cette fois en valeur absolue) varie systématiquement avec la longueur d'onde, croissant légèrement lorsque celle ci décroît. La figure I.10 montre en fonction de θ, les variations des rapports de $\beta_p(\theta,\lambda)$ à $\beta_p(\theta, 546)$, lorsque λ a pour valeur 436 ou 366 nm. Pour des raisons déjà indiquées les rapports sont mieux déterminés aux petits angles, la variabilité de l'indicatrice aux grands angles entrainant l'accroissement de l'écart type. Des résultats analogues ont été obtenus en Atlantique (pour $\theta = 30°$ et $\lambda = 436$ et 546 nm) qui ont été présentés par ailleurs (A. Morel, 1970). J.R. Zaneveld et H. Pak (1973) font état de mesures à 45°; le rapport des coefficients de diffusion, respectivement aux deux longueurs d'onde 436 et 546 nm, varie selon ces auteurs entre 1,10 et 1,45 approximativement (il ne semble pas qu'il s'agisse de coefficients relatifs aux seules particules, mais des coefficients directement mesurés, aussi le rapport peut-il être légèrement affecté).

Méthode indirecte. Une méthode précise bien qu'indirecte (A. Morel, 1967) permet également de déterminer la sélectivité pour un angle donné. Elle a été appliquée pour cinq longueurs d'onde (578, 546, 436, 405 et 366 nm) à un grand nombre de valeurs à 90° (Figure I.11), et à un nombre moindre à 30°, fournissant d'ailleurs sensiblement le même résultat, compte tenu de l'intervalle de confiance (Figure I.12). Elle se



Figures I.10 : Rapports $\beta_p(\theta,\lambda)$ à $\beta_p(\theta,546)$ portés en fonction de θ, avec λ = 436 et 366 nm ; en trait plein, valeur moyenne ; le trait vertical correspond à l'écart type calculé sur N mesures, les valeurs de N sont indiquées. N est au maximum 26, correspondant à 26 échantillons sur lesquels les mesures ont été exécutées successivement à 3 longueurs d'onde (voir légende de la figure I.9).

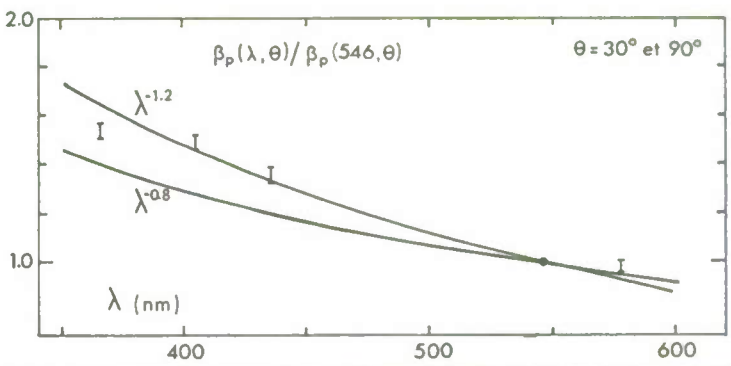


Figure I.12 : Résultats obtenus par la méthode illustrée par la figure précédente concernant la sélectivité (à 30 et 90°) de la diffusion par les particules. Les traits verticaux correspondent à l'écart type sur les valeurs, les courbes correspondent aux lois indiquées.

* Dans le cas de nos mesures au moins, car Hinzpeter (1962) note que l'indicatrice à 400 nm est moins dissymétrique qu'à 700 nm et il s'agit probablement d'une indicatrice de particules puisque ces résultats correspondent à des eaux turbides de la Baltique.

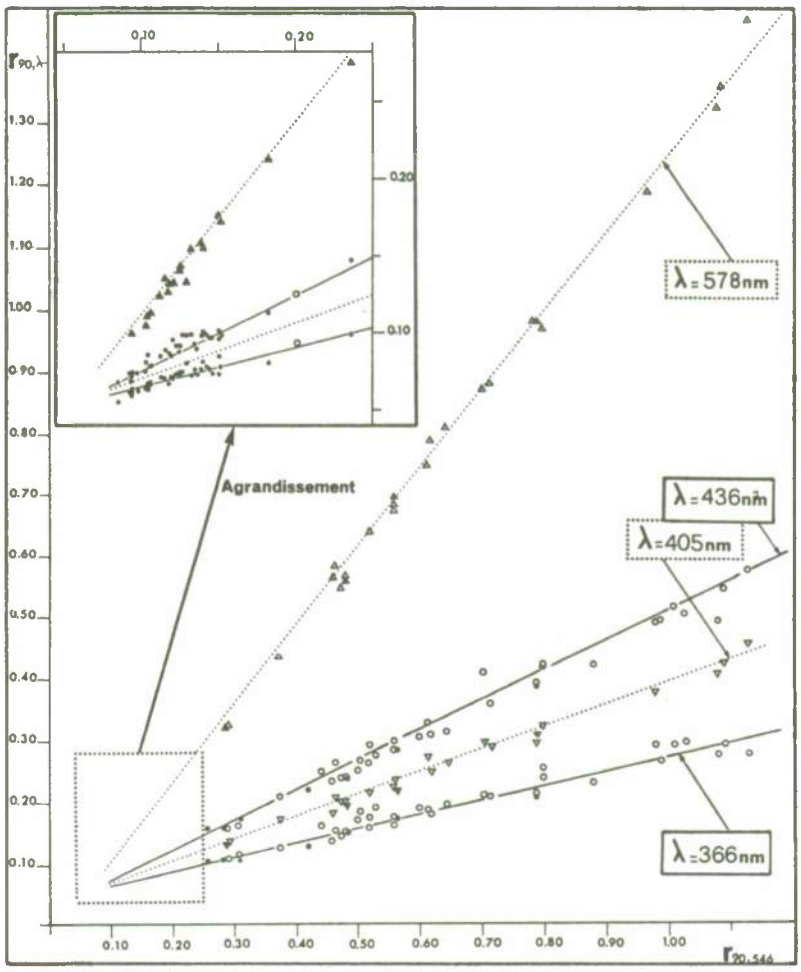


Figure I.11 : r(90, λ) porté en fonction de r(90,546) pour divers échantillons (voir texte). Les signes creux correspondent à des mesures en Manche, les signes noirs à des mesures en Méditerranée.

fonde sur le principe suivant : si l'on effectue les mesures par rapport au benzène optiquement pur, pris comme étalon, la sélectitité de la diffusion par un échantillon peut être déduite de la sélectivité de la diffusion par le benzène, expérimentalement connue et théoriquement calculée. Pratiquement, il peut être procédé ainsi : en appelant r le rapport du coefficient de diffusion de l'échantillon à celui du benzène (pour le même angle θ, non écrit pour simplifier),

On a pour λ = 546 nm $r(546) = r_o(546) + r_p(546)$, et pour toute autre longueur d'onde :

$r(\lambda) = r_o(\lambda) + r_p(\lambda)$, les indices o et p désignant comme précédemment, la part qui revient à l'eau pure et celle qui revient aux particules : l'indice b ci dessous est relatif au benzène. En explicitant :

$$r_{(546)} = \frac{\beta_o(546) + \beta_p(546)}{\beta_b(546)}$$

et en supposant que, lorsqu'on change de longueur d'onde, chaque coefficient de diffusion est multiplié par un coefficient spécifique k, c'est à dire respectivement par K_o, K_p et K_b, on peut écrire :

$$r(\lambda) = \frac{K_o\ \beta_o(546) + K_p\ \beta_p(546)}{K_b\ \beta_b(546)} = \frac{K_o}{K_b}\ r_o(546) + \frac{K_p}{K_b}\ r_p(546),$$ et finalement on obtient

en réintroduisant r(546) : $$r(\lambda) = Cste + \frac{K_p}{K_b}\left(r(546) - r_o(546)\right) .$$

Si la sélectivité de la diffusion par les particules était nulle ($K_p = 1$) on obtiendrait entre r(λ) et r(546) une relation linéaire, la pente étant l'inverse de la valeur de K_b* . De fait, en portant r (λ) en fonction de r(546) pour chaque échantillon, on fait apparaître des lois approximativement linéaires, mais de pentes différentes de $1/K_b$, qui permettent donc d'évaluer K_p. Ces valeurs, obtenues pour θ = 90° et θ = 30°, sont reportées en fonction de la longueur d'onde sur la figure I.12, et sont comparées aux courbes correspondant à des sélectivités en $\lambda^{-0,8}$ et $\lambda^{-1,2}$; il convient de noter qu'elles sont très proches des valeurs fournies directement, par la première méthode.

Les valeurs de K_b caractérisant la sélectivité de la diffusion par le benzène qui ont été adoptées, sont les suivantes (A. Morel, 1966) :

λ nm =	578	546	436	405	366
K_b =	0,79	1	2,78	3,88	6,36

4.2.2 - Coefficient total de diffusion.

Il ne semble pas que des mesures directes de b à plusieurs longueurs d'onde aient été exécutées systématiquement sur le même échantillon ou en des mêmes lieu et profondeur. Les conclusions, d'ailleurs assez controversées, ne peuvent être tirées que moyennant des hypothèses. Si la forme de l'indicatrice des particules peut être considérée comme insensible à la longueur d'onde, la sélectivité trouvée pour divers angles (qui correspond *grosso modo* à une loi en λ^{-1}) se reporte intégralement sur le coefficient total b. C'est par exemple l'hypothèse faite par J.R. Zaneveld et N. Pak (1973), qui est probablement très justifiée.

Une autre hypothèse consiste à admettre que dans l'atténuation due aux particules, le terme diffusion est très largement prépondérant* sur le terme absorption. C'est l'hypothèse de W.V. Burt, 1955. Si une dispersion est observée pour le coefficient d'atténuation c, elle est imputable pratiquement en totalité au coefficient b. W.V. Burt interprète de cette façon les mesures faites avec un spectrophotomètre et les spectres obtenus correspondent à des lois allant de λ^{-1} à λ^{-2} approximativement.

5 - POLARISATION.

5.1 - RESULTATS.

H. Hinzpeter (1962) a le premier, semble-t-il, montré que la répartition angulaire du taux de polarisation en lumière incidente naturelle, est très sensiblement symétrique autour de 90° avec une valeur maximale à cet angle de l'ordre de 0,40 à 0,65 (un peu plus faible à 700 nm qu'à 400 nm), et des valeurs de l'ordre** de 0,10 à 30 et 150°. G.F. Beardsley (1968) a mesuré la polarisation dans toutes les configurations possibles, avec des combinaisons de polariseur et de lame quart d'onde à la fois sur les pinceaux incident et diffusé. Ainsi peuvent être déterminés, pour divers angles, les seize éléments de la matrice à appliquer aux quatre paramètres de Stokes qui caractérisent l'onde incidente (cf. équation 1.12, 2e partie). Cette matrice présente des valeurs faibles pour les éléments non diagonaux qui devraient théoriquement être nuls si les particules étaient des sphères. Cependant le caractère fortement diagonal de la matrice expérimentale montre que l'assimilation à des sphères constitue une bonne approximation (cf. 1.2, 2e partie).

La variation avec l'angle θ du taux de polarisation, la lumière incidente étant naturelle, est approximativement symétrique comme le montre la figure I.13 sur laquelle est représenté (partie gauche) une courbe moyenne correspondant à 5 mesures sur des eaux de la Manche et 3 sur des eaux assez turbides*** de Méditerranée (baie de Villefranche). Les valeurs extrêmes observées à 90° (60 % et 79 %), sont figurées par le trait vertical. La courbe en tireté correspond à la courbe déterminée pour l'eau optiquement pure (A. Morel, 1966), avec p(90°) = 84 %. Sur la partie droite sont retracées les courbes obtenues par G.F. Beardsley (1968) (à l'exception de celle de la station "Atlantique 4") ; elles montrent que le taux maximal (à 90°) peut ne pas dépasser 50 % et par ailleurs que la dépendance angulaire serait plus complexe, dans la zone 20-40°.

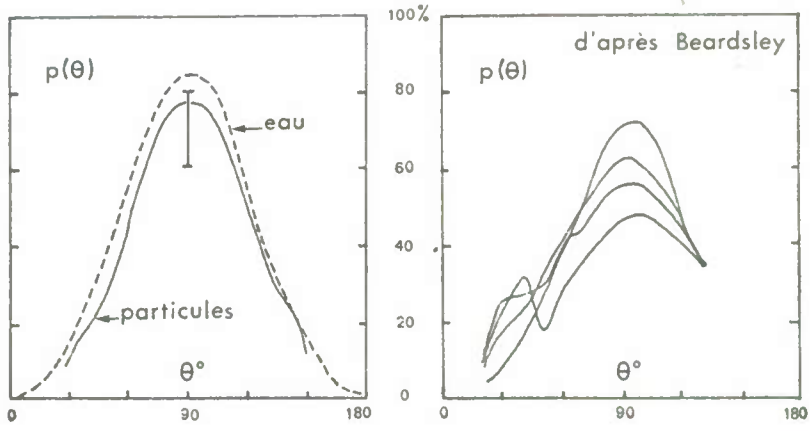


Figure I.13 : Taux de polarisation p(θ) en fonction de l'angle θ.

* Cette hypothèse est probablement et partiellement en défaut pour certaines bandes spectrales dans le cas des particules fortement colorées, cependant elle semble réaliste comme le montre de façon approchée l'expérience suivante : lorsqu'on détermine avec un spectrophotomètre le spectre d'un échantillon d'eau de mer, par rapport à la même eau filtrée, les particules agissent à la fois comme centres diffusants et absorbants. Les mêmes particules rassemblées sur un filtre de même diamètre que la cuve agiront surtout comme centres absorbants si le filtre a été "éclairci" par de l'huile d'immersion (la référence est constituée par un filtre vierge éclairci de la même façon, méthode de C. Yentsh, 1957). Or de cette façon, on ne mesure qualque chose de comparable à ce qui a été mesuré dans l'expérience précédente, que si l'on filtre au moins un volume 20 fois supérieur à celui de la cuve. Ceci montre que la diffusion l'emporte largement sur l'absorption. Les approximations qui sont faites : un spectrophotomètre ne mesure pas c mais un terme intermédiaire entre c et a, les particules sur les filtres restent encore diffusantes, ces approximations vont dans le même sens et renforcent la conclusion.

*** Les mesures sur les eaux claires, desquelles il faut en outre déduire la part de la diffusion moléculaire pour calculer la polarisation due aux seules particules, sont sujettes à caution, en raison de la perte de sensibilité consécutive à la mise en place d'un analyseur. Les 8 mesures utilisées ici sont relatives à des eaux suffisamment diffusantes ($b > 1\ m^{-1}$) pour que l'influence de la diffusion moléculaire puisse être négligée.

** Pour des eaux très turbides de la mer Baltique.

5.2 - VARIABILITE DU TAUX DE POLARISATION A 90°.

Les mesures systématiques de A. Ivanoff (1961) effectuées à 90° montrent, pour les échantillons d'eau de mer étudiés, que le taux de polarisation à cet angle, varie d'une façon très large depuis une valeur (80 %) avoisinant celle de l'eau pure, jusqu'à des valeurs basses à peine supérieures à 40 %. Cette variation s'effectue de façon très régulière, les eaux pour lesquelles le coefficient de diffusion est le plus élevé étant *grosso modo* celles qui présentent le plus faible taux de polarisation. On peut essayer de savoir si cet effet est dû uniquement au fait que la diffusion moléculaire, pour laquelle le taux de polarisation est élevé, a un role progressivement négligeable, ou au contraire si le taux de polarisation de la lumière diffusée par les particules est lui même variable et comment il l'est. Par définition (cf. 2e partie, § 1.1), le taux de polarisation est le rapport de l'intensité de la lumière polarisée i_π à l'intensité totale $I_n + I_\pi$ de la lumière naturelle et de la lumière polarisée. En décomposant ce qui revient aux diffusions par les particules et par l'eau elle même (indices p et o respectivement) on a :

$$p = \frac{I_\pi}{I_\pi + I_n} = \frac{I_{\pi p} + I_{\pi o}}{I_{\pi p} + I_{\pi o} + I_{np} + I_{no}}$$, de la même façon on écrit : $p_o = \frac{I_{\pi o}}{I_{\pi o} + I_{no}}$ et $p_p = \frac{I_{\pi p}}{I_{\pi p} + I_{np}}$

Les dénominateurs de ces trois expressions sont proportionnels respectivement à β, β_o et β_p. On a donc :

$$p = \frac{\beta_o}{\beta} p_o + \frac{\beta_p}{\beta} p_p$$ c'est à dire une expression correspondant à une "loi de mélange", où p varie selon une loi hyperbolique avec β : $p = p_p + \frac{\beta_o}{\beta}(p_o - p_p)$; p tend vers la valeur limite p_p lorsque le coefficient de diffusion β est élevé, et vers p_o lorsque la diffusion se réduit à la diffusion moléculaire ($\beta_o/\beta = 1$).*

Pour comparer aux valeurs expérimentales de A. Ivanoff on porte non β/β_o, mais le logarithme de β/β_o en fonction de p -voir figure I.14- et retrace les deux droites délimitant le domaine où se concentrent les points expérimentaux, ainsi que la droite médiane. Les courbes correspondent à diverses valeurs données *a priori* à p_p, la valeur de p_o étant 0,84. Il apparait que la distribution des points expérimentaux correspond à un taux de polarisation variable pour les particules de 0,7 à 0,4 et surtout que cette variation a un caractère assez systématique. Les particules des eaux les plus turbides sont en effet les moins polarisantes, celles des eaux limpides présentent au contraire des taux variables et pouvant aller jusqu'à des valeurs de l'ordre de 0,8 (ceci d'ailleurs expliquerait que l'extrapolation faite par A. Ivanoff fournit une valeur, 0,88, un peu forte pour la diffusion moléculaire).

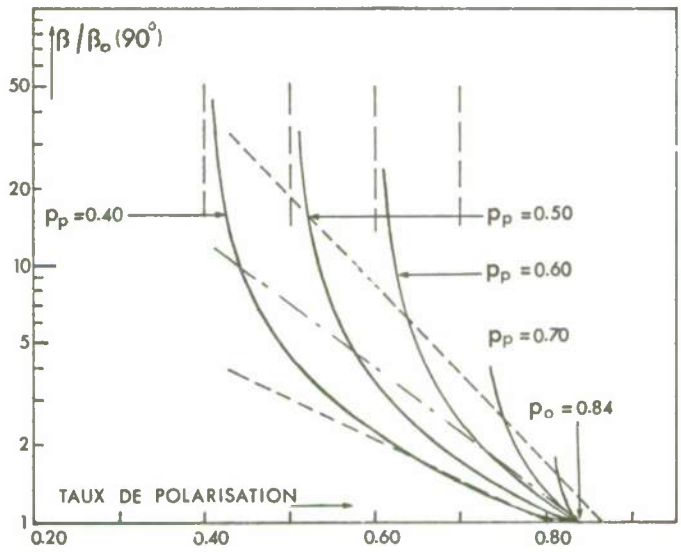


Figure I.14 : Pour diverses valeurs p_p du taux de polarisation des particules à 90°, variation du taux de polarisation d'un échantillon selon la valeur de son coefficient de diffusion à 90°, l'unité étant la diffusion moléculaire, $\beta_o(90)$, au même angle. L'échelle des ordonnées est logarithmique.

Finalement ces valeurs, en particulier celles relatives à 90°, sont dans leur diversité concordantes et confirment la variabilité de p(90). Celle-ci, comme on le verra dans la 3e partie, est théoriquement plausible, mais parmi les causes qu'on peut lui trouver, certaines, comme l'influence de la forme des particules, resteront difficiles à isoler.

6 - RELATIONS ENTRE COEFFICIENTS DE DIFFUSION.

L'utilisation de certains rapports de coefficients angulaires de diffusion a été préconisée pour servir d'élément descriptif de l'indicatrice (par exemple le rapport $\beta(30)/\beta(45)$. A.F. Spilhaus, 1968). Plus généralement, et devant la difficulté de mesurer directement le coefficient total de diffusion b, on a cherché à l'évaluer à partir de mesures de tel ou tel coefficient angulaire $\beta(\theta)$. N.G. Jerlov a dès 1953 utilisé cette méthode et déduit b de $\beta(45°)$. De telles méthodes supposent qu'au moins approximativement le rapport $\beta(\theta)/b$, c'est à dire ce que l'on a appelé le coefficient "normalisé" $\bar{\beta}(\theta)$ est suffisamment constant. La précaution n'a pas toujours été prise en utilisant ces méthodes, de retrancher de $\beta(\theta)$ la part qui revient à la diffusion moléculaire, ce qui entraine des imprécisions surtout si θ est supérieur à 45° (et même à 45° si les eaux sont très claires).

* Il n'y a aucune hypothèse dans ce calcul, hormis celle justifiée de l'additivité des ondes diffusées.

De telles relations peuvent être écrites à partir des valeurs de $\overline{\beta}(\theta)$ relatives à l'indicatrice "type" des particules et en tenant compte de la diffusion moléculaire (A. Morel, 1968). On aura ainsi :

$$b = \frac{1}{\overline{\beta}_p(\theta)} \left(\beta(\theta) - \beta_o(\theta)\right) + b_o \quad ,$$

$\beta(\theta)$ étant la valeur mesurée sur l'échantillon, à laquelle on retranche la part moléculaire $\beta_o(\theta)$. Avec les valeurs de la table II, cette relation s'écrit pour 30, 45 et 90° :

$$b \simeq 14 \left(\beta(30) - \beta_o(30)\right) + b_o \quad , \quad b \simeq 50 \left(\beta(45) - \beta_o(45)\right) + b_o \quad ,$$

$$b \simeq 445 \left(\beta(90) - \beta_o(90)\right) + b_o \quad .$$

Souvent $\beta_o(30)$ peut être négligé, $\beta_o(45)$ ne peut l'être dans le cas d'eaux claires (cf. figure I.8) enfin $\beta_o(90)$ ne peut l'être que dans le cas d'eaux très turbides. La possibilité de négliger ces termes existe d'autant moins, bien sûr, que la longueur d'onde est plus faible. La valeur b_o qui varie avec la longueur d'onde figure dans la table I. La même remarque que ci dessus s'applique quant à la possibilité de n'en point tenir compte.

La revue des valeurs expérimentales obtenues par de nombreux auteurs pour ces rapports, soit entre deux angles, soit entre coefficient angulaire et coefficient total, sera faite ultérieurement de façon détaillée (3ème partie, § 2). En effet, la variabilité de ces rapports, qui en réalité reflète la variabilité de l'indicatrice des particules, peut être théoriquement interprétée en terme de variabilité des particules elles mêmes.

DEUXIEME PARTIE

AVANT PROPOS

La recherche d'une interprétation théorique aux résultats expérimentaux comporte deux aspects : d'une part, les connaissance qu'on a à la fois des particules marines en suspension et des propriétés diffusantes sont-elles compatibles ? autrement dit les premières expliquent-elles les secondes ? et d'autre part, est-il possible de déduire de l'observation de ces propriétés diffusantes des informations sur les particules difficiles à obtenir par d'autres méthodes. Ces préoccupations ont déjà motivé plusieurs études, notamment, et sans être exhaustif, celles de Y. Otchakovsky (1965), de T. Sasaki (1967), T. Sasaki et al. (1968) et récemment celles de H. Pak et al. (1971), de G. Kullenberg (1972) et de H.R. Gordon et O.B. Brown (1972). Ces trois dernières ont été faites non à partir de valeurs publiées et tabulées des fonctions de Mie, mais au contraire en utilisant des données calculées à cet effet. Il n'apparait pourtant pas que les possibilités qu'offre la théorie aient été systématiquement explorées, ni que les comparaisons entre résultats théoriques et expérimentaux aient été méthodiquement faites. Il faut d'abord interpréter les résultats des calculs théoriques pour être en mesure de prévoir l'influence des divers paramètres, et ceci sans avoir à multiplier ces calculs. A cette condition une ligne directrice peut être dégagée qui guidera lorsqu'il s'agira d'effectuer les comparaisons. Ce qui est présenté ici est une tentative en ce sens. L'objet de cette seconde partie est donc de fournir les bases théoriques nécessaires à la résolution du problème, et de montrer ce qu'il est possible de prévoir par le calcul et sous quelles conditions. La confrontation entre les résultats théoriques ainsi obtenus et les données expérimentales est réservée à la troisième partie.

Tout d'abord (chapitre 1) sont brièvement rappelées les relations générales entre l'état de polarisation de l'onde incidente et celui de l'onde diffusée. L'article très souvent cité de F. Perrin (1942), ainsi que les chapitres consacrés à ce sujet dans les ouvrages de Van de Hulst (1957), Preisendorfer (1965) et Deirmendjian (1969) fourniront des développements plus approfondis. Il s'agit simplement ici de fixer le cadre à l'intérieur duquel se situe le cas plus restreint envisagé ultérieurement, à savoir celui où la lumière incidente est supposée naturelle ou polarisée rectilignement (perpendiculairement ou parallèlement au plan de diffusion).

Les particules marines en suspension dont les tailles varient dans une gamme étendue ressortissent à la théorie de Mie (1908). Celle-ci, en application de la théorie électromagnétique, fournit à partir des équations de Maxwell la solution analytique rigoureuse du problème de la diffusion d'une onde plane par une particule sphérique de taille quelconque. De ce dernier point de vue, elle rejoint la théorie de Rayleigh lorsque les particules deviennent très petites devant la longueur d'onde, et lorsque au contraire les particules sont grandes, elle tend vers des solutions limites qui sont celles que l'optique géométrique (réflexion, réfraction) et la théorie de la diffraction fournissent.

L'exposé de la théorie de Mie, désormais classique en particulier depuis la parution de l'ouvrage de Van de Hulst *, n'a pas à être répété dans le cadre de cette étude et le chapitre 2 ne fait que rappeler la formulation nécessaire aux développements ultérieurs. Par contre il a semblé utile à partir des résultats numériques obtenus par cette théorie, de décrire l'évolution de l'indicatrice de diffusion lorsque les paramètres taille et indice changent. En effet il n'est pas aisé, à travers les publications, de se faire une idée précise de cette évolution. Or pour un "utilisateur" la possibilité de prévoir approximativement le résultat guide dans le choix des calculs à exécuter, aussi bien pour les indicatrices de particules individuelles qu'ensuite pour les indicatrices de systèmes polydispersés. L'interprétation qu'il faut rechercher à cette évolution passe en fait par les théories qui s'appliquent aux extrémités du domaine de Mie, c'est à dire par les théories de Rayleigh et Rayleigh-Gans d'un côté et par la diffraction et l'optique géométrique d'un autre. L'approximation de Rayleigh-Gans fournit d'ailleurs des éléments très importants pour la prédiction des propriétés diffusantes des systèmes polydispersés envisagés.

Le chapitre 3 indique comment les propriétés diffusantes peuvent être calculées pour une population de particules de tailles variées, mais supposées de même nature ("ensemble polydispersé"). La signification physique des calculs est discutée compte tenu du fait que des limites mathématiques correspondant aux tailles minimale et maximale doivent être posées quelque peu arbitrairement. C'est un problème délicat qui réapparaîtra en maintes occasions au cours de la troisième partie.

Enfin l'hypothèse initiale du calcul a été de considérer que les particules marines peuvent être assimilées à des sphères transparentes ce qui nécessite quelques commentaires. Des extensions de la théorie de Mie au cas de sphères non homogènes ou au cas de particules de formes différentes (ellipsoïdes, cylindres,...) existent mais conduisent en général à des calculs plus complexes. C'est une première raison pour se limiter au cas de sphères. Une seconde plus convaincante tient au fait que les particules marines sont de forme quelconque et par suite de leur orientation parfaitement aléatoire, la sphère devient la meilleure approximation. Confirmation de cette hypothèse peut être trouvée dans les travaux expérimentaux de Hodkinson (1963) et de Holland et Gagne (1970). Ces derniers auteurs montrent que des particules irrégulières se comportent pratiquement comme les particules sphériques équivalentes, pour la diffusion en lumière naturelle (sauf peut être pour la rétrodiffusion), mais que par contre, la polarisation est sensiblement affectée. Cet effet possible obligera à nuancer les conclusions relatives à la polarisation (3e partie).**

L'autre choix, celui des indices uniquement réels, doit aussi être expliqué. L'introduction d'une partie imaginaire pour tenir compte de l'absorption des particules ne changerait pratiquement rien aux résultats, car le terme à introduire, en fait assez hypothétique, doit être en tout état de cause, très faible. Son influence dans ce cas serait négligeable, comme en témoigne la figure II.17 où, toutes choses

---

* C'est la raison pour laquelle les références aux travaux originaux de Mie et aussi bien à ceux de Rayleigh ou de Debye ou de Gans sont omises. Le lecteur trouvera dans l'ouvrage de Van de Hulst, à la fin de chaque chapitre, une bibliographie annotée et commentée d'un point de vue historique.

** La polarisation par les particules marines est effectivement différente de celle qui serait due à des sphères, mais assez peu (G.F. BEARDSLEY, 1968) (cf. 1ère partie, § 5).

pratiquement égales par ailleurs, sont comparées l'indicatrice de diffusion calculée avec l'indice 1,05 et celle calculée par O.B. Brown et H.R. Gordon (1972) pour l'indice 1,05 -0,01 i. Les valeurs sont approximativement confondues, alors que le terme imaginaire correspond à une absorption déjà très forte (92 % pour la traversée d'une couche de 10 µm d'épaisseur).

En conclusion, avec l'hypothèse retenue, le modèle ainsi constitué est sans nul doute idéalisé, mais il constitue une première approche ou, si l'on veut, une référence, par rapport à laquelle les déviations pourraient être interprétées.

1 - ETAT DE POLARISATION ET DIFFUSION

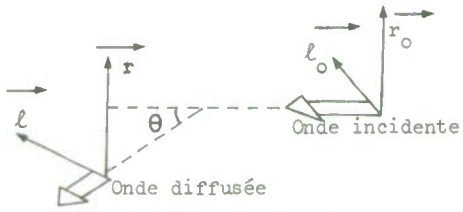
1.1 - DESCRIPTION DE L'ETAT DE POLARISATION PAR LES PARAMETRES DE STOKES

A un pinceau de lumière monochromatique complètement polarisée correspond un vecteur champ électrique $\vec{E}$ dont les composantes sur deux axes rectangulaires $(\vec{r}, \vec{l})$ dans le plan d'onde s'écrivent :

$$E_r = p_r\, e^{i(\omega t - \phi_1)} \qquad E_l = p_l\, e^{i(\omega t - \phi_2)} \quad , \tag{1.1}$$

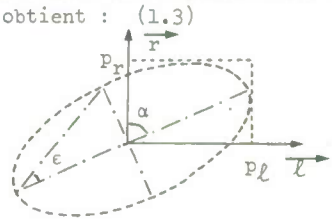
$\vec{r}$ et $\vec{l}$ peuvent être quelconques mais sont choisis tels que le produit vectoriel $\vec{r} \wedge \vec{l}$ soit orienté dans le sens de propagation de la lumière (incidente ou diffusée) ; r est perpendiculaire au plan de diffusion, $\vec{l}$ dans ce plan (formé par les directions de propagation de la lumière incidente et de la lumière diffusée considérée). Les quatre paramètres de Stokes sont définis par : (1.2)

$$I = E_r E_r^* + E_l E_l^*$$
$$Q = E_r E_r^* - E_l E_l^*$$
$$U = E_r E_l^* + E_l E_r^*$$
$$V = i\,(E_r R_l^* - E_l E_r^*) \quad .$$



D'après (1.1) trois paramètres indépendants suffisent pour décrire l'état de polarisation : p_l, p_r et le déphasage $\delta = \phi_l - \phi_2$; entre les quatre paramètres de Stokes existe effectivement une relation (voir plus loin : 1.6). En explicitant (1.2) à l'aide de (1.1) on obtient : (1.3)

$$I = p_r^2 + p_l^2$$
$$Q = p_r^2 - p_l^2$$
$$U = 2\, p_r\, p_l \cos\delta$$
$$V = -\,2\, p_r\, p_l \sin\delta \quad .$$



Une interprétation géométrique simple peut en être donnée : le vecteur $\vec{E}$ décrit dans le cas général une ellipse dont les axes sont différents du sytème $(\vec{l}, \vec{r})$. On pose tg ε = e, où e est l'ellipticité (rapport du petit au grand axe), et on désigne par α l'angle fixant la direction du grand axe par rapport à $\vec{r}$. α peut être calculé par réduction de l'ellipse à ses axes principaux :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2 \cos\delta \, \frac{p_l p_r}{p_r^2 - p_l^2} \quad . \tag{1.4}$$

L'énergie de la vibration qui ne dépend pas de la différence de phase est : $I = p_l^2 + p_r^2$, que l'on pose égale à p^2. On trouve par des considérations géométriques les nouvelles expressions :

$$I = p^2 \quad , \quad Q = p^2 \cos 2\varepsilon \cos 2\alpha \quad , \quad U = p^2 \cos 2\varepsilon \sin 2\alpha \quad . \quad V = p^2 \sin 2\varepsilon , \tag{1.5}$$

lesquelles permettent d'interpréter les cas particuliers suivants :

- si $p_l = p_r$, d'après (1.4) $\alpha = \pi/4$ et la vibration est :
  - soit linéaire, sur la première bissectrice ($\delta = 0$) ou la seconde ($\delta = \pi$). Q et V sont nuls, U ne l'est pas, le vecteur de Stokes s'écrit $(1, 0, \pm 1, 0)$, en supposant I unitaire.
  - soit circulaire, droite ou gauche, selon le signe de $\delta = \pm\, \pi/2$; dans ce cas Q et U sont nuls, V ne l'est pas et l'on a $(1, 0, 0, \pm 1)$.
- si p_l ou bien p_r est nul, $i = \pm Q$, la polarisation est rectiligne, respectivement perpendiculaire ou parallèle au plan de diffusion et les paramètres sont $(1, \pm 1, 0, 0)$.

Enfin dans le cas général, δ diffère des multiples de $\pi/2$, la vibration est elliptique et les paramètres de Stokes sont quelconques. Dans tous les cas, il découle des équations (1.5) la relation :

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2 \quad , \tag{1.6}$$

qui constitue le critère de polarisation totale.

Si au contraire la lumière est totalement dépolarisée, on peut toujours considérer que E_l et E_r existent mais ne présentent aucune cohérence de phase : p_l et p_r sont égaux et I reste défini de la même façon. Par contre aucune des grandeurs Q, U, V ne se distingue statistiquement de zéro à l'échelle habituelle de temps et le vecteur de Stokes pour la lumière naturelle s'écrira (I, 0, 0, 0).

Envisager la lumière partiellement polarisée comme la superposition de lumière naturelle I_N et de lumière totalement polarisée I_P, se traduit par : $I = I_N + I_P$ où $I_P = (Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}$, entrainant l'inégalité : $I^2 > Q^2 + U^2 + V^2$.

Sous sa forme la plus générale le taux de polarisation (compris entre 0 et 1) est le rapport :

$$\frac{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}}{I} \quad . \tag{1.7}$$

1.2 - MATRICES DE DIFFUSION

Lorsque deux ondes sans corrélation de phase sont superposées les paramètres de Stokes sont additifs. Un dispositif optique ou aussi bien un milieu diffusant produit, à partir d'une onde incidente (I_0, Q_0, U_0, V_0), une onde émergente dont les paramètres (I, Q, U, V) résultent de combinaisons linéaires des paramètres initiaux ; autrement dit le dispositif ou le milieu est caractérisé par une matrice de transformation à 4 x 4 coefficients :

$$\begin{vmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \\ & \cdots & \\ & & a_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_0 \\ Q_0 \\ U_0 \\ V_0 \end{vmatrix} \quad . \qquad (1.8)$$

La modification du vecteur champ $\vec{E}_o$ relatif à l'onde incidente se traduit par les relations linéaires suivantes liant les composantes :

$$E_r = A_1 E_{r,o} + A_4 E_{l,o} \qquad E_l = A_3 E_{r,o} + A_2 E_{l,o} \quad , \qquad (1.9)$$

$\begin{vmatrix} A_1 & A_4 \\ A_3 & A_2 \end{vmatrix}$ constitue donc la matrice de transformation des amplitudes, matrice dont les coefficients sont complexes. En introduisant les expressions (1.9) dans les définitions données par (1.2) et en réarrangeant, on calcule les 16 éléments de la matrice (1.8) qui, appliquée aux paramètres initiaux, permet de calculer les paramètres finaux. Ces 16 coefficients sont tous réels et formés d'expressions quadratiques du type $A_j A_k$. Pour les problèmes de diffusion on utilise le plus souvent les paramètres de Stokes "modifiés" (I_1, I_2, U, V), déduits simplement par : I_1 (ou aussi I_r) = 1/2 (I + Q) I_2 (ou aussi I_ℓ) = 1/2 (I - Q), U et V restant inchangés. Le critère de polarisation totale (1.6) s'écrira avec cette notation : $4 I_1 I_2 = U^2 + V^2$. Les paramètres caractérisant la lumière naturelle seront (1/2, 1/2, 0, 0) et le taux de polarisation défini par (1.7) se réduit à : $I_1 - I_2 / I_1 + I_2$.

Diffusion par des sphères isotropes.

Si les particules possèdent certaines symétries le nombre des coefficients indépendants dans la matrice devient inférieur à 16 ; un cas particulièrement simplifié est celui de la diffusion par des sphères isotropes pour lesquelles la matrice des amplitudes est diagonale ($A_3 = A_4 = 0$), la matrice des intensités qui s'en déduit devenant quasi symétrique :

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U \\ V \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{1,o} \\ I_{2,o} \\ U_0 \\ V_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1A_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2A_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2(A_1A_2^* + A_2A_1^*) & i/2(A_1A_2^* - A_2A_1^*) \\ 0 & 0 & -i/2(A_1A_2^* - A_2A_1^*) & 1/2(A_1A_2^* + A_2A_1^*) \end{vmatrix} \quad . \qquad (1.11)$$

Soit, notée avec les fonctions d'intensité i (voir définition dans l'annexe I) :

$$\begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ U \\ V \end{vmatrix} = \frac{1}{k^2} \begin{vmatrix} I_{1,o} \\ I_{2,o} \\ U_0 \\ V_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 & i_4 \\ 0 & 0 & -i_4 & i_3 \end{vmatrix} \quad . \qquad (1.12)$$

Le facteur $1/k^2$ (avec $k = 2\pi / \lambda$) provient du fait que les fonctions d'intensité, sans dimension, sont définies à partir des fonctions d'amplitude $S = k A$, par $i_1 = S_1S_1^*$ $i_2 = S_2S_2^*$ ... ; les termes de la matrice des A (1.11) sont les sections efficaces partielles p_1, p_2 ... (cf. définitions, Annexe I). Cette matrice comporte 4 termes non nuls, dont 3 seulement sont indépendants car il existe entre eux une relation, aisément vérifiable à partir des expressions contenues dans 1.11, qui s'écrit :

$$i_1 i_2 = i_3^2 + i_4^2 \qquad (1.13)^{\times}$$

Par application de l'équation matricielle 1.12), on peut prévoir les divers cas suivants :

- si la lumière incidente est polarisée elliptiquement (I_1, I_2, U, V) ou circulairement (I_1, I_2, 0, V) ou rectilignement mais hors des directions $\vec{r}$ ou $\vec{l}$ (I_1, I_2, U, 0), la lumière diffusée est, de façon générale, elliptique car $i_3 \neq i_4 \neq 0$; de plus elle est totalement polarisée si l'incidente l'est, ce que l'on vérifie aisément en explicitant le critère de polarisation (1.10) pour l'onde diffusée et en tenant compte de la relation (1.13).
- si la lumière est polarisée rectilignement selon $\vec{r}$ ou $\vec{l}$ (I_1, 0, 0, 0) ou (I_2, 0, 0, 0), la lumière diffusée conserve intégralement cette propriété.
- enfin, si la lumière est naturelle (I/2, I/2, 0, 0) la lumière diffusée est partiellement polarisée, puisque en général i_1 diffère de i_2 ; son intensité totale est I = (1/2) ($i_1 + i_2$) et le taux de polarisation est, comme indiqué ci dessus : ($i_1 - i_2$) / ($i_1 + i_2$).

Cas des angles 0° et 180°

On verra plus loin (§ 2.1.2) que S_1 (0) = S_2 (0) ; il s'ensuit immédiatement, d'après 1.11, que $i_1 = i_2 = i_3$ et que $i_4 = 0$: la matrice de diffusion est diagonale et l'état de polarisation, quel qu'il soit, est strictement maintenu ; l'état de non polarisation l'est également. Ceci peut être prévu en se fondant sur des considérations de symétrie : en effet le "plan de diffusion" précédemment défini n'existe plus, et puisque les particules sont des sphères isotropes aucune direction ne peut être privilégiée dans ce système axial . Pour la diffusion à 180° le même raisonnement s'applique à une différence près : le plan de diffusion n'est plus défini, mais par continuité, c'est à dire en faisant tendre θ vers 180° (voir figure précédente) on voit que le vecteur $\vec{l}$ pour la lumière diffusée est opposé au vecteur $\vec{l}$ sur lequel on repérait la vibration incidente. Dans ce cas (cf. § 2.1.2) S_1 (180) = - S_2 (180), par suite $i_1 = i_2 = -i_3$,

× Perrin et Abragam (1951) ont montré que dans le cas de présence simultanée de sphères de tailles différentes, cette égalité ne peut plus être vérifiée, sauf pour les angles 0° et 180°, le sens de l'inégalité qui la remplace étant : $i_1 i_2 > i_3^2 + i_4^2$. Le critère de polarisation ne peut plus être satisfait et une dépolarisation partielle de la lumière diffusée apparaît alors que l'onde incidente est totalement polarisée. Perrin et Abragam, ainsi que Deirmendjian (1969) ont suggéré d'utiliser ce facteur de dépolarisation comme indice de l'hétérogénéité des tailles.

i_4 demeurant nul. Toute polarisation linéaire demeure inchangée : le retournement de $\vec{I}$ compensant le signe de U (= -i U_0). Par contre, compte tenu de ce retournement, V (= i V_0) gardant son signe, le sens de toute polarisation circulaire (ou elliptique) est inversé. Des applications de ces deux derniers points ont été recherchées : l'utilisation d'éclairage en lumière polarisée a été préconisée afin de réduire le voile dû à la retrodiffusion lors de prises de vue sous marines (R.O. Briggs et G.L. Hatchett, 1965 et G.D. Gilbert et J.C. Pernicka, 1966, pour ne citer que les initiateurs de cette technique).

2 DIFFUSION PAR UNE PARTICULE SPHERIQUE

2.1 - FORMULATION DE LA THEORIE DE MIE.

Dans le cas d'une particule isotrope, sphérique et optiquement inactive, le phénomène de diffusion possède une symétrie axiale, l'axe étant la direction de propagation de l'onde incident, ceci à condition que l'onde incidente possède elle même cette symétrie, ce qui est le cas en particulier, si la lumière est naturelle. Tout plan contenant cette direction est plan de symétrie ; celui qui en outre contient la direction dans laquelle est observée la diffusion est le "plan de diffusion" (souvent appelé "horizontal" en raison de la disposition expérimentale fréquemment adoptée). Dans ce plan θ désigne l'angle entre les directions de l'onde incidente et de l'onde diffusée ; en effet un seul paramètre angulaire suffit en raison de la symétrie de révolution. Comme on l'a vu précédemment (§ 1.2) les composantes du champ électrique suivant deux axes rectangulaires pris dans le plan de l'onde diffusée, l'un perpendiculaire (indice 1 ou r), l'autre parallèle (indice 2 ou ℓ) au plan de diffusion, ont pour amplitudes $S_1(\theta)$ et $S_2(\theta)$ (S_3 et S_4 sont nulles). Les fonctions d'intensité correspondantes (sans dimension, cf. annexe I) sont obtenues en prenant le carré des modules :

$$i_1(\theta) = S_1(\theta)\, S_1^*(\theta)$$
$$i_2(\theta) = S_2(\theta)\, S_2^*(\theta) \quad . \qquad (2.1)$$

La théorie de Mie fournit la solution exacte pour ces amplitudes qui, en plus de l'angle θ, dépendent
- de la taille de la particule, ou plus exactement de la taille relative, par l'intermédiaire du paramètre $\alpha = 2\pi r / \lambda$, où r est le rayon de la particule sphérique et λ la longueur d'onde dans le milieu entourant la particule ;
- de l'indice de réfraction relatif m, c'est à dire de l'indice réel ou complexe de la particule, par rapport à l'indice du milieu extérieur à la particule.

Cette solution est exprimée sous forme de séries convergentes :

$$S_1(\alpha,m,\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta) \right)$$
$$S_2(\alpha,m,\theta) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(b_n \pi_n(\cos\theta) + a_n \tau_n(\cos\theta) \right) \quad , \qquad (2.2)$$

(n, entier positif, n = 1, 2, 3, ...)* .

Les paramètres α, m et θ ont des rôles différents : en effet chaque terme de l'une ou de l'autre des séries combine des fonctions dépendant uniquement de l'angle (par cos θ) avec des fonctions a_n et b_n qui elles, ne dépendant que de la taille et de l'indice (α et m). L'amplitude finale apparait comme la somme des amplitudes des ondes partielles correspondant à chaque ordre n ; l'importance relative de ces ondes partielles est déterminée par la valeur des "coefficients de Mie" a_n et b_n. Pour un indice m donné, la valeur de ces coefficients est plus élevée si α est grand, en conséquence le nombre des ondes partielles (que l'on peut associer à celles émises par des multipoles oscillants) à prendre en compte est plus grand et les séries convergent lentement. A l'inverse lorsque α est suffisamment petit, les coefficients peuvent être négligeable dès le second ordre, et, comme on le verra plus loin, les formules se réduisent en celles du dipole de Hertz ; autrement dit ce cas limite est celui de la diffusion de Rayleigh.

2.1.1 - Les fonctions π_n, τ_n et a_n, b_n.

Elles sont exprimées par :

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} P'_n(\cos\theta)$$
$$\tau_n(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P'_n(\cos\theta) \quad , \qquad (2.3)$$

où P'_n est la dérivée première du polynome de Legendre d'ordre P_n, et par :

$$a_n = \frac{\psi'_n(m\alpha)\,\psi_n(\alpha) - m\,\psi_n(m\alpha)\,\psi'(\alpha)}{\psi'_n(m\alpha)\,\zeta(\alpha) - m\,\psi_n(m\alpha)\,\zeta'(\alpha)}$$
$$b_n = \frac{m\psi'_n(m\alpha)\,\psi_n(\alpha) - \psi_n(m\alpha)\,\psi'_n(\alpha)}{m\psi'_n(m\alpha)\,\zeta_n(\alpha) - \psi_n(m\alpha)\,\zeta'_n(\alpha)} \quad , \qquad (2.4)$$

où ψ_n est la fonction de Ricatti-Bessel d'ordre n, ψ'_n sa dérivée première ; ζ_n est la fonction de Ricatti-Hankel d'ordre n, ζ'_n sa dérivée première. Les arguments sont α et le produit mα déjà définis.

Ces fonctions ψ_n et ζ_n sont liées aux fonctions de Bessel et de Hankel d'ordre n + 1/2 par :

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) \qquad \zeta_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H_{n+1/2}(x), \qquad (2.5)$$

où

$$H_n(x) = J_n - i\,Y_n(x) \quad . \qquad (2.6)$$

J_n et Y_n sont respectivement les fonctions de Bessel de première et de seconde espèce d'ordre n. H_n la fonction de Hankel de même ordre.

---

* Dans ces formules et jusqu'au paragraphe 2.2, l'indice de réfraction relatif est noté m pour le distinguer de l'ordre n.

En introduisant la fonction de Ricatti-Bessel de seconde espèce χ_n :

$$\chi_n = -\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} Y_{n+1/2}(x), \qquad (2.7)$$

$\zeta_n(x)$ s'exprime alors :

$$\zeta_n(x) = \psi_n(x) + i\ \chi_n(x). \qquad (2.8)$$

Il faut noter que les coefficients a_n et b_n sont complexes en raison de la présence de la fonction ζ_n, même lorsque l'argument ($m\alpha$) est réel (particules non absorbantes). Cependant dans ce dernier cas, parties réelles et parties imaginaires sont immédiatement séparables ce que montre la substitution de la formule (2.8) dans les équations (2.4). Pratiquement il est possible de calculer ces séries, car à chaque ordre, les valeurs des fonctions a_n, b_n, π_n, τ_n peuvent être déduites des valeurs relatives aux ordres antérieurs, en utilisant les relations de recurrence établies pour les polynomes de Legendre et pour les fonctions de Bessel. Ceci est examiné plus en détail dans l'annexe II, "conduite du calcul et adaptation à l'ordinateur". Dans cette annexe il sera montré que dans le cas particulier examiné précédemment, lorsque m est réel, a_n, comme b_n, peuvent être mis, après séparation des parties réelle et imaginaire, sous la forme :

$$\mathrm{Re}\ \{a_n\} = \frac{1}{1 + p^2/q^2} \qquad \mathrm{im}\ \{a_n\} = \frac{-p/q}{1 + p^2/q^2},$$

p et q étant eux mêmes nombres réels, p/q peut prendre toute valeur entre $\pm\infty$ selon l'ordre n ; ceci permet de mettre en évidence une propriété importante de la suite des nombres complexes a_n et b_n, démontrée de façon quelque peu différente par Van de Hulst : le lieu de l'image des a_n (ou des b_n) est calculé simplement en posant d'abord : $X = \mathrm{Re}\ \{a_n\}$ $Y = \mathrm{Im}\ \{a_n\}$, puis en éliminant p/q entre X et Y ; on obtient la relation $Y^2 + X^2 - X = 0$, équation du cercle centré sur le point : Im = 0, Re = 0,5, de rayon 0,5.

La figure (II.1) montre l'image des valeurs successives prises par le premier terme a_1 lorsque α varie de 1 à 100, le calcul étant fait pour l'indice de réfraction 1,05.

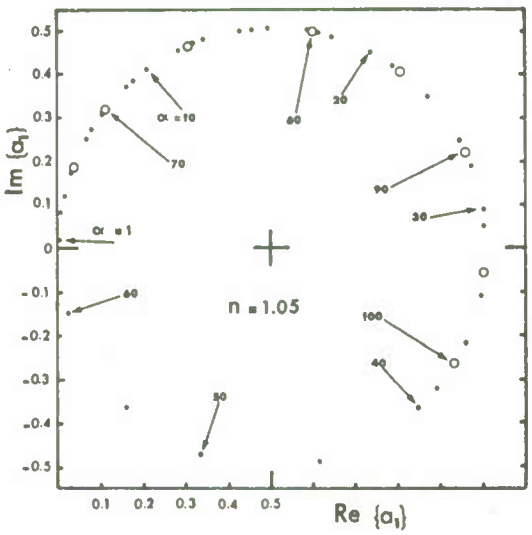


Figure II.1 : Valeurs du coefficient complexe a_1 dans le cas de l'indice de réfraction réel 1,05. Des exemples correspondant à des valeurs complexes d'indice peuvent être trouvés en particulier dans l'ouvrage de D. Deirmendjian (1969) ; les lieux des images de a_1 ne sont plus le cercle mais des courbes spiralées compliquées demeurant à l'intérieur du cercle.

Lorsque θ varie de 0 à 180°, les fonctions π_n et τ_n se comportent de façon d'autant plus complexe que l'ordre n est plus élevé ; aux premiers ordres on a :

$$\pi_1(\cos\theta) = 1 \qquad \pi_2(\cos\theta) = 3\cos\theta \qquad (2.9\ A)$$

$$\tau_1(\cos\theta) = \cos\theta \qquad \tau_2(\cos\theta) = 3\cos 2\theta\ . \qquad (2.9\ B)$$

Aux ordres supérieurs, des oscillations de plus en plus nombreuses et d'amplitude croissante apparaissent ; les amplitudes les plus grandes correspondent aux valeurs de $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$. A partir des relations de récurrence (II.7) (II.8)* on établit aisément, que l'on a, quel que soit l'ordre : pour

$$\theta = 0° \qquad \pi_n(1) = \tau_n(1) = (1/2)\ n\ (n+1), \qquad (2.10)$$

et pour $\theta = 180°$ $\quad -\pi_n(-1) = \tau_n(-1) = (-1)^n\ (1/2)\ n\ (n+1) \qquad (2.11)$

Ainsi qu'on le verra ci après, ces relations seront utiles lorsqu'il s'agira d'interpréter la diffusion aux angles particuliers considérés et également pour calculer le coefficient d'efficacité pour l'extinction (il se réduit à un coefficient d'efficacité pour la diffusion dans le cas de particules non absorbantes -voir annexe "définitions" -).

2.1.2 - Les fonctions d'intensité $i_1(\theta)$ et $i_2(\theta)$.

Cas particulier des angles $\theta = 0°$ et 180°.

En combinant (2.2) avec (2.10) puis (2.11) on voit immédiatement que :

$$S_1(0) = S_2(0) = 1/2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (2\ n+1)\ (a_n + b_n)\ . \qquad (2.12)$$

et que :

$$S_1(180) = -S_2(180) = 1/2 \sum (-1)^n\ (2\ n+1)\ (b_n - a_n)\ . \qquad (2.13)$$

En prenant le carré des modules pour obtenir les intensités, on voit que, aussi bien à 0° qu'à 180°, on obtient $i_1 = i_2$. Les conséquences en ce qui concerne la polarisation ont été examinées précédemment (§ 1.2).

---

* Etablies dans l'annexe II.

Angle θ quelconque ; évolution des indicatrices avec la taille (m réel).

Lorsque α est suffisamment petit (< 0,2 approximativement), les séries (2.2), exprimant S_1 et S_2, se réduisent au premier terme, π_1 et τ_1 ayant les valeurs données par (2.9 A). D'autre part (cf. annexe II), b_1, numériquement du même ordre de grandeur que a_2, est négligeable, et l'on est bien ramené au cas de la diffusion de Rayleigh avec :

$$i_1 = |S_1|^2 = C^{ste} \qquad i_2 = |S_2|^2 = C^{ste} \cdot \cos^2 \theta \quad .$$

La composante verticale est constante, la composante horizontale, variant comme $\cos^2\theta$, s'annule pour $\theta = 90°$; la lumière diffusée est totalement polarisée. Les indicatrices pour les deux composantes et pour l'intensité totale $i_T = (1/2)\ (i_1 + i_2)$ sont symétriques. Lorsque α croît, toutes les valeurs croissent mais une dissymétrie apparaît et se renforce : la diffusion vers l'arrière (θ> 90°) est moins importante que vers l'avant (θ < 90°), le minimum à 90° de i_T disparaît. Par contre lorsque α atteint la valeur 2,25 un nouveau minimum de i_T apparaît à l'arrière (180°) et "migre" vers la partie centrale de l'indicatrice, tandis qu'un autre minimum apparaît à son tour à 180° lorsque α dépasse la valeur 4 (cf. figures présentées dans l'annexe II). Le même processus se répète au fur et à mesure que le paramètre de taille croît : des ondulations apparaissent par l'arrière et se resserrent. Ceci résulte de la prise en compte des ordres de plus en plus élevés des fonctions π_n et τ_n, car lorsque α croît les suites des coefficients de Mie convergent de plus en plus lentement vers zéro. Ainsi par exemple lorsque α = 100, il est nécessaire d'atteindre l'ordre 117 pour que a_n et b_n puissent être considérés comme nuls *, et donc interviennent les 117 premières fonctions π_n et τ_n ; l'indicatrice correspondante présente approximativement une centaine d'ondulations. Hormis ces ondulations, la tendance générale demeure toujours à un renforcement de la dissymétrie. Si l'on considère non plus l'intensité i_T mais les deux composantes i_1 et i_2, leur comportement est analogue encore que plus complexe. Le taux de polarisation $(i_1 - i_2) / (i_1 + i_2)$ oscille également entre +1 et -1 (les valeurs négatives correspondent au cas où la vibration horizontale a une amplitude supérieure à la vibration verticale).

Qualitativement cette description reste valable lorsque l'indice de réfraction (réel) varie dans des limites assez étendues. Cependant il faut préciser que, si l'indice est très proche de 1, l'amplitude des oscillations de i_T est maximale et d'une façon générale, la différence entre les deux deux composantes i_1 et i_2 est grande, entrainant une forte polarisation. Lorsque l'indice s'écarte de 1, il y a "amortissement" des oscillations (et diminution de la polarisation) ainsi que le montre la figure II.2. En outre, pour une taille relative α donnée, le nombre d'oscillations est plus élevé, tandis que la dissymétrie globale est moins accentuée. Dans ce qui suit ces divers points seront repris plus en détail et interprétés en utilisant les valeurs numériques calculées.

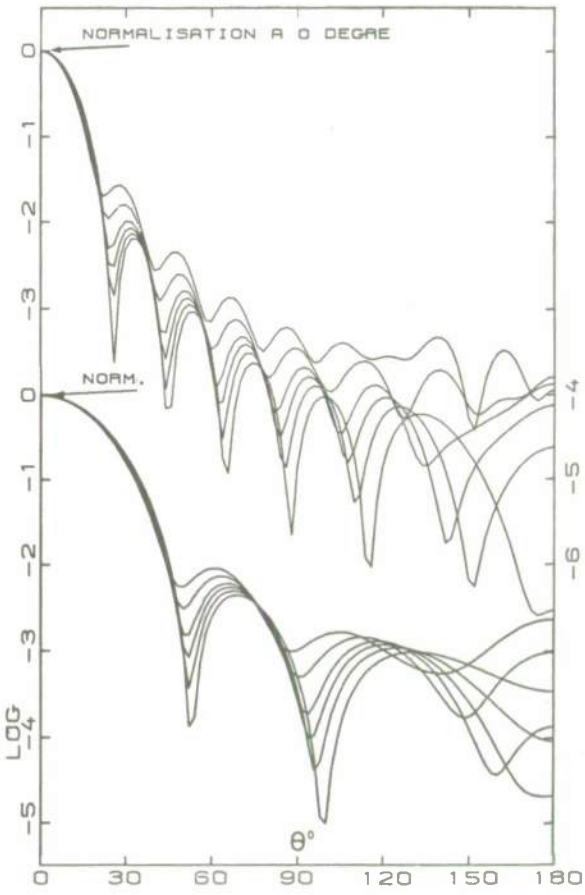


Figure II.2 : Indicatrices de diffusion normalisées à zéro degré : pour le groupe supérieur α = 10, pour le groupe inférieur α = 5. Dans les deux cas, partant du bas on trouve successivement les indicatrices calculées pour les valeurs suivantes de l'indice de réfraction : 1,02 - 1,05 - 1,075 - 1,10 - 1,15 - 1,20. L'échelle des ordonnées est logarithmique.

* Ceci implique le choix d'un critère : a_n et b_n sont considérés comme nuls, et par suite le calcul arrêté à cet ordre, lorsque les modules de l'un et l'autre de ces coefficients deviennent inférieurs à 10^{-7} (cf. annexe II).

2.2 - RESULTATS NUMERIQUES ET INTERPRETATION

Le calcul par la théorie de Mie d'indicatrices de diffusion a été exécuté dans un certain nombre de cas, énumérés ci dessous. La motivation de ce calcul préliminaire est double. D'une part les tables publiées de fonctions de Mie sont très incomplètes, surtout en ce qui concerne les indices et les tailles utiles dans le cadre de cette étude, d'autre part l'introduction en ordinateur d'un nombre considérable de données tabulées, lorsqu'elles existent, demeure de toute façon une opération excessivement longue. Pour une utilisation ultérieure, il est finalement plus efficace de prévoir dans le programme la génération des indicatrices utiles. De plus il s'est révélé indispensable de pouvoir choisir le pas de calcul tant en ce qui concerne la taille et l'indice des particules, qu'en ce qui concerne l'angle de diffusion.

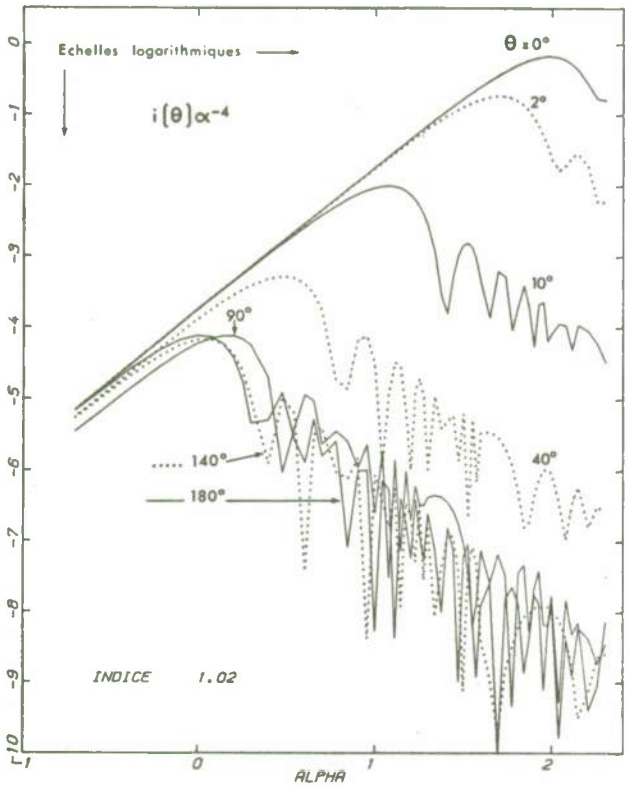


Figure II.3

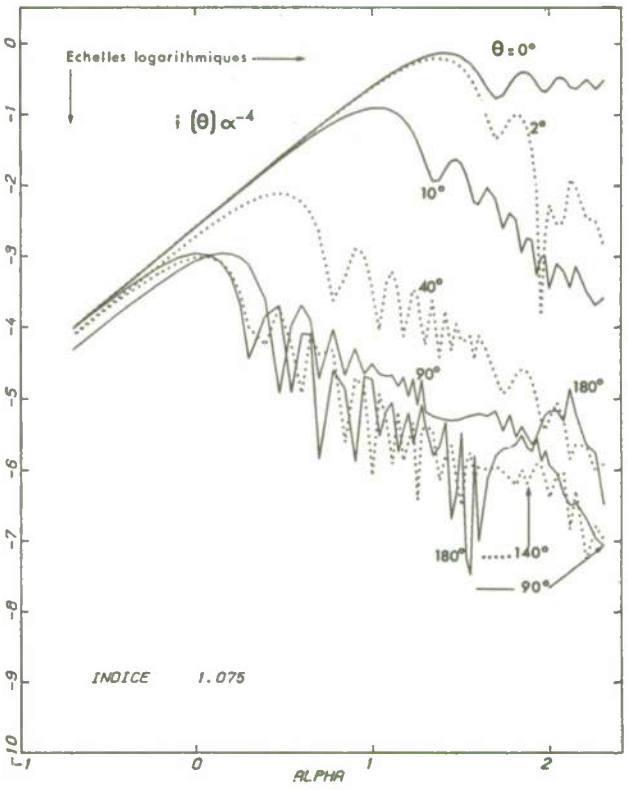
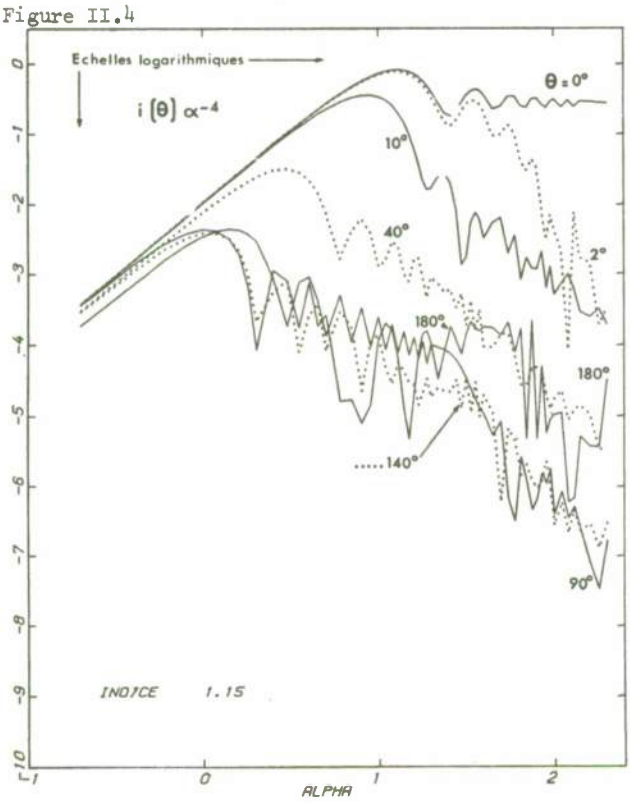


Figure II.5

Graphes des fonctions i (θ) α^{-4} pour les valeurs de θ indiquées. Chaque figure correspond à un indice de réfraction. Le paramètre de taille α varie de 0,2 à 200. La figure relative à l'indice 1,05 a été montrée par ailleurs (A. Morel, 1972 a).

Figure II.4



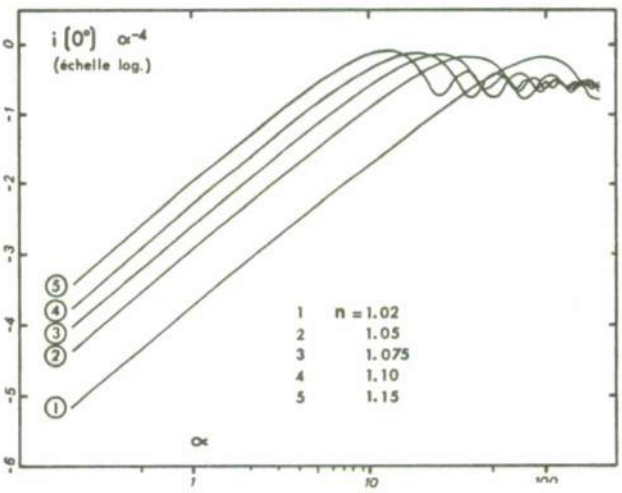


Figure II.6 : Graphes de la même fonction mais pour θ = 0° et pour diverses valeurs de l'indice de réfraction n.

- Les fonctions d'intensité $i_1(\theta)$ et $i_2(\theta)$, et en conséquence la fonction d'intensité totale $i_T(\theta) = (1/2)\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$ et le taux de polarisation $p = \left(i_1(\theta) - i_2(\theta) / i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$ ont été calculés de 2° en 2° depuis 0° jusqu'à 180° (exceptionnellement un pas de 1° a été utilisé).
- Pour chaque indice, le calcul a été répété pour 60 valeurs du paramètre de taille α, à savoir : 0,2, (0,2), 2, (0,5), 5, (1), 20, (2), 40, (5), 100, (10), 140, (20), 200, les nombres entre parenthèses indiquant l'incrémentation en α adoptée.
- Enfin cet ensemble d'opérations a été repris 5 fois, pour les valeurs suivantes de l'indice de réfraction ; 1,02, 1,05, 1,075, 1,10, 1,15.
- Pour chaque cas, c'est à dire pour chaque couple de valeurs données à α et n*, ont été également calculées les parties réelle et imaginaire de S (0), amplitude à 0°, ainsi que le facteur d'efficacité pour la diffusion Q (cf. annexe I et § 2.2.7).

Pour des raisons exposées dans l'annexe II ("adaptation et conduite du calcul sur ordinateur") l'utilisation de la "double précision" (17 chiffres significatifs) est indispensable. Mais c'est le critère adopté pour la convergence des séries qui, en arrêtant le calcul, en fixe la précision ; celle-ci correspond dans les cas les plus défavorables (valeurs élevées de α) à 6 chiffres significatifs, quelle que soit par ailleurs la valeur du nombre (exprimé en virgule flottante).

2.2.1 - Les fonctions $i_T(\theta)\,\alpha^{-4}$

Pour présenter de façon résumée ces résultats, ont été figurées pour chaque valeur de l'indice de réfraction, les variations des fonctions $i_T(\theta)\,\alpha^{-4}$ lorsque le paramètre de taille α varie de 0,2 à 200 (figures II.3 et II.5). Sur chacune de ces figures, six courbes sont tracées qui correspondent aux six valeurs suivantes de θ: 0°, 2°, 10°, 40°, 90°, 180°. Pour la clarté, le nombre de courbes est volontairement restreint ; cependant ces graphiques montrent, schématiquement au moins, comment évoluent les indicatrices lorsque la taille croît.

Le choix de l'expression, plus précisément de l'exposant -4 affectant α n'est pas arbitraire : comme on le verra plus loin (§ 2.2.8), il découle de l'expression de la diffraction, laquelle constitue une expression limite pour la diffusion à 0° dans le cas des particules de taille suffisamment élevée.

Au vu de ces figures les remarques suivantes peuvent être faites :

a/ Pour les valeurs de α les plus faibles, les courbes qui correspondent à des angles de diffusion symétrique, 0° - 180° et 40° - 140°, sont confondues, tandis que la courbe relative à 90° est située au dessous. Toutes ces courbes, dans leur partie initiale linéaire, présentent la pente +2. Enfin pour une valeur donnée de α (0,2 par exemple) les valeurs de $i(\theta)\,\alpha^{-4}$ croissent régulièrement avec l'indice (cf. figure II.6, où sont regroupées les courbes relatives uniquement à $\theta = 0$, mais qui correspondent à divers indices).

b/ En ce qui concerne l'angle 0°, la partie linéaire se prolonge jusqu'à des valeurs élevées du paramètre α. La figure II.6 montre que cette valeur de α est d'autant plus élevée que l'indice de réfraction est plus voisin de 1 (à un degré moindre, les courbes relatives à 2° présentent une évolution similaire).

c/ Après la partie linéaire et le passage par un maximum toutes les courbes relatives à 0° présentent des oscillations dont l'amplitude va diminuant lorsque α croît. Ces oscillations se font autour d'une valeur fixe et limite qui est 0,25.

d/ Pour les angles θ autres que 0°, les courbes passent aussi par un maximum, au delà duquel la décroissance est accompagnée d'oscillations complexes**. Ce maximum apparait pour des valeurs de α d'autant plus élevées que θ est plus petit. La comparaison des diverses figures montre que les positions des maxima respectifs ne sont pratiquement pas influencées par la valeur de l'indice ; contrairement donc à ce qui prévaut à 0°, la valeur correspondante de α ne dépend que de l'angle et non plus de l'indice.

e/ La pente moyenne de ces diverses courbes ($\theta \neq 0$) s'établit, en négligeant les oscillations, autour de -2,3 approximativement pour les indices 1,02, 1,05 et 1,075, et plutôt autour de -2 pour les indices supérieurs 1,10 et 1,15.

f/ Enfin, les courbes relatives à $\theta = 180°$ font toujours plus ou moins exception : les oscillations sont plus erratiques et dans la mesure où l'on peut encore parler d'une pente moyenne, celle-ci est faible ou nulle, en particulier quand l'indice est élevé.

Ces remarques sont faites au vu de résultats numériques obtenus à partir de la formulation mathématique de Mie ; ce sont des constatations n'ayant pas par elles-mêmes valeur d'interprétation. La théorie de Mie fournit une solution rigoureuse et recouvre tous les cas depuis celui des très petites particules justiciables de la théorie de Rayleigh, jusqu'à celui des particules de taille suffisamment élevée pour relever des théories classiques de l'optique géométrique et de la diffraction. Ces théories, en fait strictement applicables aux limites, et par approximation seulement dans le domaine intermédiaire, sont susceptibles par contre de fournir plus aisément les éléments d'interprétation et de donner à des résultats de calcul une signification physique plus claire.

Ainsi la théorie de Rayleigh rend compte de la première remarque, tandis que la théorie de Rayleigh-Gans*** permet d'élucider les points b et d. Les autres points recoivent - en partie seulement pour le point e - une explication satisfaisante en faisant appel à la diffraction ou à l'optique géométrique

---

* La notation n (et non plus m) est reprise pour désigner l'indice de réfraction (m désignera ultérieurement l'exposant caractéristique de la distribution).

** Les courbes sont tracées en joignant linéairement les points calculés. Les pas de calcul adoptés pour α ne permettent de montrer le comportement des fonctions que de façon approximative, sans en décrire les détails fins.

*** Extension de la théorie de Rayleigh proprement dite, faite à la fois par Rayleigh lui-même (1914) et développée par Gans (1925) (cf. H.C. Van de Hulst, 1957).

(réflexion, réfraction). Ces diverses interprétations seront successivement examinées ; leur utilité réside dans les possibilités qu'elles donnent de prévoir ce que seront les indicatrices, aussi bien pour une particule donnée que pour un ensemble de particules polydispersé.

2.2.2 - Domaine de la diffusion de Rayleigh

On a vu précédemment (2.1.2), que dans le cas de faibles valeurs du paramètre α(0,2 par exemple), les formules de Mie donnant $i_1(\theta)$ et $i_2(\theta)$ se réduisent à des expressions simples, faisant apparaître une dépendance angulaire qui est celle de la diffusion de Rayleigh. La théorie du dipole rayonnant de Rayleigh donne de ces composantes i_1 et i_2 une expression :

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \end{vmatrix} = k^6 p^2 \begin{vmatrix} 1 \\ \cos^2\theta \end{vmatrix}$$

, rattachée à des grandeurs physiques, qui sont le nombre d'onde $k = 2\pi / \lambda$, et la polarisabilité p de la particule *, ayant les dimensions de L^3. Si la particule est une sphère isotrope de rayon r, de volume V et d'indice de réfraction n, la polarisabilité est fournie par l'expression de Lorenz-Lorentz :

$$p = \frac{3}{4\pi} \frac{n^2-1}{n^2+2} V \quad \text{ou} \quad \frac{n^2-1}{n^2+2} r^3$$

; en remplaçant kr par α et posant $\frac{n2-1}{n^2+2} = \Lambda$, il vient :

$$i_1 = \alpha^6 \Lambda^2 \quad , \quad i_2 = \alpha^6 \Lambda^2 \cos^2\theta \quad . \qquad (2.15)$$

Dans le domaine d'applicabilité de la théorie de Rayleigh ($\alpha \ll 1$) les quantités $i_T(\theta)\ \alpha^{-4}$ représentées graphiquement sont donc exprimées par :

$$i_T(\theta)\ \alpha^{-4} = (1/2)\ \alpha^2\ \Lambda^2\ (1 + \cos^2\theta) .$$

Portées en fonction de α, et en coordonnées logarithmiques, ces quantités sont représentées par des droites de pente +2, quelles que soient les valeur attribuées à θ. La position respective de ces droites traduit évidemment la symétrie de l'indicatrice de diffusion par rapport à 90° (cf. remarque a).

Enfin l'indice de réfraction intervient pour fixer la magnitude du phénomène par l'intermédiaire de Λ^2. Pour une taille relative α donnée, et pour un angle donné (par exemple $\theta = 0°$ qui est le cas illustré par la figure II.6), l'intensité diffusée est proportionnelle à Λ^2. Si l'on suppose l'indice assez voisin de 1, Λ est exprimé approximativement par : $\Lambda = (2/3)\ (n - 1)$. (2.16)
i et i' étant les intensités diffusées par des particules de même taille et l'indice n et n' respectivement, on aura :

$$\frac{i}{i'} = \frac{\Lambda^2}{\Lambda'^2} \simeq \left(\frac{n-1}{n'-1}\right)^2 \quad . \qquad (2.17)$$

Les fonctions d'intensité prennent donc des valeurs d'autant plus élevées que l'indice de réfraction est plus éloigné de 1. Ainsi que le montre la figure (II.6) par exemple, les intensités sont multipliées par 25 lorsque l'indice de réfraction passe de 1,02 à 1,10.

2.2.3 - Approximation de Rayleigh-Gans.

La condition d'applicabilité de la théorie de Rayleigh $\alpha = (2\pi r / \lambda) \ll 1$, (2.18)
traduit l'hypohtèse physique suivante : la particule doit être supposée suffisamment petite afin que le champ électrique appliqué soit partout le même. Pour étendre simplement cette théorie à une particule plus grosse, et l'appliquer à chaque partie de celle-ci considérée comme un dipôle indépendant, il faudra supposer qu'au moins en première approximation, le champ électrique reste le même au niveau des divers éléments constitutifs de la particule. Autrement dit, il est nécessaire que l'amplitude et la phase de l'onde atteignant un élément donné ne soient pas modifiées de façon appréciable par la présence des autres. Ceci implique que l'énergie diffusée soit faible et que le retard de phase soit négligeable, ce qui s'exprime par la condition :

$$\frac{2\pi r}{\lambda} |n - 1| \ll 1 \quad ,$$

λ correspond à la longueur d'onde dans le milieu extérieur à la particule, n à l'indice relatif de la particule par rapport à ce milieu (l'expression correspond au déphasage maximum, c'est à dire à celui du rayon traversant diamétralement la particule). On écrit généralement cette condition : $\rho \ll 1$, (2.19)
le paramètre ρ, combinant taille et indice relatifs, étant posé égal à $2\alpha|n-1|$. Cette condition peut évidemment être satisfaite pour des valeurs élevées de α, pourvu que n diffère peu de 1.

Cas de la diffusion à zéro degré :

D'une façon générale, les ondes diffusées par les divers éléments constituant la particule ne sont pas simplement additives car elles interfèrent. Cependant, l'hypothèse initiale (selon laquelle la particule par sa présence matérielle ne modifie pas l'état de l'onde), entraîne que dans la direction particulière 0°, les ondes diffusées sont nécessairement en phase : l'allongement de parcours pour l'onde incidente est exactement compensé par un raccourcissement pour l'onde diffusée et réciproquement, ceci quelle que soit la position dans l'espace des divers éléments. Dans ce cas particulier, où il y a stricte additivité des amplitudes, l'expression de l'intensité donnée par la théorie de Rayleigh subsiste et bien que α ne soit plus petit, les formules (2.15) demeurent : $i_T(0°) = \alpha^6 \Lambda^2$. Ceci fournit une explication à la remarque b. En fait elle n'est que partielle car la linéarité (sur les graphiques bilogarithmiques) se prolonge au delà du domaine d'applicabilité, alors que la condition $\rho < 1$ cesse d'être vérifiée. Cette prolongation justifie l'appellation donnée par Penndorf (1960) de "région étendue de Rayleigh". La limite

* La polarisabilité est le moment induit $\vec{P}$ lorsque le champ électrique $\vec{E}$ est unitaire. Les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{E}$ sont parallèles pour un diélectrique isotrope et dans ce cas p est un scalaire ; dans le cas le plus général c'est un tenseur, $\vec{P}$ et $\vec{E}$ ayant alors des directions différentes.

de cette zone est fixée, comme on le verra plus loin (2.2) par la valeur 4.09 du paramètre ρ ; la valeur de ρ correspondante est donc d'autant plus élevée que l'indice est plus proche de 1.

Cas général :

Pour les angles autres que zéro degré, la compensation géométrique des différences de marche ne subsiste pas ; par suite l'amplitude de l'onde diffusée est obtenue en multipliant l'amplitude déduite de la théorie de Rayleigh par un facteur F (θ) traduisant les interférences et dépendant de θ (ou de deux angles θ et ϕ si le phénomène n'est pas de révolution)

$$i_T(\theta) = \frac{i_1(\theta) + i_2(\theta)}{2} = (1/2)\,\alpha^6\,\Lambda^2\,(1 + \cos^2\theta)\,F(\theta)\,. \qquad (2.20)$$

F (θ) est une fonction dont la valeur est 1 pour $\theta = 0°$, et inférieure à 1 pour tout autre angle. Cette fonction est calculée par intégration étendue à toute la particule ; l'élément différentiel est constitué par des "tranches" élémentaires représentant des différences de marche constantes. L'intégrale peut être exprimée par les fonctions usuelles dans le cas de particules présentant des formes géométriques simples ; dans le cas de la sphère on obtient : $F(\theta) = (G(U))^2$, (2.21)
avec $U = 2\,\alpha \sin\theta/2$, et

$$G(U) = \left(\frac{9\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{J_{3/2}(U)}{U^{3/2}}\,, \qquad (2.22)$$

où $J_{3/2}$ (U) est la fonction de Bessel de 1ère espèce d'ordre 3/2. Cette fonction multiplie séparément les deux composantes i_1 et i_2 ; il en résulte que la polarisation totale à $\theta = 90°$ caractéristique de la diffusion de Rayleigh est conservée. L'indicatrice de diffusion devient dissymétrique par diminution des valeurs aux grands angles. L'effet est d'autant plus sensible que la taille α est grande. Lorsque le premier zéro de la fonction $J_{3/2}$ est atteint, c'est à dire quand l'argument U atteint la valeur 4,49, un minimum apparaît, correspondant à une extinction par interférence : il apparait à 180° pour $\alpha = 2{,}25$. Lorsque α croît ce minimum progresse vers les petits angles, tandis qu'un second minimum, correspondant au second zéro apparait à son tour (lorsque $\alpha = 3{,}86$), et ainsi de suite. Des minima naissent successivement à l'arrière et l'indicatrice présente un système d'oscillations de plus en plus serrées tandis que la prédominance de la diffusion à l'avant (à 0° et aux angles voisins) ne cesse de s'accentuer. La "figure de diffusion" ressemble à la figure de diffraction de Fraunhofer mais les rayons angulaires des anneaux sont différents. Lorsque la taille des particules augmente, il y a transformation progressive d'une figure en l'autre, cette zone de transition est appelée dans la littérature Anglo-saxone zone de la "diffraction anomale". En définitive la forme de l'indicatrice déterminée par la fonction G (U) est donc indépendante de la valeur de l'indice de réfraction (étant entendu que n-1 demeure faible) puisque l'argument U ne dépend que de θ et de α. Si U_1, U_2, .. désignent les valeurs successives de l'argument pour lesquelles la fonction $J_{3/2}$ s'annulle, les équations : $2\,\alpha \sin\theta/2 = U_1$ (= 4,49)

$$= U_2 \ (= 7{,}73) \ \ldots \qquad (2.23)$$

sont celles des lieux géométriques des minima successifs dans le plan (α, θ). Les courbes correspondant aux six premiers minima sont tracées sur la figure II.7. A titre d'exemple on peut lire sur cette figure que si $\alpha = 5$, l'indicatrice de diffusion doit présenter 2 minima à 55° et 110° et l'amorce d'un troisième à 180° ; si $\alpha = 10$, il y a 5 minima et l'amorce d'un sixième.

La figure II.2 montre qu'il en est bien ainsi pour la plus faible valeur de l'indice (1.02), mais , lorsque l'indice croît,le système de minima progresse vers les petits angles.

Revenant à la remarque d, les courbes relatives aux divers angles θ se détachent de la courbe relative à 0°, ce "décrochement" étant provoqué par l'apparition pour l'angle θ considéré du premier minimum (1ère équation 2.23) : plus l'angle θ est petit, plus grandesera la valeur correspondante de α, et ceci indépendamment de l'indice, puisqu'il ne figure pas dans l'équation. Le tableau ci dessous (1ère ligne) présente les valeurs théoriques de α pour lesquelles ce minimum apparait aux angles θ indiqués :

θ =	180°	140°	90°	40°	20°	10°	2°
Rayleigh Gans α =	2,24	2,42	3,17	6,65	12,9	25,8	(128)
Diffraction α =			3,83	5,95	11,9	22,0	109

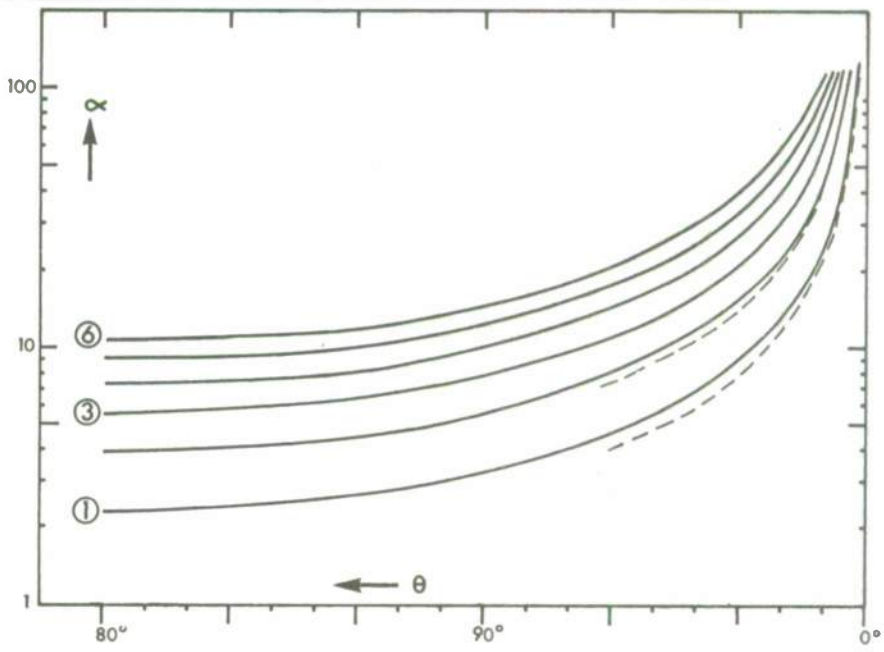


Figure II.7 : Position angulaire des six premiers minima selon la théorie de Rayleigh Gans (équations 2.23) ; en tireté, les deux premiers minima de diffraction (voir plus loin équations 2.24).

2.2.4 - Approximation par la théorie de la diffraction.

Il faut remarquer que lorsque le minimum est situé à 10°, c'est à dire lorsque $\alpha = 25,8$, la valeur de ρ est 1 si l'indice est 1,02, mais ρ atteint 5 si $n = 1,10$, autrement dit il n'est normalement plus justifié d'appliquer la théorie de Rayleigh Gans, encore moins d'ailleurs pour l'angle 2°. Pour ces tailles élevées, la diffraction peut fournir une approximation pour le calcul de la distribution angulaire des intensités, laquelle est exprimée, dans le cas de l'ouverture circulaire diffractante par :

$$F'(\theta) = \frac{2\,J_1(U)}{U}, \qquad (2.24)$$

avec $U = \alpha \sin\theta$. Le premier zéro de la fonction de Bessel $J_1(U)$ est obtenu lorsque l'argument U atteint la valeur 3,83. Ceci permet de calculer les valeurs que doit prendre le paramètre de taille α pour que le rayon angulaire du premier anneau sombre ait les valeurs 2°, 10°,... ; la seconde ligne du tableau ci-dessus présente ces valeurs. Cette approximation par la diffraction est plus justifiée que celle de Rayleigh-Gans pour expliquer la forme de l'indicatrice dans le domaine des petits angles *, et également pour les autres angles si l'indice s'écarte notablement de 1. Ceci explique en particulier le nombre accru et le resserrement des oscillations de l'indicatrice lorsque l'indice croît (figure II.2), comme on peut le prévoir à partir de la figure II.7.

En conclusion il faut cependant noter que la position du 1er minimum pour un angle donné θ correspond à des valeurs de α provenant de l'une ou l'autre liste, selon l'approximation qui peut être utilisée ; mais ces valeurs sont suffisamment proches pour rendre compte de la remarque d.

2.2.5 - Rôle de la réfraction et de la réflexion.

Indépendamment de la diffraction, l'approche par l'optique géométrique implique la prise en considération de la réflexion et de la réfraction : la conjugaison des trois phénomènes et des interférences possibles entre les trois types d'onde forme globalement la diffusion. La fonction $F'(\theta)$ pouvant prendre la valeur zéro, les minima seraient des extinctions totales si, à la lumière diffractée, ne s'ajoutait la lumière diffusée par le jeu des réflexions et réfractions. L'importance de l'énergie diffusée de cette façon est régie par la valeur des coefficients de réflexion de Fresnel et croît donc lorsque la particule est plus réfringente : les minima sont alors atténués (cf. figure II.2), la dissymétrie générale plus faible (Figures II.3 à II.5 et remarque e), mais par contre la rétrodiffusion (pour les angles voisins de 180°) s'accentue (remarque f). Il faut noter que l'extinction totale qu'entraine la nullité de $F(\theta)$ de la théorie de Rayleigh Gans n'est pas non plus constatée : les minima sont dans ce domaine également très accentués si l'indice est voisin de 1, atténués lorsqu'il s'en écarte. L'interprétation physique précédente ne peut être utilisée que par continuité : les dimensions relatives de la particule vis à vis de la longueur d'onde ne permettent plus en toute rigueur de parler de réflexion ou de réfraction.

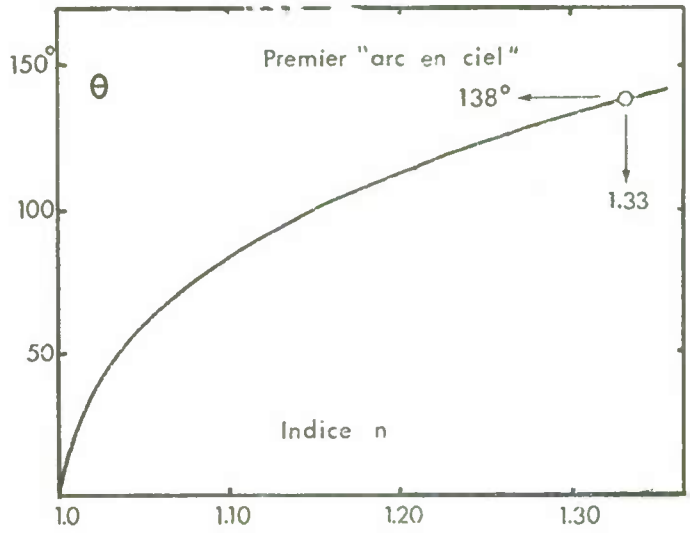


Figure II.8 : Position angulaire de l'"arc en ciel" selon l'indice de réfraction.

Enfin l'application des lois de l'optique géométrique a permis d'expliquer le phénomène de l'arc en ciel (il est admis que Descartes lui même en a donné l'interprétation correcte) qui est dû à une concentration d'énergie à la suite d'une réflexion interne (ou de deux pour le "second" arc en ciel) dans la goutte. L'angle d'émergence correspondant (qui est celui du minimum de déviation pour le premier arc en ciel) a pour valeur 138° pour les gouttelettes d'eau. Le même calcul répété avec d'autres valeurs de l'indice montre que l'"arc en ciel" se déplace vers les angles θ plus faibles lorsque l'indice se rapproche de 1 (Figure II.8. Les figures de l'annexe II montrent qu'un maximum stable apparait bien (vers 75°, pour l'indice 1,075) lorsque la taille est suffisamment grande ; d'autres indicatrices relatives à des ensembles de particules feront très clairement apparaître ce phénomène, dans la région angulaire prévue, compte tenu de la valeur de l'indice (voir figure II.17 et dans la 3e partie, les figures III.2, III.7 et III.12).

---

* Le minimum de diffraction à $\alpha = 109$ apparaît pour toutes les courbes relatives à 2° des figures II.3 à II.5. Cependant d'autres minima apparaissant avant (sauf si $n = 1,02$) : ils correspondent aux minima observés à 0° ou comme on le verra plus loin à ceux du coefficient d'efficacité Q. Ceci est interprété comme le résultat d'interférences favorables ou défavorables entre l'onde qui a traversé la particule (onde "réfractée") et l'onde diffractée formant le lobe central.

2.2.6 - Remarque générale concernant la dissymétrie de l'indicatrice.

En résumé, pour des raisons exposées précédemment, les fonctions $i(\theta)\,\alpha^{-4}$ *passent chacune respectivement par un maximum pour une valeur de* α *pratiquement fixe quel que soit l'indice. Au contraire le maximum par lequel passent les courbes relatives à 0° intervient pour une valeur de* α *croissante lorsque l'indice se rapproche de I. En conséquence l'écart entre la courbe pour 0° et les autres, qui détermine la dissymétrie globale, est d'autant plus grand que l'indice est plus voisin de I. A titre d'exemple lorsque* $\alpha = 200$, *l'indicatrice couvre approximativement 8 ordres de magnitude si* $n = 1{,}02$ *et seulement 5 ou 6 lorsque* $n = 1{,}15$ *(cf. figure II.3 et II.5). Cette remarque prendra son importance lorsqu'il s'agira de prévoir le résultat d'additions pondérées d'indicatrices.*

2.2.7 - Coefficient total de diffusion. Facteur d'efficacité.

Le facteur d'efficacité pour la diffusion Q_{diff} est défini comme étant le rapport de la section efficace pour la diffusion à la section géométrique de la particule (πr^2 pour une particule sphérique de rayon r), ou si l' on veut, comme le rapport du flux total diffusé au flux incident sur la particule, c'est à dire sur la section d'aire πr^2, s'il s'agit d'une sphère. Ces diverses définitions sont données avec plus de précision dans l'annexe I. Est également défini un facteur d'efficacité pour l'atténuation, qui ne diffère du précédent que si la particule est absorbante, auquel cas on a alors :

$$Q_{atténuation} = Q_{absorption} + Q_{diffusion}$$

Ce facteur relatif à l'atténuation est lié à l'amplitude S(0) par une relation établie en particulier par Van de Hulst (1949, 1957) (et connue sous le nom d'"extinction formula") :

$$Q_{att.} = \frac{4}{\alpha 2} \text{ Re } \{S(0)\} \quad , \tag{2.25}$$

avec $S_1(0) = S_2(0)$, qui d'après (2.12) s'exprime :

$$Q_{att.} = \frac{2}{\alpha 2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (2n+1) \text{ Re } \{a_n + b_n\} \quad . \tag{2.26}$$

L'intégrale étendue à 4π steradians fournissant le facteur d'efficacité relatif à la diffusion est (cf. annexe I) :

$$Q_{diff.} = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \iint_{4\pi} \left(i_1(\theta,\psi) + i_2(\theta,\psi)\right) d\Omega \quad ,$$ soit si le phénomène est de révolution :

$$Q_{diff.} = \frac{1}{\alpha 2} \int_0^{\pi} \left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right) \sin\theta \; d\theta \quad . \tag{2.27}$$

Il a été démontré par Debye (1909) que cette intégrale portant sur les séries se résout finalement en (cf. Van de Hulst, p. 128) :

$$Q_{diff.} = \frac{2}{\alpha 2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right) \quad , \tag{2.28}$$

$|a_n|^2$, $|b_n|^2$ étant les carrés des modules des coefficients de Mie.

Lorsque l'indice de réfraction est réel, il a été remarqué (figure II.1) que les images dans le plan complexe des nombres a_n et b_n sont sur un cercle de rayon 1/2. Géométriquement on voit que pour tout a_n ou b_n, on a :

$$\frac{|a_n|}{\text{Re }(a_n)} = \frac{1}{|a_n|} \quad , \qquad \text{ou} \qquad |a_n|^2 = \text{Re }(a_n) \; .$$

La partie réelle de a_n est numériquement égale au carré de son module. Les équations (2.26) et (2.28) sont donc mathématiquement identiques, ce qu'elles doivent être nécessairement puisque en l'absence d'absorption, l'atténuation n'est due qu'à la diffusion. Dans ce qui suit il ne sera question que de particules non absorbantes et le facteur $Q_{diff.}$, égal à $Q_{att.}$ sera simplement noté Q.

D'après l'équation (2.25) les variations de ce facteur avec le paramètre de taille α peuvent être étudiées à partir de l'évolution dans le plan complexe de la fonction $S(0)\alpha^{-2}$. Cette quantité a été calulée pour toutes les tailles et indices déjà mentionnés : comme, à titre d'exemple, le montre la figure (II.9) la fonction $S(0)\alpha^{-2}$ est représentée dans le plan complexe par une spirale qui s'enroule autour d'un point Im = 0, Re = 0,5, lorsque le paramètre courant α croît. Contrairement à l'exemple donné par Van de Hulst et relatif à l'indice 1.33 (Van de Hulst, 1957, page 176) la spirale est plus régulière, ce qui est caractéristique des indices voisins de 1 ; des ondulations, des rebroussements et enfin des boucles rétrogrades apparaissent pour les valeurs élevées de α dès que l'indice diffère nettement de 1. La "vitesse" d'enroulement dépend de l'indice : par exemple lorsque α croît de 0,2 à 200, un tour de spirale est décrit si $n = 1{,}02$, et cinq tours si $n = 1{,}10$. En fait les vitesses angulaires dans les différents cas sont égales si, à la place de α, on prend comme paramètre courant $\rho = 2\alpha(n-1)$ (les valeurs de ρ pour divers angles de rotation sont indiquées sur la figure). Le facteur Q est égal à quatre fois la partie réelle de la fonction $S(0)\,\alpha^{-2}$: il passe par un premier maximum pour ρ voisin de 4, puis oscille autour de la valeur 2, l'amplitude des oscillations étant de plus en plus faible au fur et à mesure que les spires se resserrent. La valeur limite 2* est celle que fournit la diffraction (voir ci après), dont les lois sont applicables si la particule est suffisamment grosse**.

---

* Il ne semble pas que la convergence des séries (2.28) ou (2.26) vers 2 ait été mathématiquement prouvée.

** Le fait qu'une particule diffuse deux fois plus d'énergie qu'elle ne peut en intercepter du fait de sa section géométrique est connu, pour le rappeler, sous le nom de "paradoxe de l'extinction" (ou aussi "paradoxe de Babinet"). Ce paradoxe n'est qu'apparent et découle de l'hypothèse initiale selon laquelle la distance d'observation est très grande vis à vis de la taille de la particule. Van de Hulst illustre plaisamment ce phénomène en prenant l'exemple du pot de fleur sur le rebord de la fenêtre projetant son ombre et pour lequel le coefficient vaut 1, tandis qu'il est égal à 2 pour une météorite de même taille qui intercepte la lumière provenant d'une étoile.

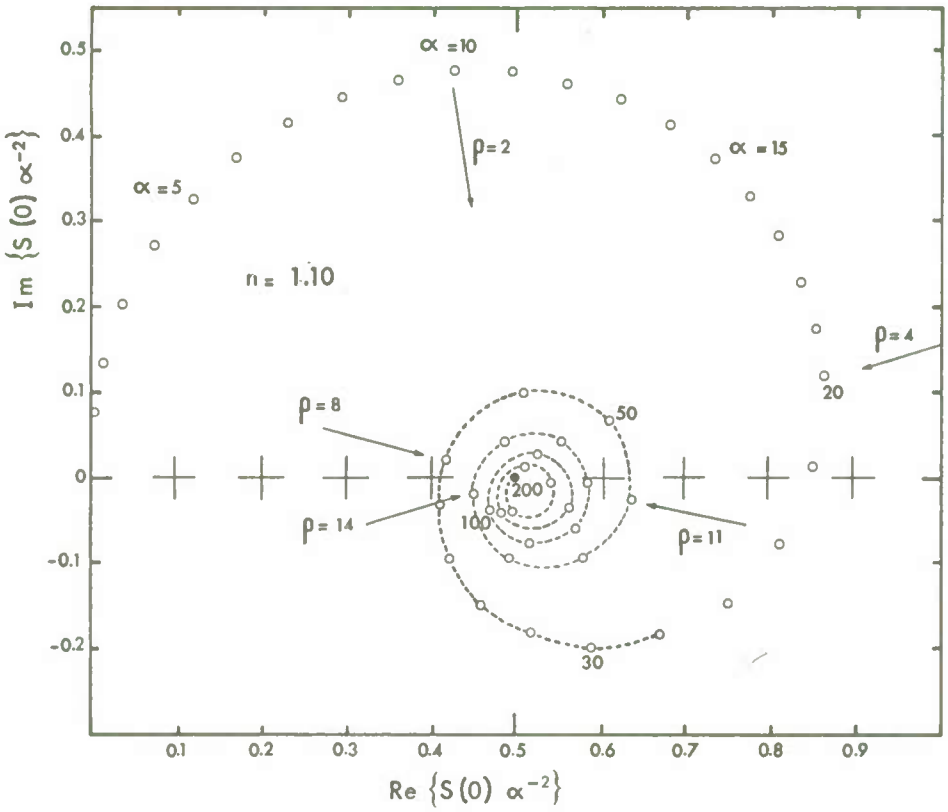


Figure II.9 : Représentation dans le plan complexe de la fonction S (0) α^{-2}. α varie de 1 à 200.

2.2.8 - Facteur d'efficacité et intensité à 0°. Valeurs limites (diffraction).

La fonction intensité est obtenue en prenant le carré du module de l'amplitude (2.1) ; S (0) α^{-2} tendant vers 0,5 lorsque α croît, i (0) α^{-4} tendra vers 0,25. Ceci a fait l'objet de la remarque c, qui peut être simplement interprétée : l'intensité diffractée dans la direction 0° (tache centrale) est proportionnelle au carré de la surface de l'ouverture diffractante et les amplitudes pour l'onde diffractée dans une direction quelconque sont :

$$S_1(\theta) = S_2(\theta) = \frac{\alpha^2}{2} \; \frac{2\, J_1(\alpha \sin\theta)}{\alpha \sin\theta} \quad .$$

Lorsque θ tend vers 0, $J_1(U)$ / U tend vers 1/2 et i(0) = $|S(0)|^2$ tend bien vers $\alpha^4/4$. Avant de converger vers leurs limites respectives 0,25 et 2, les oscillations des fonctions $i(0)\alpha^{-4} = |S(0)|^2\alpha^{-4}$ et de $Q = \mathrm{Re}\,\{S(0)\}\alpha^{-2}$ sont concomittantes ; les maxima et minima des deux fonctions interviennent pour les mêmes valeurs de α qui correspondent en fait à des valeurs fixes de ρ, repérées approximativement sur la spirale. Plus précisément (calcul avec la formule 2.29 ci dessous, applicable si l'indice est voisin de 1) ces valeurs sont : = 4,09 1er maximum = 7,63 1er maximum
= 10,79 2e maximum = 14,00 2e maximum

2.2.9 - Approximation de Van de Hulst.

Il a été démontré par Van de Hulst (1946, 1957) que le facteur d'efficacité peut être exprimé simplement en fonction du paramètre ρ par :

$$Q = 2 - 4\,\rho^{-1} \sin\rho + 4\,\rho^{-2}\,(1 - \cos\rho) \;, \qquad (2.29)$$

lorsque l'indice de réfraction est très voisin de 1 (1 ± ε) ; en fait lorsqu'il en diffère même notablement, cette expression demeure largement valable. La figure (II.10) montre que la courbe obtenue à partir de l'équation 2.29 constitue une bonne approximation, même lorsque l'indice a la valeur 1,15, les points représentatifs étant calculés par l'expression exacte (2.26). Lorsque n est élevé, aux oscillations de période 2 π, se superposent plusieurs systèmes de petites oscillations qui correspondent à des ondulations ou des boucles sur la spirale. Cette expression du facteur d'efficacité Q est une approximation valable dans tout le domaine de Mie, puisque ρ est quelconque, la seule condition étant que |n-1| soit petit. A la limite, lorsque ρ croit, Q tend bien vers 2. A l'inverse, lorsque ρ tend vers zéro, c'est à dire lorsque la taille de la particule décroit, le développement de (2.29) donne :

$$Q_{\rho \to 0} = (1/2)\,\rho^2 - (1/36)\,\rho^4 + \ldots \quad . \qquad (2.30)$$

Cette formule rejoint, comme on va le voir brièvement ci-dessous, la formule à laquelle conduit la théorie de Rayleigh Gans, qui, elle aussi suppose n voisin de 1 ; mais elle ne rejoint pas la formule correspondant à la théorie de Rayleigh où la condition plus restrictive α << 1 doit être respectée.

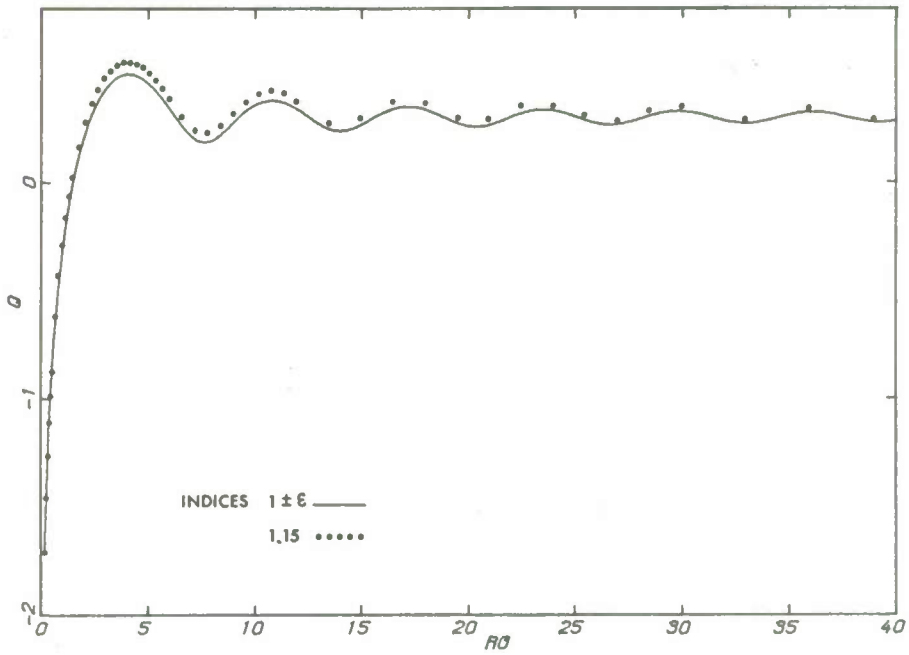


Figure II.10 : Coefficient d'efficacité Q porté selon une échelle logarithmique en fonction du paramètre $\rho = 2\,\alpha\,(n-1)$, pour deux valeurs de réfraction.

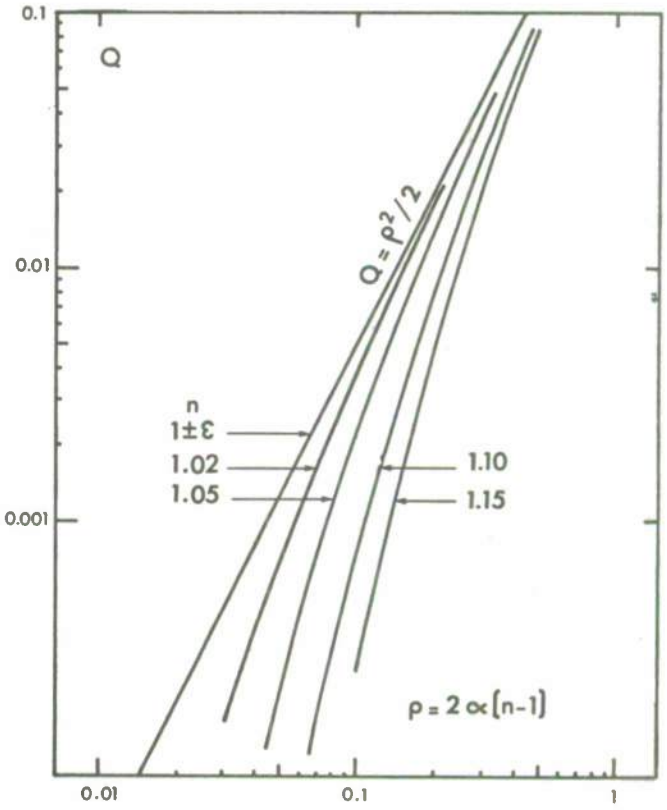


Figure II.11 : Coefficient d'efficacité Q dans le domaine des faibles valeurs de ρ (échelles logarithmiques) pour diverses valeurs de l'indice.

2.2.10 - <u>Facteur d'efficacité dans les domaines de Rayleigh et de Rayleigh Gans.</u>

En combinant l'équation 2.27 avec les formules 2.15 donnant les fonctions d'intensité dans le cas de la diffusion de Rayleigh on obtient :

$$Q = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\pi} \alpha^6 \; \Lambda^2 \, (1 + \cos^2\theta) \sin\theta \, . \, d\,\theta \quad ; \qquad (2.31)$$

l'intégrale définie de la fonction de θ a pour valeur 8/3, il vient :

$$Q = 8/3 \; \alpha^4 \, . \, \Lambda^2 \quad , \qquad (2.32)$$

expression où l'on retrouve la loi en λ^{-4}, mais qui est en contradiction avec la loi en α^2 que fournit le développement (2.30). Dans le cas où l'on suppose n voisin de 1, le terme de Lorentz Λ est remplacé conformément à (2.16) par $(2/3)(n - 1)$, et l'on peut écrire :

$$Q = \frac{32}{27} \; \alpha^4 \, (n - 1)^2 \, . \qquad (2.33)$$

Dans le domaine d'applicabilité de l'approximation de Rayleigh Gans, les fonctions d'intensité sont multipliées par le facteur $F(\theta) = G^2\ (2\ \alpha \sin \theta\ /\ 2)$ qui intervient donc dans l'intégrale. Λ étant remplacé par son expression approchée précédente on peut écrire :

$$Q = \frac{4}{9}\ (\bar{n}-1)^2\ \alpha^4 \int_0^{\pi} G^2\ (2\ \alpha \sin \frac{\theta}{2})\ (1 + \cos^2 \theta) \sin \theta\ \ d\ \theta\ ; \qquad (2.34)$$

la valeur de l'intégrale définie dépend cette fois de α : si α tend vers zéro, on retrouve l'expression précédente (2.33), valable lorsque n est voisin de 1 ; au contraire si α est grand, il a été démontré que la valeur de l'intégrale est $(9/2)\ \alpha^{-2}$ et l'on a alors : $Q = 2\ (n-1)\ \alpha^2$, qui correspond bien à l'expression limite (2.30) de l'approximation de Van de Hulst.

En conclusion pratique, l'écart entre valeurs exactes de Q calculées par (2.28) et valeurs approchées calculées par (2.29) est comme on l'a dit très faible en général, sauf dans le cas où ρ est petit. A valeurs de ρ égales, il est évidemment d'autant plus important que (n-1) diffère plus de zéro. La figure (II.11) montre que pour les valeurs de ρ inférieures à 0,5 il y a lieu d'utiliser l'expression exacte (2.28).

3 - DIFFUSION PAR UN ENSEMBLE DE PARTICULES POLYDISPERSE

Le vocable "ensemble polydispersé" est pris au sens où on l'entend généralement. Il désigne un ensemble de particules de même forme (sphérique en l'occurence) et de même nature (donc de même indice) qui ne diffèrent entre elles que par leur taille. Leur nombre varie avec la taille selon une loi de distribution.

On indiquera d'abord (§ 3.1) les formules permettant le calcul des propriétés diffusantes d'un tel ensemble. Puis on examinera les prévisions qu'on peut faire concernant le résultat des calculs (§ 3.2) dans le cas où on adopte une distribution selon une loi puissance. Ceci conduit à s'interroger sur la signification des calculs, compte tenu du fait que ceux ci doivent être exécutés en posant des limites mathématiques dont la réalité physique n'est pas évidente. Enfin, et par comparaison avec les lois puissance, le cas d'autres distributions est envisagé.

3.1 - CALCUL DES PROPRIETES DIFFUSANTES

La population de particules est caractérisée par une fonction de distribution établie vis à vis d'un paramètre géométrique caractérisant la taille : dans ce qui suit on utilisera le paramètre α, c'est à dire la taille relative $2\ \pi\ r\ /\ \lambda$ qui intervient dans les calculs de diffusion et en conserve la généralité (pour les applications, les rayons des particules supposées sphériques étant fixés, le changement de longueur d'onde se traduit par une variation inversement proportionnelle de α). La fonction de distribution $F\ (\alpha)$ correspond à une fréquence ou probabilité d'apparition : si la totalité de la population comporte N particules dont les tailles vont de zéro à l'infini (ou d'une taille minimale α_m à une taille maximale α_M), la quantité :

$$\frac{1}{N} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(\alpha)\ d\ \alpha$$

est la probabilité relative d'apparition des particules dont le paramètre de taille est compris entre α_1 et α_2 ; la fonction $F\ (\alpha)$ est supposée continue et intégrable dans l'intervale $0, \infty$ ou α_m, α_M.

L'additivité des intensités diffusées par des particules réparties au hasard rend, d'un point de vue formel, le calcul simple ; il est entendu que les intégrations prévues ci dessous sont pratiquement remplacées par des sommations, l'incrémentation en taille $d\alpha$ étant celle que commandent les calculs préparatoires d'indicatrices individuelles (cf. § 2.2, 2e partie).

3.1.1 - Indicatrice de diffusion pour un nombre donné de particules.

Pour chaque angle, les fonctions d'intensité $i_1\ (\theta)$ et $i_2\ (\theta)$ pour l'ensemble des particules sont données par l'intégrale portant sur les produits $i_1\ (\theta,\alpha)\ F\ (\alpha)$ et $i_2\ (\theta,\alpha)\ F\ (\alpha)$. En normalisant par l'intégrale de la fonction $F\ (\alpha)$ entre les mêmes limites, le calcul est rendu indépendant du nombre total de particules, sinon il dépendrait à la fois de la distribution et des limites adoptées. On en vient donc à calculer :

$$i_1\ \ (\theta) = \frac{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha)\ i_1\ \ (\theta,\alpha)\ \ \ d\alpha}{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F\ (\alpha)\ \ d\alpha}\ , \qquad (3.1)$$

et $i_2\ (\theta)$ de la même façon. La fonction d'intensité totale $i_T(\theta) = (1/2)\big(\ i_1(\theta) + i_2(\theta)\big)$ et le taux de polarisation $\big(i_1(\theta) - i_2(\theta)\big)\ /\ \big(i_1(\theta) + i_2(\theta)\big)$ en sont déduits. Pour l'application, si N est le nombre total de particules dans l'unité de volume, le coefficient angulaire de diffusion est obtenu simplement en calculant (cf. annexe I "définitions") :

$$\beta\ (\theta)\ \ =\ \ N\ \frac{\lambda^2}{4\ \pi^2}\ \ i_T\ (\theta)\ \ \ .$$

L'adoption pour λ d'une valeur donnée se répercute sur les limites α_m et α_M à utiliser.

3.1.2 - Facteur d'efficacité moyen.

Pour un ensemble de particules, il est défini comme le rapport de la somme des sections efficaces à la somme des aires des sections géométriques. Pour les particules sphériques considérées, et en utilisant le paramètre α, on a :

$$\overline{Q} = \frac{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha)\ \alpha^2\ Q(\alpha)\ d\alpha}{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha)\ \alpha^2\ d\alpha} \quad . \qquad (3.2)$$

On peut également utiliser le paramètre $\rho = 2\ \alpha(n-1)$ qui combine à la fois taille et indice relatifs. Ceci est avantageux lorsque l'indice est assez proche de 1 car alors la formule de Van de Hulst (2.29) est applicable ; son expression est suffisamment simple pour que l'intégrale au numérateur de l'équation 3.2 puisse être calculée numériquement avec un pas de ρ très petit.

3.1.3 - Indicatrice normalisée.

Pour comparer les résultats obtenus en faisant varier la loi de distribution et ses limites, il est finalement moins pratique de fixer le nombre de particules (comme le fait l'équation 3.1) que de fixer, au contraire, le coefficient total de diffusion. Ce cas correspond à l'examen de collections de particules dont le nombre et la répartition sont variables, mais qui présentent le même effet global de diffusion, en l'occurence une diffusion unitaire ; les coefficients de diffusion normalisés (cf. Annexe I, "définitions" sont calculés par :

$$\overline{\beta}_1\ (\theta) = \frac{1}{\pi}\ \frac{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha)\ i_1\ (\theta,\alpha)\ d\alpha}{\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha)\ Q\ (\alpha)\ \alpha^2\ d\alpha} \qquad (3.3)$$

et pour $\overline{\beta}_2\ (\theta)$ par l'expression correspondante ; $\overline{\beta}\ (\theta)$ est ensuite calculé par la demi-somme : $1/2\ \left(\overline{\beta}_1\ (\theta) + \overline{\beta}_2\ (\theta)\right)$. Le calcul de $\overline{Q}$ étant mené simultanément (3.1.2), l'inverse de $\overline{Q}$ fournit l'aire totale des sections géométriques des particules nécessaires pour produire cette diffusion totale unitaire. Par exemple, si $\overline{Q} = 0{,}5$, il est nécessaire que l'aire totale des sections des particules présentes dans un volume de 1 m^3 soit de 2 m^2, pour que le coefficient de diffusion b soit de 1 m^{-1}.

3.2 - PREVISIONS CONCERNANT LE RESULTAT DES CALCULS.

Elles sont possibles en se fondant sur les deux points suivants :

- l'évolution de la forme des indicatrices de Mie pour des tailles croissantes est retracée dans ses grands traits par les graphes des fonctions $i\ (\theta)\ \alpha^{-4}$; les remarques antérieures concernant les pentes variées des courbes pour divers angles vont permettre de telles prévisions.
- la distribution des particules selon leur taille est supposée suivre une loi de Junge* exprimée par une fonction puissance : $F\ (\alpha) = \text{Constante}\ .\ \alpha^{-m}$.

3.2.1 - Conditions de convergence : influence de la limite supérieure sur l'indicatrice.

Compte tenu de la forme donnée à $F\ (\alpha)$, les fonctions $i_T\ (\theta)\ \alpha^{-4}$ déjà représentées correspondent précisément à des distributions en α^{-4} et l'intégration de ces fonctions est celle figurant au numérateur des expressions 3.1 ou 3.3. Elle fournit (à la normalisation près) l'indicatrice pour la population considérée (caractérisée par la loi en α^{-4}). On voit immédiatement que les intégrales pour les divers angles vont toutes converger puisque les pentes moyennes des courbes sont voisines de -2,3 (cf. § 2.2.1, e), sauf l'intégrale relative à l'angle 0° pour lequel la pente moyenne de la courbe est nulle. Autrement dit, passé une certaine limite, la prise en compte des particules de plus en plus grosses ne modifiera pas la forme de l'indicatrice résultante sauf pour l'angle 0° et les angles immédiatement voisins où l'intensité continuera de croître. Ce fait illustré par la figure III.2 (3e partie) où la limite supérieure est portée de 50 à 200 sans que l'indicatrice change sensiblement sauf à 0°, et également vers 175-180°. Il n'en va plus de même si la limite supérieure devient inférieure à 50 (A. Morel, 1972 a, figure 2).

D'une façon générale, les fonctions $i\ (\theta)$ croissent avec la taille α selon des lois en α^{4+p} où p est la pente moyenne lue sur les graphes (bilogarithmiques) tels que II.3 ; pour rappeler (cf. § 2.2.1) ces pentes ont les valeurs :

$p = +2$	pour θ quelconque, si α est petit ;
	pour $\theta = 0°$, même lorsque α n'est pas petit, à condition que $\rho = 2\ \alpha(n-1)$ soit inférieur à 4 ;
$p = 0$	pour $\theta = 0°$ lorsque α est grand ($\rho > 4$) ;
$p \approx -2{,}3$ (ou -2)	pour $\theta \neq 0°$ lorsque α est grand ;
$-2 < p < 1$	pour $\theta = 180°$, lorsque α est grand ; la valeur de la pente dépend en fait de l'indice (il est difficile d'ailleurs d'apprécier une valeur moyenne).

Les fonctions $F\ (\alpha)\ i_T\ (\alpha,\theta)$ sont des fonctions en α^{4+p-m} si -m est l'exposant de la distribution ; les intégrales à calculer sont donc des fonctions dont l'exposant est $5 + p - m$. Ces intégrales convergeront absolument si : $5 + p - m < 0$; (3.4)
l'égalité à zéro n'entraine pas la convergence, l'intégrale étant un logarithme.

Si on porte en fonction de α les valeurs progressives des intégrales :

---

* On verra plus loin que des fonctions de ce type rendent bien compte des distributions effectivement observées pour les particules marines. En tout état de cause des distributions plus complexes peuvent toujours être décomposées et approximées dans chaque domaine par de telles formes, au moins théoriquement.

$$\int_{\varepsilon}^{\alpha} F(\alpha)\, i_T(\theta,\alpha)\, d\alpha \quad , \qquad (3.5)$$

pour divers angles θ (figure II.12) on constate que :

a/ lorsque α est petit, quelle que soit la valeur de θ, toutes les courbes croissent selon une pente * dont la valeur est 7-m (soit 3,5 et 2 respectivement pour les deux cas présentés) ;

b/ pour des valeurs de α d'autant plus élevées que θ est plus petit (c'est à dire pour les valeurs de α correspondant au maximum des courbes $i(\theta)\,\alpha^{-4}$, cf. § 2.2.1 d et 2.2.3), les intégrales convergent asymptotiquement et les courbes présentent un palier asymptotique (lorsque la condition 3.4 est respectée) ;

c/ pour l'angle 0° (où p = 0) il n'y aura de palier que si m > 5, sinon l'intégrale continuera de croître avec la pente 5 - m (soit une pente égale à 1,5 pour la figure supérieure, et une pente tendant vers 0 pour la figure inférieure - branche de courbe logarithmique - qui constitue un cas limite) ;

d/ pour l'angle 180° l'évolution est plus compliquée du fait même que la pente moyenne p a tendance à s'annuler lorsque α croît (d'autant plus que l'indice est plus élevé, ce qui augmente la réflexion, cf. § 2.2.5) ; en général, après un palier, l'intégrale partielle recommence à croître.

En conclusion, puisque l'écartement entre les divers paliers caractérise l'indicatrice résultante, les prévisions suivantes peuvent être faites :

- si toutes les courbes présentent un palier (lorsque m > 5), l'écart entre les valeurs finales ne change plus et donc l'indicatrice ne se modifie plus si l'on continue de faire croître la limite supérieure d'intégration.
- si 2,7 < m < 5, la conclusion reste la même sauf en ce qui concerne l'angle 0°, autrement dit le prise en compte de particules de plus en plus grosses ne change pas la forme de l'indicatrice sauf aux très petits angles (et également vers 180°) où la croissance persiste.

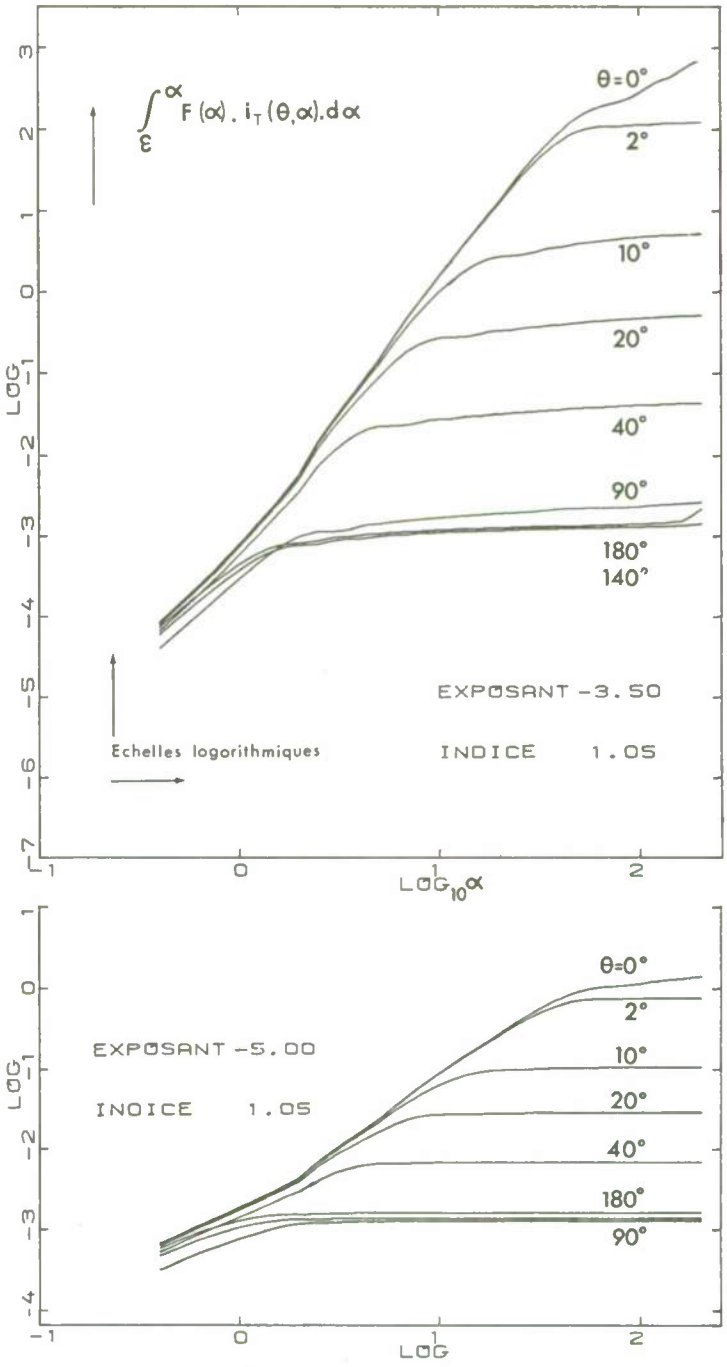


Figure II.12 : Valeurs progressives des intégrales en fonction de la limite supérieure. L'exposant de la distribution a pour valeur -3,5 et -5 respectivement, l'indice de réfraction demeurant dans les deux cas 1,05.
La limite inférieure pour le calcul est 0,2 mais les courbes sont tracées après le premier pas d'intégration, c'est à dire à partir de α = 0,4. La limite supérieure est 200.

* Les légères sinuosités que l'on décèle sur les courbes ascendantes (au voisinage de α = 2 par exemple) sont des artéfacts de calcul dus au changement de pas (dα) dans le calcul de l'intégrale. Ce pas est en effet déterminé par les calculs préliminaires d'indicatrices (cf. § 2.2).

- si $m < 2,7$ aucune limite mathématique n'existe et le calcul n'a de sens que s'il existe une limite ayant une réalité physique.

3.2.2 - Rôle des petites particules : influence de la limite inférieure de taille sur l'indicatrice.

On vient de voir que dans certaines conditions qui ont été précisées, le calcul conserve sa signification, bien que la limite supérieure ait été posée arbitrairement. Un problème analogue se pose quant à la limite inférieure de taille. Celle-ci est physiquement inconnue et pour le calcul la limite inférieure de taille ne peut être, ici encore, qu'arbitraire. Il est nécessaire de prévoir quelle incidence a sur l'indicatrice la non prise en considération des très petites particules. Théoriquement le calcul peut être conduit depuis une limite inférieure hypothétique constituée par les particules de dimension "nulle". Pour étudier l'effet de la troncature * si l'intégration est conduite à partir d'une limite finie non nulle, deux cas sont à distinguer :

Cas où les particules négligées appartiennent au domaine de Rayleigh :

C'est le cas où l'intégration est faite à partir d'une limite inférieure $\alpha_m = \varepsilon$, au plus égale à 1. Une hypothèse défavorable consiste à admettre que les particules inconnues continuent d'être distribuées selon la même loi en α^{-m} ; cette hypothèse conduit à des nombres de particules toujours croissants (et à un nombre infini pour la taille "nulle"). La même loi de diffusion s'applique à toutes ces particules (cf. § 2.2.2), soit :

$$\begin{vmatrix} i_1 (\theta) \\ i_2 (\theta) \end{vmatrix} = \alpha^6 \Lambda^2 \begin{vmatrix} 1 \\ \cos^2 \theta \end{vmatrix}$$

Pour chaque valeur de l'angle θ, l'intégration sur le domaine considéré - pour $i_T = 1/2(i_1 + i_2)$ - s'écrit :

$$1/2 \int_0^{\varepsilon} \Lambda^2 \alpha^{6-m} (1 + \cos^2\theta) \, d\alpha \quad . \tag{3.6}$$

Cet ensemble de particules présente donc une indicatrice de Rayleigh, exprimée par :

$$i_T (\theta) = 1/2 \ \Lambda^2 (1 + \cos^2 \theta) \frac{1}{7 - m} \ \varepsilon^{7-m} \quad , \tag{3.7}$$

c'est à dire une indicatrice de grandeur finie à condition que soit respectée l'inégalité** :

$$7 - m > o \quad , \tag{3.8}$$

sinon, on obtient $i_T = \infty$. Autrement dit, dans le premier cas, s'il y a troncature, les quantités $i_T (\theta)$ négligées sont finies et l'erreur résultante est calculable. L'erreur est infinie dans le second cas et le calcul n'a de signification que si une limite physique connue non nulle existe.

Dans le premier cas, les termes négligés varient avec l'angle selon la loi de Rayleigh (c'est à dire dans le rapport 1 à 2). Si on les compare à l'indicatrice très dissymétrique obtenue lorsque la limite supérieure est 200, on conçoit que l'erreur possible est maximale pour les angles égaux ou supérieurs à 90°. En valeur relative cette erreur est obtenue en formant le rapport des intégrales respectivement entre 0 et 0,2 et entre 0,2 et 200. Pour reprendre les deux exemples illustrés par la figure II.12, l'erreur résultant de la troncature (à 0,2) est inférieure à 0,1 % si la valeur de l'exposant est -3,5, et de l'ordre de 1 % si cette valeur est -5 (ceci pour les angles 90, 140 et 180° ; elle est évidemment inférieure aux angles plus petits). Cet ordre de grandeur demeure valable pour les autres cas. Dans l'annexe II sont présentées les valeurs calculées au moyen de l'expression (3.7) pour divers indices et pour des exposants variant de -3 à -5. Ces valeurs sont toujours négligeables comparées à celles que fournit l'intération dans l'intervalle de taille 0,2 - 200.

En conclusion on peut considérer que la limite inférieure de cet intervalle est fixée à une valeur suffisamment basse. L'indicatrice ainsi obtenue est significative car les particules de taille inférieure à cette valeur n'ont plus d'influence sensible (à condition que leur loi de distribution respecte la condition 3.8).

Cas où la troncature intervient pour des tailles plus élevées.

L'effet peut en être directement prévu sur les figures telles que II.12. En particulier, si la valeur de la limite inférieure est telle que la courbe relative à un angle donné θ a amorcé son palier, l'effet sera important ; pour cet angle les quantités négligées peuvent devenir supérieures aux quantités prises en compte dans l'intégration et la valeur finale (lorsque $\alpha = 200$) est consécutivement diminuée. Les paliers intervenant pour des valeurs de α d'autant plus élevées que θ est plus petit (cf. § 3.2.1, b), cette diminution affecte d'abord la valeur pour l'angle 180°, puis pour 140°, et caetera.. La dissymétrie de l'indicatrice finale se renforce au fur et à mesure que la limite α_m inférieure s'élève :

si $\alpha_m = 1$ par rapport aux valeurs obtenues précédemment avec $\alpha_m = 0,2$ il apparait que les valeurs à 90°, 140° et 180° sont diminuées de 10 à 20 %.

si $\alpha_m = 2$ les diminutions aux mêmes angles vont de 30 à 50 % environ tandis qu'à 40° un léger écart (- 10 %) apparait.

si $\alpha_m = 10$ l'effet est encore accentué et d'autre part s'étend à un domaine angulaire plus large ; l'écart est notable dès l'angle 20°.

La figure II.13 met en évidence ce renforcement de la dissymétrie globale par diminution des valeurs aux grands angles, les valeurs aux petits angles (0° et 2°) n'étant pas affectées. Cette figure reprend la partie supérieure de la figure II.12 ; en outre sont représentées les courbes obtenues

---

* Ou l'effet de la méconnaissance des lois de distribution à utiliser pour les petites particules dont la présence, non observée, n'est que probable, par continuité.

** C'est évidemment la condition inverse de celle qu'exprime (3.4), avec $p = 2$, valeur de la pente dans le domaine de Rayleigh.

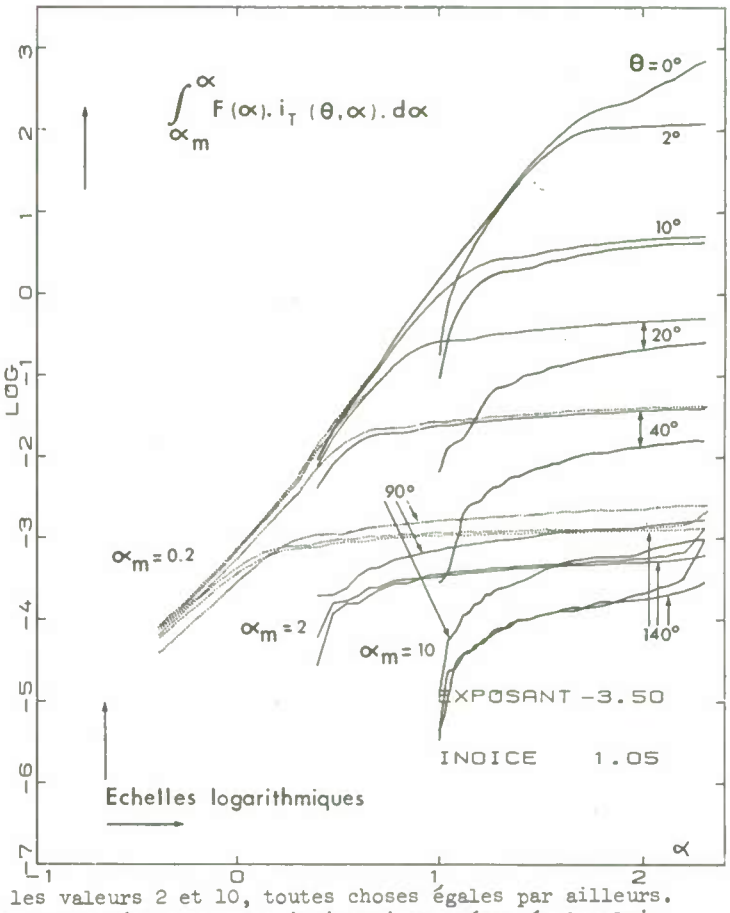


Figure II.13 : influence de la limite inférieure; les courbes en pointillé sont reprises de la figure II.12 (partie supérieure, exposant -3,5). Les deux autres groupes de courbes sont obtenues lorsque la limite inférieure d'intégration est successivement portée à 2 puis 10. Les trois courbes non identifiées sont relatives à l'angle 180° ; elles sont caractérisées par une croissance rapide pour les valeurs élevées de α.

lorsque la limite inférieure prend successivement les valeurs 2 et 10, toutes choses égales par ailleurs. Cette évolution est plus complètement illustrée par le tracé complet des indicatrices présenté plus loin (Figure III.12, 3e partie).

3.2.3 - Diffusion totale ; influence des limites sur le calcul.

Comme précédemment la question se pose de savoir si le calcul de la diffusion totale a un sens, alors que seule est considérée une partie de la population des particules ; les limites inférieure et supérieure sont en effet posées pour les besoins du calcul mais ne traduisent pas une réalité physique. Le raisonnement, analogue à celui exposé ci dessus (3.2.1 et 3.2.2) doit cette fois être appliqué à l'intégrale :

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} F(\alpha) \quad \alpha^2 \, Q(\alpha) \quad d\alpha \qquad (3.9)$$

qui, à un facteur près, exprime la section efficace totale des particules distribuées selon la loi F (α) entre les tailles minimale et maximale α_m et α_M. Il suffit de rappeler que le facteur d'efficacité Q varie en α^4 dans le domaine de Rayleigh (équation 2.32), en α^2 dans le domaine de Rayleigh Gans (équation 2.35) et qu'enfin il est, en moyenne, indépendant de α dans le domaine de Mie et dans celui de la diffraction (§ 2.2.8).

Sans reprendre le détail on voit donc qu'en ce qui concerne l'influence de la *limite supérieure* (dans le domaine de Mie), la diffusion totale tend vers une limite si l'intégrale de F (α) α^2 converge, c'est à dire si la surface totale présentée par les particules tend elle même vers une limite. Ceci implique que soit respectée la condition : $m > 3$, (3.10)
si la distribution est comme précédemment exprimée par $F(\alpha) = C\,\alpha^{-m}$. La surface totale et donc la diffusion croissent comme le logarithme de la limite supérieure α_M lorsque m = 3.

En ce qui concerne la *limite inférieure* (dans le domaine de Rayleigh), l'intégrale entre 0 et α_m correspondant aux particules négligées, s'applique à une expression en α^{6-m}, tout comme dans le calcul de l'indicatrice. En conséquence la même condition (3.8) : $m < 7$ assure à cette intégrale une valeur finie. Le calcul pour divers exposants et indices montre que la valeur de cette intégrale entre les limites 0 et 0,2, reste tout à fait négligeable devant la valeur de l'intégrale pour les particules prises en considération (c'est à dire entre les limites de taille 0,2 et 200). Ces valeurs sont présentées dans l'annexe II.

Ainsi qu'on l'a vu (§ 3.2.2) un nombre infini de particules peut néanmoins présenter une indicatrice finie. De façon équivalente, la diffusion totale, ou plus précisément la section efficace totale, présentée par les particules de tailles comprises entre 0 et α_m peut également être finie, alors que l'aire totale des sections géométriques de ces mêmes particules ne l'est pas ; cette dernière en effet n'est finie que si : $m < 3$; ainsi, lorsque l'exposant demeure entre les limites $3 < m < 7$, le cas envisagé est bien réalisé.

Comme cela a été fait pour les valeurs angulaires, on peut également porter en fonction de la limite supérieure, la valeur progressive de l'intégrale (3.9) ; la figure II.14 fournit un tel exemple pour diverses valeurs de l'indice et pour la valeur -3,10 de l'exposant. La pente initiale des courbes a pour valeur 7 - m, elle prend ensuite la valeur 5 - m et enfin tend à s'annuler, les courbes présentent alors un palier asymptotique puisque la condition de convergence est respectée. L'amorce des paliers a lieu

lorsque Q devient (en moyenne) indépendant de α, c'est à dire pour des valeurs de α variables selon la valeur de l'indice ; ces valeurs sont en fait liées puisqu'en ce point le paramètre $\rho = 2\,\alpha\,(n-1)$ est égal à 4,1 (cf. § 2.2.8 et figure II.10).

Figure II.14 : Valeur progressive de l'intégrale donnant la section efficace (3.9), lorsque la limite supérieure croît, jusqu'à la valeur finale α = 200. Les diverses courbes correspondent aux indices de réfraction indiqués et à une seule valeur de l'exposant de la distribution des particules.

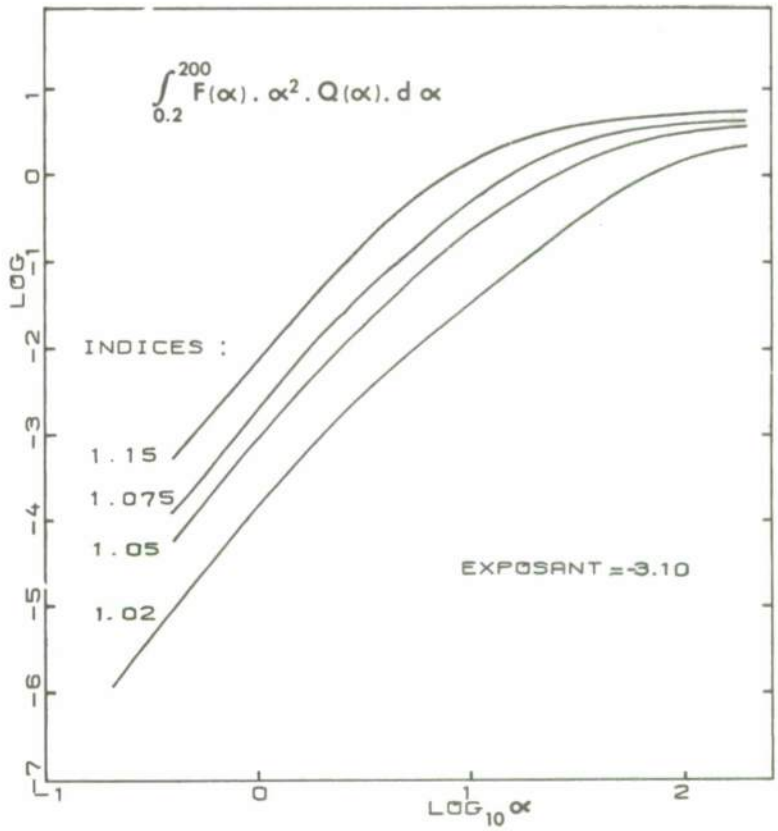
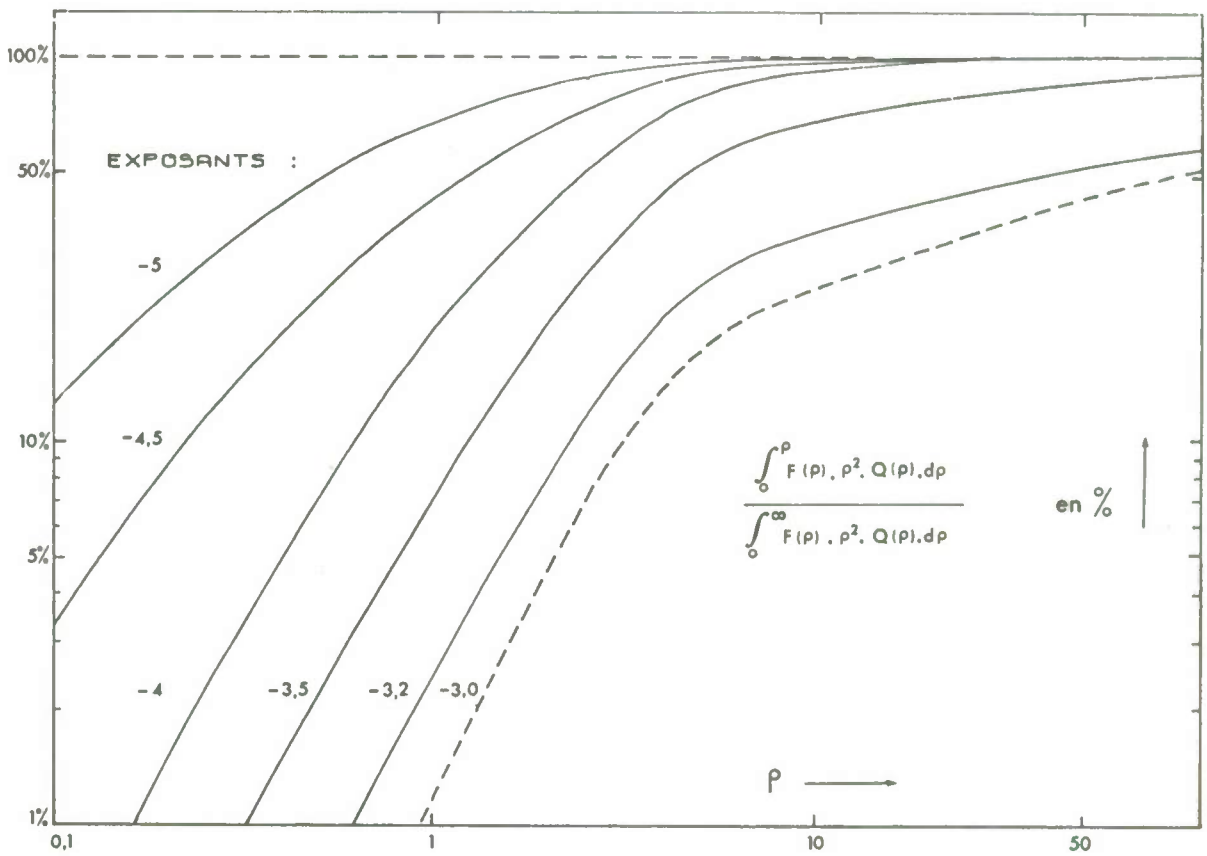


Figure II.15 : Figure analogue à la précédente, la variable ρ remplaçant la variable α. Les diverses courbes correspondent aux valeurs indiquées de l'exposant ; elles sont normalisées par leur valeur asymptotique (100 %). Les échelles sont logarithmiques.

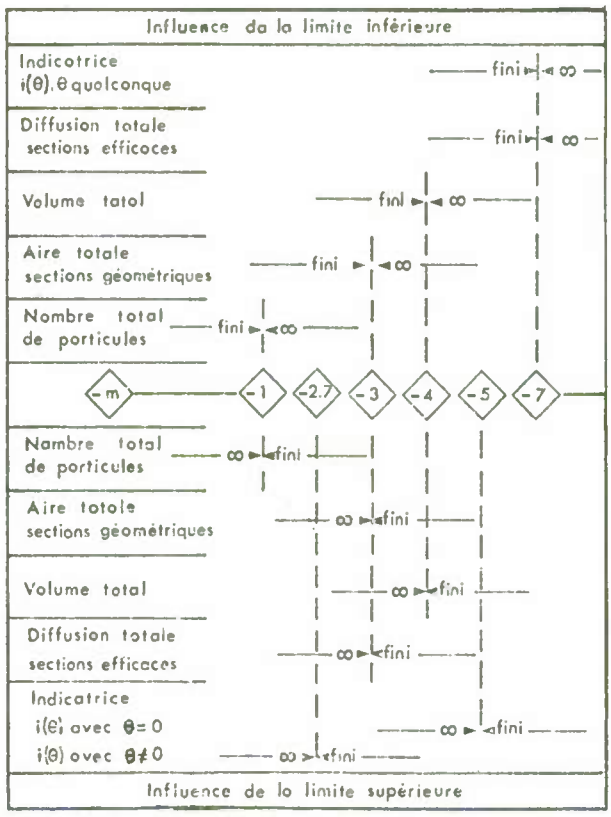


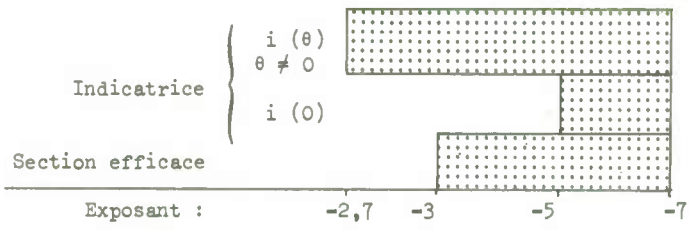
Dans la mesure où l'expression de Van de Hulst (2.29) est une approximation justifiée (c'est le cas avec les valeurs d'indice utilisées ici) un seul calcul suffit, la variable ρ remplaçant α. Les diverses courbes de la figure II.14 correspondent en réalité à une unique courbe mais tracée avec une échelle des abscisses plus ou moins dilatée. En conséquence de cette remarque, les intégrales calculées cette fois avec la variable ρ sont représentées par les courbes de la figure II.15 chacune correspondant à diverses valeurs de l'exposant. On peut calculer les valeurs asymptotiques de ces intégrales lorsque la limite supérieure croît à l'infini (lorsque la condition 3.10 est satisfaite) ces valeurs sont utilisées pour la normalisation du graphique ; toutefois la courbe relative à l'exposant -3 ne peut être placée qu'arbitrairement, puisqu'elle ne présente pas d'asymptote. Pour toutes les courbes l'infléchissement apparaît lorsque ρ dépasse la valeur 4 (Voir Annexe 2, pour le calcul des valeurs asymptotiques).

3.2.4 - Résumé concernant les domaines de validité du calcul.

On donnera à l'expression "domaine de validité" un sens précis : c'est le domaine pour lequel le calcul conserve sa signification indépendamment des valeurs attribuées aux limites inférieure et supérieure de taille. Ceci suppose donc que soient finies les quantités calculées lorsque l'on fait tendre les limites de taille vers zéro ou vers l'infini. Dans ces conditions la méconnaissance des limites physiques n'invalide pas le calcul. Si par continuité on suppose que la même loi de distribution (fonction puissance) régit la population quelle que soit la taille, les conditions assurant la validité concernent l'exposant de la loi. Ces conditions, ainsi qu'on l'a vu diffèrent selon les quantités à calculer. Elles sont rassemblées dans le tableau ci contre ; est indiquée, en regard de la valeur de l'exposant, la nature finie ou infinie des quantités calculées entre 0 et α_m (influence de la limite inférieure) ou entre α_M et ∞ (influence de la limite supérieure).

On peut remarquer qu'en ce qui concerne nombre, surface ou volume des particules, les conditions relatives respectivement aux limites inférieures et supérieures sont exclusives les unes des autres ; autrement dit, le domaine de validité comme défini ci-dessus n'existe pas ; le calcul n'est possible que si physiquement on peut admettre que des limites existent. Il n'en va pas de même pour les grandeurs relatives à la diffusion : les deux catégories de conditions peuvent être simultanément respectées dans certains intervalles d'exposant ; c'est ce que résume le schéma suivant où le domaine de validité est représenté par la zone ombrée.





3.2.5 : Extension à des lois de distribution différentes de la loi de Junge.

Les conclusions précédentes concernant le domaine de validité sont valables seulement, tout au moins telles que présentées, pour des distributions exprimées par des lois puissance. Cependant elles peuvent être réexaminées et étendues à d'autres types de distribution. Le cas précédemment traité, mathématiquement commode, peut, précisément à ce titre, constituer un cas référence. Il est inutile de considérer le cas de distributions selon des fonctions du type creneaux (rectangulaire, triangulaire,..) pour lequel le problème des limites et de la signification du calcul ne se pose pas. Le cas de la distribution normale de Gauss s'y ramène, comme on le verra plus loin.

Il convient par contre d'examiner le cas de distributions continuement décroissantes, bien que différant de la loi puissance. Il s'agit donc de choisir des distributions plausibles, c'est à dire qui puissent, dans l'intervalle de tailles accessibles à l'expérience, rendre compte approximativement de la décroissance observée *. Mais au delà des limites de cet intervalle, l'hypothèse selon laquelle les lois puissance subsistent est abandonnée, les nouvelles distributions considérées se comportant différemment. Pour décrire des populations de particules (naturelles ou créées) on a souvent utilisé la fonction exponentielle : $F_1(\alpha) = A_1 \exp(-B_1 \alpha)$, (3.11)

ou plus fréquemment la fonction gausso-logarithmique (ou log-normale) :

$$F_2(\alpha) = A_2 \exp\left(-B_2 (\log \alpha / \bar{\alpha})^2\right) , \qquad (3.12)$$

* Cette remarque concernant l'étude granulométrique des particules, ainsi que le choix fait ci-après de valeurs numériques pour les distributions, est une anticipation sur ce qui est exposé au début de la 3e partie, à laquelle on peut se référer.

où $\bar{\alpha}$ est la valeur correspondant au maximum de la distribution, et B_2 est l'écart type "géométrique". Pour les particules marines des lois exponentielles (ou de type exponentiel, comme la loi de Weibull) ont été proposées par Carder et al (1971). Egalement J.R. Zaneveld et H. Pak (1973) utilisent cette distribution, qui pour des raisons de convergence aux limites qu'on verra ci dessous, se révèle commode pout tout calcul théorique.

Il est pratique, pour la comparaison avec les lois puissance en $F(\alpha) = A\,\alpha^{-m}$, de considérer le graphe bilogarithmique des distributions précédentes. La première demeure exponentielle, deux points la déterminent complètement. La seconde devient simplement une parabole, deux points ne suffisent pas pour la déterminer, il en faut un troisième ou, aussi bien, il faut fixer, arbitrairement, la position du maximum $\bar{\alpha}$. On peut vérifier que la distribution normale de Gauss, au delà du maximum est représentée par une courbe exponentielle (mais de pente plus forte que celle de l'exponentielle 3.11 car l'argument est double). Sur la figure II.16, le graphe bilogarithmique de la fonction puissance en α^{-4}, choisie comme base de comparaison, est représenté par la droite de pente -4. On a imposé aux autres distributions de recouper la précédente à la fois pour $\alpha = 10$ et $\alpha = 100$ et on a choisi de centrer la distribution gausso logarithmique et également la distribution normale sur $\alpha = 1$.

Du côté des petites tailles la distribution exponentielle tend vers une valeur finie avec une pente nulle et la condition (3.8) de convergence est toujours respectée. La distribution gausso logarithmique tend vers zéro, la pente négative (entre $\alpha = 1$ et $\alpha = 10$) est nécessairement plus faible que celle de la sécante figurant la loi puissance ; la condition (3.8) est *a fortiori* respectée lorsque la loi puissance la respecte ($7 - m > 0$). Il faut des lois puissance à exposant négativement élevé pour que les petites particules, en nombre suffisamment élevé, n'aient pas un rôle négligeable ; pratiquement les distributions envisagées leur assignent un nombre faible et correspondant mathématiquement à une quasi-troncature pour la diffusion. La conclusion est identique en ce qui concerne la distribution de Gauss.

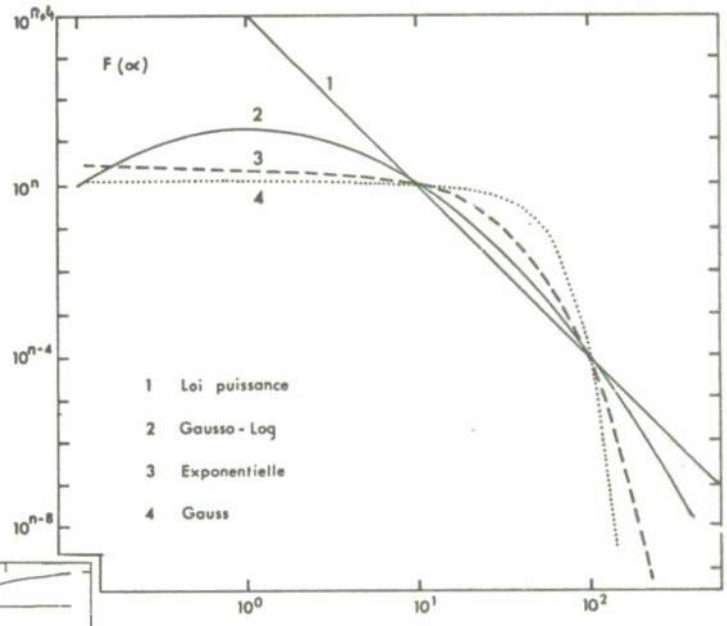
Figure II.16 : Graphe bilogarithmique de divers types de distribution dont les valeurs coïncident pour $\alpha = 10$ et $\alpha = 100$.

1. Loi puissance : $F(\alpha) = 10^{n+4}\ \alpha^{-4}$

2. Loi gausso-logarithmique :
$F(\alpha) = 10^{n} \exp(B) \exp\left(-B(\log_{10}\alpha)^2\right)$
avec $B = (4/3) \,.\, \mathrm{Log}_e 10$ (3.12b)

3. Loi exponentielle :
$F(\alpha) = 10^{n} \exp(10.B) \exp(-B\alpha)$
avec $B = (4/90) \,.\, \mathrm{Log}_e 10$ (3.11b)

4. Loi de Gauss :
$F(\alpha) = 10^{4} \exp(A) \exp(-B\alpha^2)$
avec $A = (4/120) \,.\, \mathrm{Log}_e\ 10$
$B = (\mathrm{Log}_e\ A)\ 9^2$



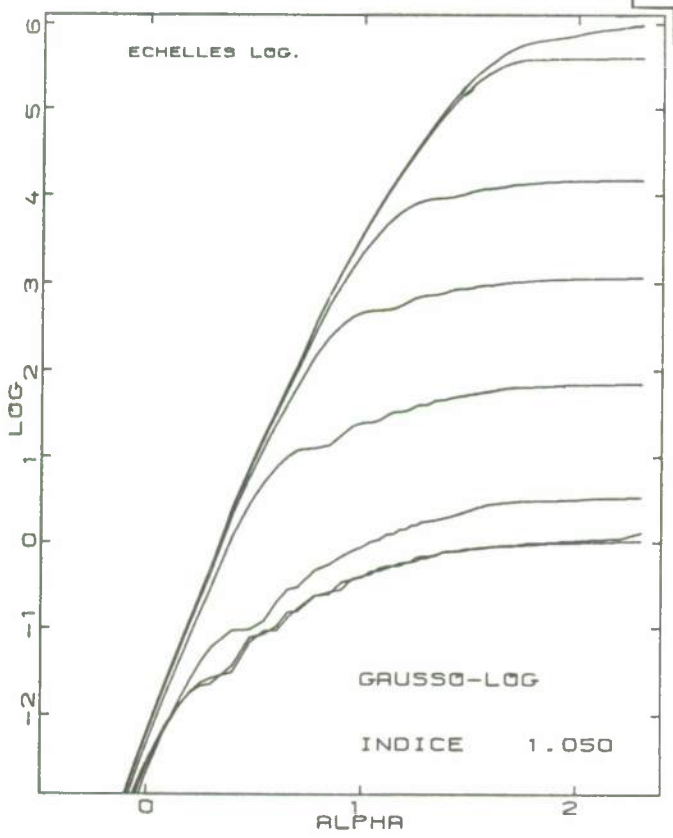
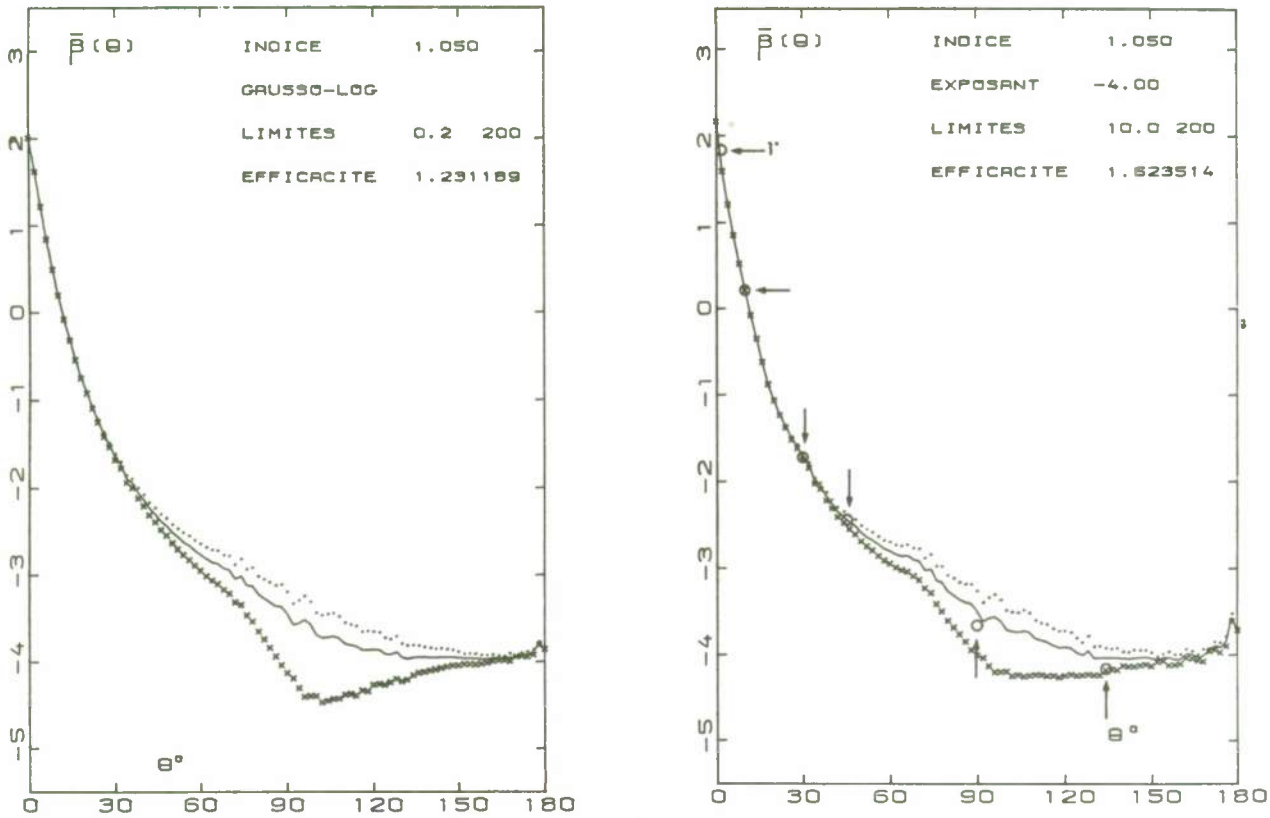


Figure II.18 : Cette figure présente dans le cas de la distribution gausso-logarithmique précédente, les valeurs progressives des intégrales :

$$\int_{\varepsilon}^{\alpha} F(\alpha) \,.\, i_T\ (\theta,\alpha)\ d\alpha\ ,$$

en fonction de la limite supérieure α, et pour les mêmes valeurs de l'angle θ que précédemment (figure II.12).



Figures II.17 : Indicatrices obtenues avec la distribution gausso logarithmique (équation 3.12 b, figure II.16) et avec la distribution de Junge d'exposant -4, tronquée inférieurement à $\alpha = 10$ et supérieurement à $\alpha = 100$; les indicatrices sont tracées en portant, en fonction de θ, le logarithme décimal du coefficient normalisé de diffusion $\bar{\beta}(\theta)$. Les valeurs de $\bar{\beta}_1(\theta)$ et $\bar{\beta}_2(\theta)$ relatives aux composantes polarisées verticale et horizontale respectivement sont figurées par des points et des croix.

Les points désignés par les flèches correspondent aux calculs effectués par O.B. Brown et H.R. Gordon (1971) pour le même exposant, pour les limites 8,6 et 86 (diamètres 1 à 10 µm, $\lambda = 488$ nm) et avec l'indice 1,05 - 0,01 i. Pour la comparaison les valeurs sont recalculées afin d'être présentées sous la forme de coefficient normalisé $\bar{\beta}(\theta)$. La limite supérieure est 86 et non 200 mais, compte tenu de l'exposant, la forme asymptotique est pratiquement atteinte (cf. § 3.2.1) et la comparaison est justifiée.

Du côté des grandes tailles, les pentes négatives toujours croissantes et supérieures à celle de la droite, font que se trouvent toutes satisfaites les conditions de convergence, quel que soit l'angle de diffusion θ (§ 3.2.1). Avec ces lois, la fréquence d'apparition des grosses particules est plus faible qu'avec les lois puissance correspondantes ; pratiquement cela équivaut comme précédemment, à une troncature. La figure II.17 illustre cet effet : elle permet de comparer les indicatrices obtenues avec la loi gausso logarithmique d'une part et avec la loi puissance d'autre part ; pour la première la distribution est étendue à l'ensemble des tailles de 0,2 à 200 (pour α) tandis que pour la seconde la distribution est tronquée inférieurement à $\alpha_m = 10$ et supérieurement à $\alpha_M = 100$. Par superposition, il apparait que ces deux indicatrices sont en fait confondues (ce qui n'est pas tout à fait le cas pour les composantes polarisées i_1 et i_2).

Il n'est pas utile de multiplier les calculs et exemples de cette nature, étant donné le caractère arbitraire des lois utilisées, en particulier en ce qui concerne la position du maximum de la distribution. Qu'il suffise de dire qu'avec les lois exponentielles et surtout log normales on obtient des résultats peu différents de ceux auxquels conduit la loi puissance équivalente (et dans le second cas, aussi voisin que l'on veut, selon les paramètres choisis). Avec la loi de Gauss, même tronquée au délà du maximum, il n'en est par contre jamais ainsi.

Enfin entre les tailles (10 et 100 pour l'exemple donné ici) où les distributions sont mises en coïncidence, les courbes présentent une convexité ; en conséquence, par rapport à la loi puissance, ces distributions favorisent en quelque sorte les particules de taille intermédiaire (20 à 50) qui joueront, comparativement, un rôle plus important dans la diffusion. Un exemple de cette conséquence sera donné plus loin (3e partie, § 3.1.2).

TROISIEME PARTIE

AVANT PROPOS

Dans le calcul des propriétés diffusantes d'un système polydispersé, interviennent d'une part les paramètres liés à la loi et aux limites de la distribution et d'autre part, l'indice relatif qu'on appellera "moyen" puisqu'il est supposé être le même pour toutes les particules. A titre d'exemple, diverses applications numériques ont été présentées dans les développements antérieurs mais sans qu'ait été discuté le choix des valeurs attribuées aux paramètres mentionnés. Un certain nombre de cas théoriques ont été systématiquement traités en vue de la comparaison avec les résultats expérimentaux et un choix a dû être fait qu'il convient d'examiner ici.

Pour *l'indice de réfraction* des particules on ne peut guère faire que des hypothèses car aucune mesure directe ne semble avoir été faite. A partir du contenu minéral des particules en suspension (carbonate de calcium, silice, alumino-silicates, divers hydroxydes,...) supposé sous forme cristalline, on peut déduire une valeur moyenne d'indice. Les valeurs souvent avancées à partir de ces considérations sont de l'ordre de 1,15 ou 1,20*(valeurs relatives par rapport à l'eau, c'est à dire 1,53 - 1,60 en valeurs absolues) ; des calculs ont été faits pour les argiles en suspension avec la valeur 1,15 (et une partie imaginaire égale à 0,001 ; H. Pak, R.V. Zaneveld, G.F. Beardsley, 1971). D'une part il n'est probablement pas réaliste d'attribuer à toute la particule, même si elle est essentiellement minérale, l'indice valable pour la forme cristalline. Certains insolubles ou certains précipités peuvent être présents sous des formes colloïdales fortement hydratées ou bien la partie minérale d'une particule détritique peut n'être par exemple qu'une coque ; de telles particules minérales présenteraient un indice "moyen" plus proche de celui de l'eau que celui déduit de la stricte composition (et en excluant l'eau). D'un autre côté, la part des matières organiques dans le matériel en suspension est toujours importante et pour ces substances, l'indice est très proche de celui de l'eau. Récemment K.L. Carder et al. (1972) ont, à partir de mesures de diffusion sur des cultures d'algues unicellulaires (Isochrysis galbana), déduit l'indice relatif qui serait de l'ordre de 1,026 à 1,036 pour ce matériel organique. Par rapport à la masse totale des particules, la part organique**, prépondérante pour les eaux de surface au large, demeure élevée même dans les couches profondes ; entre la surface et des profondeurs allant jusqu'à 4000 m, l'abondance relative de la matière organique particulaire resterait supérieure à 25 % (D.C. Gordon, 1970), varierait de 40 à 60 % (L. A. Hobson, 1967), de 40 à 100 %***(P.J. Kinney et al., 1971), de 40 à 88 % (C. Copin, G. Copin, 1972), de 26 à 49 % (J.E. Harris, 1972). Ceci incite à choisir des valeurs proches de 1 pour l'indice relatif "moyen" des particules. Quoiqu'il en soit, les calculs préliminaires d'indicatrices individuelles ont été faits pour 5 valeurs de l'indice couvrant un domaine suffisamment large depuis des valeurs faibles (1,02 et 1,05) jugées plus vraisemblables, jusqu'à la valeur caractéristique de la fraction minérale (1,15), les valeurs intermédiaires choisies étant 1,075 et 1,10.

Quant à *la loi de distribution*, contrairement à l'indice, des résultats expérimentaux existent. En particulier l'utilisation d'un compteur granulométrique électrique (Coulter-counter) a permis d'obtenir des données nouvelles (L.A. Hobson, 1967 ; R.W. Sheldon et T.R. Parsons, 1967 ; K.L. Carder, 1970). Les mesures de H. Bader (1970), comme celles de J.C. Brun Cottan (1971), font apparaître que la loi de Junge (c'est à dire une loi puissance en d^{-m}, d étant le diamètre), proposée précédemment pour les particules atmosphériques (C.E. Junge, 1963) semble bien décrire la distribution des particules marines. Ce compteur permet l'étude granulométrique des particules dont les diamètres équivalents vont de 1 µm à 15 ou 20 µm****; dans de nombreux cas la décroissance du nombre de particules, lorsque le diamètre croît, se ferait selon deux lois successives, l'une d'exposant compris entre -3,3 et -3,9 dans l'intervalle de 1 µm à 4 ou 5 µm, suivie, au delà de cette taille, d'une seconde loi d'exposant plus élevé (en valeur absolue) de -4 à -5 approximativement.

De nombreuses mesures effectuées dans des zones très différentes de l'Atlantique et du Pacifique (R.W. Sheldon et al., 1972) montrent que les distributions sont, d'une façon très générale, telles que pour des intervalles de tailles logarithmiques égaux (par exemple de 1 à 2 µm, puis de 2 à 4 µm, puis de 4 à 8 µm, ...), le volume des particules appartenant à ces classes reste *grosso modo* constant. On peut aisément vérifier que cette propriété d'équipartition logarithmique des volumes est celle de la distribution d'exposant -4. D'après ces auteurs, elle s'étendrait à une gamme de tailles très étendue. Pour les eaux superficielles et dans les régions productives, à la distribution précédente se superposent souvent des maxima (vers 16 - 20 µm par exemple) traduisant la présence de particules phytoplanctoniques. Pour les calculs, les exposants (de -3 à -5 avec un increment de 0,1) ont été choisis dans un intervalle couvrant largement les valeurs expérimentales. Des résultats systématiques pour 8 valeurs d'exposant dans cet intervalle et pour les 5 valeurs d'indice sont présentés par ailleurs (A. Morel, 1973) ; également y figurent des résultats obtenus avec des distributions log - normales et exponentielles. Même s'il se révèle que les lois puissance sont un peu simplificatrices par rapport à la réalité, des distributions plus complexes peuvent être décomposées en plusieurs lois successives de ce type. En tout état de cause, elles sont commodes pour le calcul et peuvent également, comme on l'a vu, servir de base pour prévoir le résultat au cas où d'autres distributions doivent être envisagées (cf. § 3.2.5, 2e partie).

---

*Voir par exemple W.V. Burt (1956), Y.E. Otchakovsky (1965), N.G. Jerlov (1968).

**C'est le carbone organique particulaire qui est en fait dosé, le poids des substances organiques en est déduit en multipliant, en général, par un facteur 2 (D.C. Gordon utilise le facteur 1,80).

***De 19 à 55 % pour le carbone particulaire -cf. remarque ci-dessus-.

****D'autres intervalles peuvent être étudiés, mais correspondant à des tailles plus élevées ; 1 µm est approximativement le seuil inférieur de détection du système Coulter. Les diamètres déduits des mesures sont ceux des sphères équivalentes, c'est à dire présentant le même volume que les particules réelles, indépendamment de la forme de celles-ci.

Il n'y a pas semble-til de résultats concernant les lois régissant la distribution des particules de dimensions inférieures à 1 µm ; pour celles de dimensions supérieures à 20 µm des lois d'exposant -m continueraient de s'appliquer (m pourrait devenir un peu supérieur à 4, car les volumes relatifs aux classes d'ordre croissant ont tendance à décroître, R.W. Sheldon et al., 1972). Des limites, quelqu'arbitraires qu'elles soient du point de vue physique, doivent être posées pour les nécessités du calcul. Aussi leur influence, dans la mesure où elle est prévisible, a-t-elle précédemment été étudiée. Les calculs préliminaires d'indicatrices individuelles ayant été menés pour des valeurs de α allant de 0,2 à 200, les intégrales à calculer pour les systèmes polydispersés l'ont été entre ces limites*.

D'un point de vue pratique ceci amène à revenir sur la correspondance entre paramètres relatifs α et ρ et diamètres d. Pour le rappeler : $\alpha = \pi\, d\, n_e / \lambda_o$ et $\rho = 2\alpha\,(n_r - 1)$, où d est le diamètre de la sphère, λ_o la longueur d'onde dans le vide, n_e l'indice de réfraction de l'eau (1,33), n_r l'indice relatif de la particule par rapport à l'eau. Les calculs effectués entre $\alpha = 0{,}2$ et $\alpha = 200$ correspondent à des particules dont les diamètres vont de 0,02 µm à 20 µm, lorsque $\lambda = 419$ nm (on a alors $\alpha = 10\,d$), ou bien de 0,04 µm à 40 µm si $\lambda = 838$ nm. On aura de plus $\rho = d$ si on prend pour n_r la valeur 1,05, ceci lorsque $\lambda = 419$ nm ; ce cas est souvent pris comme exemple. Ainsi afin de comparer les diverses distributions, celles-ci avaient été mises en coïncidence pour $\alpha = 10$ et $\alpha = 100$ (2e partie, § 3.2.5), soit pour d = 1 et 10 µm, si $\lambda = 419$ nm, c'est à dire pour des valeurs de diamètre à l'intérieur de la gamme couverte par les mesures. A cet égard, la loi gausso logarithmique utilisée aurait pu être approximée par deux lois puissance, l'une d'exposant -3,4 jusque $\alpha = 40$ (d = 4 µm), l'autre d'exposant -4,5 entre $\alpha = 40$ et 200 (d de 4 à 20 µm), ce qui constitue un exemple plausible (voir ci dessus).

Pour orienter les comparaisons entre indicatrices expérimentale et théoriques il est nécessaire au préalable d'examiner comment ces dernières varient avec l'indice et l'exposant de la distribution (Chapitre 1). Diverses comparaisons sont effectuées, et à partir des concordances observées, sont déduites des valeurs probables d'exposant et d'indice (Chapitre 2). Diverses applications de la théorie sont recherchées, en particulier pour expliquer la sélectivité spectrale de la diffusion et la polarisation. Des conséquences en sont également tirées en ce qui concerne les rôles différents des diverses particules, et les relations entre la concentration du matériel en suspension et la diffusion (Chapitre 3).

1 - VARIATIONS THEORIQUES DE L'INDICATRICE.

1.1 - INFLUENCE DE L'EXPOSANT DE LA LOI DE DISTRIBUTION SUR L'INDICATRICE.

La figure II.12 présentée dans la seconde partie a déjà montré dans quel sens s'exerce cette influence. L'écartement entre les divers paliers, qui caractérisent l'indicatrice finale, varie en effet avec l'exposant ; la façon dont il varie peut être précisée. L'amorce des différents paliers a lieu pour des valeurs fixes de α, qui dépendent de l'angle θ concerné **. En conséquence les écarts sont directement déterminés par la pente initiale qui est la même pour toutes les courbes (quel que soit l'angle) et dont la valeur est 7-m. Ceci permet de chiffrer*** ce qui qualitativement est prévisible : lorsque les particules de grande taille sont proportionnellement plus abondantes, c'est à dire lorsque m décroît en valeur absolue, la pente initiale des courbes est plus forte, les paliers sont donc plus distants et l'indicatrice est globalement plus dissymétrique. Cette évolution de l'indicatrice est montrée par la figure III.1. Celle ci est tracée en portant en fonction de m (variant de 3 à 5) les valeurs des intégrales :

$$\int_{\alpha_m}^{\alpha_M} i_T(\theta,\alpha)\ \alpha^{-m}\, d\alpha\ ,$$

pour divers angles θ ; les limites inférieures et supérieures demeurent constantes (0,2 et 200 respectivement).

L'intensité à 0° sert de valeur de normalisation. On constate sur cette figure que la variation la plus importante est celle du rapport $i_T(2°) / i_T(0°)$, mais elle n'a pas de signification puisque, ainsi qu'on l'a vu, l'intégrale pour 0° ne converge pas. Ce sont les dispositions respectives des courbes pour les angles autres que 0° qui sont significatives. Ainsi l'indicatrice (de 2° à 180°) couvre 5 ordres de magnitude pour la valeur -3 de l'exposant et 3 ordres pour la valeur -5. Un autre point peut être constaté qui aura son importance : entre les valeurs -3 et -4 de l'exposant les diverses courbes demeurent approximativement parallèles. Ceci signifie que dans ce domaine l'indicatrice est peu sensible aux variations de la loi de distribution, au moins pour les angles "moyens" (car l'angle 180° fait quelque peu exception, et l'on ne peut rien dire de l'angle 0°).

Il convient également d'examiner le cas où la distribution suit, non une loi unique, mais une loi où l'exposant prend successivement deux valeurs m_1 et m_2. Comme cela a été observé, la seconde valeur est supérieure (en valeur absolue) à la première ; elle correspond à la loi qui s'applique aux particules de diamètre supérieur à 5 µm (soit $\alpha > 50$). En fait, les intégrales pour les divers angles, sauf pour 0°, ont pratiquement atteint leur valeur asymptotique pour $\alpha = 50$ (voir figure III.2). Par suite, que les particules soient distribuées selon une loi en $-m_1$ ou $-m_2$ au delà de la valeur 50 du paramètre α, n'a pas d'influence sur la forme finale de l'indicatrice, sauf pour la valeur à 0°. La figure III.2 le démontre *a fortiori* : pour deux valeurs d'indice, sont tracées les indicatrices qui correspondent à des populations s'étendant de $\alpha_m = 0{,}2$ à $\alpha_M = 200$ ou bien de $\alpha_m = 0{,}2$ à $\alpha_M = 50$; dans ce dernier cas tout revient à dire qu'à partir de $\alpha = 50$, la valeur du second exposant m_2 est infinie. Or les indicatrices sont pratiquement confondues sauf à 0°. En conclusion, avec les lois de distribution considérées, les grosses particules jouent un rôle faible et leur plus ou moins grande raréfaction (m_2 plus ou moins élevé) affecte peu la forme de l'indicatrice.

---

* Egalement le calcul a été fait entre la limite théorique $\alpha = 0$ (taille nulle) et $\alpha = 0{,}2$ (cf. annexe 2 et § 3.2.2, 2e partie).

**Ce sont les valeurs de α pour lesquelles les courbes $i_T(\theta)\alpha^{-4}$ amorcent leur décroissance et qui sont, pour le rappeler, indépendantes de l'indice, sauf si l'angle θ est petit (de 2° par exemple). Cette propriété trouve sa justification dans la théorie de Rayleigh Gans (cf. 2epartie, § 2.2.3 et § 3.2.1 b).

***Par exemple, si α_1 et α_2 sont les valeurs de α pour lesquelles le premier anneau sombre atteint, d'après la théorie de Rayleigh Gans, les angles θ_1 et θ_2, le rapport des intensités diffusées à ces angles $i(\theta_1) / i(\theta_2)$ variera avec l'exposant, proportionnellement à : $(\alpha_1 / \alpha_2)^{7-m}$. Un tableau (2e partie, § 2.2.3) donne les valeurs de α et de θ correspondantes.

1.2 - INFLUENCE DE L'INDICE DE REFRACTION SUR L'INDICATRICE.

La valeur de l'exposant agit sur la forme de l'indicatrice résultante, mais la forme des indicatrices individuelles figurant dans les intégrations est, elle, régie par la valeur de l'indice de réfraction. La figure III.3 fournit un exemple de cette influence : l'exposant étant fixé (m = 3,5), les rapports $i_T(\theta)$ / $i_T(0°)$ sont portés cette fois en fonction de l'indice, les limites inférieure et supérieure des intégrales conservent les mêmes valeurs que précédemment (soit 0,2 et 200). Il avait été noté dans la seconde partie (§ 2.2.5 et § 2.2.6) que pour les indicatrices individuelles, l'influence de l'indice est pratiquement restreinte aux domaines extrêmes des petits angles (0°-10°) ou des grands angles (au voisinage de 180°). Les sommations effectuées ne modifient pas cette propriété qui permet de rendre compte des remarques suivantes :

- la dissymétrie globale de l'indicatrice décroît lorsque la valeur de l'indice croît. Ainsi le rapport des intensités diffusées à 2° et 140° correspond à 6 ordres de magnitude lorsque n = 1,02 et seulement à 4 ordres si n = 1,15.
- mais on peut constater que cette variation de la dissymétrie est presque uniquement à imputer à la variation du rapport $i_T(10°)$ / $i_T(2°)$. Par contre les courbes relatives aux angles allant de 10° à 140° (et même la courbe relative à 160° non figurée) restent sensiblement parallèles, en conséquence la partie "moyenne" (10°-160°) de l'indicatrice dépend peu de l'indice de réfraction *.
- enfin, la courbe correspondant à l'angle 180° montre qu'en valeur relative, la rétrodiffusion s'accentue au fur et à mesure que l'indice croît (par suite de l'augmentation du facteur de réflexion).

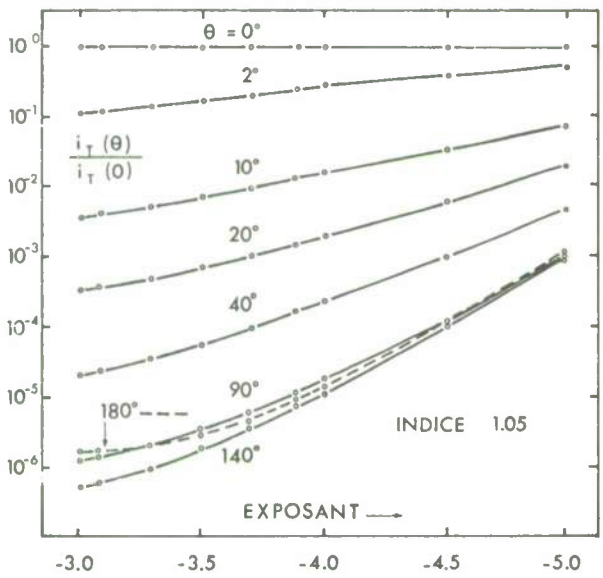


Figure III.1 : Influence de l'exposant de la loi de distribution des particules sur l'indicatrice ; l'indice de réfraction est 1,05. Les paramètres de taille correspondant aux limites de la distribution sont 0,2 et 200.

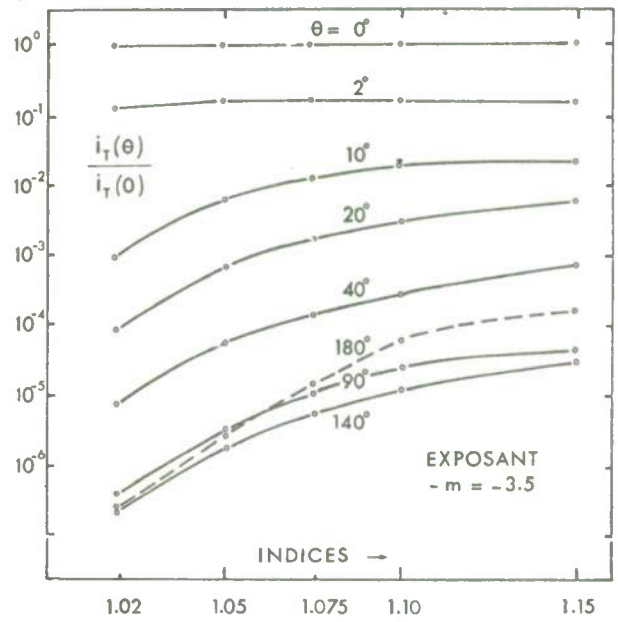


Figure III.3 : Influence de l'indice de réfraction sur l'indicatrice ; l'exposant de la loi de distribution est -3,5. Les limites de taille sont inchangées.

On peut noter dès maintenant qu'à partir des constatations précédentes des critères existent, qui permettraient, au moins théoriquement, de dégager des mesures, une valeur plausible de l'indice. Le rapport des intensités diffusées à 2° et 10° est un critère très sensible, en particulier si l'indice varie entre 1,02 et 1,075 ; pour les valeurs plus élevées, 1,075 et 1,15, la rétrodiffusion en constituerait un autre (malheureusement peu exploitable expérimentalement). Une particularité, que met en évidence le tracé complet de l'indicatrice, pourrait aussi servir de critère . On constate en effet l'existence d'un faible maximum relatif dont la position angulaire est directement liée à la valeur de l'indice (vers 60° pour n = 1,05 et vers 85° pour n = 1,10, figure III.2)**. Le maximum est d'autant plus accusé que le calcul prend en compte des particules plus grosses, elles seules en effet sont susceptibles de provoquer cet effet.

D'un point de vue pratique, les mesures d'indicatrice ont rarement été effectuées avec un intervalle angulaire suffisamment petit pour que ce phénomène soit à coup sûr mis en évidence. On peut relever cependant que l'indicatrice moyenne obtenue par Jerlov (1961) et celle présentée par Otchakovski (1965) présentent une convexité nette vers 60 - 70° (qui correspondrait à un indice de 1,05 environ). Un appareil, enregistrant de façon continue le coefficient de diffusion en fonction de l'angle, permettrait de savoir si cet effet existe de façon plus ou moins permanente et donc s'il est possible à partir de son observation d'en déduire un indice de réfraction moyen. A cet égard, les déterminations d'indicatrice faites par J.W. Reese et S.P. Tucker (1970) montrent que très fréquemment un faible maximum apparaît entre 55° et 75°.

Peut-on trouver vis à vis de l'exposant des critères tels que ceux qu'on vient d'indiquer pour l'indice ? En reprenant l'examen de la figure III.1, on constate que l'amplitude totale de l'indicatrice est *a priori* la grandeur vraiment variable avec l'exposant. Mais pour des raisons de non convergence déjà données, la valeur à 0° ne peut pas être prise en considération. De plus le domaine angulaire 2 - 10° est, comme on vient de le voir, particulièrement sensible à la valeur de l'indice. Utiliser le rapport des intensités à

---

* Ceci ne pourrait pas être généralisé ; cette propriété est liée aux valeurs considérées de l'indice, suffisamment proches de 1 pour rendre valide et applicable l'approximation de Rayleigh Gans (cf. 2e partie. § 2.2.3).

** Voir également les indicatrices présentées dans l'annexe II. La relation qui lie l'angle où apparait cette concentration d'énergie et l'indice a été présentée graphiquement (2e partie, fig. II.8).

2° et 140° pour définir l'amplitude, conduirait à une grandeur pour laquelle les influences de l'exposant et de l'indice ne pourraient être séparées. Par contre, ainsi que le montre la figure III.3, le rapport i(10°) / i(140°) est pratiquement indépendant de l'indice. L'amplitude de l'indicatrice, non plus totale, mais restreinte au domaine 10° - 140° pourra bien constituer le critère recherché.

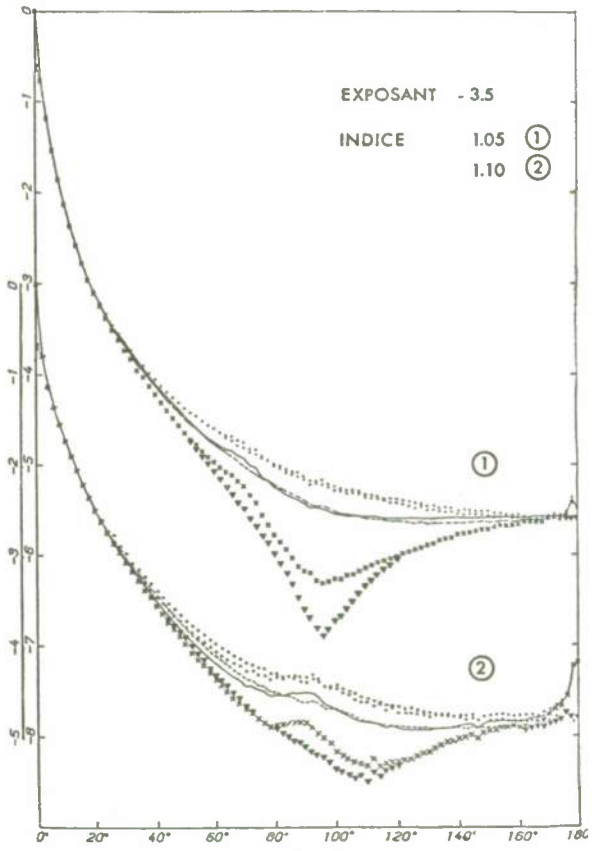


Figure III.2 : Les courbes en trait plein correspondent aux indicatrices calculées lorsque les limites de taille sont α_m=0,2 et α_M=200, les indicatrices en tireté lorsque la limite supérieure α_M est ramenée à 50. Le positionnement des courbes marquées 1 , relatives à l'indice 1,05 , et 2 , relatives à l'indice 1,10,est arbitraire. Par contre dans chacun de ces deux cas, les deux courbes, en trait plein et en tireté, sont correctement placées l'une par rapport à l'autre, de façon que le coefficient total de diffusion soit le même (c'est à dire qu'elles sont correctement placées si l'on considère les coefficients angulaires normalisés). Les croix et les triangles correspondent à la composante polarisée horizontale i_2, respectivement lorsque α_M=200 ou lorsque α_M=50 ; les points correspondent à la composante verticale i_1, sans que soient distinguées les valeurs obtenues dans les deux cas.

1.3 - CONSEQUENCES A TIRER DES VARIATIONS THEORIQUES DE L'INDICATRICE.

Une première conclusion peut être tirée de ce qui précède. En effet lorsque l'indice de réfraction varie dans d'assez larges limites, l'indicatrice de diffusion est peu modifiée, au moins en ce qui concerne les angles "moyens" (10° à 140°, pour fixer des valeurs) ; il en va de même lorsque l'exposant de la distribution varie, dans des limites un peu plus restreintes il est vrai (de -3 à -4 approximativement). Ceci peut constituer une première explication à ce qui est un fait établi expérimentalement, à savoir la faible variabilité de l'indicatrice des particules marines - on peut noter que ce point a été établi principalement à partir de mesures aux angles moyens -. Cette explication sera développée et nuancée au cours du chapitre suivant. Le cas des petits angles où la variabilité est plus grande sera également examiné.

2 - INTERPRETATION DES OBSERVATIONS ET APPLICATIONS.

Il convient d'abord de montrer que les indicatrices théoriques assez peu variables dont on vient de parler coïncident avec l'indicatrice expérimentale, et d'examiner ensuite si dans la gamme des variations possibles, certaines rendent plus précisément compte de l'expérience. Par ce procédé, des valeurs probables d'indice de réfraction et d'exposant de la distribution pourraient être dégagées.

Pour effectuer les comparaisons, on utilisera (§ 2.1) les propriétés - comme les rapports $\beta(10°)$ / $\beta(2°)$ et $\beta(140°)$ / $\beta(10°)$ - dont on a vu qu'elles étaient suffisamment variables, soit avec l'indice, soit avec l'exposant, pour pouvoir servir de critères. On utilisera (§ 2.2) également certains rapports de coefficients angulaires au coefficient total - c'est à dire des coefficients normalisés $\overline{\beta}(\theta)$ - dont les valeurs dépendent conjointement de l'indice et de l'exposant. Si la variabilité expérimentale de ces rapports se révèle plus faible que la variabilité théorique, cela signifiera qu'indices et exposants réels varient dans un domaine plus restreint que celui envisagé pour les calculs. Chaque propriété conduira à délimiter un tel domaine ; si l'ensemble de ceux ci sont compatibles ou présentent au moins une partie commune, on peut

espérer ainsi déduire de l'expérience des valeurs plausibles d'indice et d'exposant. Des indicatrices calculées avec ces valeurs sont comparées à l'indicatrice expérimentale (§ 2.4).

Des méthodes d'évaluation du coefficient total de diffusion à partir de mesures angulaires ont été proposées par divers auteurs. Examiner la variabilité théorique de certains coefficients normalisés (à 90°, 45°, 6° et 4° - § 2.2 et 2.3) afin de préciser l'indice et l'exposant est en même temps une façon de reconsidérer le bien fondé de telles méthodes.

2.1 - APPLICATION DES CRITERES VIS A VIS DE L'INDICE ET DE L'EXPOSANT DE LA LOI DE DISTRIBUTION. RAPPORT DE COEFFICIENTS ANGULAIRES.

Le rapport des coefficients de diffusion à 10° et 2° est, comme on l'a vu (§ 1.2) beaucoup plus sensible aux variations d'indice que d'exposant ; à l'inverse le rapport des coefficients à 140° et 10° est dépendant de l'exposant presque exclusivement ; les variables indice et exposant sont en quelque sorte séparées. Les variations théoriques de ces rapports avec les deux variables considérées sont présentées sur la figure III.4. Des valeurs expérimentales des mêmes rapports sont groupées dans la table I. Les mesures effectuées conjointement à 2° et 10° ou à 10° et 140° sont assez peu nombreuses. De plus, pour être utilisées ici, les mesures à 140° doivent être exprimées en valeur absolue afin que la part de la diffusion moléculaire, souvent non négligeable, puisse être retranchée ; c'est à cette condition seulement que le rapport $\beta(140°) / \beta(10°)$ est réellement significatif. En adoptant les valeurs 2.10^{-2} et $5,5.10^{-2}$ pour fixer les limites expérimentales des variations du rapport $\beta(10°) / \beta(2°)$ et en les reportant sur le graphique (III.4) figurant les variations théoriques, se trouve délimité, par intersection, un domaine. Celui-ci correspond aux valeurs combinées à la fois d'indice et d'exposant, pour lesquelles le calcul rend compte de l'expérience. En raison même de la nature de ce critère, le domaine laisse imprécisées les valeurs de l'exposant, mais restreint les valeurs possibles de l'indice ; ainsi les valeurs extérieures à l'intervalle 1.02 - 1.06 semblent devoir être écartées. De la même façon, en choisissant comme limite les valeurs expérimentales $0,6.10^{-3}$ et $2,3.10^{-3}$ pour le second rapport, un autre domaine peut être déterminé qui renseigne peu sur l'indice (inférieur cependant à 1.10) mais précise les valeurs de l'exposant ; par exemple, si l'indice est supposé égal à 1.05 les valeurs de l'exposant compatibles avec les résultats expérimentaux sont de -3,8 à -4,3 approximativement.

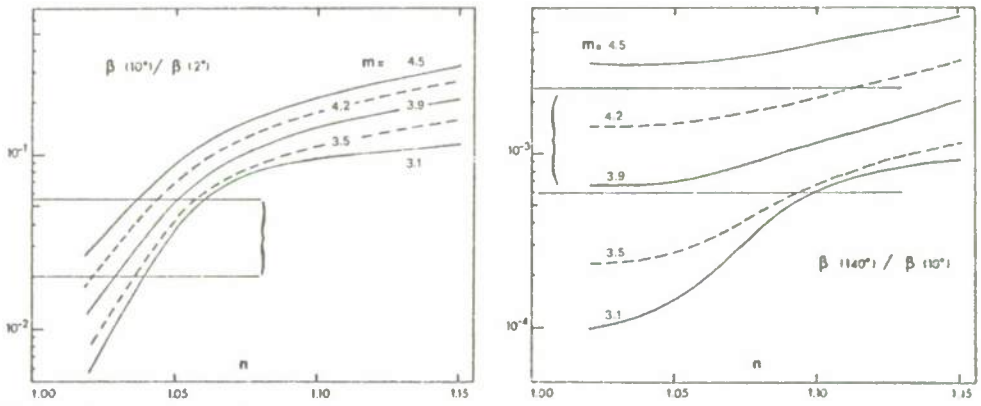


Figure III.4 : Variations théoriques des rapports $\beta(10°) / \beta(2°)$ et $\beta(140°) / \beta(10°)$ en fonction de l'indice de réfraction et pour les valeurs d'exposant indiquées. Les valeurs expérimentales sont situées dans les bandes désignées par les accolades.

Pour la clarté, les deux domaines ainsi définis sont reportés sur un diagramme m-m (c'est à dire dont les coordonnées sont l'exposant et l'indice, voir figure III.6). La partie commune correspond donc aux valeurs plausibles d'indice et d'exposant compte tenu des résultats expérimentaux disponibles.

Spilhaus (1968) avait envisagé d'utiliser le rapport $\beta(30°) / \beta(45°)$ pour caractériser la forme de l'indicatrice. Les figures III.1 et III.3 montrent que les courbes tracées pour 20° et 40° restent sensiblement parallèles quand l'indice ou l'exposant varie. Il apparait donc que ce rapport, théoriquement peu variable, est tout compte fait assez mal choisi pour être l'index escompté. Au demeurant, les valeurs théoriques corroborent parfaitement les valeurs expérimentales (à condition que là encore, la diffusion moléculaire soit soustraite ; c'est d'ailleurs une difficulté dans l'interprétation de ce rapport que Spilhaus, semble-t-il, n'avait pas considéré). La table II montre à la fois les valeurs théoriques et un certain nombre de valeurs expérimentales de ce rapport. Même si statistiquement les valeurs sont significativement distinctes (A.F. Spilhaus, 1968), on voit qu'il est difficile de tirer des conclusions des faibles variations observées, sauf peut être en ce qui concerne l'exposant : ces valeurs expérimentales montreraient que celui-ci peut varier essentiellement entre -3,5 et -4,2, la valeur la plus fréquente étant -3,9, ce qui n'est pas du tout en contradiction avec les conclusions tirées de l'application des critères précédents.

2.2 - RELATIONS ENTRE $\beta(45°)$ ou $\beta(90°)$ et b

Jerlov avait dès 1953 (N.G. Jerlov, 1953) préconisé de déduire le coefficient total de diffusion b de mesures à 45°. Ultérieurement, de nombreux auteurs ont avancé que la preuve théorique de la constance du rapport entre $\beta(45°)$ et b avait été faite par D. Deirmendjian (1963). En réalité ce travail théorique traitait du cas de la diffusion par les brouillards et les nuages, le calcul étant fait avec l'indice de réfraction de l'eau et des lois de distribution particulières. La conclusion de Deirmendjian selon laquelle $\bar{\beta}(40°)$ est pratiquement constant (et d'ailleurs égal à 10^{-1}) n'a pas à être étendue à tous les cas, car il s'agit, non d'une preuve à proprement parler, mais de la constatation d'une propriété numérique qui tient aux distributions adoptées. Ainsi la figure III.5 montre comment varie $\bar{\beta}(44°)$ avec l'indice et ce

Table I : Valeurs expérimentales des rapports β(10°) / β(2°) et β(140°) / β(10°).

β(10°) / β(2°) X 10^2					β(140°) / β(10°) X 10^3		
5	2,6 (2,2 à 3,0)	2,7 3,0	3,2 4,7	4,8 3,8 (4,5 à 5,4)	1,35 (1,00 à 1,70)	1,05 0,60 à 1,90	1,97 1,66 à 2,28
Médit.	Manche et Médit.	Argus Island / Long Island Sound	Méditerranée	Atlant. / Pacif.	Manche-Médit.	Atlant.	Pacif.
(1)	(2)	(3)	(4a) (4b)	(5)	(2)	(5)	

(1) Rapport calculé à partir des valeurs lues sur la courbe présentée par Y.E. Otchakovsky (1965).
(2) Valeurs moyennes des rapports correspondant à l'indicatrice moyenne des particules. Celle ci est obtenue en associant les valeurs aux angles allant de 30° à 150° (A. Morel, 1965) aux valeurs relatives aux petits angles, de 1,5° à 14° (D. Bauer, A. Morel, 1967).
(3) R.E. Morrison (1970), rapports mesurés sur les courbes tracées selon ce que l'auteur appelle l'extrapolation "Duntley" (figure 4, in ref.).
(4) Rapport correspondant à la moyenne des mesures *in situ*, à trois longueurs d'onde ; (4b), à la moyenne des mesures *in vitro* à deux longueurs d'onde (laser) (F. Nyffeler, 1970). Pour les mesures *in situ*, il est nécessaire d'extrapoler de 3° vers 2° pour effectuer le rapport.
(5) Trois mesures en Atlantique (Bahamas) et deux en Pacifique (au large de San Diego) (T.J. Petzold, 1972). Pour 140°, la diffusion moléculaire a été retranchée des valeurs absolues données par l'auteur, ceci avant de calculer le rapport.

Table II : Valeurs théoriques et expérimentales du rapport β(30°) / β(45°).

Valeurs théoriques.

Exposant	Indice de réfraction 1,02	1,05	1,075	1,10
-3,5	3,748	3,875	4,005	4,006
-3,9	3,382	3,407	3,441	3,435
-4,2	3,053	3,057	3,066	3,055
-4,5	2,725	2,724	2,725	2,714

Valeurs expérimentales (et écarts-types).

3,70 ± 0,40 Manche-Médit.(1a)	3,33 ± 0,22 côtière			3,69 ± 0,67	Bermudes
3,85 ± 0,25	3,32 ± 0,14 N.W.Atlant.			3,53 ± 0,67	(Argus Island)
3,63 ± 0,40	3,53 ± 0,28 Gulf stream			3,28 ± 0,19	Long Island sound
3,77 ± 0,75	3,61 ± 0,26 M. Sargasses			3,52 ± 0,33	
Océan Indien (1b)	2,91 ± 0,06 Bermudes			3,32 ± 0,24	
	(2)			(3)	
3,43±0,39 Baltique	3,00	3,28	3,17	3,38	
3,38±0,61 Médit.	2,83 (a)	3,48	3,18 (b)	3,64	
	2,97		3,33		
(4)	Atlant.	Pac.	Atlant.	Pac.	(5)

(1a) Valeur moyenne pour 27 mesures en Manche et 40 en Méditerranée (A. Morel, 1965).
(1b) Valeurs moyennes, respectivement aux longueurs d'onde 546, 436, 366 nm, pour 17 échantillons d'océan Indien (Madagascar, non publié, A. Morel, 1967).
(2) Valeurs moyennes pour 5 types d'eau entre Woods Hole et la mer des Sargasses (A.F. Spilhaus, 1968).
(3) R.E. Morrison, 1970.
(4) 12 mesures en mer Baltique (exclue station 1, 25 m) à 4 longueurs d'onde (655, 632, 525 et 450 nm), G. Kullenberg (1969).
16 mesures en Méditerranée (633 nm), G. Kullenberg et N.B. Olsen (1972). Ce sont les rapports des coefficients de diffusion pour les particules seules qui sont présentés ici.
(5a) Rapports obtenus à partir des valeurs observées par T.J. Petzold (1972).
(5b) Rapports obtenus à partir des valeurs précédentes mais diminuées de la part revenant à la diffusion moléculaire ($1,67.10^{-4}$ m^{-1} à 90° pour λ = 510 nm, A. Morel, 1968).

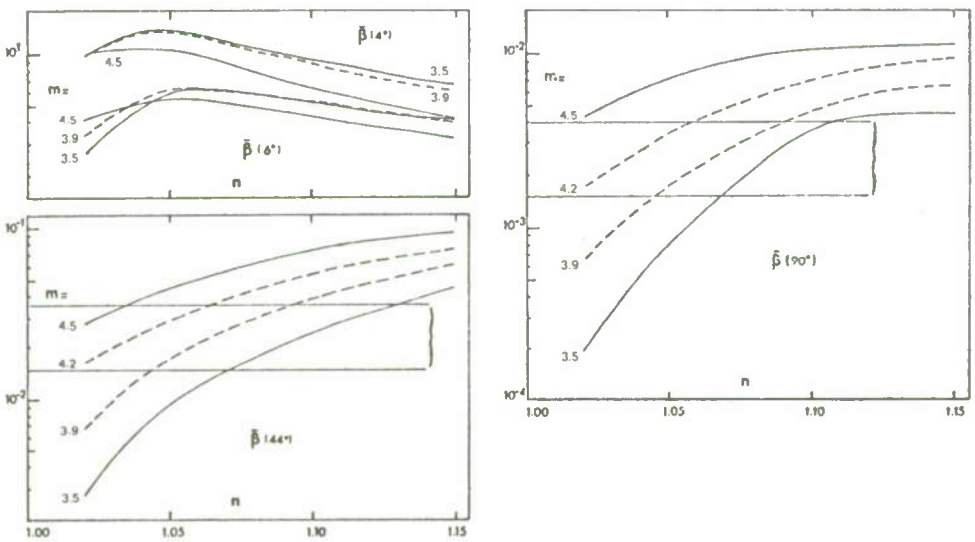


Figure III.5 : Variations théoriques avec l'indice et l'exposant des coefficients angulaires normalisés pour 4°, 6°, 44° et 90°. Les accolades correspondent comme dans la figure III.4 aux variations observées des mêmes coefficients. Ces valeurs théoriques, comme celles de la figure III.4 sont calculées pour des particules dont les tailles relatives α s'étendent de 0,2 à 200.

pour quatre valeurs de l'exposant de la loi de distribution *. Contrairement aux distributions envisagées par Deirmendjian les lois puissance entrainent, à valeur constante d'indice, une possibilité de variation importante pour le coefficient normalisé $\overline{\beta}(44°)$.

La table III présente un certain nombre de valeurs obtenues pour le rapport $\beta(45°)$ / b - c'est à dire $\overline{\beta}(45°)$ - valeurs assez assurées dans la mesure où le calcul de b par intégration s'appuie sur des valeurs expérimentales aux petits angles, et non sur des valeurs extrapolées, dans la mesure aussi où l'on peut, quand il y a lieu, retrancher de $\beta(45°)$ la part qui revient à la diffusion moléculaire. Ces remarques sont valables également pour les valeurs expérimentales de $\overline{\beta}(90°)$ figurant dans cette même table. De l'examen de ce tableau, il ressort que les valeurs expérimentales de $\overline{\beta}(45°)$ se situent dans un intervalle plus étroit que les valeurs théoriques, impliquant que les variations effectives d'indice et d'exposant sont plus faibles que celles considérées dans le calcul. Comme précédemment, les domaines correspondants sont obtenus en confrontant aux valeurs calculées les valeurs expérimentales choisies comme limites, soit $1,5.10^{-2}$ et $3,6.10^{-2}$ pour $\overline{\beta}(45°)$, $1,5.10^{-3}$ et 4.10^{-3} pour $\overline{\beta}(90°)$. Les domaines, d'ailleurs pratiquement confondus sont reportés sur le diagramme m-n (figure III.6).

En définitive, si la relation entre b et $\beta(45°)$ présente effectivement une certaine invariance, celle ci n'est pas, comme on a voulu le voir, théoriquement justifiée. A l'inverse, elle prouverait plutôt une relative stabilité des propriétés des particules marines, à la fois quant à leur distribution et à leur composition moyenne, dont dépend l'indice.

Table III : Valeurs expérimentales de $\overline{\beta}(45°)$ et $\overline{\beta}(90°)$ et écart-types.

$\overline{\beta}(45°) \times 10^2$

2,0 ± 0,5 Moyenne Manche et Méditerranée (1)	2,4 ± 0,9 Baltique (2a)	2,5 ± 0,7 Médit. (2b)	1,6 ± 0,4 Atlant. (3)
2,3 ± 0,7 Médit.	1,9 ± 0,3 Atlant. (4)	3,4 ± 0,2 M. Noire	2,58 1,82 3,05 1,78 2,80 Atlant.Pacif. (5)

$\overline{\beta}(90°) \times 10^3$

2,25 ± 0,4 (1)	3,0 ± 1,3 (2b)	2,9 ± 0,6 (3)	3,16 2,00 2,13 1,63 1,85 (5)

(1) Indicatrice moyenne des particules (A. Morel, 1965) rapportée à la valeur 444 de l'intégrale donnant b, calcul fait en posant $\beta(90°) = 1$ (A. Morel, 1968, et calcul corrigé en 1970) ; rapportée à la valeur 337 donnée par F. Nyffeler (1969), pour la même intégrale, les valeurs $2,0.10^{-2}$ et $2,25.10^{-3}$ deviennent respectivement $2,6.10^{-2}$ et $3,0.10^{-3}$. 27 mesures en Manche et 40 en Méditerranée.
(2a) 16 mesures en mer Baltique (G. Kullenberg, 1969).
(2b) 14 mesures en mer Méditerranée (G. Kullenberg, N. Olsen, 1972) ; la mesure à 150 m, station A2 a été écartée des moyennes.
(3) Inverses des rapports $b/\beta(\theta)$ données par R.E. Morrison (1970), b étant la valeur obtenue en incluant les mesures aux petits angles (appelée "Sp" par l'auteur).
(4) 23 mesures en Méditerranée, 90 en Atlantique, 104 en mer Noire ; mesures de V.I. Mankovski (1971).
(5) Mesures de T.J. Petzold (1972) ; avant de former les rapports, la diffusion moléculaire a été retranchée des valeurs présentées par l'auteur.

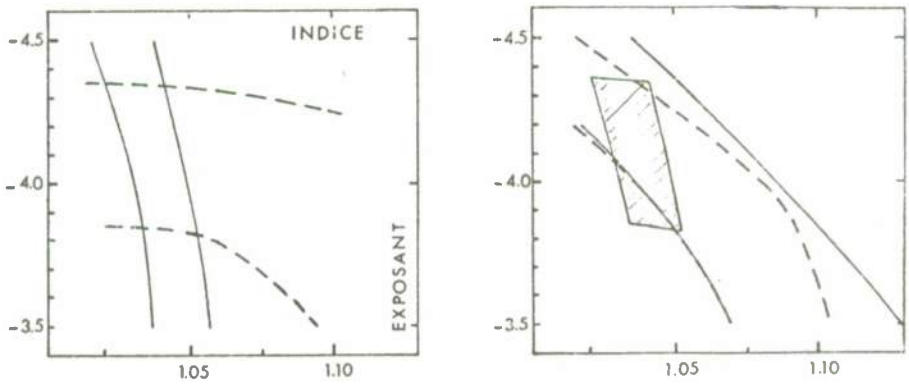


Figure III.6 : Diagrammes tracés dans le plan m-n (n, indice de réfraction selon les abscisses ; m exposant négatif de la loi de distribution, selon les ordonnées) pour mettre en évidence les domaines où valeurs théoriques et expérimentales sont compatibles. Figure de gauche : la bande comprise entre les deux courbes pleines correspond à l'application du critère constitué par le rapport $\beta(10°)/\beta(2°)$; celle entre les deux courbes en tireté à l'application du critère $\beta(140°)/\beta(10°)$. La partie commune à ces deux domaines est reportée sur la figure de droite. Sur celle-ci sont également montrés les domaines obtenus par confrontation entre valeurs théoriques et expérimentales des coefficients normalisés $\beta(44°)$ (domaine délimité par les courbes en trait plein) et $\beta(90°)$ (domaine délimité par les courbes en tireté).

*La courbe relative à l'exposant -3,10 n'est pas représentée. En effet pour cette valeur de l'exposant, la valeur asymptotique du coefficient total de diffusion est loin d'être atteinte avec la limite supérieure α_M utilisée (soit α_M=200, ce qui correspond à ρ variant de 8 à 60 selon que l'indice varie de 1,02 à 1,15) ; par suite $\overline{\beta}(44°)$ est surévalué dans ce cas. Cet effet, à quelques pour-cent près, n'existe plus avec les autres valeurs de l'exposant (cf. 2e partie, § 3.2.3 et figure II.15). Le problème ne se pose pas pour la figure III.4 car les coefficients angulaires, dont on fait le rapport, ont atteint leur valeur asymptotique, même pour l'exposant -3,10.

2.3 - PROPRIETES PARTICULIERES DES COEFFICIENTS $\beta(4°)$ et $\beta(6°)$

La propriété numérique mise en évidence par Deirmendjian pour l'angle de diffusion 40° a un équivalent dans le cas des indices et des lois de distribution de Junge envisagées ici. Si l'on examine les indicatrices obtenues pour les divers indices et exposants (A. Morel, 1973) lorsqu'elles sont tracées en valeurs normalisées $\overline{\beta}(\theta)$, on constate qu'elles présentent approximativement les mêmes valeurs vers 4° et 6° (respectivement de l'ordre de 12 et de 6). Les valeurs de $\overline{\beta}(4°)$ et de $\overline{\beta}(6°)$ sont portées en fonction de l'indice et pour diverses valeurs de l'exposant sur la même figure III.4. On peut observer que pour une valeur d'indice donnée, les variations de ces coefficients avec l'exposant sont faibles comparées à celles du coefficient $\overline{\beta}(44°)$. Si même on prend également en considération les variations d'indice, entre 1,02 et 1,10 tout au moins, la conclusion demeure ; ainsi par exemple, $\overline{\beta}(4°)$ varie de 9,6 à 14 environ. Ceci rejoint une observation récente faite par V.I. Mankovski (1971), à partir du tracé des indicatrices en coefficients normalisés $\overline{\beta}(\theta)$ (Figure III. 6B). Toutes ces indicatrices se recoupent en moyenne vers $\theta = 4,5°$ et l'étude statistique montre que le coefficient de corrélation a sa valeur la plus élevée lorsque dans la régression entre b et $\beta(\theta)$, θ a la valeur 4,5°. Cette régression fournit $\beta(4,5°) = 9,0$ b. En supposant (d'après la pente de l'indicatrice) que $\beta(\theta)$ varie en $\theta^{-1,5}$ dans cette région angulaire, la valeur précédente se transforme pour 4° en $\overline{\beta}(4°) = 10,7$. Cette valeur est identique à celle présentée ici : 4750 / 444= 10,7 (± 17 %) (D. Bauer, A. Morel, 1967, et table II, 2e partie).

Le fait que le coefficient normalisé $\overline{\beta}(4°)$ soit peu dépendant de l'indice et de l'exposant entraine évidemment que la confrontation des valeurs expérimentales aux valeurs théoriques renseigne peu sur les indices et exposants plausibles. Cependant si l'on adopte par exemple la valeur 10,5 ± 2, cette valeur exclut la possibilité d'indices supérieurs à 1,10 ; d'un autre côté, si l'on suppose que l'indice a pour valeur 1,05, tous les exposants (entre -3,2 et -5) sont possibles. On peut ajouter que $\overline{\beta}(10°)$, déjà théoriquement plus variable que $\overline{\beta}(6°)$ ou $\overline{\beta}(4°)$, reste néanmoins voisin de 1 ; il varie de 0,8 à 1,8 lorsque l'indice est compris entre 1,02 et 1,05 et l'exposant entre -3,5 et -4,2, ce que, sans entrer dans le détail, les mesures confirment * (il devient par contre supérieur à 2, quel que soit l'exposant si l'indice est égal ou supérieur à 1,075). Pour cet angle 10°, coefficient angulaire et coefficient total présentent des valeurs numériquement voisines.

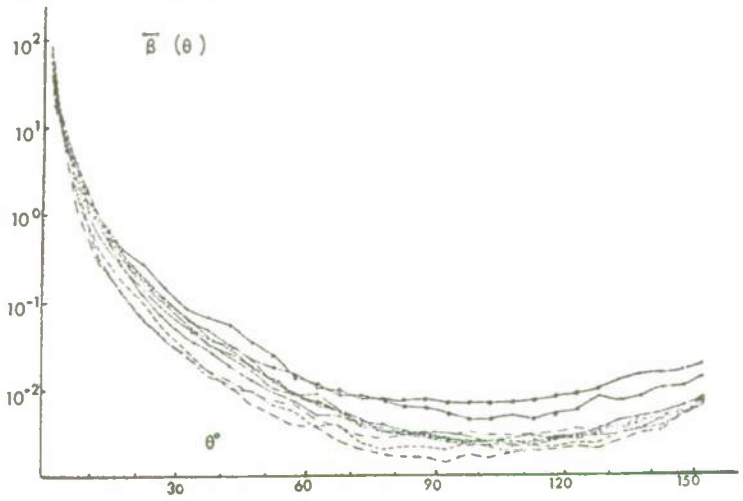


Figure III. 6B : Reproduit d'après V.I. Mankovski (1971). Indicatrices de diffusion tracées en valeurs normalisées $\overline{\beta}(\theta)$. Les mesures ont été effectuées en Atlantique nord.

2.4 - VALEURS PLAUSIBLES D'INDICE DE REFRACTION ET D'EXPOSANT DE LA LOI DE DISTRIBUTION

Les diverses confrontations qui viennent d'être faites conduisent chacune à délimiter un domaine d'indice et d'exposant rendant compatibles données expérimentales et valeurs théoriques. Ces domaines, comme le montre la figure III.6, présentent une partie commune pour laquelle donc tous les critères utilisés sont à la fois respectés. Ainsi se trouvent précisées les valeurs combinées d'indice et d'exposant qui peuvent être tenues comme plausibles. On peut remarquer que les valeurs d'exposant (de -3,8 à -4,2) sont en accord avec les valeurs fournies par numération directe des particules (cf. avant propos de la 2e partie) et également que les valeurs d'indice ainsi déduites, allant ** de 1,02 à 1,05 paraissent vraisemblables. Sur ce dernier point, récemment H.R. Gordon et O.B. Brown (1972) ont conclu que les indicatrices déterminées par G. Kullenberg (1968) en mer des Sargasses, peuvent être correctement interprétées si on donne à l'indice la valeur 1,05 - 0,01 i. Par une méthode très différente, fondée sur la sélectivité de la diffusion, J.R. Zaneveld et H. Pak (1973) calculent des valeurs de l'indice relatif approximativement comprises entre 1,02 et 1,04 pour les particules aussi bien des couches superficielles que profondes (3000 mètres). Il convient d'ajouter qu'il n'y a pas unicité de solution ; diverses combinaisons d'indice et d'exposant conduisent à des indicatrices voisines et acceptables compte tenu de la variabilité de l'indicatrice expérimentale. Quelques exemples sont montrés ci après. La méconnaissance des limites physiques de la population à introduire dans le calcul oblige à en examiner l'influence sur les conclusions précédentes.

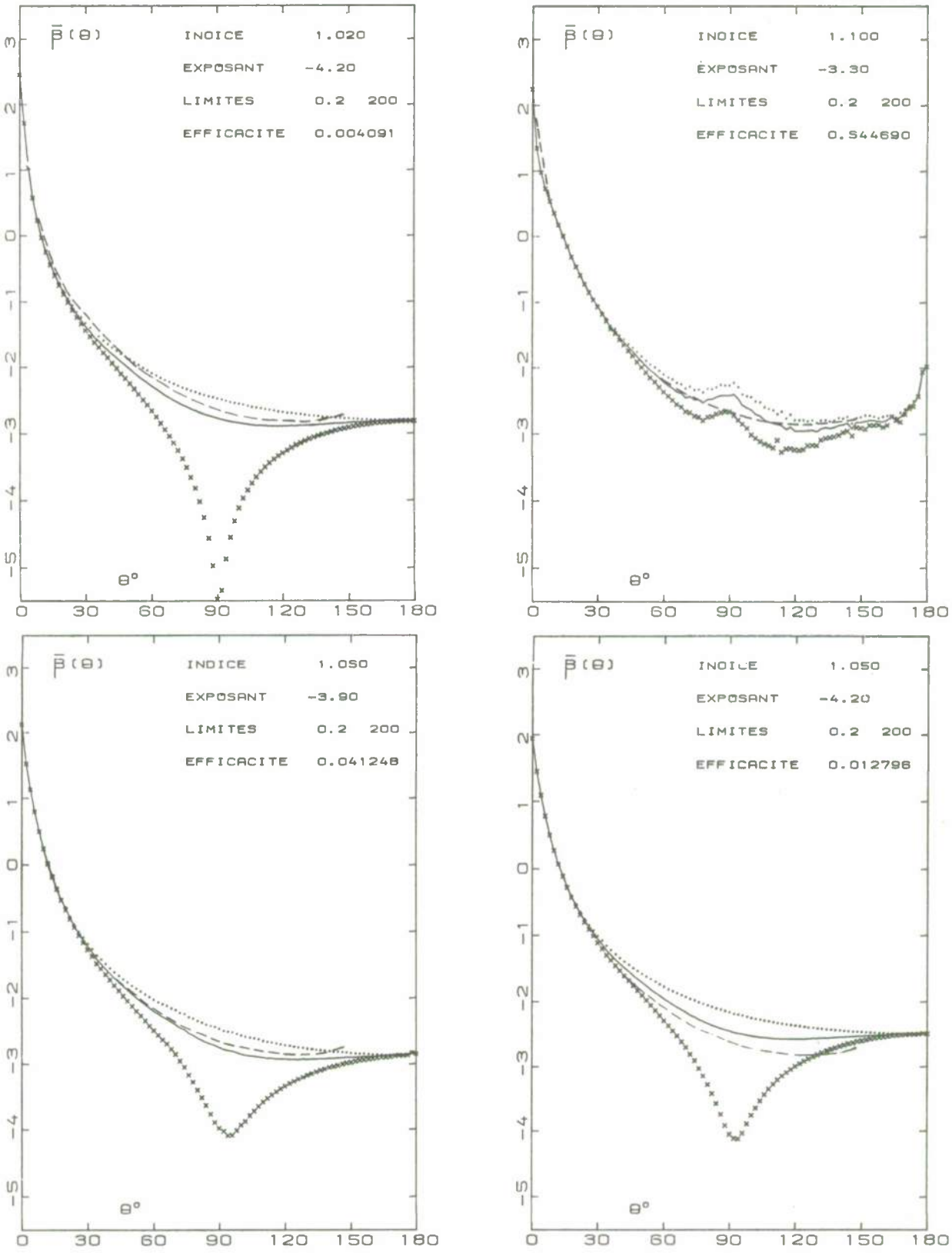
---

* Voir page 12 $\overline{\beta}(10°) = 1,126$ et également les valeurs de Mankovski : 0,7 et 1,3 approximativement, et de Petzold : 0,85, 1,13, 1,04 pour les trois mesures en Atlantique ; 0,88, 0,99 pour les deux mesures au large de San Diego.

**La valeur centrale de 1,04 est, pour le noter, celle qui permet les plus grandes variations d'exposant à l'intérieur du domaine de compatibilité. Les exemples présentés ci après, ne correspondent cependant qu'aux cas où l'indice est posé égal à 1,02 ou 1,05, ceci compte tenu des calculs préliminaires d'indicatrices individuelles (§ 2.2, 2e partie).

2.4.1 - Comparaison des indicatrices.

La comparaison peut être faite pour tous les angles en traçant les indicatrices calculées dans les conditions précédemment définies. Quelques exemples sont fournis ci-après (Figures III.7) ; est également présentée l'indicatrice expérimentale moyenne, tracée selon les mêmes échelles, avec les valeurs tabulées des coefficients normalisés (cf. 1ère partie). D'autres exemples de courbes théoriques,y compris pour les cas hors du domaine des valeurs vraisemblables, sont présentés de façon plus complète par ailleurs (A. Morel, 1973).



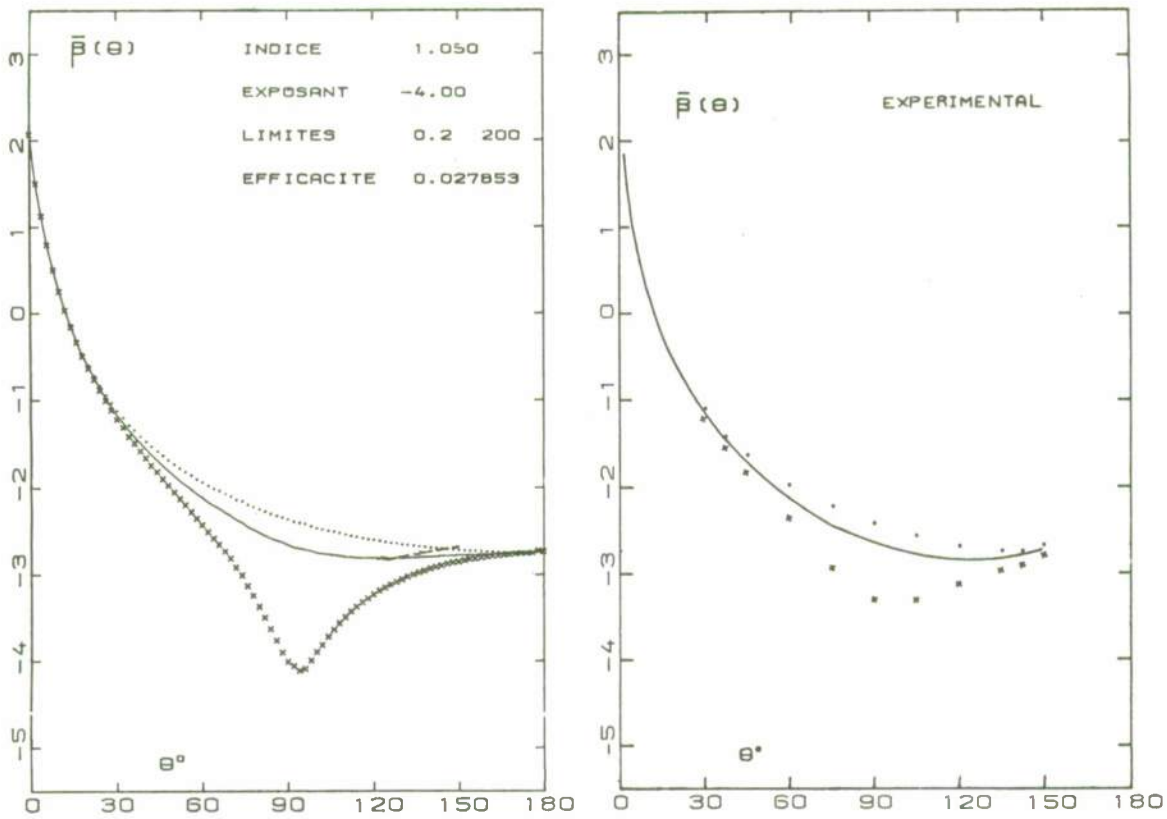


Figure III.7 : Les indicatrices théoriques, calculées pour les valeurs d'indice d'exposant et de limites indiquées, sont tracées en trait plein, en portant en fonction de θ le logarithme décimal des coefficients normalisés $\overline{\beta}(\theta)$. Les points et les croix correspondent respectivement aux composantes polarisées verticalement $\overline{\beta}_1(\theta)$, et horizontalement $\overline{\beta}_2(\theta)$. L'indicatrice expérimentale est présentée de façon identique. Elle est en outre reportée en tireté sur les figures précédentes. "Efficacité" est une notation abrégée désignant le facteur moyen d'efficacité $\overline{Q}$ dont la valeur calculée (équation 3.2, 2e partie) est indiquée pour chaque cas.

L'accord le meilleur est obtenu lorsque l'exposant est pris égal à -4, l'indice étant 1,05 ; dans ces conditions courbe expérimentale et courbe théorique sont pratiquement indiscernables l'une de l'autre. Cet accord, qui reste bon pour les valeurs voisines d'indice et d'exposant, concerne l'indicatrice en lumière naturelle. A ce sujet deux remarques doivent être faites :

a) la concordance entre valeurs expérimentales et théoriques pour l'intensité totale β(θ), n'entraine pas *ipso facto* celle des valeurs pour les deux composantes polarisées ; par exemple, si n = 1,05 et m = -3,90 d'une part et si n = 1,02 et m = -4,20 d'autre part, les valeurs calculées de $\overline{\beta}(\theta)$ sont pratiquement identiques, mais la polarisation est beaucoup plus accentuée dans le second cas (elle est totale à 90° à 10^{-3} près). Cette question sera examinée en détail ultérieurement (§ 4).

b) en se reportant à la figure III.6, on constate que trois critères sur quatre peuvent être satisfaits lorsque, l'indice ayant des valeurs plus élevées, l'exposant a des valeurs plus faibles (en valeurs absolues). En prenant par exemple l'indice 1,10 et l'exposant -3,3, on obtient une courbe satisfaisante * eu égard à l'indicatrice expérimentale, sauf évidemment pour le domaine des petits angles. Le rapport β(10°) / β(2°) théorique (0,101) est 2 à 5 fois plus élevé que le rapport expérimental, et la pente dans cette région angulaire est trop faible.

Cette seconde remarque permet d'insister à nouveau sur l'utilité du critère que constitue le rapport β(10°) / β(2°) pour déterminer indirectement l'indice moyen des particules.

2.4.2 - Première remarque sur les limites plausibles de la distribution.

La théorie montre qu'il y a cohérence entre les résultats expérimentaux relatifs d'une part à la distribution des particules et d'autre part à la diffusion, ceci à condition que soient données à l'indice de réfraction certaines valeurs ; celles ci, par ailleurs, semblent raisonnables. Toutefois pour parvenir à cette cohérence, une autre catégorie d'hypothèses a dû être faite ; ce sont celles qui touchent aux valeurs des deux limites, à propos desquelles on peut se demander si elles ne remettent pas en question les conclusions. Les effets possibles sont successivement examinés :

Limite supérieure : la valeur qu'on lui attribue influant très peu sur la forme de l'indicatrice finale, sauf pour l'angle 0°, les résultats qui concernent le domaine de validité, obtenus sans faire intervenir la valeur à 0°, demeurent. Le cas particulier de l'angle 0° sera examiné plus loin (§ 3.1.3), de même que le problème de la polarisation (§ 3.3) pour laquelle la valeur donnée à cette limite est, comme on le verra, déterminante.

---

* En faisant abstraction du maximum autour de θ = 85° dont la position est liée à la valeur de l'indice (2e partie, § 2.2.5) et dont l'amplitude croît lorsque l'exposant décroît en valeur absolue.

Limite inférieure : lorsque la troncature* progresse vers des tailles de plus en plus élevées, la dissymétrie de l'indicatrice s'accentue (par diminution de la diffusion d'abord aux grands angles, puis aux angles de plus en plus petits - cf. 2e partie, § 3.2.2 -). Parmi les rapports choisis pour servir de critères le premier à être affecté est $\beta(140°)$ / $\beta(10°)$, ensuite $\overline{\beta}(90°)$; $\overline{\beta}(44°)$ ne l'est que si la limite inférieure α_m dépasse 5 ; enfin $\beta(10°)$ / $\beta(2°)$ ou $\overline{\beta}(4°)$ ne le sont pas tant que α_m reste inférieur à 10 (cf. figure II.12). Dans ces conditions, le rapport $\beta(140°)$ / $\beta(10°)$ étant diminué, quels que soient par ailleurs l'indice et l'exposant, les courbes qui en montrent les variations (figure III.4) subissent toutes approximativement une translation, de plus d'un ordre de magnitude, si $\alpha_m = 10$; de la même façon, les courbes établies pour $\overline{\beta}(90°)$ sont elles aussi déplacées, de presque un ordre de magnitude. Comparées aux valeurs théoriques ainsi diminuées, les valeurs expérimentales ne s'expliqueraient alors qu'avec à la fois des indices élevés, supérieurs à 1,15, et des exposants élevés (en valeur absolue), supérieurs à 5 ou 6. En conséquence les divers domaines que montraient la figure III.6, vont être disjoints avec ces nouvelles hypothèses, et la partie commune n'existera plus. Il s'ensuit qu'aucune indicatrice ne peut être calculée susceptible de rendre compte des valeurs expérimentales, simultanément pour toutes les régions angulaires.

En conclusion, la cohérence évoquée précédemment disparait elle aussi. Pour la conserver il faut fixer la limite inférieure α_m du calcul à une valeur non supérieure à 1. Sans que cet argument puisse constituer une preuve irréfutable, il y a tout lieu de penser qu'il en va bien ainsi réellement ; il suffit de supposer que la loi de distribution établie expérimentalement jusqu'aux particules de diamètre 1 µm se prolongerait en fait jusqu'à des particules de diamètre 0,1 µm.

3 - AUTRES CONSEQUENCES ET APPLICATIONS DES CALCULS THEORIQUES

Le premier apport de la théorie a été de montrer qu'à partir des données granulométriques, et moyennant certaines hypothèses dont la vraisemblance a été démontrée, la forme générale de l'indicatrice reçoit une explication satisfaisante. L'analyse théorique fait également entrevoir d'autres conséquences en ce qui concerne les rôles différents que les diverses classes de particules joueraient dans la diffusion, certaines ayant un rôle prépondérant (§ 3.1). Cette idée de classes "efficaces" est essentielle pour aborder le problème de la sélectivité spectrale et en faciliter l'interprétation (§ 3.2). Les questions touchant à la polarisation et qui viennent d'apparaître lors de la comparaison entre indicatrices expérimentale et théoriques font l'objet d'un examen particulier (§ 3.3). Enfin les relations entre teneur en particules et diffusion telles qu'elles peuvent être déduites de la théorie, sont examinées d'un point de vue pratique (§ 3.4).

3.1 - ROLES DIFFERENTS DES DIVERSES CLASSES DE PARTICULES

3.1.1 - Cas de la diffusion totale.

On peut concevoir que dans le cas d'une population de particules distribuées selon une loi continuement décroissante avec la taille, c'est à dire dans le cas où l'on ne peut donc définir une taille moyenne, existe néanmoins une classe de particules jouant un rôle prépondérant dans le phénomène de diffusion. Ceci découle en fait de ce qui a été examiné dans la seconde partie (§ 3.2.3) et qui a conduit à préciser le domaine de validité du calcul. On a vu que les "petites" particules, bien que nombreuses (et même en nombre infini) peuvent présenter une diffusion totale finie et faible, parce que le facteur d'efficacité Q est faible ; à l'inverse, les "grosses" particules, pour lesquelles Q est constant et égal à 2, sont d'après les lois de distribution, en nombre trop faible pour contribuer notablement à la diffusion totale. Entre ces deux extrêmes, il existe donc un cas favorable, c'est à dire une catégorie de particules auxquelles la diffusion est due pour l' essentiel, parce qu'à la fois leur nombre et leur efficacité sont suffisamment élevés. Pour préciser les tailles de ces particules, il suffit de se reporter à la figure II. 15, où l'on peut lire - pour diverses valeurs de l'exposant - la valeur du paramètre ρ qui correspond à une fraction donnée de la diffusion totale (celle ci étant calculée pour des particules dont les tailles s'étendent de zéro à l'infini). Ces valeurs peuvent être présentées d'une autre façon qui met plus explicitement en évidence le rôle prépondérant de certaines classes de particules. Ainsi sur la figure III.8 sont portées, en fonction de l'exposant, les valeurs de ρ qui correspondent à des fractions données de la diffusion totale (1 %, 5% , 10 %, 50 %, 90 %, 95 %, 99 %).

Toutes les courbes tendent vers l'infini pour la valeur -3 de l'exposant, puisqu'avec cette valeur et avec l'hypothèse d'une population non bornée, la diffusion est elle même infinie. Par contre pour les autres valeurs, on voit que la plus grande part de la diffusion (90 % par exemple, ce qui correspond à la bande délimitée par les courbes relatives à 5 % et 95 %) est provoquée par des particules qui appartiennent au domaine intermédiaire : pour donner un exemple, si l'exposant de la distribution est -4, les particules de diamètre compris entre 0,4 et 20 µm sont responsables de 90 % de la diffusion, celles de diamètre compris entre 0,6 et 10 µm, de 80 % (les diamètres sont calculés en supposant l'indice de réfraction égal à 1,05 et la longueur d'onde égale à 419 nm). La table III.4 donne ces valeurs de façon plus complète ; y figurent également les valeurs de ρ qui correspondent à 50 %. Ces dernières valeurs définissent en quelque sorte une classe médiane vis à vis de la diffusion : l'ensemble des particules de dimensions supérieures à celle de cette classe, et l'ensemble des particules de dimensions inférieures contribuent également à la diffusion. Comme cela est prévisible (2e partie, § 3.2.5) les lois de distribution log normale ou exponentielle conduisent comparativement à un intervalle plus restreint de taille pour une même fraction (80 %)de la diffusion.

---

*Ou ce qui équivaut à une troncature, si les distributions ne doivent pas être prolongées vers les petites tailles par des lois de Junge mais plutôt par des lois log normales ou exponentielles (cf. § 3.2.5, 2e partie).

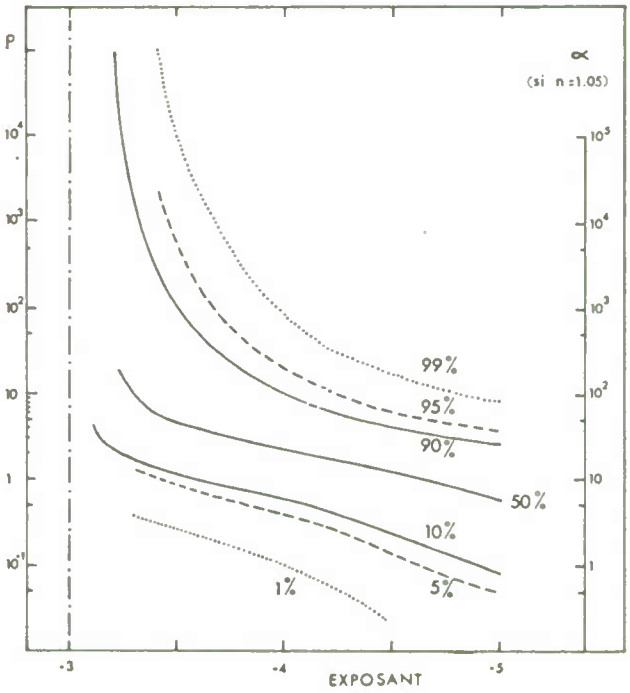


Figure III.8 : En fonction de l'exposant, valeurs du paramètre ρ qui correspondent à un pourcentage donné de la diffusion totale. Cette dernière est calculée pour une population non limitée et a donc sa valeur maximale possible. L'échelle pour le paramètre α correspond à la valeur 1,05 de l'indice de réfraction.

Table IV : Valeurs de ρ* correspondant à 10 %, 50 %, 90 % de la diffusion totale.

Exposants	-3,4	-3,6	-3,8	-4,0	-4,2	-4,5	GL.**	EX.
10 %	1,42	1,04	0,78	0,60	0,42	0,22	1,20	1,79
50 %	5,60	3,80	3,01	2,46	2,10	1,22	2,70	3,20
90 %	317	48	19	10,2	6,6	4,3	5,50	8,1

* si n = 1,05 et λ = 419 nm, le diamètre (en μm) est numériquement égal à ρ .
** les deux dernières colonnes correspondent respectivement aux valeurs de ρ dans le cas de distribution gausso-logarithmique et exponentielle dont les équations ont été données dans la seconde partie (légende de la figure II.16). Ces distributions sont à rapprocher de la distribution selon la loi puissance avec la valeur -4 de l'exposant.

De la même figure III.8, on peut tirer d'autres conséquences. Ainsi par exemple, le fait que les petites particules ne soient pas accessibles à l'expérience et en particulier à la numération, ne rend pas impossible le calcul de la diffusion puisque une limite supérieure de l'erreur peut être donnée. Dans le même ordre d'idées, s'il s'avère que la loi puissance ne se prolonge pas vers les très petites tailles et que n'existent pas, ce qui est sûr, des particules toujours plus petites et plus nombreuses, l'abandon de cette hypothèse n'affecte que fort peu le résultat ; la position de la courbe relative à 1 % fixe l'ordre de grandeur de cet effet. Les résultats obtenus avec les autres lois de distribution confirment ce point.

D'autre part, le coefficient total de diffusion qui intervient dans le phénomène de pénétration de la lumière dans la mer, c'est à dire dans un milieu infini, est probablement supérieur à celui qu'on peut mesurer avec un appareil où le volume diffusant est limité. Dans ce cas les grosses particules qui provoquent un signal intense et erratique ne sont pas intégrées dans la mesure. Cependant il est raisonnable de penser que le changement d'échelle correspond à un accroisement du coefficient de quelques pour cent seulement.

3.1.2 - Cas des coefficients angulaires de diffusion.

On peut généraliser ce qui précède et envisager non plus le cas de la diffusion totale mais celui de la diffusion angulaire. La notion de classe de particules prépondérantes subsiste, mais les limites, ou la valeur médiane de cette classe, vont varier selon l'angle considéré. Les valeurs progressives des intégrales donnant les coefficients angulaires (2e partie, figure II.12) permettent de déterminer la valeur du paramètre α pour laquelle le coefficient de diffusion a atteint une fraction donnée de sa valeur finale (considérée comme asymptotique). On voit immédiatement qu'en ce qui concerne les grands angles (θ de 90° à 180°), la plus grande part de la diffusion est due aux petites particules puisque le palier asymptotique est très tôt atteint ; à l'opposé, la classe efficace sera déplacée vers des tailles plus élevées en ce qui concerne la diffusion aux petits angles. On peut donc dire que chaque partie de l'indicatrice est le reflet préférentiel d'une classe donnée de particules, les angles les plus petits correspondant aux particules les plus grosses. La même figure II.12 permet de prévoir que ces classes recouvrent un intervalle de taille d'autant plus large que la pente initiale des courbes est plus faible c'est à dire que l'exposant est plus élevé (en valeur absolue). Cet élargissement de la classe se fait par abaissement de la limite inférieure et déplacement vers les petites tailles.

Il est commode pour situer cette classe dans l'échelle des tailles d'utiliser comme précédemment, la taille médiane (c'est la valeur α pour laquelle le coefficient angulaire considéré atteint 50 % de sa valeur finale). La figure III.9, valable pour l'indice de réfraction 1,05, montre les variations avec l'ex-

posant de cette taille médiane, ceci pour diverses valeurs de l'angle de diffusion θ. La taille médiane varie approximativement dans un rapport 30 lorsque l'angle de diffusion θ passe de 140° à 2° ; la valeur de ce rapport est assez peu affectée par la valeur de l'exposant, au moins s'il est inférieur à -3,70. La taille médiane correspond à un diamètre de 0,1 µm (si λ= 419 nm) pour la diffusion aux grands angles, 90° ou 140°, tandis que la classe de particules centrée sur 3 ou 4 µm constitue la classe prépondérante s'il s'agit de la diffusion à 2°.

En fixant maintenant la valeur de l'exposant, on peut, pour chaque angle préciser la classe "efficace" mieux que par son point médian. Pour cela on conviendra, par exemple, de limiter cette classe par les valeurs de α pour lesquelles le coefficient angulaire considéré atteint respectivement 10 % et 90 % de sa valeur finale. Ceci est illustré schématiquement par la figure III.10 (l'échelle des diamètres est déduite de l'échelle des α en posant λ = 419 nm).

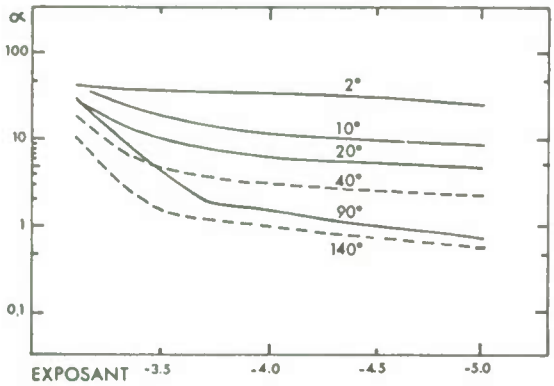


Figure III.9 : En fonction de l'exposant et pour les angles de diffusion indiqués, valeurs de α correspondant à la taille médiane (taille pour laquelle le coefficient angulaire considéré atteint 50 % de la valeur finale, lorsque α = 200). La valeur de l'indice de réfraction est 1,05.

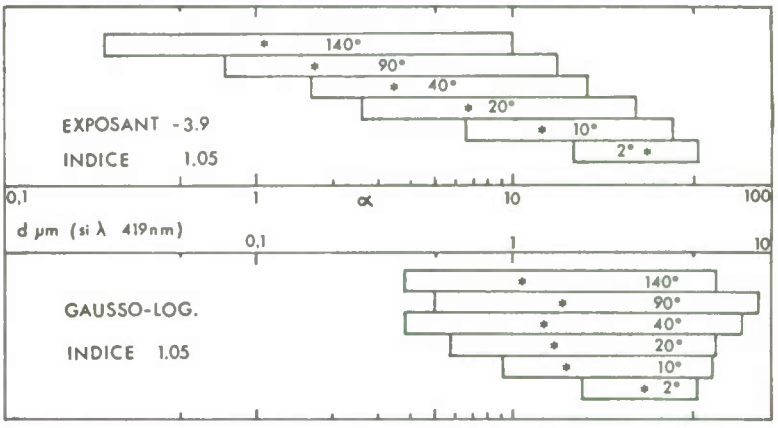


Figure III.10 : Les extrémités des rectangles correspondent aux valeurs de α pour lesquelles le coefficient angulaire de diffusion considéré a atteint 10 ou 90 % de sa valeur finale (soit 100 %, lorsque α = 200). La taille médiane est figurée par l'astérisque. La partie supérieure correspond au calcul avec la loi puissance en -3,9, la partie inférieure au calcul avec la loi gausso-logarithmique dont l'équation a été donnée (2e partie, figure II.16).

En ce qui concerne la distribution selon la loi puissance (exposant -3,90 pour cet exemple), le déplacement de la classe efficace vers les petites tailles, ainsi que son élargissement, se font progressivement lorsque l'angle θ croît. On constate que ce sont les particules de diamètre inférieur à 1 µm qui provoquent la quasi totalité de la diffusion à 140° ou 90°, c'est à dire des particules qui, pour le noter, sont assez peu accessibles à l'expérience. Au contraire le rôle prépondérant est joué par les particules de 2 à 5 µm dans le cas de la diffusion à 2°. Si l'on considère une autre longueur d'onde ces valeurs doivent être modifiées proportionnellement, car les classes sont définies par rapport à α ; ainsi les valeurs précédentes du diamètre doivent être doublées si la longueur d'onde est elle même doublée (838 nm). Cette question directement liée au problème de la sélectivité de la diffusion sera reprise en détail plus loin (§ 3.2). Le résultat est assez différent avec la distribution gausso logarithmique envisagée. L'effet préférentiel est moins marqué que dans le cas de la distribution de Junge. Ceci se conçoit puisque par rapport à cette dernière, la première distribution tronque en quelque sorte la population à la fois pour les petites et les grandes tailles et, de ce fait, privilégie le rôle des particules intermédiaires dans la diffusion ; c'est une conséquence de ce qui avait été remarqué antérieurement (2e partie, § 3.2.5).

3.1.3 - Cas particulier de l'angle 0°.

Dans ce qui précède, il n'a pas été question de la diffusion à 0° et plus généralement de la diffusion aux très petits angles. En effet lorsque le calcul est effectué pour une population dont l'exposant, en valeur absolue, est inférieur à 5, l'intégrale donnant la valeur du coefficient de diffusion à 0° ne converge pas (cf. 2e partie, § 3.2.1). Cette absence de valeur asymptotique rend arbitraire la définition d'une classe efficace pour cet angle ; plus exactement et par continuité, cette classe correspondra toujours aux particules les plus grosses, c'est à dire aux dernières prises en compte dans l'intégrale. Cependant quelques enseignements peuvent quand même être tirés de la théorie. Sur les figures telles que II.12, où sont portées les valeurs progressives des intégrales : $\int i_T(\theta,\alpha)\, F(\alpha)\, d\alpha$,
la courbe relative à 0° continue de croître avec la pente 5 - m, tandis que la courbe relative à 2° amorce au contraire un palier pour une valeur α_2 du paramètre α, valeur variable selon l'indice *, et de l'ordre de 40 si par exemple l'indice est pris égal à 1,05. On peut donc immédiatement déduire ce que doit être la taille α_o des plus grosses particules présentes, pour que le rapport i(0°) / i(2°) ait une valeur donnée k ; on a en effet : $(\alpha_o / \alpha_2)^{5-m} \simeq i(0°) / i(2°) \simeq k$

On peut tenter, au moins approximativement, d'appliquer cette relation aux mesures de T.J. Petzold (1971). Les résultats de cet auteur concernent non pas l'angle 0° mais 0,1°. Le rapport entre i(0,1°) et i(2°) est de l'ordre de 10^2, on aura donc, en supposant du même ordre le rapport k, (et en adoptant pour l'indice de réfraction la valeur 1,05) : $(\alpha_o / 40)^{5-m} = 10^2$, ce qui conduit à : $\alpha_o = 4000$, si m = 4 ou $\alpha_o = 862$, si m = 3,5. Cette estimation, pour approximative qu'elle soit, montre néanmoins qu'il faudrait repousser la limite supérieure de l'intégrale bien au delà de α = 200, pour pouvoir rendre compte des résultats expérimentaux aux très petits angles.**

---

* Comme on l'a vu précédemment, cette valeur de α doit être telle que le paramètre ρ=2α(n-1) soit égal à 4,1 (2e partie, § 2.2.4 et 2.2.7).

** Sauf peut être pour les problèmes liés à la transmission d'images, cette possibilité de prévision rend assez inutile la prolongation du calcul pour α>200, très long, même avec un ordinateur rapide.

Ceci conduit aussi à souligner le caractère relatif ou mal défini de l'indicatrice dans ce domaine angulaire particulier, car la forme dépend probalement de l'échelle spatiale considérée. Ainsi l'indicatrice à faire intervenir dans les calculs de transmission à longue distance, ou bien l'indicatrice qu'on peut déduire de la fonction de transfert de modulation spatiale (W.H. Wells, 1970) pourraient présenter un lobe plus "pointu" que ne le fait l'indicatrice déterminée avec un dispositif expérimental utilisant un trajet optique plus court. De simples considérations géométriques montrent que cette conclusion n'est pas contradictoire avec le fait que le coefficient total de diffusion n'augmente guère lorsque le volume diffusant considéré s'accroît (cf. § 3.1.1). En effet, lorsque par suite du changement d'échelle, les grosses particules interviennent, ce lobe avant, de plus en plus pointu, devient aussi de plus en plus étroit. On peut concevoir par continuité que dans ce cas à la diffusion par les particules, s'ajoute celle due aux hétérogénéités d'indice, à l'échelle macroscopique cette fois, tout comme les fluctuations qui les provoquent.

3.2 - DEPENDANCE SPECTRALE DE LA DIFFUSION

Pour une population de particules distribuée selon une loi du type créneau, ou, ce qui revient pratiquement au même, distribuée selon des lois normale ou log normale (cf. 2e partie, § 3.2.5), le calcul de la sélectivité spectrale de la diffusion ne présente pas de difficulté théorique, puisqu'il n'y a pas de problème de limites. Pour une distribution établie par rapport à la taille vraie (diamètre), la modification de la longueur d'onde entraine une modification inversement proportionnelle de la taille relative α - et également du paramètre $\rho = 2\alpha\ (n-1)$ -. Ce changement affecte à la fois la quantité à intégrer et les limites d'intégration dans les expressions donnant le coefficient d'efficacité moyen $\bar{Q}$ ou le coefficient angulaire de diffusion (respectivement équations 3.2 et 3.3, 2e partie). Que le calcul de $\bar{Q}$ soit effectué avec le paramètre α, ou avec le paramètre ρ pour faire intervenir l'expression approchée de Van de Hulst (2.29), il est nécessaire de toute façon d'attribuer une valeur à l'indice de réfraction.

Pour une population assez peu polydispersée, la sélectivité pour la diffusion (totale) est simple à prévoir. Elle dépend de la taille sur laquelle est centrée la distribution et, conjointement, de la valeur adoptée pour l'indice ; c'est à dire qu'il faut raisonner vis à vis du paramètre ρ et de la valeur que prend ce paramètre pour la taille moyenne. En se reportant aux figures II.10 et II.11 de la 2e partie, on voit que si la taille moyenne est telle que le changement de longueur d'onde λ conserve à ρ des valeurs toujours inférieures à 4, la diffusion sera sélective avec un exposant négatif, c'est à dire en λ^{-x}. Si dans ses variation avec λ, ρ demeure très petit, x sera égal ou voisin de 4 ; si ρ reste compris entre 0,1 et 2, x sera de l'ordre de 2, puis il deviendra inférieur à 2 et tendra vers 0 quand ρ s'approchera de 4. Si, enfin en raison du changement de longueur d'onde, ρ varie entre 4 et 7, la sélectivité s'inversera, c'est à dire s'exprimera par une loi en λ^{+x}. Tout ceci se déduit immédiatement des ondulations de la courbe $Q\ (\rho)$. Pour finir, si ρ demeure toujours élevé la sélectivité sera pratiquement nulle. Si la population n'est plus faiblement polydispersée (par exemple si, étant distribuée selon une loi log normale, l'écart type géométrique est assez grand) les sélectivités précédentes peuvent subsister mais par effet de moyenne seront d'autant plus atténuées que la distribution sera plus polydispersée.

Des applications de ces principes ont été recherchées en optique océanographique, en particulier par W.V. Burt (1955,1956). L'idée directrice de l'interprétation cherchée consiste d'abord à supposer que la distribution est gausso logarithmique, et ensuite à centrer le maximum de cette distribution dans la zone où précisément ρ est inférieur à 4, ceci afin d'obtenir une sélectivité conforme à celle trouvée expérimentalement ; pour ce faire, l'indice a dû être fixé. L'inconvénient de cette approche est de fournir un résultat qui, d'une part, présuppose l'existence d'un maximum de la distribution et qui d'autre part, fait dépendre la position de ce maximum de la valeur attribuée à l'indice. Ainsi Burt conclut à des maxima du nombre de particules pour des diamètres allant de 0,6 à 1,2 µm, qui par exemple, seraient dix fois plus petits si l'indice avait été pris égal à 1,015 au lieu de 1,15. Si l'on s'abstient de faire des hypothèses au sujet des limites de la distribution et de l'existence d'un maximum, le problème se pose de savoir si la théorie demeure faisable et si une quelconque sélectivité reste plausible. Egalement, avec ces nouvelles conditions, l'influence du choix de l'indice doit être examinée.

3.2.1 - Cas général : sélectivité dans le cas d'une distribution de Junge non limitée.

Cette distribution, en α^{-m}, est supposée s'étendre à toutes les particules depuis la taille nulle jusqu'à la taille infinie *; l'indice de réfraction, sans être précisé, doit demeurer constant dans l'intervalle de longueur d'onde considéré, afin que pour une classe donnée de particules la variation des paramètres ρ ne soit due qu'à la variation de λ. On peut faire le raisonnement suivant : la population restant inchangée, si la longueur d'onde est modifiée, λ devenant λ', avec $\lambda' = k\lambda$ ($k > 1$ par exemple), ce sont les particules de dimensions k fois plus grandes que précédemment qui joueront le même rôle vis à vis de la diffusion. Plus précisément existait une classe de particules de diamètre d, dans un intervalle Δd pour lesquelles Q avait une certaine valeur ; lorsque la longueur d'onde est modifiée cette même valeur de Q est attribuable à la classe de particules de diamètre kd dans un intervalle $k\Delta d$. Selon la loi de distribution, le nombre de particules de dimension kd est plus faible que celui des particules de dimension d dans le rapport k^{-m}, mais la classe est elle même élargie dans le rapport k ; finalement le nombre de particules de la classe "kd" est k^{1-m} fois celui de la classe correspondante "d". Ces particules présentent une section géométrique k^2 fois supérieure, donc la surface totale présentée par la classe "kd" de largeur $k\Delta d$ est donc k^{3-m} fois celle de la classe jouant initialement le même rôle. Or Q est inchangé ; donc la diffusion, produit de la surface par le coefficient d'efficacité, est elle même multipliée par k^{3-m}. Le raisonnement s'appliquant à toutes les classes, et puisque toutes les classes existent, la sélectivité de la diffusion pour l'ensemble de la population, suit en conséquence, une loi en λ^{3-m}**.

---

*Le nombre de particules est évidemment infini ce qui n'empêche pas que la diffusion puisse être finie, sous certaines conditions comme on l'a vu précédemment (2e partie, § 3.2).

**On peut retrouver aisément ce résultat par le calcul en partant de l'expression donnant le coefficient d'efficacité moyen $\bar{Q}$ (2e partie, équation 3.2) et en prenant o et ∞ comme limites. Il suffit d'expliciter en fonction cette fois de d, n et λ, au lieu de ρ, puis de substituer $k\lambda$ à λ. Le dénominateur (aire totale) reste inchangé, le facteur moyen $\bar{Q}$ est multiplié par k^{3-m} lorsque la distribution est exprimée par $F(d) = C^{ste} \cdot d^{-m}$.

Ce résultat très simple peut paraître correspondre à un cas idéal et de ce fait ne pas être susceptible d'application. La notion de classe "prépondérante" vis à vis de la diffusion développée précédemment (§ 3.1.1) permet de préciser les possibilités d'application, en montrant l'influence des hypothèses relatives à l'indice et aux limites. On peut dès maintenant souligner le fait que la sélectivité n'est pas uniquement une propriété des suspensions faiblement polydispersées.

3.2.2 - Modification dans le cas de distribution non illimitée.

La loi en λ^{3-m} s'applique à l'intégrale $\int_0^\infty F(\rho)\, Q(\rho)\, \rho^2\, d\rho$. Si les limites ne sont plus o et ∞ mais ρ_m et ρ_M, la même loi continue de s'appliquer mais un autre effet s'ajoute. En effet la valeur de l'intégrale est elle même modifiée puisque le changement de longueur d'onde entraine un changement des limites, liées aux diamètres d_m et d_M et non à ρ ; si λ devient $k\lambda$, ρ_m et ρ_M deviennent ρ_m/k et ρ_M/k. Il est possible de prévoir ce qu'il s'ensuit, en se reportant à la figure II.8, figure qui mettait en évidence les classes appelées "efficaces".

Pour prendre un premier exemple, supposons une population de particules s'étendant entre des tailles donnant à ρ les valeurs o et ρ_M, et supposons que pour une longueur d'onde λ donnée, ρ_M soit tel que la diffusion atteigne 95 % de sa valeur maximale possible (calculée quand ρ_M tend vers l'infini). Si la longueur d'onde est doublée, ρ_M étant divisé par deux, l'intégrale aura une valeur plus faible, correspondant à 90 % par exemple. En conséquence l'effet sélectif en λ^{3-m} sera légèrement modifié (si l'exposant 3-m est négatif, la modification est dans le sens du renforcement de la sélectivité).L'exemple opposé d'une population pour laquelle ρ varie de ρ_m à l'infini, montre que le même changement de longueur d'onde accroît la valeur de l'intégrale ; la sélectivité sera diminuée, de façon plus ou moins sensible selon la valeur initiale de ρ_m (diminuée, toujours dans le cas où 3-m est supposé négatif).

D'une façon générale, on conçoit que si la population de particules englobe largement les classes efficaces, la loi de sélectivité reste inchangée, sinon elle peut être plus ou moins affectée. Elle le sera par exemple, même si la gamme de taille est étendue, dans les deux cas suivants : ou bien si l'on suppose l'indice relatif très proche de 1 (ce qui conduit à de faibles valeurs pour ρ), ou bien si l'exposant de la distribution, ainsi que le montre la figure II.8, s'approche de la valeur -3 (car alors la notion des classes efficaces tend à disparaître). Pratiquement, et en suivant les conclusions relatives aux valeurs plausibles d'indice et d'exposant (§ 2.4), soit, par exemple, 1,05 et -4 respectivement, les classes prépondérantes, responsables de 98 % de la diffusion (de 1 % à 99 %) correspondent à des diamètres allant de 0,1 à 100 µm (pour λ = 419 nm). Dans ces conditions, probablement proches de la réalité, le changement de longueur d'onde, à quelques pour-cent près, conservera la valeur de l'intégrale et donc la loi de sélectivité qui sera approximativement exprimée par λ^{-1}. Des exemples numériques seront données ultérieurement (§ 3.4).

3.2.3 - Forme de l'indicatrice et longueur d'onde.

Cette discussion rejoint en pratique celle qui a été faite dans la 2e partie (§ 3.2.1 et 3.2.2) et qui concernait l'influence des limites sur le résultat du calcul d'indicatrice. Lorsque les conditions de convergence sont respectées et pourvu que la gamme de tailles soit suffisamment étendue la forme de l'indicatrice résultante, comme on l'a vu, n'est pas notablement influencée par les valeurs attribuées aux limites. Le changement de longueur d'onde qui entraine un changement de limites n'aura donc pas d'effet sensible, sauf encore pour la diffusion au voisinage immédiat de 0° (si m < 5). A cet égard la figure III.2 peut être considérée comme représentant la variation d'indicatrice pour une variation de longueur d'onde dans un rapport 4 (en toute rigueur, lorsque α_M passe de 200 à 50, α_m devrait devenir 0,05 et non conserver sa valeur 0,2 mais ceci n'aurait aucune influence sur le résultat - cf. 3.2.2, 2e partie -). Si effectivement la distribution de Junge n'a pas à être prolongée du côté des petites tailles et doit être tronquée, un effet prévisible serait l'accentuation de la dissymétrie de l'indicatrice lorsque la longueur d'onde diminue ; les valeurs numériques indiquées précédemment* permettraient de le chiffrer.

3.3 - POLARISATION **

Le problème de la polarisation a été jusqu'ici laissé de côté ; il a seulement été évoqué lorsque l'indicatrice expérimentale a été comparée aux indicatrices théoriques. En commentaire aux résultats auxquels conduit le calcul théorique on peut d'abord faire les remarques suivantes qui concernent à la fois les propriétés des indicatrices individuelles et celles des indicatrices pour les systèmes polydispersés :

a) les calculs faits pour les cas individuels on fait apparaître des oscillations pour les deux composantes polarisées $i_1(\theta)$ et $i_2(\theta)$ plus importantes encore que pour l'intensité totale $i_T(\theta)$ où, par effet de moyenne, elles sont quelque peu atténuées(cf. les exemples présentés dans l'annexe 2). La polarisation peut de plus être inversée, lorsque i_2 (composante "horizontale" ou "parallèle") est supérieure à i_1 (composante "verticale" ou "perpendiculaire") ; le taux de polarisation qui s'écrit (cf. 2e partie, § 1.2) :

$$p(\theta) = \frac{i_1(\theta) - i_2(\theta)}{i_1(\theta) + i_2(\theta)}$$, devient alors négatif.

b) l'intégration qui permet de traiter le cas d'un système polydispersé de particules provoque un lissage. Les valeurs normalisées concernant la polarisation $\overline{\beta}_1(\theta)$ et $\overline{\beta}_2(\theta)$ (cf. équation 3.3, 2e partie) ne présentent guère plus d'irrégularité que la quantité $\overline{\beta}(\theta)$ elle même ; celles qui subsistent sont probablement dues au fait que dans l'addition pondérée qui pratiquement remplace l'intégration, le nombre de termes n'est pas encore suffisant.

---

*cf. 2e partie, § 3.2.2, "cas où la troncature intervient pour des tailles hors du domaine de Rayleigh".

** Comme eela a été annoncé dans la seconde partie, cette question n'est pas envisagée sous son aspect le plus général puisque dans les calculs préliminaires par la théorie de Mie, ont seulement été calculées les composantes i_1 et i_2 mais non i_3 et i_4. En conséquence peut être étudiée la polarisation de la lumière diffusée dans le cas où la lumière incidente est naturelle, mais non dans le cas où la lumière incidente est elle même polarisée (rectilignement, circulairement,...).

c) pour les indicatrices individuelles, la polarisation tend d'une façon générale, à diminuer pour les petits et pour les grands angles, et elle s'annule théoriquement à 0° et 180°. Elle est maximale à 90° dans le cas des petites particules, c'est à dire pour celles qui appartiennent au domaine de Rayleigh et de Rayleigh Gans. L'intégration étendue à l'ensemble de la population ne fait pas disparaître ces traits généraux. On peut remarquer que la polarisation est, toutes choses égales par ailleurs (exposant, limites), d'autant plus forte que l'indice est plus proche de 1* ; c'est ce que dénote l'écart entre $\overline{\beta}_1(\theta)$ et $\overline{\beta}_2(\theta)$, en particulier au voisinage de $\theta = 90°$. Comme le montrent les figures III.2 et III.7, le minimum de $\overline{\beta}_2(\theta)$ très accentué est centré sur 90° pour l'indice 1,02, mais pour les indices plus élevés, il est plus plat et situé à des angles un peu supérieurs à 90°. La figure III.11 met en évidence cet effet.

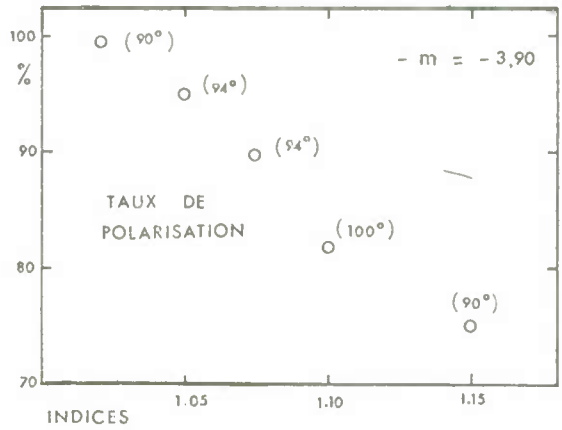


Figure III.11 : Valeurs théoriques du taux maximum de polarisation en fonction de l'indice de réfraction, la distribution de la population ainsi que les limites étant inchangées (exposant -3,9, limites $\alpha_m = 0,2$ et $\alpha_M = 200$). Entre parenthèses figurent les valeurs de l'angle θ pour lesquelles apparaît le maximum de polarisation.

3.3.1 - Influence des limites et interprétation.

La figure III.2 illustre l'effet de la limite supérieure : lorsque la limite supérieure α_M est portée de 50 à 200, l'indicatrice pour la lumière naturelle $\overline{\beta}(\theta)$ est peu modifiée, il en va de même de la composante verticale $\beta_1(\theta)$, par contre la polarisation maximale (et même la polarisation aux autres angles) décroît, car le minimum de la composante horizontale $\beta_2(\theta)$ est moins accentué.

La figure III.12 montre l'exemple opposé de l'influence de la limite inférieure α_m. Lorsque sa valeur passe de 1,2 à 10, $\overline{\beta}(\theta)$ est cette fois, et comme on l'a déjà vu, diminué sauf pour les petits angles, il en est de même de la composante $\overline{\beta}_1(\theta)$; par contre le minimum de l'indicatrice pour la composante $\beta_2(\theta)$ demeure inchangé.

En résumé, et pour prendre le cas typique de $\theta = 90°$, le taux de polarisation est dans le premier cas diminué par augmentation de $\overline{\beta}_2(90°)$ tandis que dans le second cas c'est le résultat de la diminution de $\overline{\beta}_1(90°)$.

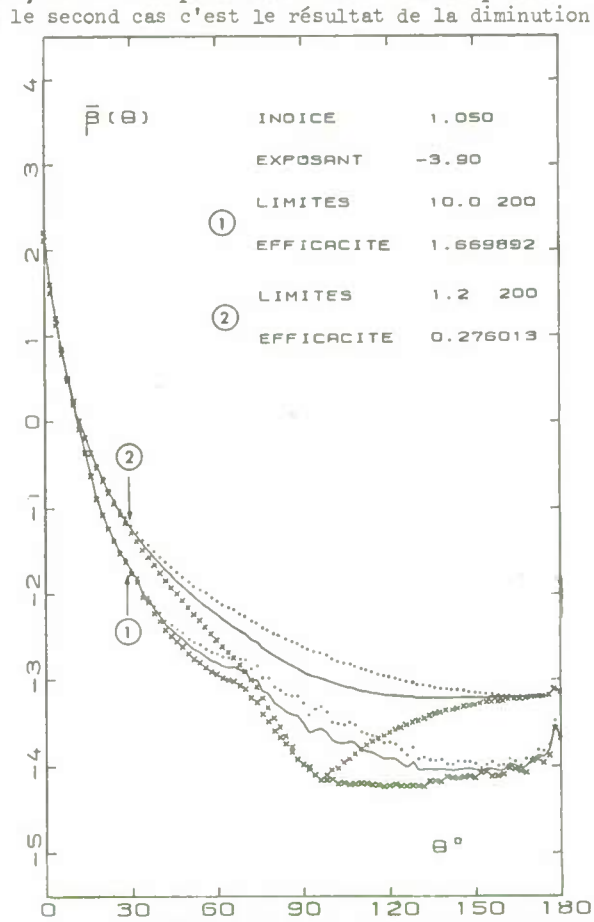


Figure III.12 : Indicatrices théoriques calculées avec les valeurs indiquées, et tracées avec les mêmes échelles et symboles que précédemment - points pour $\overline{\beta}_1(\theta)$ et croix pour $\overline{\beta}_2(\theta)$ -. Les deux cas montrés ici sont à rapprocher de celui présenté antérieurement (figure III.7) où la limite inférieure était $\alpha_m = 0,2$, indice et exposant étant les mêmes par ailleurs.

*Ce qui s'explique puisqu'alors le domaine de Rayleigh Gans s'étend jusqu'à des tailles relatives α qui peuvent être d'autant plus grandes sans que la condition $\alpha<1$ cesse d'être respectée (2e partie, §2.2.3).

L'interprétation de ces effets se fonde sur des raisonnements analogues à ceux faits pour l'intensité totale i_T (on se bornera à l'examen de la polarisation à 90°). Le graphe des fonctions $i_1(90°)\alpha^{-4}$ et $i_2(90°)\alpha^{-4}$ met en évidence le comportement différent de ces deux quantité (figure III.13). La décroissance de $i_1(90°)\alpha^{-4}$, sur laquelle se décalque *grosso modo* celle de $i_T(90°)\alpha^{-4}$ s'effectue donc selon une pente voisine de -2,3, pour cette valeur 1,05 de l'indice de réfraction. Pour la composante horizontale la quantité correspondante décroît plus lentement, avec une pente de l'ordre de -1 qui tend même à s'annuler pour les valeurs élevées de α, de l'ordre et supérieures à 100. Lorsqu' est effectué le calcul pour l'ensemble de la population, les deux intégrales ne convergeront pas simultanément (équation 3.3 et § 3.2. 1, 2e partie). La convergence sera plus lente pour la composante horizontale (indice 2) que pour la composante verticale (indice 1) ; elle peut même ne pas avoir lieu puisque la condition : $5 + p - m < 0$ (condition 3.4, 2e partie), peut ne pas être respectée dans le premier cas (où $p \simeq -1$ ou 0) tout en l'étant dans le second ($p \simeq -2,3$). C'est approximativement le cas qu'illustre la figure III.14 (où $m = 3,9$); la courbe figurant la valeur progressive de l'intégrale continue de croître lorsqu'il s'agit de la composante horizontale; au contraire,la courbe relative à la composante verticale présente un palier asymptotique.

3.3.2 - Conséquences - seconde remarque sur la valeur des limites.

En application de ce qui précède, $\overline{\beta}_1(90°)$, comme $\overline{\beta}(90°)$, ne peut pratiquement être influencé que par le changement de la limite inférieure α_m , alors que $\overline{\beta}_2(90°)$ dont la valeur est déterminée par la limite supérieure α_M* n'est pas affecté par ce changement. C'est le cas que présentait la figure III.12. Au contraire (cas de la figure III.2) la modification de la limite supérieure α_M ne touche que la composante $\overline{\beta}_2(90°)$, à l'exclusion de $\overline{\beta}_1(90°)$ et conséquemment de $\overline{\beta}(90°)$; lorsque α_M croît, $\beta_2(90°)$ continue de croître et la polarisation diminue. En résumé, les influences de chacune des deux limites s'exercent sélectivement sur l'une ou l'autre des deux composantes polarisées.

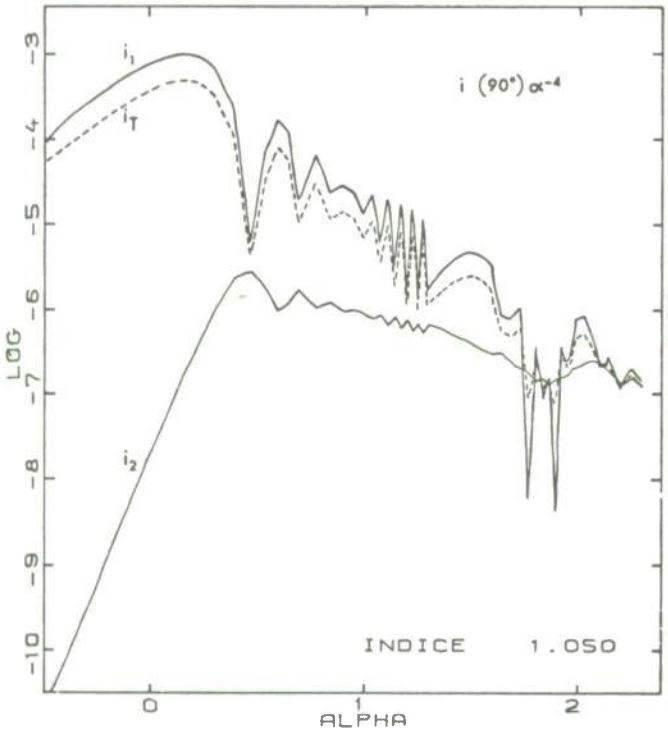


Figure III.13 : En fonction de la taille relative α, variations des fonctions : $i_1(90°)\alpha^{-4}$, $i_2(90°)\alpha^{-4}$ et $i_T(90°)\alpha^{-4}$ avec $i_T = (1/2)\ (i_1+i_2)$. Les échelles sont logarithmiques. Cette figure est à rapprocher de celles présentées dans la seconde partie (figures II.3 à II.5) ou de la figure analogue relative à l'indice 1,05 (A. Morel, 1972).

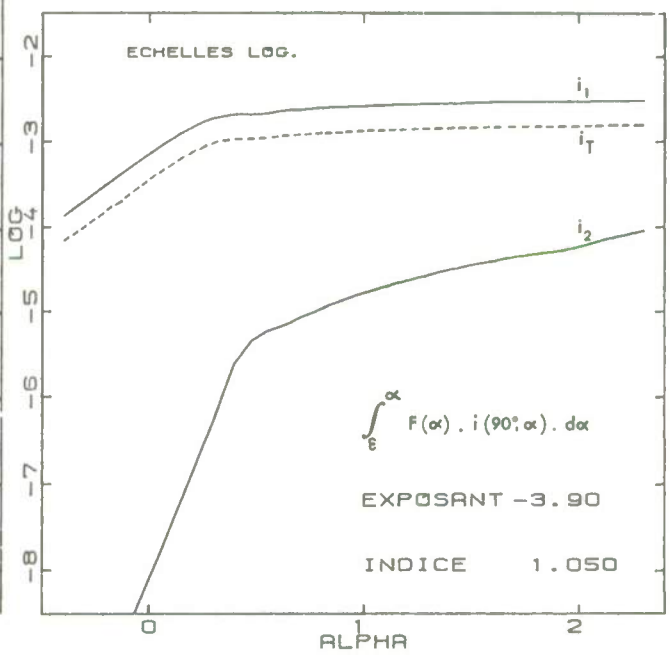


Figure III.14 : Figure analogue aux figures II.12 de la seconde partie, mais relative à l'angle $\theta = 90°$ seulement. En plus de la courbe montrant la valeur progressive de l'intégrale pour l'intensité totale (en tireté), sont tracées les courbes relatives aux deux composantes polarisées.

On constate qu'il y a, et pour les mêmes raisons, analogie entre le cas de la diffusion à l'avant et le cas de polarisation à angle droit, plus précisément analogie dans le comportement de $\overline{\beta}(0°)$ et de $\overline{\beta}_2(90°)$ (cf. 3.1.3) ; ces grandeurs en effet continuent de croître avec la limite supérieure (sauf si $m > 5$).

Lorsque l'indicatrice expérimentale a été confrontée à diverses indicatrices théoriques il avait été remarqué que l'accord pouvait être à la fois satisfaisant pour les valeurs en lumière naturelle - $\overline{\beta}(\theta)$ - et ne pas l'être pour la polarisation. Ce désaccord ne saurait constituer un argument et n'a pas à être pris en considération dans les conclusions concernant les valeurs d'exposant et d'indice (§ 2.4) ; par exemple, le cas où les valeurs d'indice et d'exposant sont respectivement 1,02 et -4,2 conduit à un taux de polarisation théorique très élevé, lequel pourrait fort bien être réduit en repoussant la limite supérieure, sans pour autant que les valeurs de $\overline{\beta}(\theta)$ soient affectées.Ainsi les valeurs indiquées demeurent plausibles en dépit du désaccord quant à la polarisation. Ces considérations ont aussi un aspect négatif, car elles montrent les limites des possibilités dans l'interprétation des résultats expérimentaux. Suppo-

* Comme précédemment, il faut supposer que la limite supérieure α_M a quand même une valeur suffisante, c'est à dire que la population n'est pas faiblement polydispersée.

ser et même calculer une limite supérieure élevée, comme on l'a fait pour rendre compte de la diffusion observée aux petits angles, est un procédé sujet à caution en ce qui concerne la polarisation. En effet le prolongement de la courbe $i_2(90°)\alpha^{-4}$ n'est pas prévisible simplement comme l'est celui de la courbe relative à 0°, les conclusions au sujet de la limite supérieure demeureraient en tout état de cause hasardées. Il faut aussi rappeler que l'assimilation des particules marines à des sphères, si elle est justifiée pour l'intensité totale, l'est moins en ce qui concerne la polarisation (cf. avant propos, 2e partie et ref. Holland et Gagne, 1970).

3.4. RELATIONS ENTRE DIFFUSION ET TENEUR EN PARTICULES

Estimer la concentration des eaux de mer en matière en suspension est à juste titre, l'une des motivations souvent invoquées à l'exécution systématique de mesures de diffusion de la lumière. Cependant aussi bien expérimentalement que théoriquement, l'établissement de relations quantitatives comporte de nombreuses incertitudes. Elles proviennent des hypothèses qu'il faut faire sur le facteur d'efficacité moyen $\overline{Q}$, l'indice, les tailles extrêmes à considérer, éventuellement la masse volumique des particules etc.. Ces difficultés ont déjà été reconnues, par exemple, et pour ne citer que ces auteurs, par Y.E. Otchakovsky (1965 b) ou par G.F. Beardsley et al. (1970). Il est utile d'examiner l'influence des hypothèses, avant d'indiquer comment et avec quelles précautions les résultats des calculs théoriques peuvent être appliqués.

3.4.1 Remarque générale sur les variations possibles du facteur d'efficacité moyen $\overline{Q}$.

Le premier problème consiste à calculer le coefficient total de diffusion, lorsque le nombre de particules, compté entre deux limites de taille, est connu, ainsi que la loi qui en régit la distribution. Le problème inverse consiste à déduire des informations sur la quantité de particules (volume, surface, nombre) à partir d'observations du coefficient de diffusion. Dans le premier cas, la diffusion due aux particules dénombrées est parfaitement calculable dès lors que l'indice est connu (ou est choisi) ; le problème reste néanmoins incomplètement résolu car la diffusion qui serait expérimentalement observée sur le même échantillon est *a priori* supérieure à celle qui est calculée, puisqu'elle fait intervenir des particules non dénombrées. Le fait qu'existent des classes "efficaces" (cf. § 3.1.1) montre que dans certains cas l'influence des limites est faible ; un ordre de grandeur de la différence entre diffusion calculable et diffusion réelle peut être estimé. La résolution du problème inverse implique des hypothèses plus nombreuses encore : à celles relatives à l'indice et aux limites s'ajoutent celles concernant la loi de distribution.

Les relations qu'on peut établir sont dépendantes de ces hypothèses. Mettre en évidence cette dépendance, revient à étudier les variations du facteur moyen d'efficacité $\overline{Q}$ avec l'indice n, l'exposant m, et les diamètres limites de la distribution d_m et d_M (ou les paramètres correspondants, α_m α_M ou ρ_m ρ_M). Pour les valeurs d'indice considérées, il est justifié d'utiliser l'expression limite de Van de Hulst pour calculer Q (2e partie, équation 2.29) et dans ce cas le facteur moyen, plus commodément défini par rapport à ρ, plutôt que par rapport à α, s'écrit :

$$\overline{Q} = \frac{\int_{\rho_m}^{\rho_M} F(\rho)\, Q(\rho)\, \rho^2\, d\rho}{\int_{\rho_m}^{\rho_M} F(\rho)\, \rho^2\, d\rho}$$

Ainsi d'un calcul unique, diverses applications peuvent être tirées, selon la valeur attribuée à l'indice. (Pour le rappeler - cf. 2e partie, § 2.2.10 - il faut évaluer Q avec les formules exactes lorsque ρ est petit, en pratique inférieure à 0,2). La figure III.15 (A. Morel, 1972 b) montre les variations de $\overline{Q}$ avec l'exposant de la distribution, les diverses courbes correspondant à différents couples de valeurs données aux limites ρ_m et ρ_M.

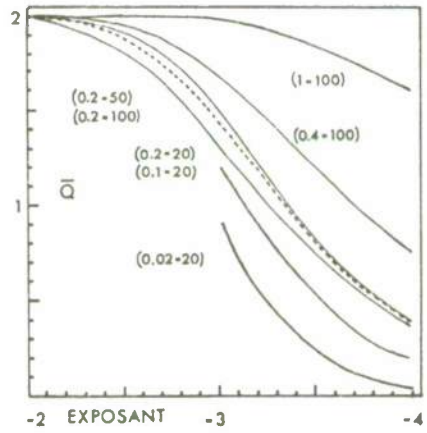


Figure III.15 : Variation du facteur moyen d'efficacité $\overline{Q}$ avec l'exposant de la distribution. Les valeurs entre parenthèses correspondent aux paramètres ρ_m et ρ_M calculées pour les limites de la distribution.

Lorsque l'exposant est égal à -2 toutes les classes de particules présentant des surfaces égales, la valeur moyenne $\overline{Q}$ est en fait la valeur moyenne de la fonction $Q(\rho)$ (cf. figure II.10, 2e partie), donc $\overline{Q}$ est voisin de 2 pourvu que la limite supérieure soit assez élevée (ρ_M = 10 ou 20 par exemple), et quelle que soit par contre la limite inférieure. $\overline{Q}$ peut être légèrement supérieur à 2 si l'intervalle ρ_m - ρ_M choisi est restreint et favorise un maximum de la courbe $Q(\rho)$. Lorsque l'exposant croît (en valeur absolue), l'importance relative croissante des petites particules entraine la diminution de $\overline{Q}$. Lorsque m atteint et dépasse 4, les particules de taille élevée et donc la limite supérieure ρ_M interviennent peu, la valeur de $\overline{Q}$ n'est pratiquement dépendante que de la valeur de la limite inférieure.

Finalement le facteur $\overline{Q}$ peut varier beaucoup avec l'exposant, avec les limites et par suite avec l'indice et la longueur d'onde, puisque en effet ces paramètres réagissent sur les valeurs des limites. Ceci montre les difficultés qui surgissent dans les applications en raison des hypothèses qu'il faut faire, alors que pourtant le problème est parfaitement résolu sur le plan mathématique.

3.4.2 - Exemples d'application.

On peut préciser concrètement ces diverses influences en prenant l'exemple d'une population de particules distribuées selon une loi puissance dans l'intervalle de taille défini par les diamètres d_m = 1µm et d_M = 20 µm. Compte tenu des valeurs attribuées à l'indice et la longueur d'onde, à ces diamètres correspondent les valeurs α_m et α_M ou ρ_m et ρ_M du tableau suivant :

Table V : Correspondance entre d, α et ρ pour deux longueurs d'onde et trois valeurs d'indice.

d (m)	α	ρ			
	si λ = 419 nm	si n =	1,03	1,05	1,10
d_m = 1	α_m = 10	ρ_m =	0,6	1,0	2,0
d_M = 20	α_M = 200	ρ_M =	12	20	40
	si λ = 546 nm	si n =	1,03	1,05	1,10
d_m = 1	α_m = 7,7	ρ_m =	0,46	0,77	1,54
M = 20	α_M = 154	ρ_M =	9,24	15,4	30,8

Par l'expression rappelée ci dessus, on peut calculer le facteur moyen $\overline{Q}$ entre les limites constituées par les divers couples de valeurs ρ_m - ρ_M et ceci pour différents exposants de la loi de distribution. On obtient les résultats de la table VI. Les pourcentages indiqués * correspondent au rapport de la diffusion due aux particules de l'intervalle 1 - 20 µm à la diffusion hypothétique d'une population non bornée. Ceci montre que dans certains cas, en particulier si on doit attribuer une valeur élevée à l'indice,la part"expliquée"de la diffusion est faible. Dans un cas favorable (λ = 546 nm, n = 1,05, m = 3,9), aux particules de diamètre inférieur à 1 µm (ρ < 0,77) correspondrait théoriquement (et au maximum) 14 % de la diffusion, à celles de diamètre supérieur à 20 µm (ρ > 15,4) 9 %, la diffusion due aux particules entre 1 et 20 m formant 77 % du total théorique. Ceci revient à dire que dans ce cas les particules considérées formant l'essentiel des classes efficaces (cf. figure III.8).

Table VI : Pour divers indices et longueurs d'onde, facteur moyen d'efficacité $\overline{Q}$ valable pour une population de particules s'étendant de 1 à 20 µm et distribuée selon des lois puissance dont l'exposant est indiqué.

λ = 419 nm	Exposants -3,6		-3,9		-4,2		-4,5	
n = 1,03	72,3	1,282	79,2	1,089	76,9	0,920	66,8	0,780
n = 1,05	73,0	1,756	74,7	1,626	67,4	1,496	54,5	1,374
n = 1,10	63,3	2,307	57,5	2,338	46,0	2,355	31,3	2,365
	%	$\overline{Q}$	%	$\overline{Q}$	%	$\overline{Q}$	%	$\overline{Q}$
λ= 546 nm								
n = 1,03	69,7	1,028	78,3	0,828	79,3	0,663	72,6	0,533
n = 1,05	72,7	1,539	77,1	1,375	71,9	1,222	60,4	1,086
n = 1,10	67,8	2,171	64,4	2,148	54,0	2,111	40,6	2,064

La figure III.16 présente pour les deux longueurs d'onde les variations du facteur moyen $\overline{Q}$ en fonction de l'indice et pour les divers exposants. La figure III.17 met en évidence le fait que la sélectivité de la diffusion dépend de l'exposant. La courbe tracée est celle qui correspond à la loi théorique applicable à une population non bornée, c'est à dire à la loi en λ^{3-m} (cf. § 3.2.1), les points figurent les rapports $\overline{Q}_{419}$ / $\overline{Q}_{546}$ caractéristiques de la sélectivité pour la population limitée * (1 - 20 µm) considérée.

Problème direct : calcul de la diffusion.

En application pratique de ce qui précède on peut prendre un exemple : supposons connu le nombre total de particules par unité de volume entre deux limites de taille correspondant aux diamètres d_m et d_M, c'est à dire le nombre :

$$N = \int_{d_m}^{d_M} F(d)\, d(d) \text{ , et supposons la distribution exprimée par } F(d) = Ad^{-m}.$$

La surface totale S des sections géométriques, ainsi que le volume total V de ces particules peuvent être calculés. Pour faciliter les applications, il est commode de rapporter ces grandeurs S et V au nombre N ;

* Les pourcentages indiqués au tableau III.6 permettent en théorie de retrouver les valeurs qui correspondraient à la population non limitée. Ainsi sont calculées les valeurs figurées par des croix qui normalement devraient se trouver sur la courbe de la figure III.17. Une légère imprécision, prévisible d'après le mode de calcul, fait surestimer les pourcentages et explique le léger désaccord.

On obtient alors :

$$\frac{S}{N} = \frac{\pi}{4}\,\frac{m-1}{m-3}\,\frac{d_M^{\,m-3} - d_m^{\,m-3}}{d_M^{\,m-1} - d_m^{\,m-1}}\,\frac{(d_m\,d_M)^{m-1}}{(d_m\,d_M)^{m-3}}$$

et

$$\frac{V}{N} = \frac{\pi}{6}\,\frac{m-1}{m-4}\,\frac{d_M^{\,m-4} - d_m^{\,m-4}}{d_M^{\,m-1} - d_m^{\,m-1}}\,\frac{(d_m\,d_M)^{m-1}}{(d_m\,d_M)^{m-4}}$$

(la première équation suppose $m > 3$, la seconde $m > 4$; si ces conditions ne sont pas satisfaites, les expressions modifiées se trouvent aisément). En remplaçant d_m et d_M par 1 et 20 µm et en adoptant $m = 4{,}2$, il vient : $S = N \times 2{,}04$ µm² et $V = N \times 5{,}77$ µm³. En choisissant une concentration qui est celle d'une eau limpide sous la couche superficielle $N = 10^{10}$ m⁻³ (soit 10 000 particules par cm³, cf. J.C. Brun Cottan, 1971, H.R. Gordon, O.B. Brown, 1972), il vient : $S = 2{,}04\ 10^{-2}$ m²/m³ et $V = 5{,}77\ 10^{-8}$ m³/m³ (remarquons que si on attribue aux particules la densité 1 cette concentration volumique correspond à 57,7 µg/litre), supposant l'indice égal à 1,05, avec les valeurs de $\bar{Q}$ du tableau précédent on calcule le coefficient total de diffusion $b = S \times \bar{Q}$, soit : $b_{419} = 3{,}05 \times 10^{-2}$ m⁻¹ $b_{546} = 2{,}49 \times 10^{-2}$ m⁻¹ .

En se reportant à la figure III.8, on voit que ces coefficients calculés pour les particules de 1 à 20 µm pourraient être inférieurs de 15 à 20 % aux coefficients expérimentaux qui, en principe, correspondent à une population plus étendue. De cette manière* et en supposant l'indice égal à 1,05, ont été calculés les coefficients de diffusion à 546 nm relatifs aux échantillons de Méditerranée dont la granulométrie avait été établie par J.C. Brun Cottan (1971) - le calcul est un peu plus complexe du fait qu'il faut en général calculer pour chaque population 2 facteurs d'efficacité l'un entre 1 et 4 µm, l'autre entre 4 et 20 µm -. Sur les mêmes prélèvements, des mesures du coefficient angulaire à 30°, β(30°), avaient été exécutées, desquelles on peut déduire b (cf. 1ère partie, §6). Ces valeurs de b sont d'ailleurs en très bon accord avec celles obtenues *in situ* grâce à l'appareil intégrateur (D. Bauer, A. Ivsnoff, 1971). Les coefficients calculés sont confrontés aux coefficients déduits de la mesure (Figure III.18). L'accord assez satisfaisant, pour les mesures de novembre 1969, l'est moins pour celles de juin 1969, en particulier pour les prélèvements effectués de 100 à 400 mètres (l'indice 1,03 conviendrait mieux pour rendre compte de ces mesures).

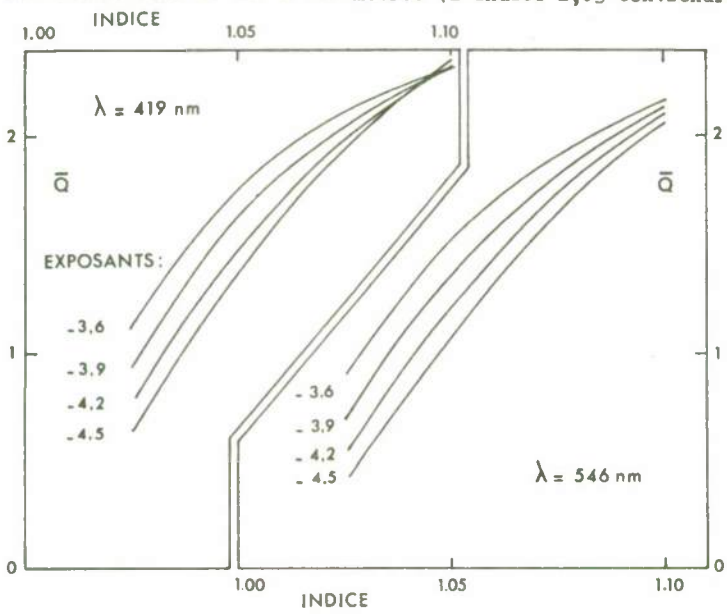


Figure III.16 : Pour les deux longueurs d'onde indiquées, variation en fonction de l'indice de réfraction du facteur d'efficacité $\bar{Q}$. $\bar{Q}$ est calculé pour une population de particules dont les limites extrêmes de taille sont 1 µm et 20 µm et dont la distribution est régie par des lois puissance dont l'exposant est indiqué.

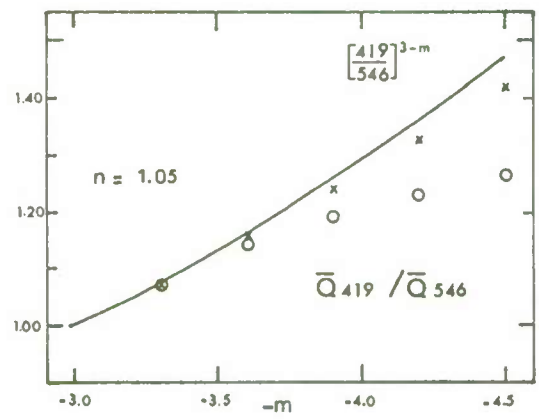


Figure III.17 : Rapport de la diffusion à 419 nm à la diffusion à 546 nm mettant en évidence la sélectivité qui varie avec l'exposant de la loi de distribution (voir texte et remarque de la page précédente).

Problème inverse : utilisation des mesures de diffusion.

Trois hypothèses sont nécessaires à sa résolution. Ainsi à titre d'exemple, en choisissant l'indice égal à 1,05, en supposant la distribution régie par une loi d'exposant -4 et des limites de taille correspondant aux diamètres 0,5 µm et 50 µm (cette limite inférieure équivaut à une troncature comme celle que provoque approximativement une filtration sur millipore HA), on peut établir les relations suivantes proposées évidemment avec toutes les réserves qu'imposent les choix précédents. Le facteur moyen d'efficacité pour $\lambda = 546$ nm est : $\bar{Q}\,(0{,}5 \rightarrow 50,\ 546) = 0{,}70$ (pour $\lambda = 419$ nm, sa valeur serait 0,92).
L'aire totale des sections géométriques a pour valeur : $S\ (m^2/m^3) = b\ (m^{-1}) \times (1 / 0{,}70)$ de l'expression donnant S/V, on tire : $N\ (m^{-3}) = 10^{12} \times 1{,}715\ S$, de l'expression donnant V/S - qui devient $V/S = 1/3$ Log 100, puisque dans ce cas particulier d'exposant -4, l'intégrale donnant V est un logarithme - on obtient $V\ (m^2/m^3) = 10^{-6} \times 1{,}535\ S$.

Si par exemple on veut comparer les résultats d'une mesure de diffusion avec ceux d'un comptage de particules effectué entre 1 et 20 µm et également ceux d'une filtration, supposée efficace entre les tailles 0,5 et 50 µm, il est intéressant de connaitre comment les grandeurs nombres, surfaces et volumes se répartissent dans les trois classes, respectivement de 0,5 à 1 µm, de 1 à 20 µm et de 20 à 50 µm. Supposons que la mesure de b à 546 nm fournisse par exemple la valeur 0,07 m⁻¹, l'aire totale des sections géométrique est donc 0,10 m²/m³ et l'on aura pour N, S et V, la répartition suivante exprimée en pourcentage du total :

---

* mais sans faire cette correction de 15 ou 20 % qui reste incertaine.

	classe 0,5 à 1µm	classe 1 à 20 µm	classe 20 à 50 µm	total 0,5 à 50µm
N (m^{-3})	87,5%	12,5%	≈ 0	$17,15.10^{10}$
S (m^2/m^3)	51%	48%	1%	0,10
V (m^3/m^3)	15,0%	65,0%	20%	154.10^{-9}

La relation entre b et V (b en m^{-1} = $0,455.10^{-6}$ V en m^3/m^3 est représentée sur la figure III.19 où sont également portés, en fonction des concentrations en poids sec de particules (10^{-9} g/g, c'est à dire en µg/litre) les coefficients de diffusion déterminés sur les même échantillons (voir également figure 6, A. Morel, 1970). Il apparait que le rapport entre poids sec et volume théorique est très inférieur à 1, ce qui en tout état de cause, s'expliquerait par une forte hydratation des particules. Vouloir préciser davantage serait illusoire, d'une part parce que la relation est établie avec des paramètres moyens (indice et exposant) et d'autre part parce que la filtration n'effectue pas une troncature franche (à d = 0,5 µm) mais au contraire progressive et peut être aussi variable. Ainsi les filtres Whatman G.F. présenteraient une efficacité de rétention diminuant de 100 % à 40 % entre les diamètres 4 µm et 0,7 µm respectivement (R.W. Sheldon, W.H. Sutcliffe Jr., 1969). Ce point ne doit pas être oublié lorsqu'il s'agit de comparer des mesures de poids sec, soit entre elles, soit avec des mesures de diffusion, surtout si l'on considère qu'une fraction importante des particules, en poids et en volume, se situe dans le domaine des petites tailles. Selon Lisitzin et Bodganov (1968), 40 à 60 % de la masse particulaire serait due aux particules de dimension inférieure à 1 µm, ce qui avec la loi d'exposant -4, en suppose la prolongation jusqu'à des diamètres de 0,02 µm ; avec cet exposant il y a équipartition logarithmique des volumes, ainsi par exemple les deux classes 0,02 - 1 µm et 1 - 50 µm, présentent le même volume total.

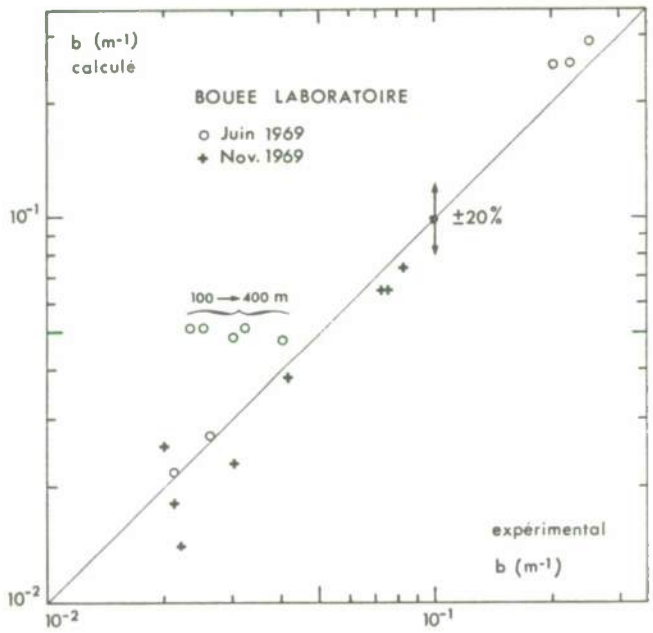
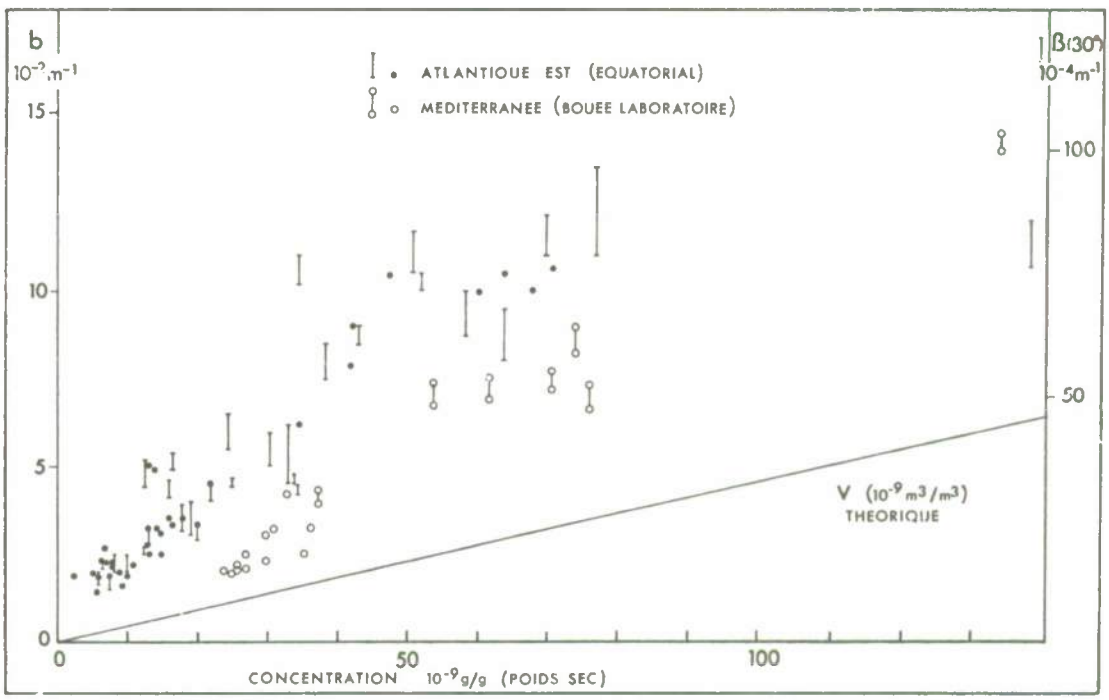


Figure III.18 : Coefficients de diffusion calculés à partir des données granulométriques, comparés aux coefficients mesurés (voir texte). Bouée laboratoire ϕ = 42°14 N G = 05°35 E .

Figure III/19 : Poids sec des particules retenues sur filtres Whatman GF (mesures effectuées par G. Copin) comparées aux coefficients de diffusion mesurés -par l'intermédiaire de β(30) - sur les mêmes prélèvements. Les mesures en Atlantique ont été effectuées durant la campagne Harmattan (1971).



CONCLUSION

Il serait illusoire pour des faits qui relèvent presque des sciences naturelles de vouloir trouver un accord total entre l'expérience et la théorie, nécessairement simplificatrice. Par contre, il est utile de disposer d'un modèle théorique assez simple pouvant cependant constituer une approximation valable à une réalité complexe. Ensuite par rapport à ce modèle, les écarts expérimentaux pourront être interprétés. Pour ce faire, il faut que l'influence des divers facteurs soient assez clairement dégagée ; ceci explique l'importance donnée à la partie qui en traite et antérieurement à celle qui traite des propriétés des indicatrices individuelles.

Cet aspect de recherche en quelquesorte prévisionnelle n'est pas toujours indispensable. Par exemple en optique atmosphérique, Deirmendjian (1969) n'a guère à l'aborder dans la mesure où les données expérimentales sur les aérosols sont plus complètes. En optique océanographique, il n'en va pas ainsi, c'est même pratiquement le problème inverse qui est posé, c'est à dire celui d'obtenir sur les particules en suspension des informations qui font défaut, ou à tout le moins, de permettre une investigation de celles ci par des moyens optiques, à coup sûr rapides, mais dont la signification doit être justifiée.

En dépit de ses limitations, le modèle rend compte d'une façon convenable de bon nombre de propriétés. La forme des indicatrices calculées est compatible avec ce que l'on sait déjà des particules ; une étude à la fois de la diffusion et de la granulométrie permettrait de mieux préciser l'indice effectif, c'est à dire un peu la nature des particules et surtout l'état sous lequel elles se trouvent. L'intensité du phénomène de diffusion et sa variation spectrale reçoivent une interprétation satisfaisante ouvrant la voie à des applications. Pour certaines d'entre elles, des mesures simultanées de tous les paramètres, granulométriques, chimiques et optiques, demeurent très souhaitables, car on pourrait ajouter en paraphrasant, c'est la théorie qui manque le moins, d'autant moins d'ailleurs qu'elle est aisément perfectible.

Ce travail est dédié à la mémoire de George F. Beardsley

mai 1973 André Morel

ANNEXE I : DEFINITIONS

Le "Committee on radiant energy in the sea" de l'Association internationale d'Océanographie physique a défini les grandeurs et fixé la terminologie pour l'optique océanographique (chronique de l'UGGI, n° 57, 1964). Une proposition de traduction en français a été faite par la suite (A. Ivanoff, A. Morel , 1970). Pour la description des propriétés diffusantes un nombre de grandeurs ont été définies.

Dans les théories de la diffusion, d'autres grandeurs sont employées. Elles ne sont pas comme précédemment définies à partir d'un volume élémentaire diffusant, mais en considérant la diffusion par une particule et l'interaction de l'onde électromagnétique avec elle. Il convient de rattacher ces grandeurs aux précédentes, purement phénoménologiques. Les définitions qui sont données correspondent au cas expérimental le plus fréquent où la lumière incidente est naturelle, la lumière diffusée étant en générale polarisée. Cependant la généralisation immédiate de ces définitions est indiquée à la fin de l'annexe. Elles correspondent au cas où l'état de polarisation de l'onde incidente est quelconque (cf. § I.I et I.2, 2e partie). Enfin il faut noter que la terminologie française ou anglaise pour ces grandeurs utilisées dans les théories n'est pas codifiée ; les appellations rapportées ici sont celles qui paraissent les plus fréquemment utilisée.

GRANDEURS DEFINIES PAR LE "COMMITTEE ON RADIANT ENERGY IN THE SEA (AIOP)"

Elles sont définies en considérant le cas d'un pinceau de lumière monochromatique délié et constitué de rayons parallèles. La perte relative de flux dF/F pour ce pinceau est proportionnelle à la longueur des parcours dx considéré comme élémentaire, le coefficient de proportionnalité étant le <u>coefficient d'atténuation c</u> (<u>attenuation coefficient</u>) :

$c = -\frac{dF}{F}\frac{1}{dx}$ *. La perte de flux a lieu par l'effet combiné de l'absorption et de la diffusion :* $c = a + b$ *, où a est le <u>coefficient d'absorption</u> et b le <u>coefficient (total) de diffusion (absorption coefficient and total scattering coefficient)</u>. On a :*

$$a = -\frac{d\,F\,(abs)}{F}\frac{1}{dx} \quad , \text{et} \qquad b = -\frac{d\,F\,(diff)}{F}\frac{1}{dx} \quad ,$$

où $d\,F\,(abs)$ *est le flux soustrait par absorption, et* $d\,F\,(diff)$ *est le flux soustrait au flux régulièrement transmis selon la direction de propagation du pinceau, et qui est en fait dispersé dans l'espace.*

De ce fait une tranche du pinceau, de longueur dx, de volume $dv = S\,dx$*, se comporte, vue d'assez loin, comme une source lumineuse ponctuelle, ayant dans une direction faisant l'angle* θ *avec la direction initiale du pinceau, une intensité* $dI\,(\theta)$*, proportionnelle au coefficient angulaire de diffusion* $\beta\,(\theta)$ *(volume scattering function) :*

$$\beta\,(\theta) = d\,i\,(\theta)\frac{1}{F}\frac{1}{dx} \quad , \text{ou} \qquad \beta\,(\theta) = d\,i(\theta)\frac{1}{E}\frac{1}{dv} \quad ,$$

E étant l'éclairement sur la face d'entrée de surface S du volume diffusant dv $(E\,dv = F\,dx)$.

Les coefficients a, b, c, homogènes à l'inverse d'une longueur, sont dans la plupart des cas en océanographie, exprimés en m^{-1}*. Le coefficient angulaire en* $m^{-1}str^{-1}$*. En intégrant sur tout l'espace le flux diffusé dans toutes les directions* θ*, on obtient la relation :*

$$b = \iint_{4\pi} \beta(\theta)\,d\,\Omega \quad , \quad \textit{devenant} \qquad b = 2\,\pi\int_0^{\pi} \beta(\theta)\,\sin\theta\;d\theta \quad ,$$

si le phénomène de diffusion est de révolution autour de l'axe du pinceau. L'intégration sur des parcours non élémentaires dans un milieu homogène (a et b constants) conduit à des décroissances exponentielles du flux par absorption ou par diffusion ou par les deux à la fois.

La représentation en fonction de θ *du coefficient angulaire de diffusion* $\beta(\theta)$ *est - en français surtout - appelée <u>indicatrice de diffusion</u>.*

AUTRES GRANDEURS UTILISEES DANS LES THEORIES.

<u>Fonctions d'intensité (intensity functions)</u> i_1 *<u>et</u>* i_2

$\dot{I}_0$ *étant l'intensité de la lumière incidente, naturelle (et monochromatique) se propageant par onde plane (pinceau de lumière parallèle),* $\dot{I}$ *celle de la lumière diffusée dans une direction* (θ, ϕ) *quelconque, à une distance D(supposée grande) de la particule, on pose :*

$$\dot{I} = \dot{I}_0\,\frac{1}{k^2D^2}\,F\,(\theta,\phi) \quad ,$$

$F\,(\theta,\phi)$ est une fonction sans dimension de la direction repérée par deux angles θ et ϕ. k est le nombre d'onde $k = 2\,\pi\,/\,\lambda$, k^2 devant être homogène à L^{-2}.

Si le phénomène est de révolution, comme dans le cas envisagé ici de particules sphériques, un seul angle intervient, θ , compté entre la direction de propagation de l'onde incidente et celle de l'onde diffusée considérée ; ces deux directions définissent le "plan de diffusion". La lumière incidente étant naturelle, la lumière diffusée est en général polarisée, on écrira :

$$\dot{I} = \dot{I}_0\,\frac{1}{k^2D^2}\cdot\frac{i_1\,(\theta) + i_2\,(\theta)}{2} \quad , \qquad \textit{où } i_1(\theta) \textit{ et } i_2(\theta) \textit{ sont les fonctions d'intensité.}$$

Ce sont des quantités sans dimensions, obtenues en prenant le carré des modules des amplitudes complexes $S_1(\theta)$ *et* $S_2\,(\theta)$*; l'indice 1 (ou quelquefois r ou bien encore ⊥) se rapporte à la vibration perpendiculaire au plan de diffusion, l'indice 2 (ou ℓ ou ∥) à la vibration dans le plan de diffusion.*

Le rapport $\frac{i_1 - i_2}{i_1 + i_2}$ *exprime le taux de la polarisation que produit la diffusion lorsque la lumière incidente est naturelle (cf. 2e partie, § I.I et I.2).*

Coefficients angulaires d'efficacité (angular Mie scattering coefficient).
Coefficient d'efficacité pour la diffusion (scattering efficiency factor).

Nombre sans dimension, exprimé en $sterad^{-1}$, défini de la façon suivante :

$$q(\theta) = \frac{i_1(\theta) + i_2(\theta)}{2} \frac{1}{k^2} \frac{1}{S}$$

, où S est l'aire de la section géométrique de la particule, c'est à dire la projection de la particule sur le plan de l'onde incidente. Si on considère le cas de la particule sphérique $S = \pi r^2$, et introduisant le paramètre de taille $\alpha = 2\pi r / \lambda$:

$$q(\theta) = \frac{1}{2\pi\alpha^2}\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$$

, qui peut être interprété comme le flux diffusé par une particule, par unité d'angle solide, dans une direction θ, rapporté au flux incident sur la section géométrique (ici πr^2). L'intégration étendue à tout l'espace :

$$\iint^{4\pi} q(\theta) d\Omega = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^{\pi}\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)\sin\theta \, d\theta = Q$$

, fournit le nombre Q, coefficient d'efficacité pour la diffusion : c'est le rapport du flux total diffusé au flux incident sur la particule.

Section efficace pour la diffusion (effective cross section) et sections efficaces "partielles" (differential cross section).

La section efficace partielle (ou angulaire) pour la direction θ est définie par :

$$s(\theta) = S\, q(\theta) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$$

, les dimensions sont L^2, l'unité $m^2\ sterad^{-1}$.

L'intégrale sur 4π fournit la section efficace s :

$$s = \frac{\lambda^2}{4\pi}\int_0^{\pi}\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)\sin\theta \, d\theta = \frac{\lambda^2}{4\pi} Q\, \alpha^2$$

, soit $s = \pi r^2 Q$, pour la sphère et plus généralement : $s = S\,Q$ où S est l'aire de la section géométrique.

Coefficient angulaire de diffusion et coefficient total de diffusion (volume scattering function, total scattering coefficient).

La somme des sections efficaces partielles, relatives à θ, de N particules contenues dans l'unité de volume, constitue le coefficient angulaire de diffusion. Dans le cas où l'on considère que les particules sont sphériques, et que de plus elles sont identiques de rayon **r**, on peut écrire :

$$\beta(\theta) = N\, s(\theta) = N\pi r^2 q(\theta) \quad , \qquad \beta(\theta) = N\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$$

N a les dimensions de L^{-3}, β a les dimensions de L^{-1}, l'unité sera $m^{-1}\ sterad^{-1}$.

C'est le rapport au flux incident, du flux diffusé dans la direction θ et par unité d'angle solide, le volume diffusant étant unitaire. L'intégrale étendue à tout l'espace conduit au coefficient total de diffusion b :

$$b = \iint^{4\pi} \beta(\theta)\, d\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}\beta(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

, ($b = N\pi r^2 Q$ pour les particules sphériques) rapport de la totalité du flux diffusé au flux incident sur un volume unitaire ; les dimensions sont L^{-1}, l'unité m^{-1}. Si les particules sphériques ne sont pas de taille uniforme, on aura :

$$\beta(\theta) = \int_0^{\infty} n(r)\,\pi r^2 q_\theta(r)\, dr \ , \quad \text{avec} \int_0^{\infty} n(r)\, dr = N \quad \text{et} \quad b = \int_0^{\infty} n(r)\,\pi r^2 Q(r)\, dr \ .$$

Fonction de phase (phase function) et coefficient angulaire normalisé.

La fonction de phase est aussi une quantité sans dimension définie par :

$$P(\theta) = 4\pi\frac{q(\theta)}{Q} = 2\frac{i_1(\theta) + i_2(\theta)}{Q\,\alpha^2}$$

. On définit également : $P_1(\theta) = \frac{4\, i_1}{Q\,\alpha^2}$ et $P_2(\theta) = \frac{4\, i_2}{Q\,\alpha^2}$

pour une particule seule : $P(\theta) = 4\pi\frac{s(\theta)}{s}$, pour un volume diffusant : $P(\theta) = 4\pi\frac{\beta(\theta)}{b}$

dans tous les cas : $\iint^{4\pi} P(\theta) \equiv 4\pi$.

Il est plus commode d'utiliser le coefficient angulaire normalisé défini par : $\overline{\beta}(\theta) = \frac{P(\theta)}{4\pi} = \frac{\beta(\theta)}{b}$,

en conséquence : $\iint^{4\pi} \overline{\beta}(\theta)\, d\Omega \equiv 1$, $\overline{\beta}_1(\theta) = \frac{i_1}{\pi Q\,\alpha^2}$ et $\overline{\beta}_2(\theta) = \frac{i_2}{\eta Q\,\alpha^2}$,

$$\overline{\beta}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\overline{\beta}_1(\theta) + \overline{\beta}_2(\theta)\right)$$

Remarque concernant la polarisation.

Toutes les formules précédentes correspondent au cas où l'onde incidente est naturelle ; le cas plus général où l'état de polarisation de l'onde incidente est quelconque a été examiné (§ I.2) 4 fonctions d'intensité sont alors utiles au lieu de 2 pour la description du phénomène de diffusion (par des sphères isotropes) :

$$i_1 = S_1 S_1^*$$

$$i_2 = S_2 S_2^*$$

$$i_3 = 1/2\ (S_1 S_2^* + S_2 S_1^*) = \mathrm{Re}\ \{S_1 S_2^*\}$$

$$i_4 = i/2\ (S_1 S_2^* - S_2 S_1^*) = -\mathrm{Im}\ \{S_1 S_2^*\} \quad .$$

Les formules liées à l'intensité et non à la phase de l'onde diffusée qui ne font intervenir que i_1 et i_2 restent inchangées : c'est le cas pour $q(\theta)$, $s(\theta)$, $\beta(\theta)$ et leur intégrale. On peut bien cependant avec les mêmes formules définir par exemple β_1, β_2, β_3 et β_4 avec $\beta = (1/2)\ (\beta_1 + \beta_2)$. De fait, certains auteurs définissent et se servent des quatre fonctions normalisées $P_1\ (\theta)\ /\ 4\ \pi \ldots P_4\ (\theta)\ /\ 4\ \pi$. Dans ce cas général le taux de polarisation a, comme il a été dit (§ I.2) une expression différente.

LISTE DES PRINCIPAUX SYMBOLES UTILISES

Figurent ici les symboles qui ne correspondent pas aux grandeurs définies ci dessus. Les paragraphes et équations (de la 2e partie) où ces symboles apparaissent pour la première fois sont indiqués entre parenthèses.

α	: *paramètre de taille des particules*	(2.2)
a_n, b_n	: *coefficients de Mie*	(2.2, 2.4)
a_{ij}	: *coefficients de la matrice de diffusion*	(1.8)
A_i , A_i^*	: *amplitudes complexes. L'astérisque marque la quantité complexe conjuguée*	(1.9, 1.11)
A_1 , A_2, B_1 ,B_2	: *paramètres dans les lois de distributions log normales ou exponentielles*	(3.11, 3.12)
d	: *diamètre*	
E_ℓ E_r	: *composantes de champ électrique* $\vec{E}$	(1.1)
ψ_n, χ_n, ζ_n	: *fonctions de Ricatti-Bessel et Ricatti Hankel*	(2.4 à 2.8)
$F\ (\theta)$	: *fonction de distribution angulaire (Rayleigh-Gans)*	(2.21)
$F'\ (\theta)$	: *fonction de distribution (diffraction)*	(2.24)
$F(d)$, $F(\alpha)$, $F(\rho)$	: *fonction de distribution des particules*	(§ 3.1, 2e partie)
$G\ (U)$	: *fonction de Gans*	(2.22)
H_n, J_n,,Y_n	: *fonction de Hankel d'ordre n, fonctions de Bessel de 1ère et 2ème espèces d'ordre n*	
i_T	: $(1/2)\ (i_1 + i_2)$ *cf. Définitions*	(§ 2.2.1, 2e partie)
ou I, Q, U, V / I_1, I_2, U, V	: *paramètre de Stokes*	(1.2, 1.11)
k	: *nombre d'onde* $(= 2\ \pi/\ \lambda)$	(§ 2.1, 2e partie)
λ	: *longueur d'onde*	
Λ	: *terme de Lorentz-Lorenz* $=: (n^2-1)\ /\ (n^2+2)$	(2.15)
m	: *indice relatif de la particule par rapport au milieu dans la 2e partie*	(§ 2.1)
m	: *exposant de la loi de distribution de Junge à partir du paragraphe 3.2 (2e partie)*	

n :	*ordre des termes des suites*	(2.2)
$\mathbf{n}$:	*indice relatif (cf."m" ci dessus) à partir du paragraphe 2.2. (2e partie)*	
N :	*nombre total de particules par unité de volume*	(2e partie, § 3.1.1 et 3e partie, §3.4)
nm, µm :	*nano et micromètre*	
p et $p(\theta)$:	*taux de polarisation*	(1ère partie,§ 5 et §1.7)
p :	*pente des courbes* $i_T(\theta)\ \alpha^{-4}$	(2e partie, § 3.2.1)
P_n :	*polynome de Legendre d'ordre* n	(2.3)
Q :	*facteurs d'efficacité pour l'absorption, la diffusion, l'atténuation*	(2.25 à 2.28)
$\overline{Q}$:	*facteur moyen d'efficacité pour la diffusion*	(3.2)
r :	*rapport de la diffusion de l'échantillon à la diffusion par le benzène*	(1ère partie, § 4.2)
$R_p\ (\theta)$:	*rapport caractéristique de la diffusion par les particules*	(1ère partie, §4.7)
ρ :	*paramètre égal à* $2\alpha\ \lvert n-1 \rvert$	(2.19)
S_1, S_2 :	*fonctions d'amplitude (complexes)*	(2.1)
S et V :	*surface des sections géométriques et volumes des particules*	(3e partie, § 3.4.2)
θ :	*angle de diffusion*	

ANNEXE 2 : CONDUITE DU CALCUL ET ADAPTATION A L'ORDINATEUR.

1 - CALCUL PAR LA THEORIE DE MIE DES INDICATRICES INDIVIDUELLES.

1.1 - Relations utilisées.

D'après les formules (2.2) fournies par la théorie de Mie, on a vu que les amplitudes complexes de l'onde diffusée $S_1(\alpha, m, \theta)$ *et* $S_2(\alpha, m, \theta)$ *sont exprimées sous forme de séries, qui combinent à chaque ordre :*

- *les coefficients de Mie* a_n *et* b_n *dépendant de la taille relative* α *et de l'indice relatif* m *par l'intermédiaire de fonctions de Ricatti-Bessel et de Ricatti-Hankel d'ordre* n *(2.4).*
- *les fonctions* π_n *et* τ_n*, dépendant uniquement de l'angle de diffusion* θ*, par l'intermédiaire de fonctions où interviennent les polynomes de Legendre d'ordre* n *portant sur l'argument* $\cos\theta$ *(2.3).*

La génération de ces fonctions est possible en utilisant des formules de recurrence, après avoir posé les valeurs correspondant aux premiers ordres. Ce schéma de calcul est voisin de celui préconisé par R. Penndorf et B. Goldberg (1956) et par D. Deirmendjian et al. (1961) ; Cet auteur en a repris récemment (1969) la description détaillée dans le cas où l'indice de réfraction est complexe. Un autre procédé de calcul utilisant les dérivées logarithmiques des fonctions de Ricatti-Bessel (voir par exemple G.W. Kattawar et G.N. Plass, 1967) peut être également employé.

Coefficients a_n et b_n - Recurrence pour les fonctions de Ricatti-Bessel et Ricatti-Hankel.

Conformément à (2.5), (2.7), (2.9), les fonctions ψ_n *et* ζ_n *qui interviennent, ainsi que leur dérivé, dans les coefficients* a_n *et* b_n *sont exprimées par :*

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) \quad , \qquad \zeta_n(x) = \psi_n(x) + i\,\chi_n(x) \quad ,$$

avec $$\chi_n(x) = -\left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} Y_{n+1/2}(x) \quad .$$

On pose : $\psi_n(x) = S_n(x)$ *et* $\chi_n(x) = C_n(x)$.

Au préalable, on exprimera ces fonctions uniquement à l'aide de fonction de Bessel de première espèce, en utilisant la relation :

$Y_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} J_{-(n+1/2)}(x)$ *, entre fonctions de première espèce J et de seconde espèce Y ; ainsi* $S_n(x)$ *et* $C_n(x)$ *s'écriront :*

$$S_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x) \qquad C_n(x) = (-1)^n \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{-(n+1/2)}(x) \quad .$$

Pour les fonctions de première espèce, il existe, entre trois ordres successifs, la relation de recurrence suivante : $2\frac{n}{x} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}$ *ou* $J_n = 2\frac{n-1}{x} J_{n-1} - J_{n-2}$ *remplaçant* n *par* $n+1/2$ *:*

$$J_{n+1/2} = 2\frac{n-1/2}{x} J_{n-1/2} - J_{n-3/2} \quad \text{ou bien} \quad S_n(x) = \frac{2\,n-1}{x} S_{n-1}(x) - S_{n-2}(x) \qquad \text{(II.1 A)}$$

remplaçant n *par* $-(n+1/2)$: $J_{-n-1/2} = 2\frac{-n-3/2}{x} J_{-n-3/2} - J_{-n-5/2}$

soit : $(-1)^n C_n(x) = 2\frac{-n-3/2}{x} (-1)^{n+1} C_{n+1} - (-1)^{n+2} C_{n+2}$

en décalant de deux ordres : $C_n(x) = \frac{2\,n-1}{x} C_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$ (II.1 B)

relation identique à celle établie pour S_n .

Le calcul pourra être conduit après avoir posé les deux premiers ordres, soit :

$$S_o(x) = (\pi x/2)^{1/2} J_{1/2}(x) = \sin x \qquad C_o(x) = (\pi x/2)^{1/2} J_{-1/2}(x) = \cos x$$
$$S_1(x) = (\pi x/2)^{1/2} J_{3/2}(x) = \frac{\sin x}{x} - \cos x \qquad C_1(x) = -(\pi x/2)^{1/2} J_{-2/3}(x) = \frac{\cos x}{x} + \sin x \qquad \text{(II.2)}$$

Dans les expression de a_n *et* b_n *interviennent aussi les dérivées* ψ' *et* ζ'*, c'est à dire* S' *et* $S'+iC'$*. Il existe une relation de recurrence qui lie la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre* n *aux fonctions elles mêmes d'ordre* n *et* $n-1$ *:* $x J'_n(x) = -n J_n(x) + x J_{n-1}(x)$ *qui, directement appliquée à* S_n *et* C_n*, fournit les relations :* $S'_n(x) = -\frac{n}{x} S_n(x) + S_{n-1}$ $\quad C'_n(x) = -\frac{n}{x} C_n(x) + C_{n-1}$ (II.3)

Finalement a_n *sera exprimé à l'aide des fonctions* S_n*,* C_n *et de leur dérivée première par :*

$$a_n = \frac{S'_n(m\alpha)\,S_n(\alpha) - m\,S_n(m\alpha)\,S'_n(\alpha)}{S'_n(m\alpha)\,\left[S_n(\alpha) + i\,C_n(\alpha)\right] - m\,S_n(m\alpha)\,\left[S'_n(\alpha) + i\,C'_n(\alpha)\right]}$$

dont tous les termes sont calculables par les formules précédentes (l'expression donnant b_n *est analogue). Si* m *est réel, toutes les fonctions portent sur des arguments réels et lors du calcul de* a_n *partie réelle et partie imaginaire peuvent être séparées ; on posera :*

$$p = S'(m\alpha)\,S(\alpha) - m\,S(m\alpha)\,S'(\alpha) \qquad q = S'(m\alpha)\,C(\alpha) - m\,S(m\alpha)\,C'(\alpha)\ , \qquad \text{(II.4)}$$

ce qui permet d'écrire : $a_n = \dfrac{p}{p + iq}$,

d'où $$\mathrm{Re}\,\{a_n\} = \frac{1}{1 + p^2/q^2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{im}\,\{a_n\} = \frac{-p/q}{1 + p^2/q^2}\ . \qquad \text{(II.5)}$$

Comme on l'a vu, ceci entraine que l'image dans le plan complexe de tout a_n *(ou tout* b_n*) est sur le cercle de rayon I/2 centré sur le point* im = 0, Re = 0.5 *(cf. figure II.1). Ce point est important en ce qu'il fournit un moyen simple de vérifier tout calcul numérique. Une autre conséquence pratique concerne l'adoption du critère de convergence pour les séries des* a_n *ou* b_n *: lorsque, pour un ordre suffisamment élevé, ces nombres deviennent petits, le cercle étant osculateur de la parabole on a nécessairement :* $\mathrm{im}\,\{a_n\} \sim (\mathrm{Re}\,\{a_n\})^{1/2}$ *. Considérer que la convergence est atteinte lorsque les termes* a_n *ou* b_n *deviennent inférieurs à* 10^{-7} *par exemple (c'est la valeur qui a été choisie), revient à appliquer cette condition uniquement sur les parties imaginaires, les parties réelles étant alors de l'ordre de* 10^{-14}.

Fonctions π_n *et* τ_n *- Recurrence sur les dérivés des polynomes de Legendre.*

On peut expliciter les formules (II.3) d'une autre façon, et relier π_n *à* τ_n *:*

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta}\,P'_n(\cos\theta) = \frac{d\,P_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}\ ;$$

ou en posant : $x = \cos\theta$, $\pi_n(x) = P'_n(x)$, *on a :* (II.6)

$$\tau_n(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\,P'_n(\cos\theta)\ , \qquad \textit{soit :} \qquad \tau_n(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}\left(\pi_n(\cos\theta)\,.\,\sin\theta\right),$$

$$\tau_n(\cos\theta) = \frac{d\,\pi_n(\cos\theta)}{d\theta}\,\sin\theta + \cos\theta\ \pi_n(\cos\theta)\,,$$

$$\tau_n(\cos\theta) = -\,\frac{d\,\pi_n(\cos\theta)}{d\cos\theta}\,\sin^2\theta + \cos\theta\,\pi_n(\cos\theta)\ ,$$

soit : $$\tau_n(x) = x\ \pi_n(x) - (1 - x^2)\ \pi'_n(x)\ , \qquad \text{(II.7)}$$

où τ_n *est explicité uniquement en fonction de* π_n *et de sa dérivée* π'_n *par rapport à l'argument* $x = \cos\theta$.

Il faut, pour calculer (II.6), exprimer $P'_n(x)$ *en fonction des ordres inférieurs. Entre trois ordres successifs, on a pour les polynomes de Legendre la relation de recurrence suivante :*

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0\ ,$$

dérivant : $$(n+1)\,P'_{n+1}(x) - (2n+1)\,P_n(x) - (2n+1)\,x\,P'_n(x) + n\,P'_{n-1}(x) = 0\ .$$

or entre polynome et leur dérivée existe la relation : $x\,P'_n(x) - P'_{n-1}(x) = n\,P_n(x)$ *qui permet d'éliminer* P_n *entre les deux équations ; il vient :*

$$n\,P'_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P'_n(x) + (n+1)\,P'_{n-1}(x) = 0\ ,$$

en décalant d'un ordre (n+1 remplacé par n) ; la relation de recurrence pour π_n *s'écrira :*

$$\pi_n(x) = \frac{1}{n-1}\left((2n-1)\,x\,\pi_{n-1}(x) - n\,\pi_{n-2}(x)\right)\ , \qquad \text{(II.8)}$$

qui permet de calculer $\pi_n(x)$ *à partir des valeurs des deux ordres antérieurs.*

D'une façon analogue, on trouve pour τ_n *une relation de recurrence où interviennent* π_n *et les fonctions à l'ordre immédiatement antérieur* π_{n-1} *et* τ_{n-1} *:*

$$\tau_n(x) = \left(\tau_{n-1}(x) + \pi_n(x)\right)x + (nx^2 - n+1)\,\pi_{n-1}(x)\ . \qquad \text{(II.9)}$$

Par ces relations (II.7) et (II.8) les fonctions π_n *et* τ_n *peuvent être calculées pour un ordre quelconque, une fois posées les valeurs initiales pour les deux premiers ordres (cf. 2.9 A et 2.9 B qui donnent ces valeurs).*

1.2 - Organisation du calcul.

Les données de calcul posées au départ sont :

- *les valeurs extrêmes de l'angle de diffusion* θ *et le pas choisi* $\Delta\theta$ *(par exemple : 0 (2) 180).*
- *un nombre variable de valeurs du paramètre de taille :* α_1, α_2 .. *entre lesquelles le pas* $\Delta\alpha$ *a une valeur fixée* $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$ ...
- *une valeur de l'indice de réfraction* m, *pouvant être incrementée de* Δm , *autant de fois que fixé au départ.*

Calcul des coefficients a_n *et* b_n.

Ce sont ces coefficients qui doivent être calculés en premier lieu puisque ce sont eux qui déterminent la convergence des séries et fixent l'ordre à atteindre.

L'indice de réfraction m *et le paramètre de taille* α *étant donnés, les valeurs des fonctions* S *et* C *sont calculées pour les deux premiers ordres grâce aux formules qui sont posées (II.2) a priori, et leur dérivés* S' *et* C' *en sont déduites grâce aux relations (II.3). Les parties réelles et imaginaires de* a_n *et* b_n *sont calculées en formant les expressions (II.4) puis (II.5), et sont conservées en mémoire.*

Après décalage d'un ordre, on calcule à nouveau S, C, S', C' *en utilisant maintenant les relations de recurrence (II.1 A), (II.1 B) et (II.3), et on achève cette boucle par le calcul et la mise en mémoire des nouvelles valeurs de* a_{n+1} *et* b_{n+1}. *Cette boucle est répétée autant de fois que nécessaire pour que la convergence soit assurée à une précision fixée à l'avance : on a considéré que la convergence est jugée suffisante lorsque les termes* a_n *et* b_n *engendrés deviennent inférieurs à* 10^{-7}. *On a vu qu'il suffit d'imposer cette condition à la partie imaginaire seulement. On pourrait ajouter aussi qu'il suffirait de l'appliquer seulement à* $I_m(a_n)$, *parce que numériquement il apparaît que* b_n *est toujours inférieur à* a_n, *plus précisément de l'ordre de grandeur de* a_{n+1}.

Lorsque la condition est satisfaite, le retour dans la boucle n'a pas lieu et la première partie du calcul est terminée. On dispose alors en mémoire :

- *de l'ordre maximum atteint, soit* N.
- *des* N *valeurs successives de* $\mathrm{Re}\,\{a_n\}$, $\mathrm{Re}\,\{b_n\}$, $\mathrm{im}\,\{a_n\}$, $\mathrm{im}\,\{b_n\}$.
- *de la somme* $\sum_1^N (2\,n+1)\ \mathrm{Re}\,\{a_n+b_n\}$ *qui a été cumulée progressivement et servira pour le calcul de* $S\,(0)\ \alpha^{-2}$ *et du facteur d'efficacité* Q.

<u>*Calcul des valeurs angulaires.*</u>

Une première valeur est donnée à θ *(0° ou 180° par exemple), l'argument* $x = \cos\theta$ *est calculé, ainsi que les deux premiers ordres pour* π *et* τ *grâce aux formules initiales posées. Les valeurs de* a_n *et* b_n , *de même ordre sont rappelées et ainsi peuvent être calculées les parties réelles et imaginaires de :*

$$\left(a_n\ \pi_n\,(x) + b_n\ \tau_n\,(x)\right)\ \frac{2\,n+1}{n(n+1)} \quad \text{et de :} \quad \left(a_n\ \tau_n\,(x) + b_n\ \pi_n\,(x)\right)\ \frac{2\,n+1}{n(n+1)}\ .$$

Le même calcul est repris N *fois, à la différence près que* π_n *et* τ_n *sont engendrés dans ces boucles par les recurrences (II.6) et (II.7). Lorsque le calcul est achevé, sont cumulés dans les mémoires :*

$$\sum_1^N \frac{2\,n+1}{n(n+1)}\ \left(\mathrm{Re}\,\{a_n\}\ \pi_n + \mathrm{Re}\,\{b_n\}\ \tau_n\right) = \mathrm{Re}\,\{S_1\,(\theta)\} \quad ,$$

$$\sum_1^N \frac{2\,n+1}{n\,(n+1)}\ \left(\mathrm{im}\,\{a_n\}\ \pi_n + \mathrm{im}\,\{b_n\}\ \tau_n\right. = \mathrm{Im}\,\{S_1\,(\theta)\} \quad ,$$

et les expression analogues : $\mathrm{Re}\,\{S_2\,(\theta)\}$, $\mathrm{im}\,\{S_2\,(\theta)\}$.

Les fonctions d'intensité $i_1\,(\theta)$ *et* $i_2\,(\theta)$ *pour cet angle* θ *sont alors calculées par le carré des modules :*

$$i_1\,(\theta) = \left(\mathrm{Re}\,\{S_1\,(\theta)\}\right)^2 + \left(\mathrm{im}\,\{S_1\,(\theta)\}\right)^2$$

$$i_2 \ \ldots\ldots \qquad S_2 \qquad\qquad S_2 \qquad .$$

A ce stade sont également calculées $i_T = 1/2\,(i_1 + i_2)$, *la polarisation* $p = i_1 - i_2\ /\ i_1 + i_2$ *et les fonctions de phase* $P_1\,(\theta)\ /\ 4\,\pi = \dfrac{i_1}{\pi\ Q\ \alpha^2}$ *et* $P_2\,(\theta)\ /\ 4\,\pi$, *(les fonctions* P_3 *et* P_4 *n'ont pas été calculées). Des exemples d'indicatrices ainsi calculées sont présentés graphiquement ci-après.*

<u>*Enchainement.*</u>

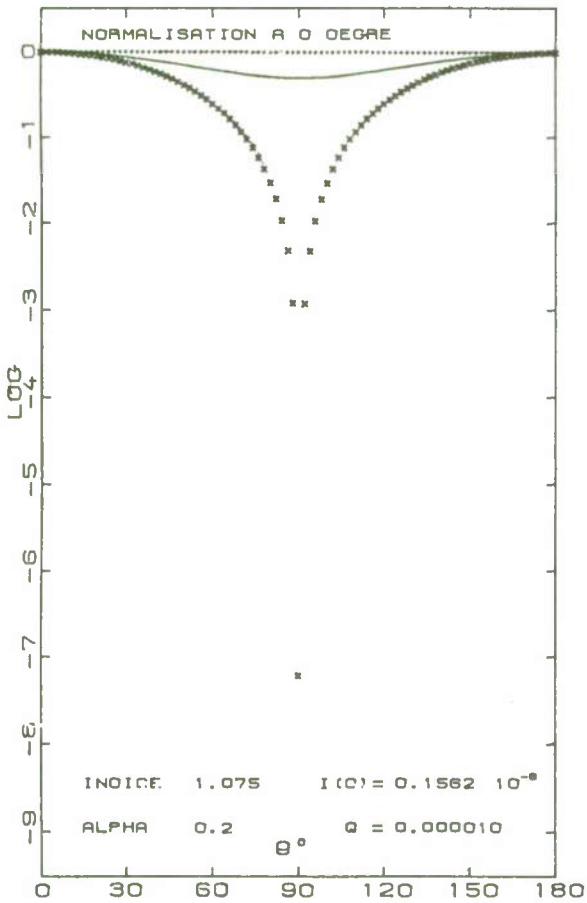
L'angle θ *est alors incrementé de* $\Delta\theta$, *et la seconde partie du calcul est reprise intégralement, tandis que les résultats de la première partie (coefficients* a_n *et* b_n*) sont rappelés au fur et à mesure. Lorsque tous les angles de diffusion ont été explorés, le calcul relatif à une particule donnée est achevé et les résultats sont extraits des mémoires : selon les options, non exclusives les unes des autres, ils sont transférés sur bande magnétique, sur cartes perforées, sur liste, ou enfin sous forme de graphiques.*

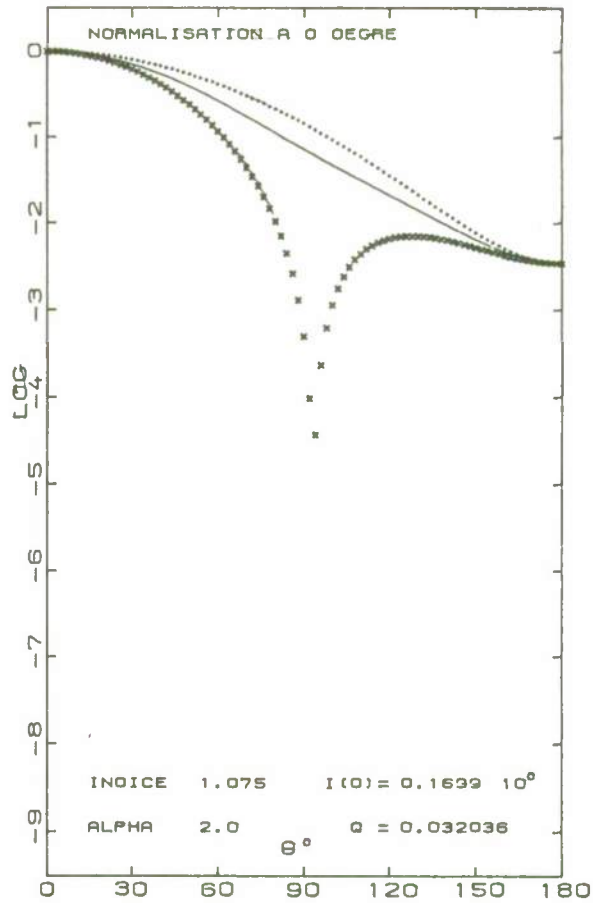
Le programme incremente le paramètre de taille α *de* $\Delta\alpha$ *(fixé à l'avance) et l'ensemble du calcul est repris depuis le départ (nouveaux coefficients* a_n *et* b_n*), et ceci autant de fois que nécessaire pour atteindre une valeur maximale de* α *préfixée .*

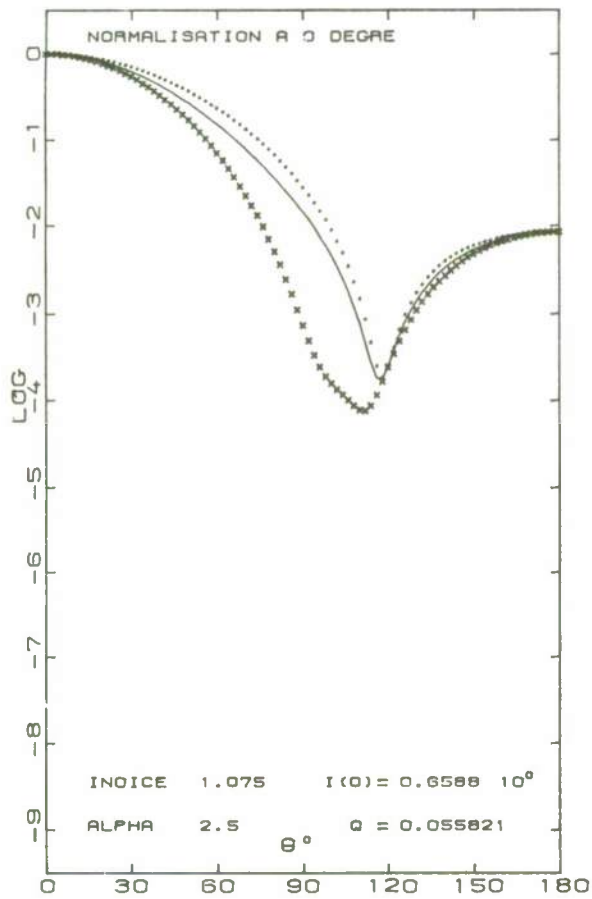
Cette série de cas étant traitée, il est possible, dans une autre boucle recouvrant les premières, de re-initialiser le paramètre α, *et toutes choses égales par ailleurs (*$\Delta\alpha$, $\Delta\theta$, *valeurs extrêmes de* α *et* θ*), d'incrementer l'indice. Cette structure, classique, permet selon les valeurs initiales fournies, d'enchainer à volonté le calcul sur un plus ou moins grand nombre de cas.*

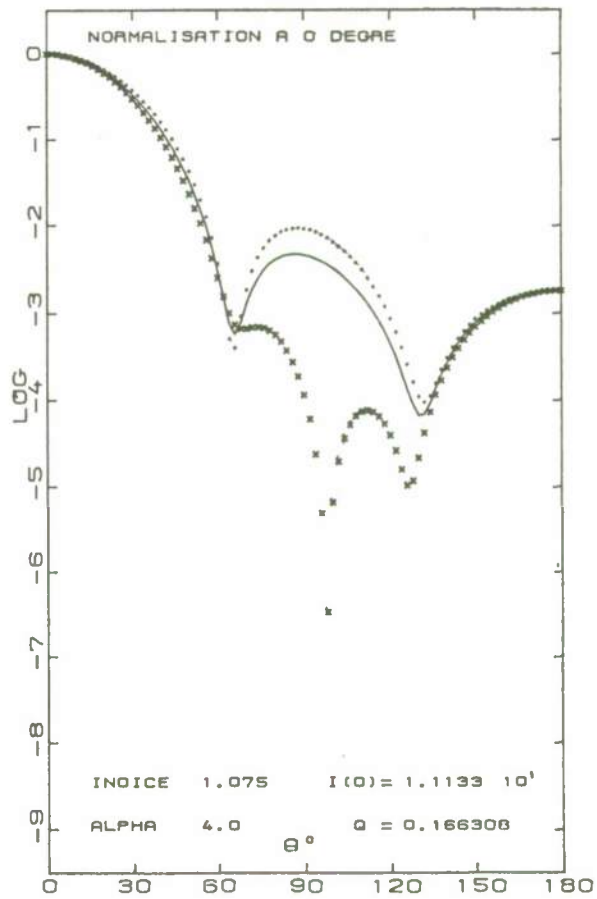
<u>*Précision.*</u>

Le critère de troncature des séries a_n *et* b_n *adopté ici (*10^{-7}*) est celui préconisé par Penndorf et Goldberg (1956, 1960), et utilisé aussi par Deirmendjian, Clasen et Viezee (1961) (dans le cas où l'indice est complexe il est transformé en* $a_n\ a_n^* + b_n\ b_n^* < 10^{-14}$*). La valeur de critère fixe la précision qu'on peut attendre sur les valeurs des fonctions* $i(\theta)$ *et de celles qui en dérivent : elle correspond à 6 chiffres significatifs quelle que soit par ailleurs la valeur absolue du nombre. L'analyse numérique ne permet pas de prévoir la précision avec une absolue certitude puisque la vitesse de convergence pour les*

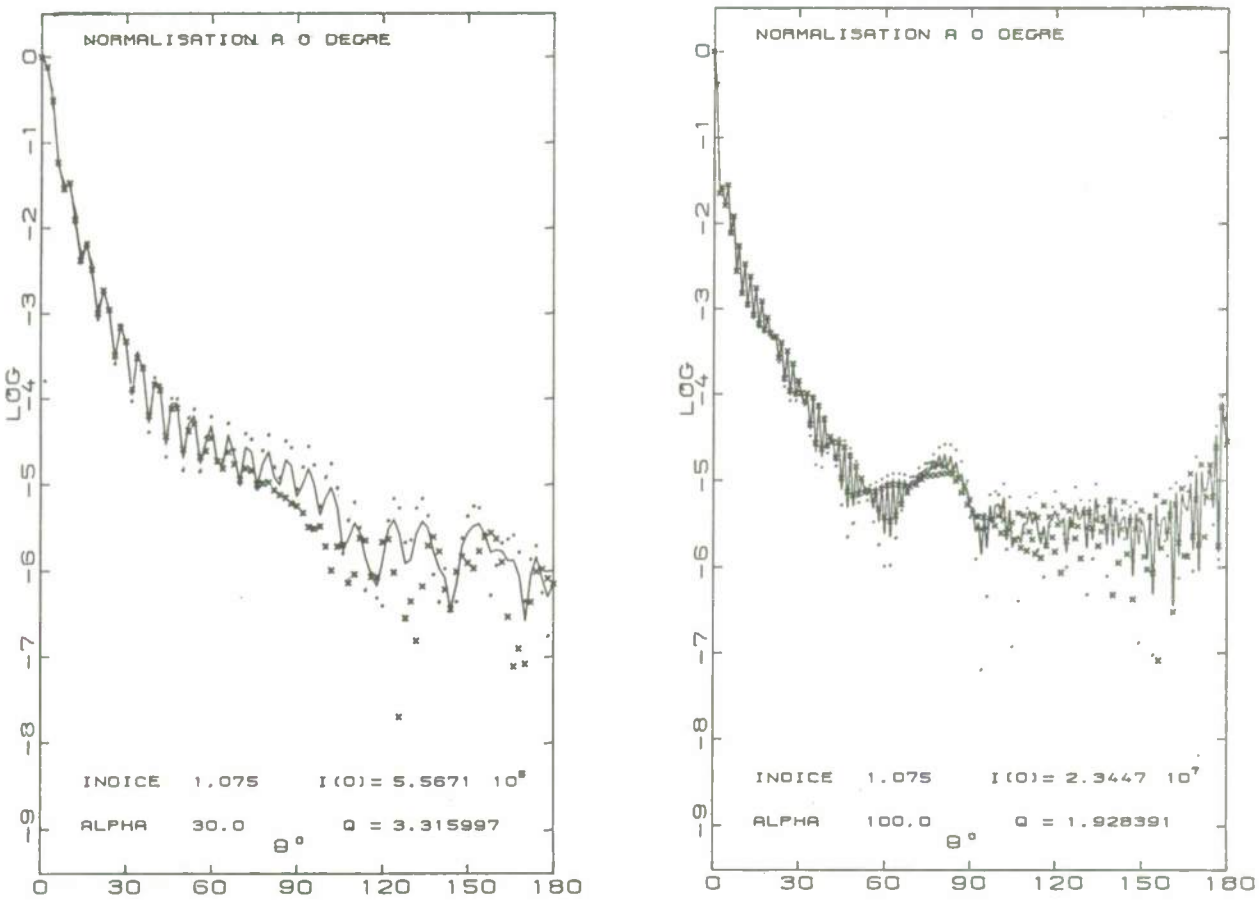








VOIR PAGE SUIVANTE



Exemples d'indicatrices de diffusion calculées pour l'indice de réfraction relatif 1,075 et pour les valeurs indiquées du paramètre α . Ces figures servent d'illustration aux développements des paragraphes 2.1.2 (évolution des indicatrices), 2.2.3 (domaine de Rayleigh Gans), et 2.2.5 (réflexion-réfraction).

Le tracé de l'indicatrice est effectué en normalisant à 0° (l'échelle des ordonnées est logarithmique), la valeur à cet angle i (0°) est indiquée ainsi que celle du coefficient d'efficacité Q. Les deux composantes polarisées $i_1(\theta)$ et $i_2(\theta)$ sont respectivement figurées par des points et des croix, la courbe correspondant à l'intensité totale $i_T(\theta) = (1/2)\left(i_1(\theta) + i_2(\theta)\right)$.

termes non calculés n'est, a priori, pas prévisible ; aussi est il nécessaire de comparer avec d'autres résultats publiés ou bien, ce qui également a été fait, d'exécuter des vérifications en modifiant la valeur du critère : c'est ainsi que la précision annoncée peut être confirmée.

La convergence des séries a_n, b_n se fait d'autant plus lentement que α est élevé. Pour tous les cas traités (indice inférieur à 1.15), une relation empirique et approximative s'est trouvé vérifiée : $N \simeq 1.07\,\alpha + 10$ qui lie α au nombre d'ordre N nécessaires pour satisfaire le critère $< 10^{-7}$. Une relation de ce type a d'ailleurs été proposée pour limiter a priori le nombre de recurrence à exécuter (Penndorf) ; elle ne peut être générale car la valeur de l'indice intervient également.

Il est nécessaire d'effectuer le calcul des coefficients de Mie a_n et b_n en double précision (17 chiffres significatifs). En effet, sans entrer dans le détail de cet aspect numérique, dans les récurrences permettant de calculer S'_n et C'_n des soustractions interviennent qui font apparaître des indéterminations numériques (mais non mathématiques) ; lorsque les termes engendrés ne diffèrent qu'à partir du huitième chiffre significatif il est impossible de calculer des différences en simple précision (dans ce cas la mémoire réservée à chaque nombre comporte huit places décimales). Ceci conduit à des divisions par zéro inexécutables et la boucle tourne indéfiniment sans que le critère de convergence puisse jamais être atteint. Le calcul en double précision, indispensable lorsque α est supérieur à 20 ou 25, lève cette difficulté au prix, il est vrai, d'une multiplication environ par 4 du temps de calcul. Deirmendjian a récemment souligné la nécessité de cette précaution (1969).

2 - CALCUL POUR LES SYSTEMES POLYDISPERSES.

2.1 - ORGANISATION DU CALCUL.

Il n'y a pas de difficulté particulière à mener ce calcul. Il peut être organisé de plusieurs façons. Celle qui a été utilisée le plus souvent peut être brièvement résumée ainsi :

les intégrales du type (3.2 et 3.3, 2e partie) donnant $\bar{\beta}_1(\theta)$ et $\bar{\beta}_2(\theta)$ sont bien sûr remplacées par des sommations pondérées des termes qui correspondent aux 60 indicatrices individuelles calculées précédemment ; ceci revient à dire aussi que $d\alpha$ n'est pas constant, il est petit lorsqu'il correspond à des classes de taille abondamment représentées et s'élargit au contraire avec la raréfaction des particules lorsque la taille croît. Le terme de pondération $C(\alpha)$ est calculé à partir de la loi de distribution adoptée (Junge ou autre). Il faut donc calculer des sommes telles que :

(1) $\sum_{k=1}^{61} i_{kj}(\theta,\alpha) \cdot C'_k(\alpha)$, (numérateur de 3.3) ,

(2) $\sum_{k=1}^{61} \alpha^2 \cdot Q(\alpha)\, C_k(\alpha)$, (dénominateur de 3.3) , avec j = 1 ou 2 .

(3) et $\sum_{k=1}^{61} \alpha^2 \cdot C_k(\alpha)$,

Les sommations sont menées progressivement et simultanément pour les 91 valeurs angulaires considérées, allant de 0 à 180°, par pas de 2°, (expression 1) et également pour les deux autres expressions (2) et (3). Aux 60 valeurs de k correspondent des valeurs discrètes de α. Le terme C_k, à l'ordre k, étant calculé préalablement par la loi de distribution, les 182 valeurs de $i_{kj}(\theta)$, celle de Q et celle de α correspondant aux même ordre k sont rappelées, puis multipliées par C_k et ensuite cumulées avec les valeurs analogues calculées pour les ordres antérieurs , dans 184 mémoires correspondant aux 184 sommes à effectuer.

Ensuite les opérations prévues par 3.2 et 3.3 (2e partie) sont effectuées, ainsi que les calculs complémentaires de :

$$\bar{\beta}(\theta) = \frac{1}{2}\left(\bar{\beta}_1(\theta) + \bar{\beta}_2(\theta)\right) \qquad \text{et} \qquad p(\theta) = \frac{\bar{\beta}_1(\theta) - \bar{\beta}_2(\theta)}{\bar{\beta}(\theta)} .$$

Des sorties optionnelles permettent de connaître des résultats partiels correspondant à une troncature par le bas (k minimum > 1) ou par le haut (k maximum < 61), ou les deux à la fois.

Une reinitialisation automatique changeant les paramètres de la distribution permet de traiter tous les cas nécessaires.

2.2. - CALCULS EN DEÇA DE LA LOI LIMITE INFERIEURE $\alpha_m = 0,2$.

Il est justifié d'utiliser alors la théorie de Rayleigh (cf. 2.2.2, 2e partie) ce que montre la table 1 ci après où sont comparés les calculs de i_T par la théorie de Mie et de Rayleigh, pour α = 0,2 et θ = 0° (pris comme exemple). Dans ces conditions les fonctions d'intensité s'écrivent (cf. eq. 2.15, § 2.2.2 et eq. 2.31, § 2.2.10) :

$$i_1(\theta) = \alpha^6 \Lambda^2 , \quad i_2 = \alpha^6 \Lambda^2 \cos^2\theta \quad \text{et} \quad Q = (8/3)\, \alpha^4 \Lambda^2 ,$$

les intégrales peuvent être rigoureusement calculées, depuis la taille arbitraire 0 jusqu'à 0,2, ceci pour évaluer l'erreur maximale, lorsque la distribution est exprimée par une loi puissance (ou aussi exponentielle). Sont à calculer les expressions :

$$\Lambda^2 \int_0^{0,2} \alpha^6 \left|\frac{1}{\cos^2\theta}\right| \alpha^{-m}\, d\alpha \qquad \text{et} \qquad (8/3)\, \Lambda^2 \int_0^{0,2} \alpha^4 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^{-m}\, d\alpha ,$$

correspondant à (1) et (2). Aux facteurs près la valeur en est : $\frac{1}{7-m}\left|\alpha^{7-m}\right|_0^{0,2}$ *dont la valeur est finie si m > 7 (cf. 2e partie, § 3.2.2). Comme le montre la table 1 ces quantités sont toujours négligeables devant celles calculées entre 0,2 et 200. (pour le calcul on a supposé qu'il y avait une particule pour α = 1, et que l'exposant m de la distribution était 3,9).*

Table I :

Indice	i_T (0°) (α = 0,2) Rayleigh	Mie	Q (α) (α = 0,2) Rayleigh	Mie	$\int_0^{0,2} i(0)\alpha^{-m}d\alpha$ m = 3,9	$\int_{0,2}^{200} i(0)\alpha^{-m}d\alpha$	$\int_0^{0,2} / \int_{0,2}^{200}$ %
1,02	0,1130 10^{-7}	0,1131 10^{-7}	0,75 10^{-6}	1,0 10^{-6}	0,0102 10^{-4}	0,162	0,006
1,05	0,6986 "	0,7001 "	4,66 "	5,0 "	0,0744 "	0,369	0,02
1,075	1,5567 "	1,5619 "	10,31 "	10,0 "	0,165 "	0,534	0,03

Table II :

Exposant	$\int_0^{100}$	$\int_{100}^{\infty}$
-3,6	93,0	7,0 %
-3,8	97,4	2,6 %
-4,0	99,0	1,0 %
-4,5	99,35	0,65 %
Gausso log.	90 % pour	$\int_0^{5,5}$
Expon.	90 % pour	$\int_0^{8,1}$

2.3 - CALCULS AU DELA DE LA LIMITE SUPERIEURE.

Le problème est posé dans la seconde partie (§ 3.2.3). En prenant non plus α mais ρ, et en supposant Q constant et égal à 2 si $\rho > 100$, les intégrales de 100 à l'∞ portant sur $Q(\rho)\ \rho^{2-m}$ sont calculables immédiatement et fournissent les valeurs asymptotiques cherchées. Pour quelques valeurs de l'exposant on obtient ainsi, exprimés en %, les rapports à la valeur totale de la table II ; figurent aussi les valeurs de ρ qui correspondent à 90 % de la diffusion totale avec les distributions log-normale et exponentielle envisagées.

BIBLIOGRAPHIE

BAUER D., A. MOREL
Etude aux petits angles de l'indicatrice de diffusion des eaux de mer.
Ann. Geophys., 23, 1, 109-123 1967

BAUER D., A. IVANOFF
Description d'un diffusiomètre "intégrateur".
Cah. Océanogr., 23, 9, 827-839. 1971

BEARDSLEY G.F. Jr.
Mueller scattering matrix of sea water.
J. Opt. Soc. Am., 58, 1, 52-57. 1968

BEARDSLEY G.F., H. PAK, K. CARDER, B. LUNDGREN
Light scattering and suspended particles in the Eastern Equatorial Pacific Ocean.
J. Geophys. Res., 75, 15, 2837-2845. 1970

BRIGGS R.O., G.L. HATCHETT
Technique for improving underwater visibility with video equipment.
Ocean Sci. Engin., 1, 1234-1308. 1965

BROWN O.B., H.R. GORDON
Tables of Mie scattering functions for low index particles suspended in water.
Univ. of Miami, Dept. of Phys., Report, ref. MIAPH-OP. 715. 1972

BRUN-COTTAN J.C.
Etude de la granulométrie des particules. Mesures effectuées avec un Coulter Counter.
Cah. Océanogr., 23, 2, 193-205. 1971

BURT W.V. Interpretation of spectro-photometer readings on Chesapeake bay waters.
J. Mar. Res., 14, 1, 33-46. 1955

BURT W.V. A light scattering diagram.
J. Mar. Res., 15, 1, 5 1956

CARDER K.L., G.F. BEARDSLEY Jr., H. PAK
Particle size distribution in the eastern equatorial Pacific.
J. Geophys. Res., 76, 5070-5077. 1971

CARDER K.L., R.D. DOMLINSON, G.F. BEARDSLEY
A technique for the estimation of indice of refraction of marine phytoplankters.
Limnol. Oceanogr., 17, 6, 833-839. 1972

COHEN G., H. EISENBERG
Light scattering of water, deuterium oxyde, and other pure liquids.
J. Chem. Phys., 43, 3, 914-921. 1965

COPIN C., G. COPIN
Chemical analysis of suspended particulate matter collected in the North east Atlantic.
Deep Sea Res., 19, 445-452. 1972

COPIN C., G. COPIN
Etude chimique des particules en suspension dans l'eau de mer en Méditerranée occidentale.
J. Thalass. Jugoslav. (à paraître). 1973

DEBYE P. Ann. Physik, 30, 59. 1909

DEIRMENDJIAN D., R. CLASEN; W. VIEZEE
Mie scattering with complex index of refraction.
J. Opt. Soc. Am., 51, 6, 620-633. 1961

DEIRMENDJIAN D.
Scattering and polarization properties of polydispersed suspensions with partial absorption.
171 - 189. In Electromagnetic scattering, Milton Kerker edit.
Pergamon press. 1963

DEIRMENDJIAN D.
Electromagnetic scattering on spherical polydispersions.
290 p, American Elsevier pub. comp. inc. 1969

DUNTLEY S.Q. Light in the sea.
J. Opt. Soc. Am., 53, 214-233. 1963

EQUIPE DU LABORATOIRE D'OCEANOGRAPHIE PHYSIQUE
Résultats d'observations en 1964, 1965, 1966 et 1967.
Cah. Océanogr., 21, sppl. 2, 193-263. 1969

HINZPETER H. Messungen der Streufunktion der Polarisation des Meerwassers.
Kieler Meeresforsch., 28, 1, 36-41. 1962

GILBERT G.D., J.C. PERNICKA
Improvment of underwater visibility by reduction of backscatter with a circular polarization technique.
SPIE, Underwater photo optics seminar proceed , Santa Barbara, Calif. 1966

GORDON D.C. Some studies on the distribution and composition of particulate organic carbon in th Atlantic Oc
Deep Sea Res., 17, 233-243. 1970

GORDON H.R., O.B. BROWN
A theoretical model of light scattering by Sargasso sea particulates.
Limnol. Oceanogr., 17, 6, 826-832. 1972

HARRIS J.E. Characterization of suspended matter in the Gulf of Mexico. 1, Spatial distribution.
Deep sea Res., 19, 10, 712-726. 1972

HOBSON L.A. The seasonal and vertical distribution of suspended particulate matter in an area of the Northeast Pacific Ocean.
Limnol. Oceanogr., 12, 4, 642-649. 1967

HODKINSON J.R. Light scattering and extinction by irregular particles larger than the wavelength.
in Electromagnetic Scattering, Milton Kerker edit. Pergamon Press. 1963

HOLLAND A.C., G. GAGNE
The scattering of polarized light by polydisperse systems of irregular particles.
Appl. Opt., 9, 5, 1113-1121. 1970

HULBURT E.O. Optics of distilled and natural waters.
J. Opt. Soc. Am., 35, 698-705. 1945

IVANOFF A. Quelques résultats concernant les propriétés diffusantes des eaux de mer.
U.G.G.I. monographie, 10, 45-51. 1961

IVANOFF A., A. MOREL
Terminologie concernant l'optique océanographique.
Cah. Océanogr., 22, 5, 457-468. 1970

IVANOFF A. Introduction à l'océanographie.
Tome 1, 208 pp., Vuibert ed., Paris 1972

JERLOV N.G. Particle distribution in the ocean.
Rep. Swed. deep sea expedition, 3, 73-97. 1953

JERLOV N.G. Optical measurements in the Eastern North Atlantic.
Medd. Oceanogr. Inst. Göteborg, 38, 11, 4-40. 1961

JERLOV N.G. Optical oceanography.
Oceanogr. Mar. Biol. Ann. Rev., 1, 89-114. 1963

JERLOV N.G. Optical oceanography, 194 pp.
Elsevier, Amsterdam. 1968

JUNGE C.E. Air chemistry and Radioactivity.
Academic Press, 382 pp., New York. 1963

KATTAWAR G.W., G.N. PLASS
Electromagnetic scattering from absorbing spheres.
Appl. Opt., 6, 8, 1377-1382. 1967

KINNEY P.J., T.C.LODER, J. GROVES
Particulate and dissolved organic matter in the Amerasian basin of the arctic Ocean.
Limnol. Oceanogr., 16, 1, 132-137. 1971

KOZLIANINOV M.V.
Nouvel instrument pour la mesure des propriétés optiques des eaux de mer.
Trud. inst. okeanol. Akad. Nauk. SSSR, 25, 134-142. 1957

KULLENBERG G. Scattering of light by Sargasso sea water.
Deep sea Res., 15, 4, 423-432. 1968

KULLENBERG G. Light scattering in the central Baltic.
Copenhague Univ., Inst. Phys. Oceanogr., Rep. n° 5. 1969

KULLENBERG G. Observations of light scattering in different water masses.
Electromagnetics of the Sea, A.G.A.R.D. Conf. Proceed. n°77, Paris. 1970

KULLENBERG G., N.B. OLSEN
A comparison between observed and computed light scattering functions.
Copenhague Univ., inst. Phys. Oceanogr., Rep. n° 19. 1972

LISITSIN A., Y. BOGDANOV
Granulométrie et composition de la matière en suspension dans l'océan Pacifique (en russe).
Oceanogr. Res. Coll., 18, 53, Science Publ. Moscou, 1968

MANKOVSKY V.I., V.M. SEMENIKKINE, O.G. NEUIMIN
Diffusiomètre marin
Akad. Nauk. Ukr.SSR, inst. hydrophys. mar., 2, 48, 171-181. 1970

MANKOVSKI V.I. Relations entre coefficient total et coefficients angulaires de diffusion.
Akad. Nauk. Ukr.SSR, mar. hydrophys. inst., 6, 65, 145-154. 1971

MIE G. Beiträge zur optik trüber Medien speziell kolloidalen Metallösungen.
Ann. Physik., 25, 377-445. 1908

MOREL A. Interprétation des variations de la forme de l'indicatrice de diffusion de la lumière par les eaux de mer.
Ann. Geophys., 21, 2, 281-284. 1965

MOREL A. Etude expérimentale de la diffusion de la lumière par l'eau, les solutions de chlorure de sodium et l'eau de mer optiquement pures.
J. Chim. Phys., 10, 1359-1366. 1966

MOREL A. Etude à diverses longueurs d'onde de l'indicatrice de diffusion pour les eaux de mer.
Proc. Verb., 10, 204-205. AISPO/IUGG, XIV Gen. Ass., Berne. 1967

MOREL A. Note au sujet des constantes de diffusion de la lumière pour l'eau et l'eau de mer optiquement pures.
Cah. Océanogr., 20, 2, 157-162. 1968 a

MOREL A. Relations entre coefficients angulaires et coefficient total de diffusion de la lumière pour les eaux de mer.
Cah. Océanogr., 20, 4, 291-303. 1968 b

MOREL A. Examen des résultats expérimentaux concernant la diffusion de la lumière par les eaux de mer.
Electromagnetics of the sea. A.G.A.R.D. Conf. Proceed., n°77, Paris. 1970

MOREL A. Application de la théorie de Mie au calcul de l'indicatrice de diffusion de la lumière pour les eaux de mer.
C.R. Acad. Sci., 274, 1387-1390. 1972 a

MOREL A. Au sujet de l'emploi du coefficient total de diffusion pour évaluer la teneur des eaux de mer en particules en suspension.
C.R. Acad. Sci., 247, 1447-1450. 1972 b

MOREL A. Indicatrices de diffusion théoriques calculées par la théorie de Mie appliquée à des systèmes polydispersés de particules.
Centre Rech. Océanogr. Villefranche-sur-Mer, rap. n°10. 1973

MOREL A. Optical properties of pure water and pure seawater.
in Optical Aspects of Oceanography, Academic Press. à paraître

MORRISON R.E. Experimental studies on the optical properties of sea water.
J. Geophys. Res., 75, 3, 612-628. 1970 a

MORRISON R.E. Characteristics of the optical volume scattering function of sea water.
J. Oceanogr., Soc. Japan, 26, 2, 101-107. 1970 b

NYFFELER F. Etude de la diffusion de la lumière à diverses longueurs d'onde à l'aide de sources classiques et de sources laser.
Thèse 3ème cycle, pp. 1-83, Paris. 1969

NYFFELER F. Etude de la diffusion de la lumière aux petits angles par l'eau de mer.
A.G.A.R.D. Conf. Proceed., n° 77, Paris. Electromagnetics of the Sea. 1970

OTCHAKOVSKI Y.E.
Comparaison des indicatrices mesurées et calculées pour l'eau de mer.
Trud. inst. Okeanol. Akad. Nauk.SSSR, 77, 125-130. 1965 a

OTCHAKOVSKI Y.E.
Relations entre coefficient d'extinction et matière en suspension dans la mer.
Trud. inst. Okeanol. Akad. Nauk. SSSR, 77, 35-40. 1965 b

PAK H., J.R. ZANEVELD, G.F. BEARDSLEY Jr.
Mie scattering by suspended clay particles.
J. Geophys. Res., 76, 21, 5065-5069. 1971

PENNDORF R., B. GOLDBERG
Geophysical Research papers.
Air force Cambridge Res. Center, rep. 45, 3, Bedford, Mass. 1956

PENNDORF R. Geophysical Research papers.
Air force Cambridge Res. Center, rep. RAD-TR 60-10, Bedford, 1960

PERRIN F. Polarization of light scattered by isotropic opalescent media.
J. Chem. Phys., 10, 415-427. 1942

PERRIN F., A. ABRAGAM
Polarisation de la lumière diffusée par les particules sphériques.
J. Phys. et Rad., 12, 2, 69-73. 1951

PETZOLD T.J. Volume scattering functions for selected ocean waters. Visibility.
Lab., San Diego Cal., techn. report S.I.O. ref. 72-78, 79 pp. 1972

PICKARD G.L., L.F. GIOVANDO
Some observations of turbidity in british Columbia inlets.
Limnol. Oceanogr., 5, 162-170. 1960

PREISENDORFER R.W.
Radiative transfer on discrete space.
Pure and applied Mathematic, vol. 74, 462 p., Pergamon Press. 1965

PRIEUR L., A. MOREL
Etude théorique du régime asymptotique, relations entre caractéristiques optiques et coef-
Cah. Océanogr., 23, 1, 35-48. 1971 ficient d'extinction.

REESE J.W., S.P. TUCKER
Light measurements off the San Diego coast.
N.U C. Technical publication, n° 203, 1-37. 1970

RILEY G.A. Particulate organic matter in sea water.
Adv. Mar. Biol., 8, 1-118. 1970

SASAKI T., N. OKAMI, G. OSHIBA, S. WATANABE
Angular distribution of scattered light in deep sea water.
Rec. Oceanogr. works Jap., 5, 2, 1-10. 1960

SASAKI T. Angular distribution of scattered light in deep sea water.
Proc. Verb., 10, 203, AISPO/IUGG, XIV Gen. Ass. Berne. 1967

SASAKI T., N. OKAMI, S. MATSUMURA
Scattering functions for deep sea water of the Kuroshio.
La mer, 6, 3, 165-175 1968

SHELDON R.W., T.R. PARSONS
A continuous size spectrum for particulate matter in the sea.
J. Fish. Res. Bd. Canada, 24, 909-915. 1967

SHELDON R.W., W.H. SUTCLIFFE Jr.
Retention of marine particles by screens and filters
Limnol. Oceanogr., 14, 3, 441-444. 1969

SHELDON R.W., A. PRAKASH, W.H. SUTCLIFFE Jr.
The size distribution of particles in the ocean.
Limnol. Oceanogr., 17, 3, 327-340. 1972

SPILHAUS A.F. Observations of light scattering in sea water.
Limnol. Oceanogr., 13, 418-422. 1968

STRATTON J.A., H.G. HOUGHTON
A theoretical investigation of the transmission of light through fog.
Phys. Rev., 38, 159-165. 1931

TYLER J.E. Scattering properties of distilled and natural waters.
Limnol. Oceanogr., 6, 451-456. 1961

VAN DE HULST H.C.
Light scattering by small particles.
470 p., John Wiley and sons Inc. 1957

WELLS H.G., M.N. TODD
Loss of optical resolution in sea water by multiple small angle scattering.
Electromagnetics of the sea. A.G.A.R.D. Conf. Proceed, n°77,
Paris 1970

WILLIAMS J. Optical properties of the sea
1-123, United States Naval Inst. Series oceanogr. 1970

YENTSCH C.S. A non extractive method for the quantitative estimation of chlorophyll in algal cultures.
Nature, 179, 1302-1304. 1957

ZANEVELD J.R.V., H. PAK
Method for the determination of the index of refraction of particles suspended in the ocean.
J. Opt. Soc. Am., 63, 3, 321-324. 1973

THEORY OF SMALL ANGLE SCATTERING

Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

Abstract

The fundamental description of light scattering by particles in sea water is the volume scattering function $\sigma(\theta)$, which is defined so that $\sigma(\theta)d\omega$ is the amount of light scattered per meter into a differential solid angle $d\omega$ in the direction θ. For multiple scattering a derived quantity $f(\theta,R)$ called the point spread function is needed to describe the intensity blur distribution at the range R. The blur about a focal point is the same whether viewing a point source or projecting point illumination on a screen. However, the blur function is different depending on whether the light is focused (f^f) at one end of the propagation path or collimated (f^c) while passing through the water.

There exists no closed expression to find f^f or f^c in terms of $\sigma(\theta)$, or $f(\theta,R_1)$ in terms of $f(\theta,R_2)$, $R_1 \neq R_2$. In the frequency domain the situation is much improved. We interpret $F(\psi,R)$, the Fourier transform of $f(\theta,R)$, as the MTF of the medium since it describes the loss of contrast in the image of a sinusoidal bar chart having ψ cycles per radian. It is given simply as $F(\psi,R) = \exp[-D(\psi)R]$, where the spatial frequency decay function D is independent of range and simply related to $\sigma(\theta)$. For the focused and collimated cases respectively,

$$D^f(\psi) = \alpha - \int_0^1 \Sigma(t\psi)dt \text{ and } D^c(\psi) = \alpha - \Sigma(\psi) ,$$

where α is the attenuation constant and Σ the transform of σ. Besides the simple functional dependence there are other advantages to computations in the frequency domain, convolutions with apertures and instrumental blur functions, and calculations of small angle scattering by direct measurement of MTF.

The same formalism encompasses the Gaussian blur of turbulent scattering. The rms angle increases as $\sqrt{R}$, and the blur diameter for the collimated case is $\sqrt{3}$ times that of the focused case.

It is convenient to think of a particle that scatters light as though it were a tiny target of cross sectional area s_p, and all the light that falls on this area is scattered, while all that misses it travels on undeviated. This effective area s_p is actually somewhat larger than the geometric cross section of the particle. Besides the power incident on the particle, additional light is bent by the wave phenomenon of diffraction merely because the continuity of the wavefront has been disturbed by the particle's presence. (In like manner, particle physicists measure the "cross section" of an atomic nucleus for particle scattering, and this area exceeds the geometric size because a field of force reaches beyond the nucleus to influence particles that pass nearby.)

Next consider a volumetric distribution of scatterers, n_p particles per cubic meter, in a thin layer or slab of water as shown in Fig. 1. This figure represents particles simply as discs of area s_p. The slab width Δ is thin enough and particles are sparse enough so that no particle obscures another (with appreciable probability) and no ray scatters more than once. When a light beam of cross sectional area A falls on the slab at normal incidence it is obscured by the total effective area of all the particles in the volume $A\Delta$. These particles number $n_pA\Delta$ with total scattering area $s_pn_pA\Delta$. Hence, the fraction of power scattered is in the same proportion as the fraction of area obscured:

$$\Delta P/P = s_pn_pA\Delta/A = n_ps_p\Delta .$$

(Note that A has dropped out of the quotient.) Normally one does not know n_p and s_p separately, but merely the product n_ps_p which is measured as a phenomenological property of the scattering medium. In fact, seawater contains many species of particles, and one does not usually know n_ps_p for the separate species, but merely the phenomenological scattering constant s that results from all of them:

$$s = \sum_p n_ps_p . \tag{1}$$

Now loss is expressed as

$$\Delta P/P = -s\Delta . \tag{2}$$

Note that s has dimensions of inverse length, from n_p measured in length^{-3}, and s_p in length^{+2}. Thus it is interpreted as the fraction of the power scattered per unit propagation distance.

In the limit of thin slabs Eq. 2 becomes

$$dP/P = -s\,dr, \tag{3}$$

which integrates readily to give $\log_e P - \log_e P_o = -sr$, or

$$P = P_o e^{-sr} \tag{4}$$

Eq. 4 is an expression for the power that remains unscattered in a beam of light expressed as a function of distance r along the beam.

Besides scattering, light energy is also lost by molecular absorption in pure water and dissolved matter and by absorption in particles as well. Again the separate absorption rates are not generally distinguishable; one simply measures or calculates a bulk absorption constant a, the fraction of power absorbed per unit length along any ray. The above equations neglect absorption, and to correct this deficiency we add the absorption loss $-Pa\Delta$ to the loss $-Ps\Delta$ already given by Eq. 2. In the limit $\Delta \to dr$

$$-dP/P = (s + a)dr = \alpha\, dr, \tag{5}$$

replaces Eq. 3 and integration gives an equation to replace Eq. 4:

$$P = P_o e^{-\alpha r} \quad , \tag{6}$$

where

$$\alpha \equiv a + s \tag{7}$$

is called the attenuation constant.

In many problems the angular distribution of scattered light is an essential feature. In these cases the numerical value of the particle cross section s_p (not the physical particle) is divided into infinitesimal pieces ds_p, each of which scatters light into an infinitesimal solid angle $d\omega$ as shown in Fig. 2. Obviously ds_p is proportional to $d\omega$, for if the size of the solid angle doubles it clearly intercepts twice as much light. Let the proportionality be expressed by σ_p, the so-called differential scattering cross section, then

$$ds_p = \sigma_p(\theta, \varphi)d\omega \tag{8}$$

Here σ_p is expressed as a function of θ and φ since particles normally scatter more light in one direction than another. The total scattering cross section for the particle, s_p discussed before, may now be expressed by integrating σ_p over all possible directions of scatter.

$$s_p = \int ds_p = \int \sigma_p(\theta, \varphi)\, d\omega$$

or, expressing $d\omega$ in spherical coordinates,

$$s_p = \int \sigma_p \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \ . \tag{9}$$

Just as before, the particle function σ_p is rarely measured. Instead the bulk observable is a volumetric function σ found by exact analogy to Eq. 1, i.e., multiplying each particle species by its number density and summing to give

$$\sigma(\theta) = \sum_p n_p \sigma_p(\theta, \varphi) \ , \tag{10}$$

the so-called volume scattering function. By analogy to Eq. 3, $\sigma(\theta)$ is interpreted as the power scattered per steradian per unit distance along the direction of propagation, i.e.,

$$d^2P/P = \sigma(\theta)\, d\omega\, dr \ . \tag{11}$$

In other words, when power P_o passes through a thin slab Δ of scattering medium as shown in Fig. 3, a small light detector of area A at distance r will subtend a solid angle A/r^2 and receive the power $P_o \sigma(\theta)\Delta A/r^2$.

Note that the dependence on ϕ, the azimuthal angle, has been dropped from the left side of Eq. 10. This is rigorously valid for unpolarized light, since both particles and light are randomly

oriented, and experiments by Mertens have shown that the φ dependence is negligible in polarized light for most practical purposes. By analogy to Eq. 9, the total scattering constant is again found by integrating the differential quantities over all solid angle:

$$s = \int \sigma \, d\omega = \int \sigma \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta \, . \qquad (12)$$

In the last equality, the φ integration has been performed. (Or think of $d\omega$ as an annulus on a unit sphere having area $2\pi \sin\theta \, d\theta$.)

By way of review, the scattering constants defined so far are

$\alpha \equiv s + a$, the total attenuation constant
$a \equiv$ absorption constant
$s \equiv$ scattering constant (Eq. 12)

Then $e^{-\alpha r}$ is the fraction of unscattered light (Eq. 6) that remains after propagating a distance r along a ray. More important in this development, however, is another constant, the broad beam attenuation constant, defined as

$$\gamma \equiv a + s\,(>10^{\circ}), \text{ where}$$
$$s\,(>10^{\circ}) \equiv \int_{1/6}^{\pi} \sigma(\theta)\, 2\pi \sin\theta \, d\theta, \qquad \text{(cf. Eq. 12 and 13)} \qquad (13)$$

which gives the rate of power loss from a cone of 10° angular radius (1/6 radian). Alternatively, γ may be expressed

$$\gamma = \alpha - s(<10^{\circ}), \quad s(<10^{\circ}) \equiv \int_{0}^{1/6} \sigma \, d\omega \, .$$

This new constant gives the rate at which light vanishes from the small angle problem under consideration since $e^{-\gamma r}$ is the fraction of light remaining in a 20° cone (full angle) after propagating a distance r along a beam. In other words, light that scatters only 10° or less is counted as though it had not scattered at all for the purpose of defining a broad beam attenuation constant. The 20° cone is a useful size because it approximates a plausible field-of-view for long range underwater vision. For the remainder of this lecture we use $\sigma(\theta)$ to include only small angles ($\leqslant 10^{\circ}$) and use γ to account for all other forms of attenuation, i.e., absorption and large angle scattering. A typical scattering function $\sigma(\theta)$ is shown in Fig. 4. It is strongly peaked in the forward direction (small θ) for two reasons: diffraction of light around particles that are much larger than a wavelength, and refraction in transparent particles whose refractive index nearly matches that of water. For this reason, the value of γ is not very sensitive to the exact value of the small angle limit, i.e., 10° or 1/6 radian in Eq. 13, because the value of the integrand has decayed more than an order of magnitude at that point. It follows that γ may be used rather flexibly to represent the decay of light that reaches the general area of a target, i.e., light that is neither absorbed nor scattered to one side, while α represents the decay of light beamed to an exact point.

Multiple Scatter and Point Spread Functions

The fundamental scattering function $\sigma(\theta)$ was defined in terms of a thin slab of the scattering medium in which multiple scattering is negligible. When the propagation path is long enough (on the order of 1/s) so that multiple scattering must be included, then there is only one problem that has a simple solution, and it has already been solved, namely the calculation of power remaining in the unscattered beam. Eq. 4 is the solution for a medium with scattering only, and Eq. 6 includes absorption as well. The more general problem is to find the distribution of scattered light, and this more difficult task is the main subject of this lecture.

Light that focuses to a point in a clear medium will be spread in a scattering medium into a blur whose distribution is called the point spread function (or impulse response). Unlike σ, the blur is a function of propagation distance as well as scattering angle. The point spread function may be defined in either of two ways: as an illumination function, which describes the spreading of a beam propagating away from the source; or as a vision function, which gives blur distribution in the image of a point source. These two are perfectly equivalent when suitably normalized; although this equivalence may not be apparent at first thought. For the illumination definition, consider an illuminator with a point source focused on a screen some distance away as shown in Fig. 5a. The distribution of scattered light intensity on the screen is then the illumination function. It has also been called a beam spread function, but this name may lead to some confusion because "beam" usually implies collimated or at least unfocused light, while the most basic and useful definitions refer to the focused case. Fig. 5a illustrates both the unscattered portion and a typical series of scatters branching from two rays that emerge from the aperture, one on axis and the other off. This is to convince the reader that the same scatter angles lead to the same power displacement regardless of the original ray position in the aperture. The vision definition of the point spread function refers to the apparent or virtual distribution of radiance when a point source is viewed through a scattered medium as illustrated in Fig. 5b. This part of the figure shows the same scatter angles as 5a, and in both cases, the multiple-scatter ray displaces light energy the same distance (in the opposite direction) from the center of the distribution. Since the ray shown is perfectly general, the figure suffices to prove the equivalence of the two point spread functions. In problems where the distribution may be discussed from either the vision or illumination viewpoint, it is often convenient to illustrate only one, then the equivalence insures that the same conclusion applies to both.

The spread function could be normalized as power per unit area (intensity) at a distance ρ from the center of the distribution, but it proves more convenient and in keeping with optical practice to use angle instead of distance off axis and solid angle instead of area; i.e., we express the spread function in terms of power $f(\theta, R)$ per unit solid angle ω at angle θ off axis per unit power transmitted. Thus if the screen in Fig. 6 is at range R, the lamp transmits power P_0 and a detector of area A is at distance

ρ off axis, then the power it receives is

$$P_o f(\theta, R)\omega = P_o f(\rho/R, R)A/R^2$$

In the vision case normalization is a bit more tricky to define: f gives the power per steradian per unit power that would be received in the point image if the medium were ideal, neither scattering nor absorbing.

Two cases of spread functions that are not equivalent are shown in Fig. 7. The one in Fig. 7a is the same as in Figs. 5 and 6, but two scatters at the same angle θ illustrate the fact that they make different contributions to the spread function because one has a lever arm r_1 and the other r_2. Thus, scatters close to the screen have little effect compared to those close to the lamp. In the vision case, a familiar phenomenon illustrates the same principle: you can lay a sheet of vellum (tracing paper for a scattering medium) on a printed page and read through it quite well, but the same vellum lifted a centimeter off the page completely obscures vision. In the collimated case, Fig. 7b, two scatters of the same angle make the same contribution to the distribution function regardless of where they occur. When necessary to distinguish one function from the other, the focused spread function is labeled $f^f(\theta, R)$ while the collimated one is called f^c.

Another way to state the definition of f^c and f^f is by the position of the focal point with respect to an observer in the medium. For f^f the focal point is at one end of the propagation path, and for f^c it is at infinity (for the observer in the medium). Clearly these are special cases of a continum of spread functions for focal points at different places, but the two emphasized here cover nearly all cases of practical interest. Most if not all operational situations with remote objects (targets) correspond to the focused case with f^f, but the collimated case is of some interest because it is useful in instruments to measure small angle scattering. The collimation is ideal in a test instrument for the following reasons:

- The effect of scattering on the spread function is enhanced since all rays have the full lever arm.
- The beam size is invariant to changes in the test distance (sample length).
- The test distance may be changed without refocusing.
- If the water sample is bounded by plane windows, then the focus is independent of refractive index.

Thus, it is important to develop a technique to transform from f^c measured in an instrument to f^f for performance predictions in vision systems. This transformation is developed later in this lecture.

As long as particle scattering is the only source of blur (turbulent scatter will be introduced presently), the function $\sigma(\theta)$ is the fundamental description of the medium, and $f(\theta, R)$ is a derived function for particular ranges of interest. However, a spread function or its equivalent is the quantity usually measured at sea, and it is also the quantity needed for theoretical predictions. Therefore, we deal mostly in rules for finding $f(\theta, R_2)$ given $f(\theta, R_1)$ without much emphasis on $\sigma(\theta)$, except when needed for mathematical derivations.

Multiple Scatter and the Modulation Transfer Function

Only in the frequency domain is there a simple closed (no iteration) formula for finding the spread function $f(\theta, R)$ from $\sigma(\theta)$, or what is more important, a simple closed formula for finding $f(\theta, R_1)$ given $f(\theta, R_2)$, $R_1 \neq R_2$. The required theory and formulas were first published by Wells[1], but other authors[2,3] have recently rediscovered these techniques.

Let us assume as before that the scattered light has circular symmetry about the unscattered ray, even if the light is polarized. For small angle scattering this is very nearly the case as has been experimentally demonstrated, and even for large angles, the asymmetry is not large. The two-dimensional transform of circularly symmetrical functions reduces to a one-dimensional Fourier-Bessel integral on the radial variable:

$$F(\psi, R) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_o(2\pi\,\theta\psi) f(\theta, R)\theta\, d\theta \tag{14}$$

$$f(\theta, R) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_o(2\pi\,\theta\psi) F(\psi, R)\psi\, d\psi \tag{15}$$

The transform variable ψ has units of cycles/radian throughout this lecture. A small angle approximation is implicit in Eq. 14 because $d\omega$ becomes $2\pi\,\theta d\theta$, i.e., θ instead of $\sin\theta$.

The transform $F(\psi, R)$ represents more than a mere mathematical abstraction: it is a measure of the transparency of the medium to images of a target with long sinusoidally graded stripes at range R, oriented any direction, and having a spatial frequency of ψ/R cycles per unit length (wavelength of stripes = R/ψ). In other words $F(\psi, R)$ is the fraction of contrast retained in the image of a sinusoidal bar chart. Thus, it is appropriately called the modulation transfer function (MTF) of the medium. The MTF is measured relative to a lossless medium and may be measured directly by constructing the sinusoidal target or by using a conventional resolution bar chart instead and correcting for the harmonic content of the sharp-edged bars[REF. 4]. There are good reasons to make such targets and use them experimentally to measure $F(\psi, R)$ instead of $f(\theta, R)$. First, the angular precision required to measure very small scattering angles is built into the bar pattern. Second, the bar chart relieves the problem of measuring light intensities over the great dynamic range of a spread function; e.g.,

six orders of magnitude shown in Fig. 4. Third, simple mathematics (Eq. 17 below) permits calculations to check results during the course of the experiment.

As proven later in this lecture the MTF has a simple dependence on range; viz., each frequency decays exponentially:

$$F(\psi, R) = \exp[-D(\psi)R] \tag{16}$$

The decay function

$$D(\psi) = -[\log_e F(\psi, R)]/R \tag{17}$$

is independent of R and provides a useful check on the consistency of the measurements. Using Eqs. 14 and and 17 one can calculate D from measurements over different distances and thereby test their consistency. Moreover, a composite $D(\psi)$ may be derived in an optimum manner using long range data for low spatial frequencies that decay slowly and short range for high frequency that decay rapidly. Since D is independent of R, it is in this sense the counterpart in the frequency domain of the range-independent volume scattering function.

As proven later in the lecture, $D(\psi)$ may be expressed in terms of the volume scattering function $\sigma(\theta)$ and this relationship turns out to be the following for the two cases of main interest, focused and collimated:

$$D_p^f(\psi) = \alpha - \int_0^1 \Sigma(\psi t)\, dt \tag{18}$$

$$D_p^c(\psi) = \alpha - \Sigma(\psi) \tag{19}$$

Here Σ does not mean sum but rather the Fourier-Bessel transform of σ.

$$\Sigma(\psi) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_o(2\pi\theta\psi)\,\sigma(\theta)\,\theta d\theta \tag{20}$$

The added subscript p is a reminder of particle scattering, since similar expressions for another type of scattering will be discussed shortly. Note from Eqs. 18 and 19 that D is explicitly independent of R, a fact previously mentioned to show the utility of using D in checking the consistency of measurements made at different ranges by comparing $D = -\ln F/R$. The limits of D are its most significant features:

$$D_p(0) = \gamma, \quad D_p(\infty) = \alpha \tag{21}$$

These lead to a physical interpretation of the last term in Eqs. 18 and 19 as a low frequency restoration function. In the limit of high frequency $D_p = \alpha$, as it must to represent the light rays which by chance miss all the scattering particles, but low frequencies are partially restored because rays do not scatter enough to blur them, until finally $D(0) = \gamma$, the decay rate of absorption and large angle scattering only. Note that $D_p(\infty) = \alpha$ implies $F(\infty) \neq 0$, but we know that all experimentally measured optical transfer functions must eventually decay to zero owing to the quality of the optics or the diffraction limit if nothing else. This, however, is a property of other transfer characteristics of the system (transfer functions that multiply F) and not of particle scattering. We have observed experimentally cases in which measured $F(\psi)$ reaches a plateau equal to $e^{-\alpha r}$, then drops off again at the higher frequencies as required by other effects; see Fig. 8. Some of the high frequency drop-off may result from the medium as well as the optics; this is discussed in the next section concerning so-called turbulent scattering. At this point the reader may wish to skip to that section unless he is interested in detailed transformations among the functions D^f, D^c, and σ.

In the focused case, Eq. 18, Σ is merely averaged with its values for lower frequency ($t\psi$, $t < 1$) to give a value of the integral that is larger than $\Sigma(\psi)$, i.e., less attenuation. Physically this reduced attenuation corresponds to the effect of the scatterers near the focal point where scattering is ineffective, a result of the short lever arm. One easily demonstrates this ineffectiveness in various ways. You can read through a sheet of vellum when it rests on a printed page, but not when it is lifted above the page. Also there is a type of multifaceted glass used in shower doors that lets the person outside see in, but not vice versa. This discussion suggests a simple generalization to the thick slab case: the scattering medium that begins a distance r_1 from the focal point (target), ends at distance r_2, while the observer (or focused illuminator) is situated at a distance R. Then

$$D_p(\psi, r_1/R, r_2/R) = \alpha - \int_{r_1/R}^{r_2/R} \Sigma(\psi t)dt\,.$$

As mentioned before, it is important to have a means for converting from f^c to f^f in the event that f^c or F^c is measured in an instrument but f^f is needed for computations. Now the appropriate transformation may be expressed in terms of the corresponding spatial frequency decay function:

$$D^f(\psi) = \int_0^1 D^c(\psi t)\, dt \tag{22}$$

which follows from Eqs. 18 and 19.

The solution for D^c if D^f were given is equally easy,

$$D^c(\psi) = \frac{d}{d\psi}\left(\psi D^f(\psi)\right), \tag{23}$$

but is not the way to go if one can avoid it. Whereas the integration in Eq. 22 smooths out noise in the data, the differentiation tends to amplify it. This problem arises if one attempts to find $\sigma(\theta)$ from focused point spread functions. In this case D^c is desired to find $\Sigma(\psi) = \alpha - D(\psi)$ and then transform to $\sigma(\theta)$.

To find D_p^f from $\sigma(\theta)$ the integration in Eq. 18 may be carried out explicitly when the transform that defines Σ is substituted therein. Results may be expressed as

$$D_p(\psi) = \alpha - \psi^{-1}\int_0^{\theta_{max}} \sigma(\theta)\, w(2\pi\theta\psi)\, d\theta$$

where $w(t) \equiv \int_0^t J_0(s)ds$, or

$$\alpha - D_p(\psi) = U(\psi) = \text{transform of } u(\theta)/\theta, \tag{24}$$

where

$$u(\theta) \equiv \int_\theta^{\theta_{max}} \sigma(\theta')\, d\theta' \ . \tag{25}$$

Finally, suppose that you have found $D_p^f(\psi)$ experimentally by measuring either $f^f(\theta)$ or $F^f(\theta)$ and that you want to know $\sigma(\theta)$ to describe the water. Two computational procedures are available: the first is described briefly under Eq. 23, namely

$$D_p^c = \frac{d}{d\psi}\left[\psi D^f\right], \text{ and then } \sigma(\theta) = \text{Transform } (\alpha - D^c); \tag{26}$$

and the second option comes from inverting Eqs. 24 and 25 with the result

$$u(\theta)/\theta = \text{Transform } (\alpha - D_p) \text{ and } \sigma(\theta) = -du/d\theta. \tag{27}$$

The equivalence of these two techniques may be proven using Fourier-Bessel theorems. Both techniques suffer from differentiation of noise in the data as discussed above. Of course, if D^c instead of D^f were the starting place, one would require only the second of Eqs. 26.

Turbulent Scattering

There is another form of scattering that is fundamentally different from particle scattering. Instead of a probability per unit length of a discrete scattering event, the rays wander more or less continually through very small angles. For scattering with such a random-walk character one expects a Gaussian blur circle, and this is indeed the case. A central-limit theorem applies and yields a Gaussian distribution for the result of many scattering events along each ray regardless of the distribution function for the individual events.

Although turbulent scatter in air is very well known, it has never been measured thoroughly in the water, and its importance is in some doubt. Prof. S. Q. Duntley of Scripps has performed tank experiments with fresh sea water and found strong evidence for an unscattered beam at distances well in excess of 10 attenuation lengths (i.e., $\alpha R > 10$; an attenuation length is $1/\alpha$). However, until proven otherwise, we shall assume that turbulent scatter has at least some importance and treat it accordingly. Although Duntley performed his experiments very carefully, one may wonder how well his result holds for the open ocean; for example, the tank water could be inadequate for lack of wind-driven turbulence to stir otherwise stratified density changes.

The causes of turbulent scatter in sea water (if it exists) are believed to be refractive inhomogeneities due to temperature and salinity. In perfectly quiet water these variations would be horizontally stratified as a density gradient. However, in the real sea they may not be entirely stratified, but stirred somewhat into scattering blobs by wind-driven turbulence. Dr. Hodara discusses the orders of magnitude for strength and scale size of these inhomogeneities in Lecture 2.2. Convection currents rather like the familiar heat waves in air may also contribute. For lack of a better name, we refer to any random-walk scattering as "turbulent" regardless of its real cause.

The standard way to write a Gaussian is in terms of θ_o^2, the variance or mean square angular deflection. (θ_o is also called standard deviation.) For a two-dimensional distribution with circular symmetry, the expression is

$$f_t(\theta) = (\pi\,\theta_o^2)^{-1} \exp\left(-\theta^2/\theta_o^2\right), \tag{28}$$

where the subscript t refers to turbulence. Its transform is

$$F_t(\psi) = \exp[-(\pi\theta_o\psi)^2] \ , \tag{29}$$

or

$$D_t(\psi) = (\pi\,\theta_o\,\psi)^2/R \ . \tag{30}$$

All that remains is to establish θ_o in terms of R and how it differs from θ_o^c in the collimated case to θ_o^f in the focused case. This derivation is deferred to a section that treats three derivations of the same general nature. The result is

$$D_t^f(\psi) = k(\pi\,\psi)^2/3, \ D_t^c(\psi) = k\,(\pi\,\psi)^2 \tag{31}$$

where

$$k \equiv \begin{cases}\text{random-walk variance in the deflection of a single ray} \\ \text{per unit propagation distance (radian}^2\text{/meter).}\end{cases}$$

Simple comparison of Eqs. 28 and 29 then shows explicitly the well-known $\sqrt{R}$ dependence:

$$\theta_o^c = \sqrt{kR} \quad \text{and} \quad \theta_o^f = \sqrt{kR/3} \tag{32}$$

Note that the focused case gives a reduced blur by a factor of $\sqrt{3}$.

The turbulence spread function $f_t(\theta)$ can be convolved with the particle function to give the overall spread function of the medium, but as usual the computation is much easier in the frequency domain where it is merely a multiplication of transfer functions. In terms of $D(\psi)$, the product of transfer functions is merely an addition of decay rates:

$$D = D_p + D_t \tag{33}$$

Finally, Eq. 22, which gives $D^f(\psi)$ as an integral of $D^c(\psi t)$, holds for turbulent scattering as well as particle scattering. To prove this, merely substitute D_t^c from Eq. 31 into the integrand and integrate to get D_t^f as given by Eq. 31 (t^2 integrates to give the factor of 1/3). It follows that Eqs. 22 and 23 are general for all frequency decay functions, and for this reason they were written without subscripts.

Computational Outlook

After thirty-three equations, it is appropriate to review their utility and point out the sequence in which we use them for typical computations. Not too much can be done without a digital computer except for approximate calculations of some point spread functions by techniques given later in this lecture. One who is interested in imaging systems should not be too reluctant to set up the basic computer programs, because they open the door to more useful computations than you might at first appreciate. Examples will appear in later lectures of this series.

A data reduction program begins with experimental data, either MTFs measured as loss of contrast in images of bar charts, or point spread functions measured by scanning a light detector through a blur distribution (or densitometer across the photo of such a blur). If the data are spread functions, the first step is to transform them to MTFs by Eq. 14, and in any case the MTF is then reduced to $D(\psi)$ by Eq. 17. When data are taken in the same water at different propagation distances the resulting $D(\psi)$ curves should coincide. For example, Fig. 9 shows reasonable agreement for $D(\psi)$ derived from Merten's spread functions measured at 20, 40 and 60 meters in shallow sea water. The resolution in this case does not permit high enough spatial frequency to see a Gaussian roll-off owing to turbulence, Eqs. 29 and 30. Any data from collimated test cells as in Fig. 7b, $D^c(\psi)$, must be converted to $D^f(\psi)$ by Eq. 22 for a valid comparison to other data taken in the focused (variable lever arm) configuration (Fig. 7a). Usually we do not need to convert $D(\psi)$ to $\sigma(\theta)$ or vice versa unless it must be compared to data that is published only as $\sigma(\theta)$. In that case, use Eq. 20 for $\sigma \to \Sigma$, then Eq. 18 or 19 for $\Sigma \to D$, or use either Eqs. 26 or 27 to transform D into σ. As soon as all the experimental data have been reduced to one or more functions $D(\psi)$, one is ready to calculate point spread functions at the distances of interest to some problem such as imaging systems. To do this, the MTF is computed from $D(\psi)$, Eq. 16, and then transformed back to the spread function, Eq. 15. One may also compute the distribution of scattered light surrounding the image of a circular aperture and other useful distributions as well by multiplying the sea water modulation transfer function (MTF) by another transfer function before transforming. These techniques will be developed in Lecture 4.3; in fact the ability to insert system transfer functions along with sea water transfer function is a distinct advantage of the Fourier techniques described here.

Note that the full computational cycle, experimental data to $D(\psi)$ to computed distributions, hinges on the complete frequency decay function and does not necessarily require that it be decomposed into particle and turbulent components, D_p and D_t , nor does it require a distinct plateau where $D = \alpha$ (Fig. 8) separating the particle scattering at low spatial frequency from turbulent scattering at high frequency. This means that $D(\psi)$ is quite general and useful for any anomalous medium that deviates from the usual simplified description in terms of α.

Computerless Methods

Whenever possible a formal mathematical technique should be accompanied by simple examples that may be solved without a computer. They are invaluable to those who do not have ready access to a high-speed digital computer. Simple forms are also useful to check out computer programs and to perform rough estimates that map out problems for precise numerical solutions. In our case we desire a volume scattering function $\sigma(\theta)$ that has a plausible shape and yields spread functions $f^c(\theta, R)$ and $f^f(\theta, R)$ preferably in closed form, but at least in rapidly convergent series. The search for simple useful functions proved very frustrating; however, we do have one useful example. We advise the reader not to waste time searching for others, but to spend it programming instead.

The scattering function of interest is

$$\sigma(\theta) = \frac{s\theta_o}{2\pi(\theta_o^2 + \theta^2)^{3/2}}, \quad s = \alpha - \gamma = \int_o^{\theta_{max}} \sigma(\theta) 2\pi\theta d\theta \tag{34}$$

Two adjustable parameters are θ_o and s. Note that $\sigma(\text{large } \theta) \rightarrow s\theta_o/2\pi\theta^3$, and that the θ^3 decay is a reasonable fit to the steepest part of the curve shown in Fig. 4. From Eqs. 20, 18 and 19 it follows that

$$D^c(\psi) = \alpha - s \exp(-2\pi\theta_o\psi), \quad \text{and} \tag{35}$$

$$D^f(\psi) = \alpha - s[1 - \exp(-2\pi\theta_o\psi)]/(2\pi\theta_o\psi) \tag{36}$$

This D^f is consistent with the general shape shown in Fig. 9.

At a specific range R, the MTF's (f and c) are easy to express, but may be integrated to give a point spread function only as a power series, however, one which converges fairly well in powers of R. The collimated case is the easier

$$\begin{aligned} F^c &= \exp[-\alpha R + sR \exp(-2\pi\theta_o\psi)] \\ &= e^{-\alpha R}[1 + sR \exp(2\pi\theta_o\psi) + \frac{1}{2}(sR)^2 \exp(-2\pi(2\theta_o)\psi)\cdots] \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} f^c(\theta, R) = e^{-\alpha R}\{\delta_2(\theta) + [sR\theta_o/2\pi][(\theta_o^2 + \theta^2)^{-3/2} + \\ sR((2\theta_o)^2 + \theta^2)^{-3/2} + \frac{1}{2!}(sR)^2((3\theta_o)^2 + \theta^2)^{-3/2}\cdots]\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Here δ_2 is a two-dimensional delta function which merely says that the power $P_o e^{-\alpha R}$ is unscattered, while $P_o e^{-\alpha R}$ times the terms in the square brackets give the distribution of the scattered part (per steradian). For $\theta >> \theta_o$, the series in the second square bracket becomes

$$\theta^{-3} + sR\theta^{-3} + \frac{1}{2!}(sR)^2\theta^{-3}\cdots = \theta^{-3} e^{sR}.$$

However, we can do better than this for an approximate summation by finding the most important value of (n + 1) in the series

$$\sum_{n=o}^{\infty} (sR)^n / \{n!\,[(n+1)^2\theta_o^2 + \theta^2]^{3/2}\};$$

call this value N. Then

$$f^c(\theta, R) \approx e^{-\alpha R}\{\delta_2(\theta) + sR\theta_o e^{sR}/[2\pi(N^2\theta_o^2 + \theta^2)^{3/2}]\} \tag{39}$$

For sR >> 1, the terms of the series reach a maximum near $n = sR \approx n + 1$, and so N = sR is a good value. For a more generally valid estimate, consider the case in which $\gamma = 0$, $\alpha = s$, and then integration of f over all solid angles must yield 1 since all the power is found in the blur circle. Solving for N gives

$$N = sR/(1 - e^{-sR}), \tag{40}$$

which is consistent with both N = sR for large sR, and with N = 1 (first term of the power series, or n = 0) for sR << 1.

For the focussed case, Eqs. 22 and 35 give

$$F^f = \exp[-\alpha R + sR\int_o^1 \exp(-2\pi\theta_o\psi t)dt].$$

(This integration was carried out in Eq. 36, but it proves easier not to here.) Series expansion gives

$$F^f = e^{-\alpha R}[1 + sR\int_o^1 \exp(-2\pi\theta_o\psi t)dt + \frac{1}{2}(sR)^2\int_o^1\int_o^1 \exp[-2\pi\theta_o\psi(t_1 + t_2)]dt_1 dt_2\cdots].$$

In transforming this series to give the point spread function, it is best to swap the order of integration and perform the integrals on t last:

$$f^f(\theta,R) = e^{-\alpha R}\left[\delta_2 + \frac{1}{2\pi\theta_o^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(sR)^n}{n!}\int_o^1\cdots\int_o^1\frac{(t_1+t_2+\cdots t_n)dt_1\cdots dt_n}{[(t_1+\cdots t_n)^2+(\theta/\theta)^2]^{3/2}}\right] \tag{41}$$

$$f^f = e^{-\alpha R}\left[\delta_2(\theta) + \frac{1}{2\pi\theta_o^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(sR)^n}{n!}\ V_n(\theta/\theta_o)\right] \tag{42}$$

where

$$\left.\begin{aligned} V_1(s) &= v_1(s,0) - v_1(s,1),\ v_1(s,x) \equiv r^{-1},\ \text{and } r = (s^2+x^2)^{1/2};\\ V_2(s) &= -v_2(s,0) + 2v_2(s,1) - v_2(s,2),\ v_2 \equiv \log_e(x+r);\\ V_3(s) &= v_3(s,0) - 3v_3(s,1) + 3v_3(s,2) - v_3(s,3),\ v_3 \equiv x\log_e(x+r) - r;\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Note that each v_n is the indefinite integral (on x) of v_{n-1}, and that coefficients of v's are binomial coefficients. The higher order V_n may be approximated by noting in Eq. 41 that the sum $t_1 + t_2 \ldots t_n$ has a Gaussian distribution (central limit theorem) with mean n/2 and variance n/12. Using only the mean value gives

$$V_n \approx (n/2)[(n/2)^2 + (\theta/\theta_o)^2]^{3/2}$$

Compare with the series in Eq. 38; the factor of 2 corresponds to the average scatter having only half the lever arm; i.e., r/R = 1/2; see Fig. 7a.

A convenient closed-form approximation for spread functions results from an equation devised by Alan Gordon of NUC, San Diego. His equation gives the power $P_o\Phi(\theta,R)$ contained in a cone of 1/2 angle θ; i.e., Φ is the fraction that is neither absorbed nor scattered out of the cone in propagating a distance R. This quantity is related to the point spread function as follows:

$$f(\theta,R) = \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{1}{2\pi\theta}\ \frac{d}{d\theta}\ \Phi(\theta,R). \tag{44}$$

For the collimated and focussed cases, Gordon's equations are

$$\Phi^c(\theta) = \exp\left[-\left(\alpha - \int_o^\theta \sigma\, d\omega\right)R\right], \tag{45}$$

and

$$\Phi^f(\theta) = \exp\left[-\left(\alpha - \int_o^1\int_o^{\theta/t}\sigma\, d\omega dt\right)R\right]. \tag{46}$$

We have interpreted them as follows: for short range, the power in the cone is approximately equal to the power that has never once scattered through an angle larger than θ (i.e., the angle that would leave the cone in one scatter). Since additional rays leave the cone by multiple scattering through smaller angles, this estimate of Φ tends to be too large, Fig. 10a; however, this error is partially compensated by also neglecting the rays that scatter out in one large-angle event, and then scatter back into the cone by smaller deflections, Fig. 10b. The approximation fails when σ falls off too rapidly ($> \theta^{-4}$, proof unpublished) so that larger deflections are more likely the result of many small scatters than one large one.

From the cone interpretation, Eq. 45 is almost obvious: it is just like the expression $e^{-\alpha R}$ for the unscattered beam except that α is reduced by an amount that represents angles smaller than the cone angles. The expression is proved more cautiously in the next section along with Eq. 46 which is one step further from obvious. (Interpret t as r/R, Fig. 7a; it accounts for variable lever arm.) Eq. 44 applied to 45 and 46 gives

$$f^c = e^{-\alpha R}\left[\delta_2(\theta) + R\sigma(\theta)\exp\left(R\int_o^\theta \sigma d\omega\right)\right] \tag{47}$$

$$f^f = e^{-\alpha R}\left[\delta_2 + R\left(\int_o^1 \sigma(\theta/t)\ \frac{dt}{t^2}\right)\exp\left(R\int_o^1\int_o^{\theta/t}\sigma\, d\omega dt\right)\right] \tag{48}$$

(Do not be disturbed by infinite angles θ/t in Eq. 48 when $t \to 0$. The small-angle scattering function σ is defined so that it cuts off fast enough to converge.)

When expanded in powers of R, the first order terms from Eqs. 47 and 48 represent singly-scattered rays. These terms are (exp $\to$ 1):

$$f_1^c = e^{-\alpha R}R\sigma(\theta) \quad\text{and}\quad f_1^c = e^{-\alpha R}R\int_o^1 \sigma(\theta/t)\,dt/t^2 \tag{49}$$

The first of these follows from the definition of σ: σ gives the fraction scattered per unit distance, R the distance available, and $e^{-\alpha R}$ takes care of other losses. The second expression is similar except θ/t adjusts the angle for short lever arms r instead of R (Fig. 7a), and the factor t^2 adjusts differential solid angle: d area/R^2 $\to$ d area/r^2, ratio $R^2/r^2 \to t^{-2}$.

Expression 49 agrees exactly with the series in Eqs. 38 and 42 for the special form of σ in Eq. 34. Small deviations begin in second order terms. Usually Eq. 38 and 42 provide the better approximation for multiple-scatter spread functions at long range (sR > 1) when the assumed form comes

anywhere close to fitting the data. At short range, or with a scattering function $\sigma(\theta)$ that falls off very slowly, the other approximations, Eqs. 45 and 46 and their equivalents 47 and 48 may give better results.

Derivation of Scattering Functions

Three proofs of multiple scattering formulas have been deferred to this section because they all have a feature in common: the way to derive the formulas is to conceptually slice the medium along the line-of-sight into thin slabs of width Δ, set up an iteration from one slab to the next, and finally find the limit as $\Delta \to 0$. To illustrate the method with a simple example, consider the unscattered power as a function of distance, $P = P_o e^{-\alpha R}$. We previously proved this as a solution to a differential equation, see Eqs. 3 through 6. However, for a slab by slab proof, note that the fraction of power that passes through the first slab is $P_1/P_o = (1 - \alpha\Delta)$, by definition of α; the power through the second is $P_2/P_1 = (1 - \alpha\Delta)$, or $P_2/P_o = (1 - \alpha\Delta)^2$, and so on until $P_N/P_o = (1 - \alpha\Delta)^{R/\Delta}$, where R/Δ is the number of slabs. Using the basic definition of the numerical constant e, i.e.,

$$e \equiv \lim_{\epsilon \to \infty} (1 + \epsilon)^{1/\epsilon} \tag{50}$$

with $\alpha\Delta = -\epsilon$ and $R/\Delta = -(1/\epsilon)\alpha R$ gives in the limit $P/P_o = e^{-\alpha R}$.

In the last section we developed an approximation for the point spread function based on the fraction of light that propagates a distance R without ever scattering through an angle larger than θ. This was given in Eq. 45 as $\Phi^c(\theta) = \exp[-(\alpha - \int_o^\theta \sigma d\omega)R]$. The derivation in terms of slabs is exactly the same as above except that the fraction of power removed at each slab is no longer $\alpha\Delta$ but $(\alpha - \int_o^\theta \sigma d\omega)\Delta$ since power scattered less than θ is no longer removed from consideration.

The slab treatment is a bit tricky in the focussed case illustrated in Fig. 7a. The observed energy displacement θ (θ_2 in the figure) is caused by a larger scatter angle $\theta' = \theta R/r$; i.e., r is a lever arm that varies from one slab to the next. The fraction of power that scatters in the nth slab enough to exceed the observed displacement θ is then

$$\delta_n = \Delta\left(\alpha - \int_o^{\theta R/r_n} \sigma d\omega\right), \tag{51}$$

and the fraction of power that passes all slabs without ever suffering this displacement is

$$\Phi^f = P/P_o = (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)\cdots(1 - \delta_{R/\Delta}) \tag{52}$$

This no longer fits the elementary form 50 because the δ_n are not equal, but it is well-known that such an expression becomes an exponential function of an integral. To see this, replace each parenthesis by its exponential approximation, then

$$\Phi^f = e^{-\delta_1} e^{-\delta_2} \cdots e^{-\delta_{R/\Delta}} = \exp\left(-\sum_{n=1}^{R/\Delta} \delta_n\right) \tag{53}$$

Substituting 51 and taking the limit $\Delta \to 0$ transforms the sum into an integral:

$$\Phi^f = \exp\left\{-\int_o^R \left[\alpha - \int_o^{\theta R/r} \sigma d\omega\right] dr\right\} = e^{-\alpha R} \exp\left\{\int_o^R \int_o^{\theta R/r} \sigma d\omega\, dr\right\}, \tag{54}$$

which becomes Eq. 46, the desired result, upon substituting $r = tR$.

The next proof is the most important one. It makes the connection between the point spread function $f(\theta, R)$ and the scattering function $\sigma(\theta)$. The result is exact except for the small angle approximation and leads to Eqs. 16, 18 and 19 which have already been used extensively. For this proof, assume that the medium from 0 to r contains scattering particles; this is the region to the right of boundary No. 1 in Fig. 11a. Assume further that the remainder of the medium is free from scatterers, and that the resulting spread function is f_1. Now add one more slab of scattering medium, position No. 2 in the figure, and compute the new spread function f_2. It is

$$f_2^f(\theta) = f_2^f(\rho_2/R) = e^{-\alpha\Delta} f_1^f(\rho_2/R) + e^{-\gamma\Delta}\Delta \iint f_1^f(\rho_1/R)\,\sigma\,(|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|/r)\,d^2\rho_1/r^2. \tag{55}$$

Here $\vec{\rho}_1$ and $\vec{\rho}_2$ are vectors in the target plane as shown in Fig. 11a for the vision case of f^f. The first term after the second equals sign says that the fraction $e^{-\alpha\Delta}$ of f_1 remains unchanged corresponding to the fraction of light that is neither scattered nor absorbed in the new slab. The final term gives the part that does change: apart from losses $e^{-\gamma\Delta}$ an amount $\sigma(|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|/r)\Delta d^2\rho_1/r^2$ moves from an area increment at $\vec{\rho}_1$ to one at $\vec{\rho}_2$ as shown by dashed lines in the figure. Interpret this factor as the fraction σ per units distance and solid angle, times the distance Δ, times the solid angle $d^2\rho_1/r^2$, evaluated at the scattering angle $|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|/r$. Finally, the integration sums all values of ρ_1 which contribute. Note the variable lever arm r in the argument of σ which varies from 0 to R as slabs are added. Fig. 11b illustrates the same transfer of intensity ($\vec{\rho}_1$ to $\vec{\rho}_2$) for illumination, the case in which a beam is focussed on a screen in a scattering medium. The fact that either sketch applies equally well to the derivation of Eq. 55 again proves the equivalence of the two spread functions.

The case of light collimated in a test cell, Fig. 11c, gives a different result from the other

two cases because there is no lever arm r varying from 0 to R. Instead, any bend θ along a ray has the same effect; i.e., displacement $\rho = \theta f$ (f = focal length), regardless of where the bend occurs. To compound such bends, one must treat angles as vectors corresponding to the vector ρ in the focal plane: $\vec{\theta} = \vec{\rho}/f$. (Only when angles are much less than one radian may they be treated as vectors.) The result in this case is

$$f_2^c(\theta_2) = e^{-\alpha\Delta} f_1^c(\theta_2) + e^{-\gamma\Delta}\Delta\iint f_1^c(\theta_1)\sigma(|\vec{\theta}_2 - \vec{\theta}_1|)d^2\theta_1 \tag{56}$$

In principle one may compute the final spread function $f(\theta, R)$ by iterating Eqs. 55 or 56 from slab to slab until finally the spread function for the full range results. In practice, however, this process is much too cumbersome. The Fourier transform greatly simplifies the equations as a result of their convolution form. Not only are individual slabs simple, but the many slabs are easily combined into a closed expression for the full range R. Well-known Fourier theorems apply directly to Eqs. 55 and 56, especially the convolution theorem which states that the transform of the convolution of two functions is the product of their transforms. The results are

$$\left.\begin{aligned} F_2^f(\psi) &= \left[e^{-\alpha\Delta} + e^{-\gamma\Delta}\,\Delta\Sigma(\psi r/R)\right] F_1^f(\psi) \\ F_2^c(\psi) &= \left[e^{-\alpha\Delta} + e^{-\gamma\Delta}\,\Delta\Sigma(\psi)\right] F_1^c(\psi) \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Recall that Σ does not mean sum but rather the Fourier transform of $\sigma(\theta)$. Since one more slab merely multiplies the MTF by the factor in the square brackets, it follows that the final MTF for all the slabs is merely the product of all the slab factors times the MTF for no slabs; however, the latter equals the constant one (perfect image transmission) since one is the Fourier transform of a delta function representing no spread, and so

$$\begin{aligned} F(\psi) &= \prod_{n=1}^{N}[e^{-\alpha\Delta} + e^{-\alpha\Delta}\Sigma\Delta] \\ &= e^{-\alpha R}\Pi[1 + e^{(\alpha-\gamma)\Delta}\Sigma\Delta]. \end{aligned}$$

Here $N = R/\Delta$, and Σ means $\Sigma(\psi r/R)$ for F^f and $\Sigma(\psi)$ for F^c as in Eqs. 57. For sufficiently small Δ

$$F = e^{-\alpha R}\Pi\exp\left[\cancel{e^{(\alpha-\gamma)\Delta}}\,\Sigma\Delta\right] = e^{-\alpha R}\exp\left[\sum\Sigma\Delta\right],$$

and in the limit $\Delta \to 0$ ($N = R/\Delta \to \infty$),

$$F = \exp\left\{-\alpha R + \int_0^R \Sigma\, dr\right\} = \exp(-D(\psi)R) \tag{58}$$

This equation has the exponential form sought, and a comparison of its parts identifies $D(\psi)$, the spacial frequency decay rate: $D(\psi) = \alpha - \int\Sigma dr/R$. Restoring the arguments of Σ ($\psi r/R$ for focussed case, ψ for collimated) gives the different expressions for D^f and D^c:

$$D_p^f(\psi) = \alpha - \int_0^1 \Sigma(\psi t)dt \quad\text{and}\quad D_p^c(\psi) = \alpha - \Sigma(\psi),$$

the same as Eqs. 18 and 19 which we set out to prove.

Finally we conclude this section with a very similar derivation for the case of turbulent scatter concluding with the proof of Eq. 31. Again imagine the scattering medium built up one slab at a time, except now their width Δ cannot go to zero, because it must be at least as thick as the largest turbulent blob. Let $f_n(\theta)$ be the blur seen through n slabs; in particular, f_1 is the blur distribution caused by a single slab. The latter convolves with the blur of n - 1 slabs to produce the blur distribution for n slabs as follows:

$$f_n^f(\theta) = \int f_1^f(|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|R/r) f_{n-1}^f(\theta')d\omega', \quad\text{and}\quad R/r \to 1 \quad\text{for}\quad f^c \tag{59}$$

(Compare Eqs. 55 and 56 except $\vec{\theta}R$ was written $\vec{\rho}$ in Eq. 55.) Note the variable lever arm r in the focussed case which becomes simply R in the collimated case. Also recall the interpretation of these convolutions: the intensity f_{n-1} at each point $\vec{\theta}'$ in the blur from n - 1 slabs serves as a point source of light from which a fraction f_1 scatters through the angle $|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|$ to reach the new position $\vec{\theta}$ for n slabs.

Transforming Eq. 59 gives

$$F_n^f(\psi) = F^f(\psi r/R)F_{n-1}^f(\psi), \quad\text{and}\quad r/R \to 1 \quad\text{for}\quad F^c.$$

Again for N slabs in the full range R

$$F = \prod_{n=1}^{N} F_1\,; \quad \log_e F = \sum_{n=1}^{N}\log_e F\ . \tag{60}$$

It is well-known that the transform of any symmetric distribution function has the form

$$\log_e F_1(\psi) = -(\pi\bar{\theta}_\Delta\psi)^2 + \text{terms of order } \psi^4$$

where $\bar{\theta}_\Delta^2$ is the variance for one slab:

$$\bar{\theta}_\Delta^2 = \int \theta^2 f_1(\theta)d\omega.$$

(This is the moment generating feature; to prove it, write the Fourier-Bessel transform equation with J_o expanded as $1 - (\pi\theta\psi)^2$ + order (ψ^4).) Now Eq. 60 becomes

$$\log_e F^f = \sum \log_e F_1^f(\psi n\Delta/R) = \sum [-(\pi\bar{\theta}_\Delta\psi n\Delta/R)^2 + \text{order } (\psi^4)],$$

and

$$r/R = n\Delta/R \to 1 \quad \text{for } F^c.$$

The central limit theorem shows that the sum of the higher order terms is negligible for large N. Summing over n gives for F^f:

$$\left(\frac{\Delta}{R}\right)^2 \sum_{n=1}^{N} n^2 \xrightarrow[\text{large } N]{} \left(\frac{\Delta}{R}\right)^2 \frac{N^3}{3} = \frac{R}{3\Delta}$$

And for F^c:

$$\sum_{n=1}^{N} 1 = N = \frac{R}{\Delta}$$

Finally, $\log_e F^f = -(\pi\bar{\theta}_\Delta\psi)^2 R/3\Delta$, $\log_e F^c = -(\pi\bar{\theta}_\Delta\psi)^2 R/\Delta$. Since $D = -\log_e F/R$, it follows that $D^f = k(\pi\psi)^2/3$ and $D^c = k(\pi\psi)^2$ once $\bar{\theta}_\Delta^2/\Delta$ is identified as k, the variance per unit length. These last two equations are identical with Eqs. 31 that we set out to prove.

Conclusions

We have derived nearly every possible connection between measurable scattering functions by relating them all to one quantity, the spatial frequency decay function, $D(\psi)$. The modulation transfer function relates to D through Eqs. 16 and 17, and the point spread function to the MTF through Eqs. 14 and 15. The fundamental volume scattering function relates to D through Eqs. 18, 20 and 26 or 27 for the end-focussed case (Fig. 7a), and through Eqs. 19 and 26 for the collimated case (Fig. 7b). Direct connections between D's for the collimated and end-focussed cases are established in Eqs. 22 and 23. With these analytical tools, the analyst can challenge the self-consistency of experimental results. In particular, he can take a whole set of point spread functions measured at different ranges and/or a set of measured seawater transfer functions and compute $D(\psi)$ from each one. The resulting function must be the same in each case if the data all represent the same water.

In Lect. 4.3 these results will be related to light beams having various offsets and blurred distributions in the unscattered beam; e.g., spread functions for circular spots and the line spread function. Lect. 4.3 will also treat round-trip propagation from illuminator to target to detector and develop the main analytic tools for system performance predictions.

References

Ref. 1 -- Wells, W. H., "Loss of Resolution in Water as a Result of Multiple Small-Angle Scattering", J. Opt. Soc. Am., 59, p. 686 (June 1969).

Ref. 2 -- Yura, H. T., "Small-Angle Scattering of Light by Ocean Water", Applied Optics, Vol. 10, No. 1, January 1971.

Ref. 3 -- Arnush, D., "Underwater Light-Beam Propagation in the Small-Angle Scattering Approximation", J. Opt. Soc. Am., 62, p. 1109, September 1972.

Ref. 4 -- Coltman, J. W., J. Opt. Soc. Am., 44, p. 468 (1954).

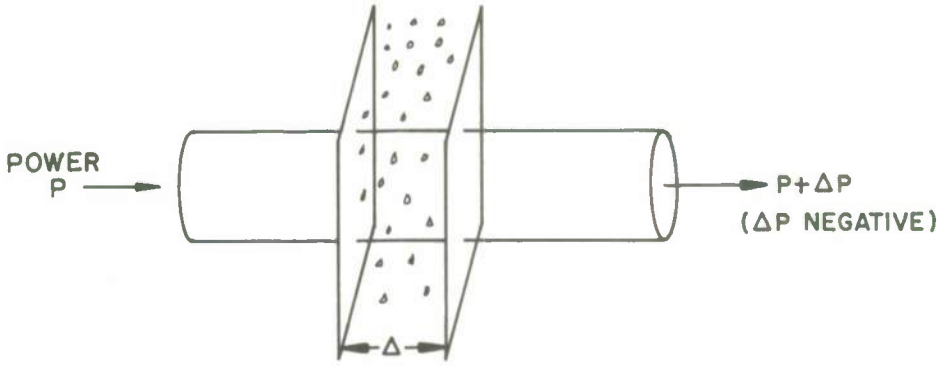


Fig. 1: LIGHT BEAM PASSING THROUGH A SLAB OF SCATTERING MEDIUM.

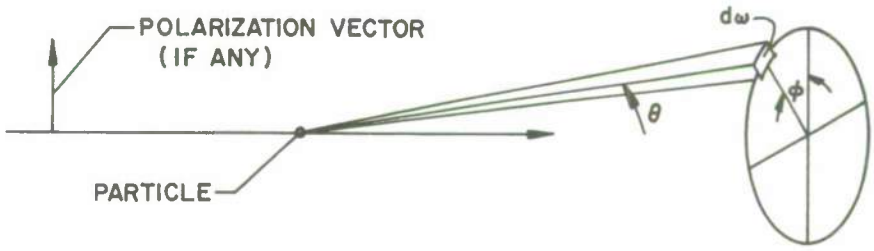


Fig. 2: SPHERICAL GEOMETRY FOR DEFINING DIFFERENTIAL SCATTERING CROSS SECTION

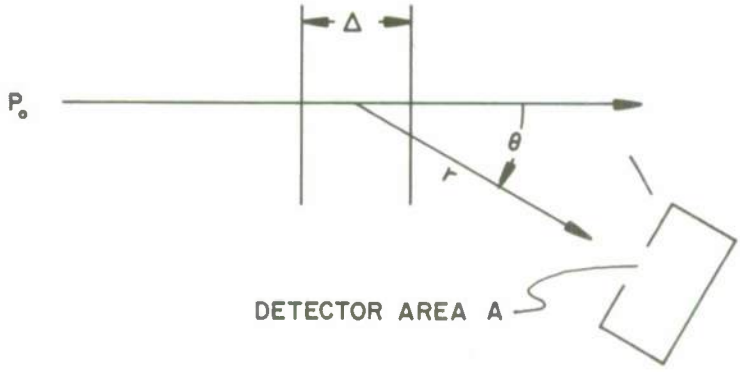


Fig. 3: GEOMETRY FOR VOLUME SCATTERING FUNCTION

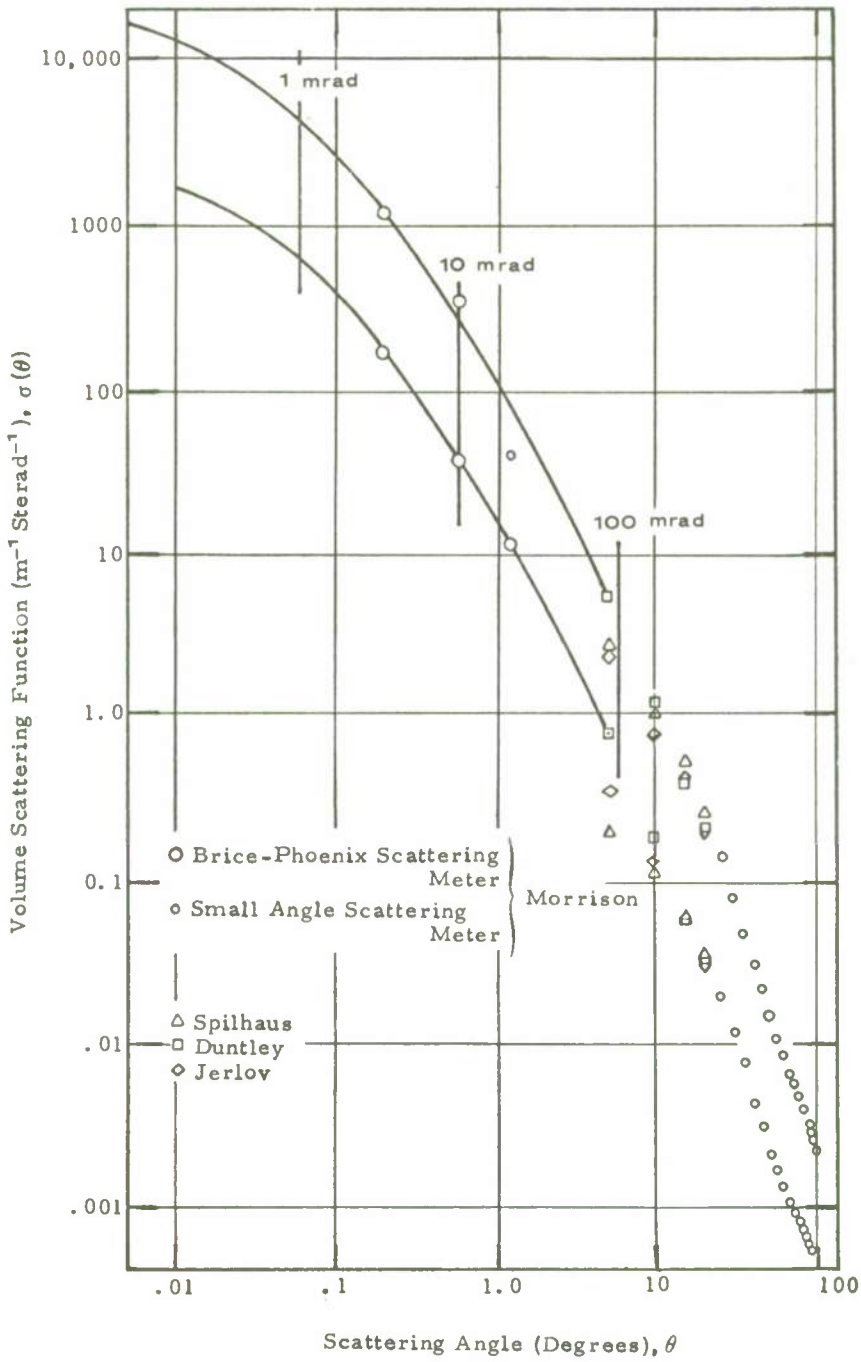


Fig. 4: SUMMARY OF MEASUREMENTS OF FORWARD SCATTERING FUNCTION $\sigma(\theta)$ BY MANY OBSERVERS.

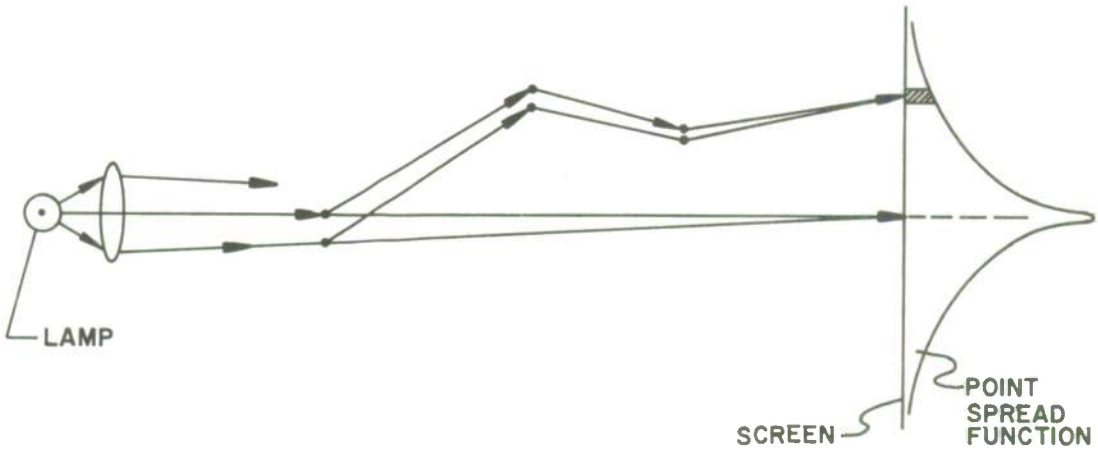


Fig. 5A: ILLUMINATION POINT SPREAD FUNCTION

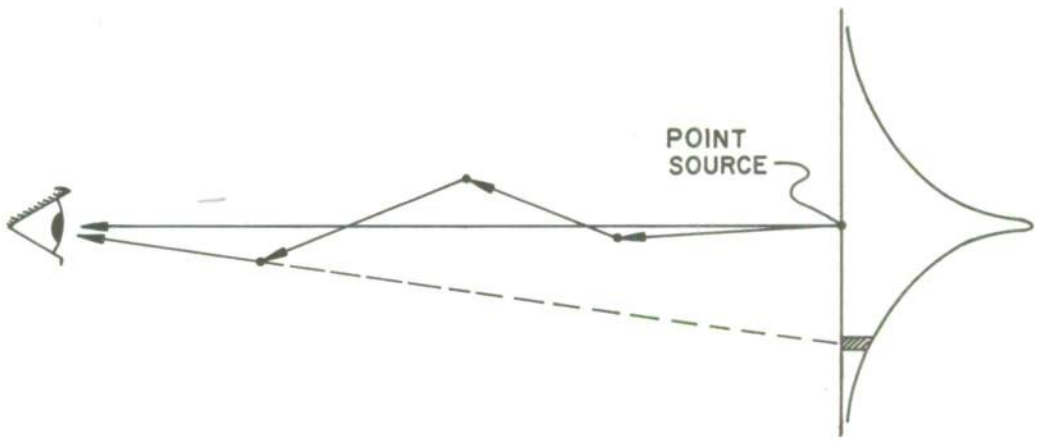


Fig. 5B: VISION POINT SPREAD FUNCTION

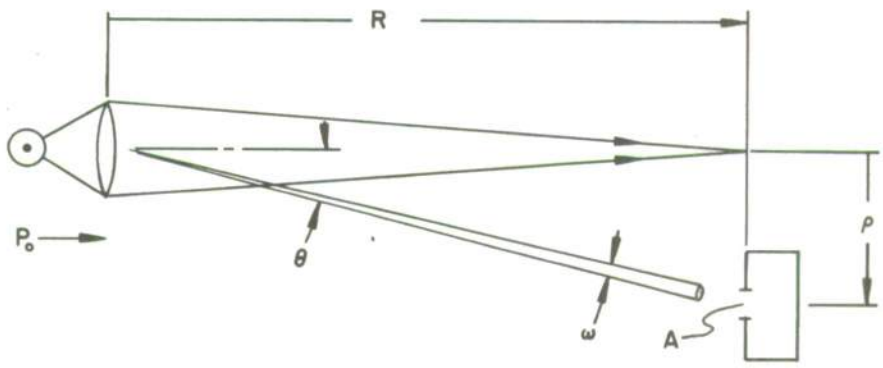
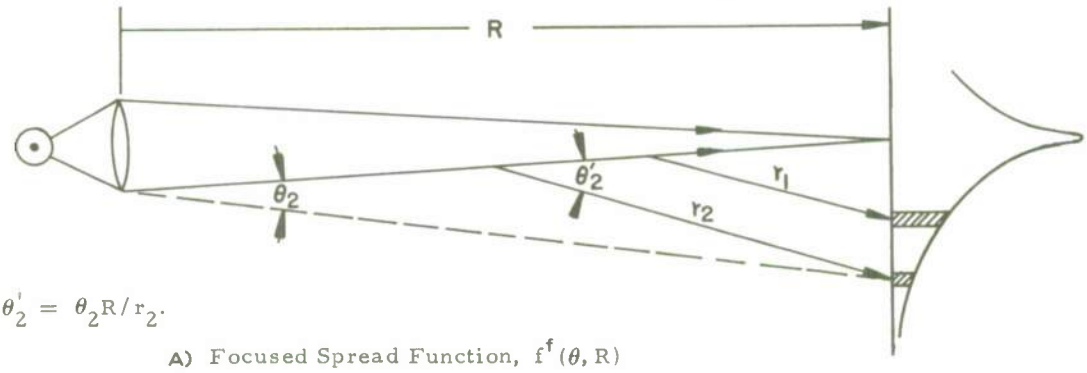


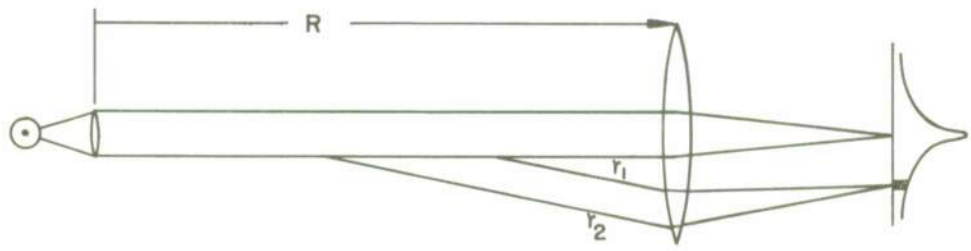
Fig. 6: NORMALIZATION OF POINT SPREAD FUNCTION: Detector Receives Power

$$(P_o A/R^2) f(\rho/R) = P_o \omega f(\theta)$$



Note $\theta_2' = \theta_2 R / r_2$.

A) Focused Spread Function, $f^f(\theta, R)$



B) Collimated Spread Function, $f^c(\theta, R)$

Fig. 7: FUNDAMENTALLY DIFFERENT SPREAD FUNCTIONS FOR FOCUSED AND COLLIMATED LIGHT

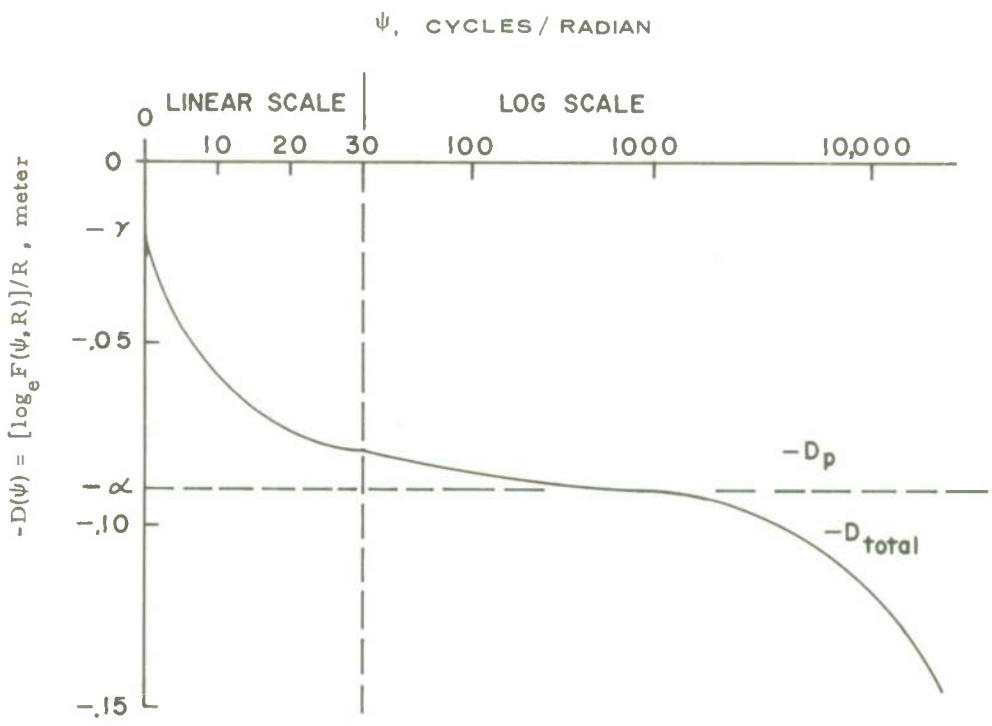


Fig. 8: GENERAL SHAPE OF $D(\psi)$, THE SPATIAL FREQUENCY DECAY FUNCTION

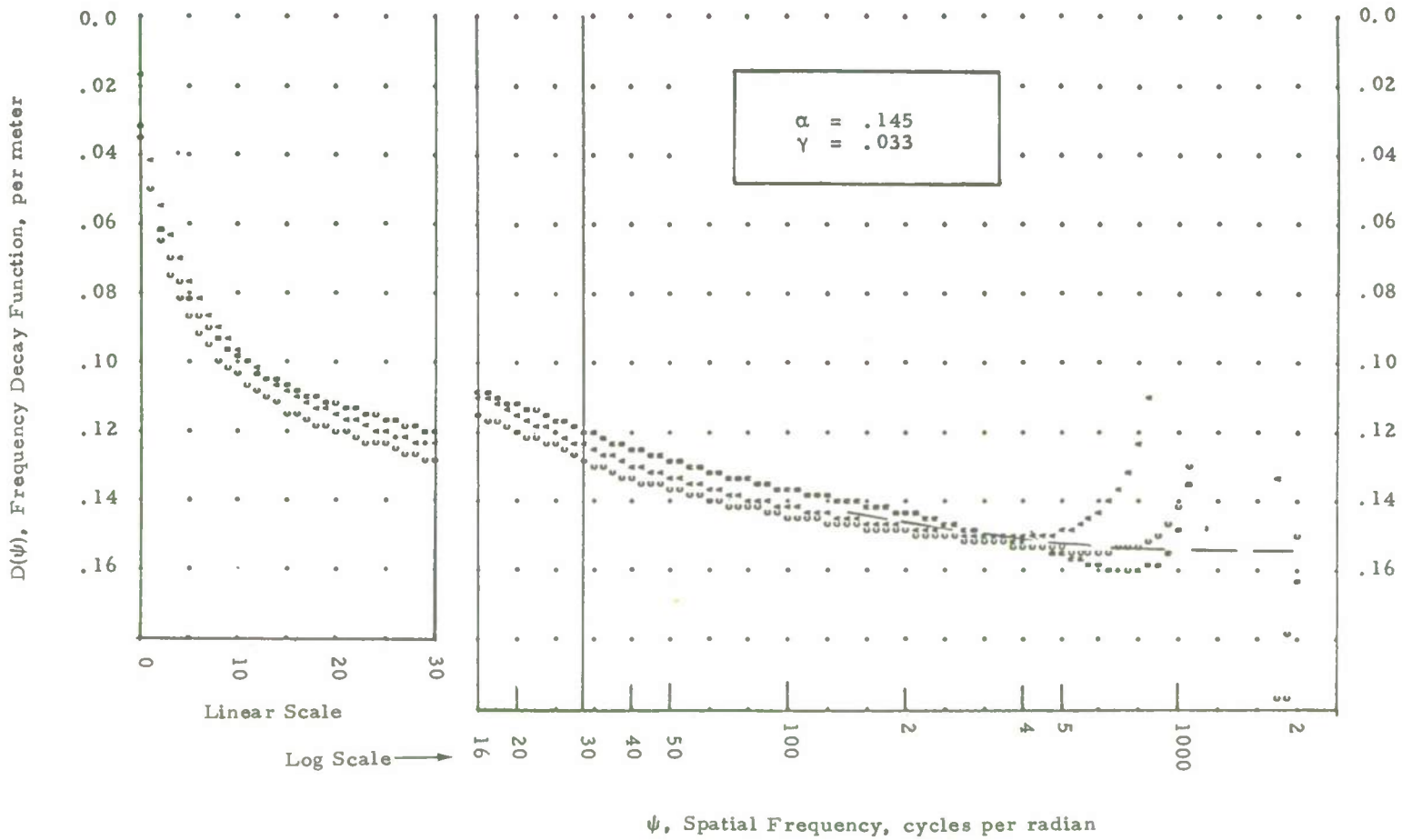


Fig. 9: FREQUENCY DECAY FUNCTION = $-[\log_e H(\psi)]/R$ FOR MERTENS' SHALLOW WATER DATA

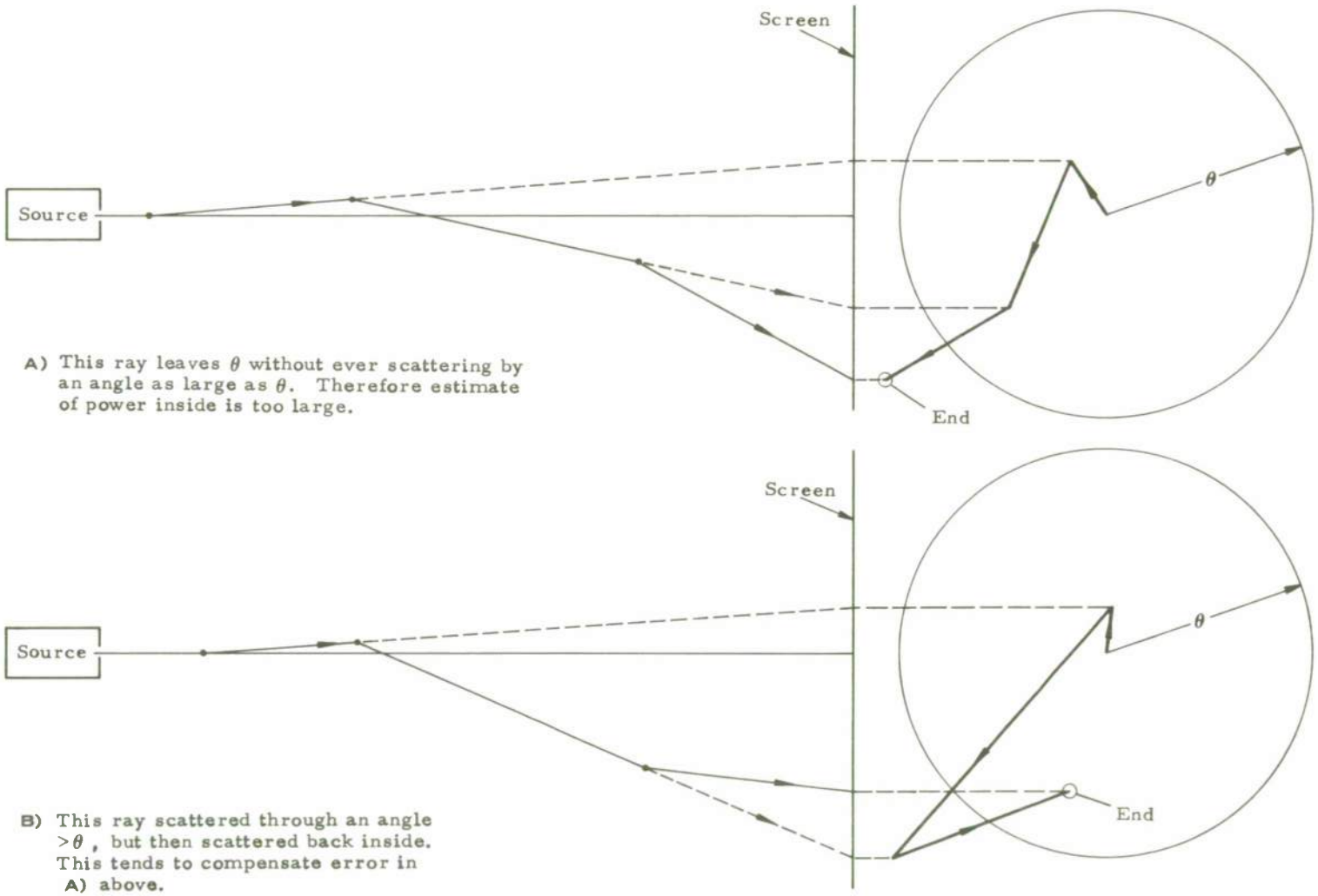


Fig. 10: ERRORS IN ESTIMATE OF LIGHT INSIDE ANGULAR RADIUS θ.

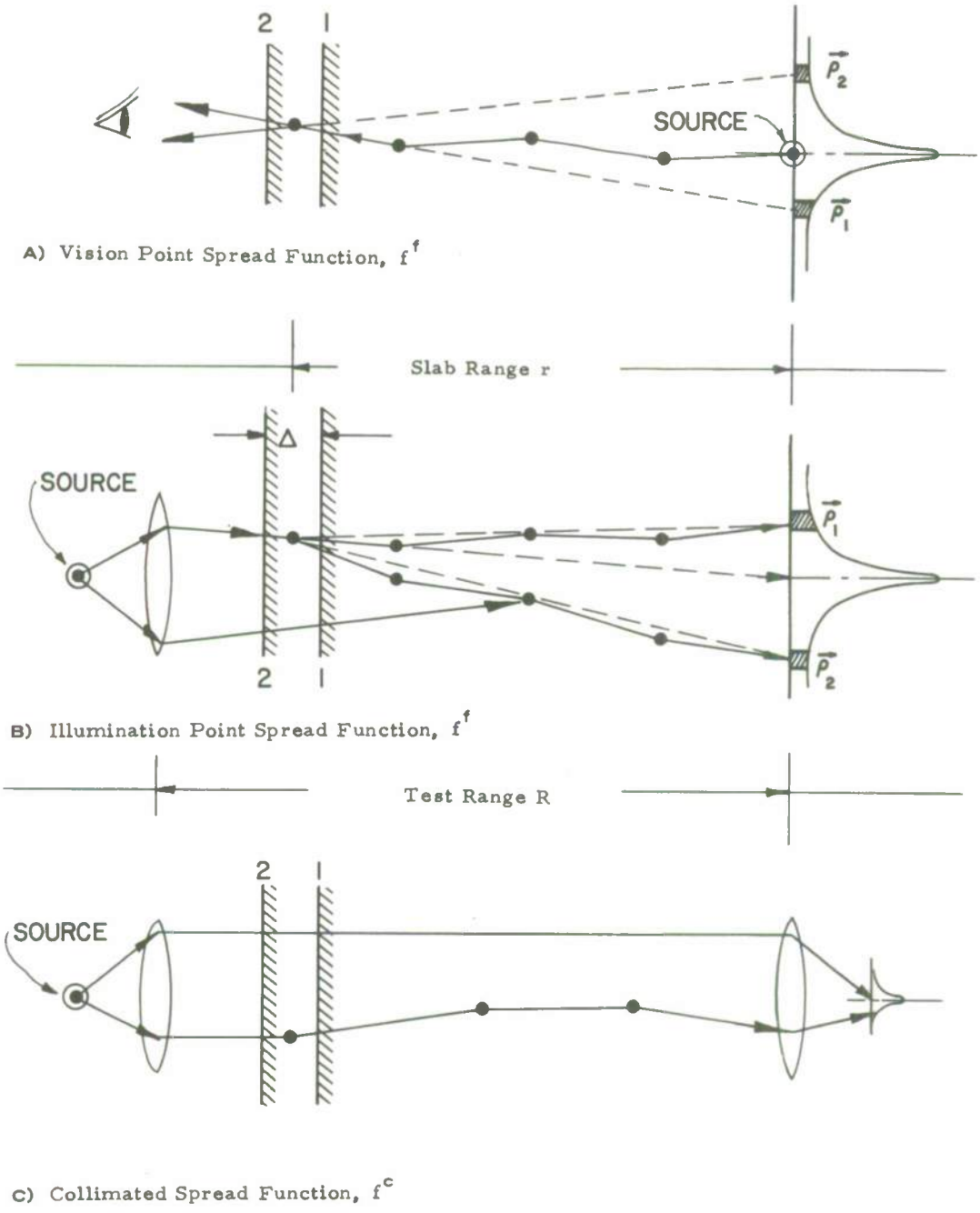


Fig. 11: GEOMETRY FOR DERIVING FUNDAMENTAL FORMULAS FOR THE POINT SPREAD FUNCTIONS

EXPERIMENTAL RESULTS OF SMALL ANGLE SCATTERING

Henri Hodara
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

In this lecture we distinguish between scattering at large angles ($10° \leq \theta$), small angles ($1/2° \leq \theta \leq 10°$) and very small angles ($\theta \leq 1/2°$). For each of these angular ranges we calculate the relative contributions from refraction and diffraction. We find large angle scattering is mostly due to diffraction, while refraction is responsible at very small angles. We verify our results against in-situ measurements by many observers.

We go on to analyze the results of two indirect measurements of scattering by: point spread function and modulation transfer function (MTF). The point spread function measurements after being Fourier transformed provide the first in-situ confirmation of the exponential range dependence of the transfer function. The MTF measurement allows us to recover the scattering function at very small angles (10^{-3} radians), and agrees well with classical observation for angles as large as 100°.

The Scattering Function, $\sigma(\theta)$

Light scattering in the sea is complicated by many contributing factors. Organic and inorganic particles covering a wide range of sizes, as well as turbulent inhomogeneities in salinity and temperature, are responsible for light behavior in the sea. As is well known, and unlike the atmosphere, the particle scattering distribution in the sea is highly peaked in the forward direction and drops down by several orders of magnitude between 1° and 90°. Duntley [1963] was first to point out that the shape of the scattering function measured in many waters remains approximately the same in the forward direction. This is well illustrated in Fig. 1 from Morrison [1967] who summarized measurements by many observers. Beyond 90°, the scattering function stays relatively constant in the back direction but exhibits much more variability between experiments. Fig. 2 by Duntley [1963] makes it clear.

The shape of the scattering function is attributed to different mechanisms operating in the forward and backward direction. In the latter, two different mechanisms interplay, particle and molecule backscatter; small differences in concentration can make one or the other predominate and account for the observed variability. Molecules of pure liquid scatter almost uniformly all around as shown in the Fig. 3a, b, c, d, from Dawson and Hulburt [1941]; addition of small impurities (Fig. 3e) peaks up forward scattering. The backscatter variability is evidenced in Fig. 4 from Morel [1970] who subtracted the molecular contribution.

It is convenient for the purpose of this lecture to distinguish three distinct scattering regimes:

Regime I :	Large Angle Scattering	$10° \leq \theta$	(1a)
Regime II :	Small Angle Scattering	$1/2 \leq \theta \leq 10° \sim 2 \times 10^{-1}$ rad.	(1b)
Regime III :	Very Small Angle Scattering	$\theta \leq 1/2° \sim 10^{-2}$ rad.	(1c)

and to separate the mechanisms responsible for scattering into

$$\text{Diffraction} \quad \theta_d = \lambda/D \tag{2a}$$

$$\text{Refraction} \quad \theta_r = \Delta n/n \text{ with conditions } \begin{cases} D/\lambda >> 1 \\ (2\pi D/\lambda)(\Delta n) >> 1 \end{cases} \tag{2b}$$

λ is the light wavelength, D the particle diameter, $\Delta n/n$ the refractive index contrast between seawater of index $n \simeq 1.34$ and particle with index $n + \Delta n$. The quantity $(2\pi D/\lambda)(\Delta n)$ is the phase shift of the lightwave through the particles. For refraction to predominate it is necessary that

$$\lambda/D << \Delta n/n \tag{3}$$

Regime I: $10° \leq \theta$

Large angle scattering cannot be explained by refraction for it would require $\lambda/D << 2 \times 10^{-1} < \Delta n/n$. The first inequality, $D >> 5\lambda$ implies $D \geq 50\lambda$, that is particle diameters of the order of 25 microns. Particles of that size occur in relative low number as shown in Table I below, based on Ochakovsky's [1966] measurements and our own calculations. Particle diameters rarely exceed 50 microns and this is amply confirmed by many other measurements such as those of Gordon, Baker and Brown [1972], shown in Fig. 5. On the other hand, for diffractive scattering to occur in this regime,

$$2 \times 10^{-1} \leq \lambda/D$$

which implies particles diameters smaller than 5 wavelengths, or 2.5 microns. Note from Table I that particles of that size abound in the sea and their contribution, s_i to the total scattering coefficient

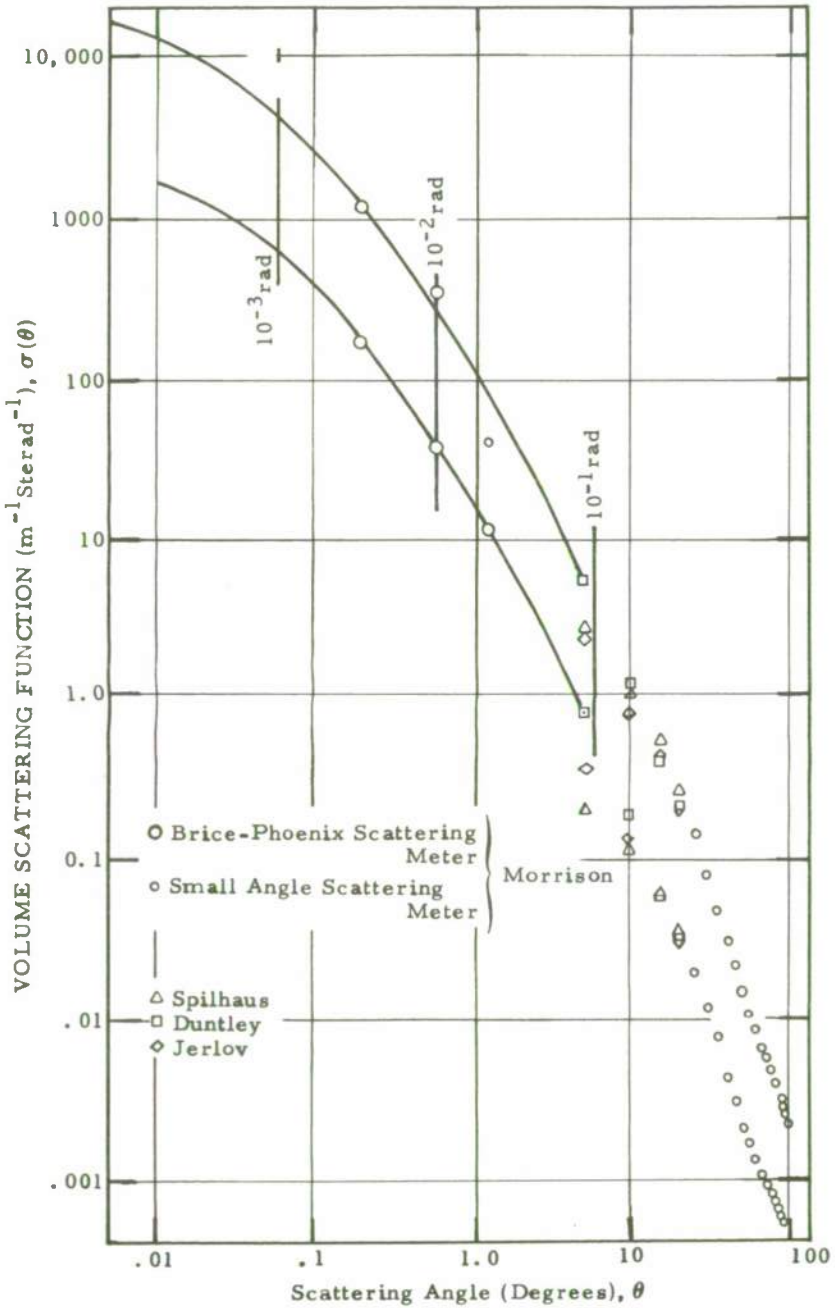


Fig. 1: Summary of Measurements of Forward Scattering Function, σ(θ) as a Function of Angle θ by Many Observers.

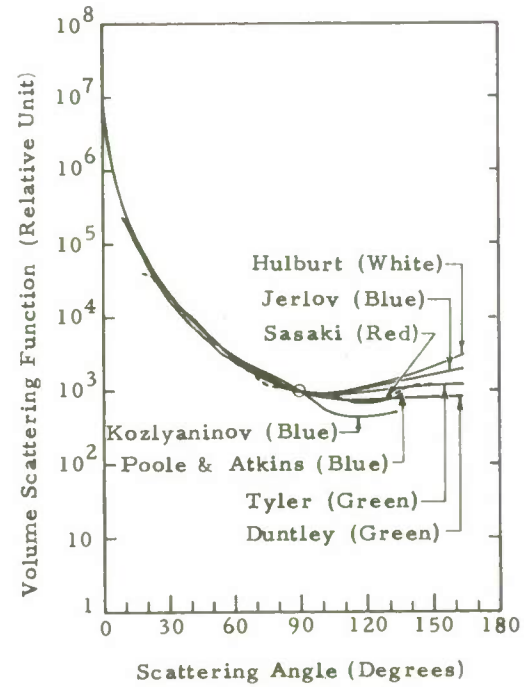


Fig. 2: Typical Measurements of Natural Light Scattering in the Sea

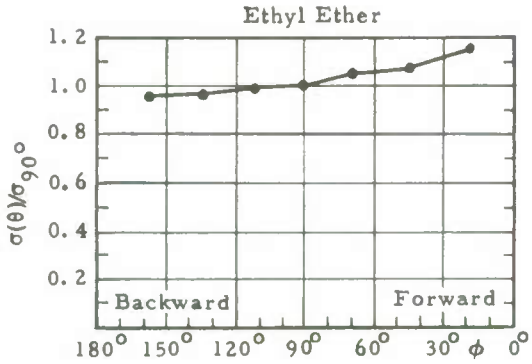


Fig. 3a

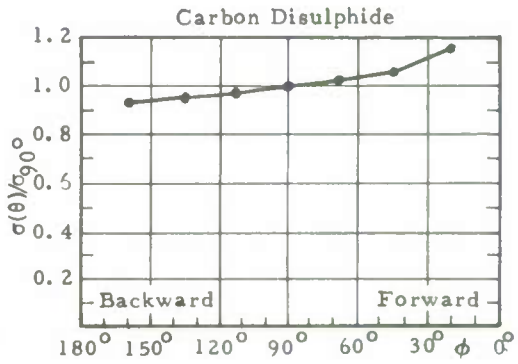


Fig. 3c

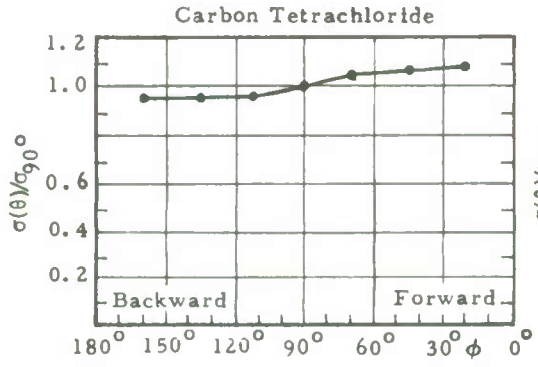


Fig. 3b

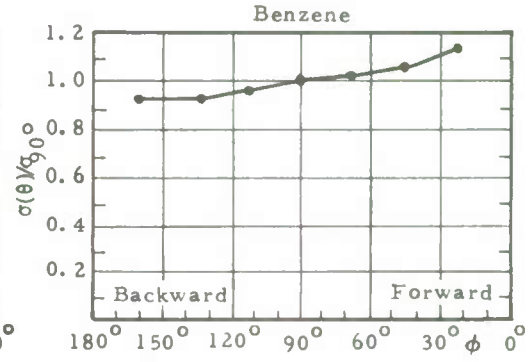


Fig. 3d

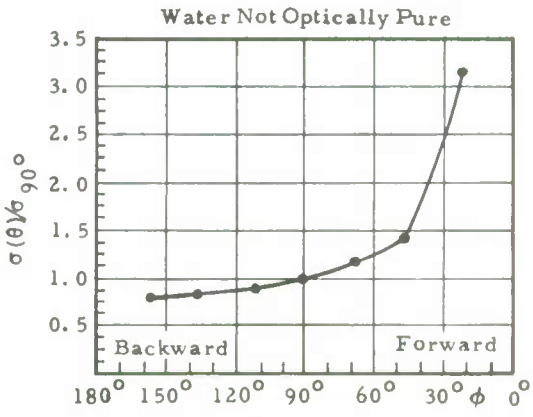


Fig. 3e

Fig. 3: Scattering function of pure liquids and water

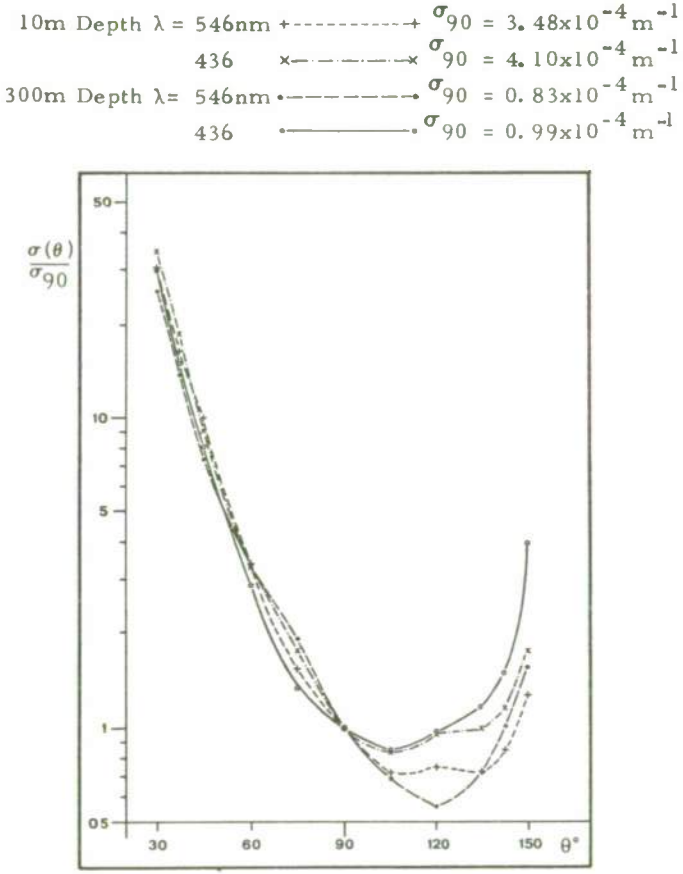


Fig. 4: Particle scattering function, $\sigma(\theta)$ after subtracting molecular scattering

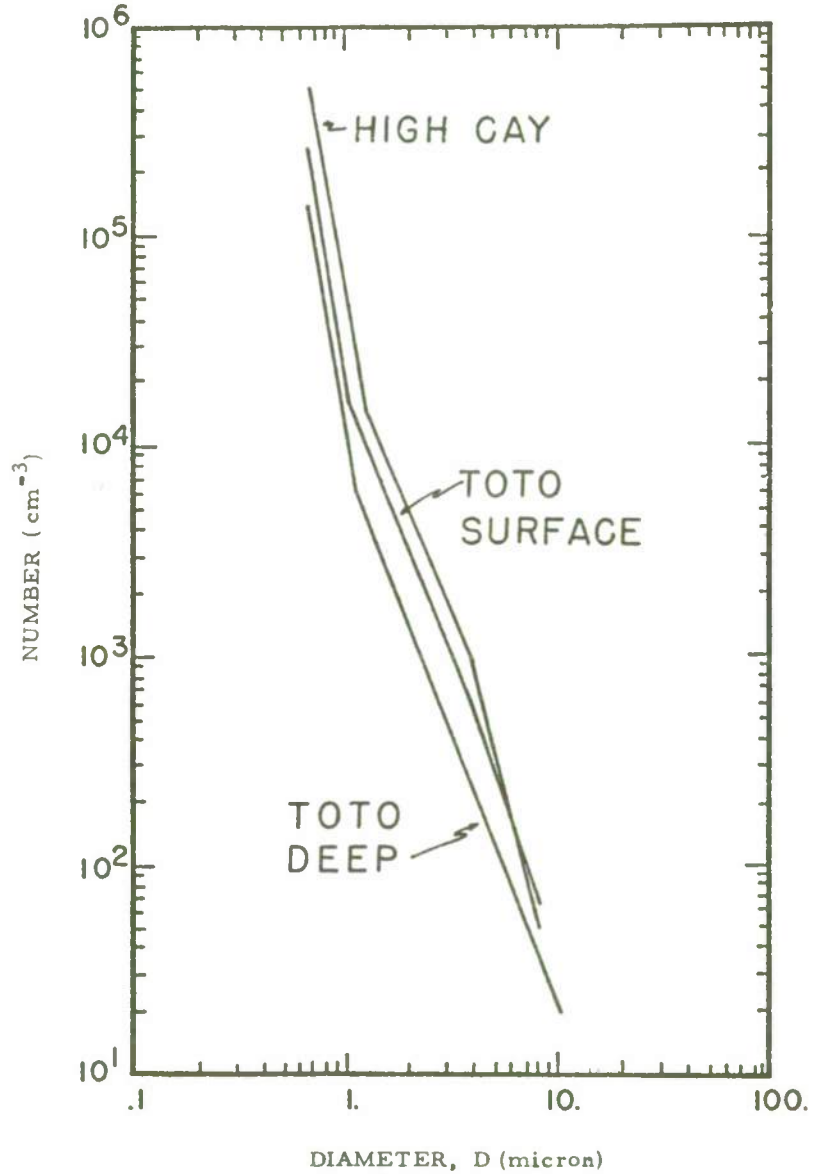


Fig. 5: Cumulative particle size distribution with diameter less or equal than D

TABLE I

RELATIVE PARTICLES CONCENTRATIONS AND SCATTERING COEFFICIENTS IN THE MEDITERRANEAN (After Ochakovski [1966])

Particle Diameter Range (Microns)	1<D<2.5	2.5<D<5	5<D<10	10<D<25	25<D<50	50<D	Total Scattering Coefficients
Mean Particle Diameter, D_i	1.75	3.75	7.5	17.5	37.5	75	
Relative Particle Concentration n_i/N	.7808	.0919	.0384	.0662	.0169	.0057	
Scattering Coefficients $s_i = \frac{(n_i/N)D_i^2}{\sum(n_i/N)D_i^2} s$	.0039 m^{-1}	.0018 m^{-1}	.0031 m^{-1}	.0123 m^{-1}	.0336 m^{-1}	.0453 m^{-1}	.10 m^{-1}
n_i/N	.6371	.1583	.0616	.1096	.0279	.0055	
s_i	.0036 m^{-1}	.0036 m^{-1}	.0056 m^{-1}	.0233 m^{-1}	.0636 m^{-1}	.0502 m^{-1}	.15 m^{-1}
n_i/N	.8647	.0559	.0275	.0402	.0100	.0017	
s_i	.0177 m^{-1}	.0046 m^{-1}	.0090 m^{-1}	.0308 m^{-1}	.0821 m^{-1}	.0558 m^{-1}	.20 m^{-1}
Diffraction Limit, $\theta_d = \lambda/D$	$\theta_d > 12° > \theta_d > 6° > \theta_d > 3° > \theta_d > 1°.20_{mrad} > \theta_d > 10$ mrad						

$$s = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{6} n_i D_i^2 \tag{4}$$

is only a few percent, which explains why the scattering function at these angles is much lower than at smaller angles. We cannot however deduce from these simple calculations whether organic or inorganic particles predominate in this regime. Gordon, Baker and Brown [1972] have used the results of Mie's theory to generate known volume scattering functions from a distribution of particles in a few size ranges and with different refractive index. They found that the bulk of scattering at large angles came from particles of diameters $1.25\mu < D < 3.75\mu$ with refractive contrast, $\Delta n/n = .15$. Such high contrast is most likely to be produced by inorganic particles.

Regime II: $1/2° \leqslant \theta \leqslant 10°$

Let us turn our attention to small angle scattering, in the range $10^{-2} \leqslant \theta \leqslant 2 \times 10^{-1}$ radian. The sharp peaking of the forward scattering function and its constancy among many experiments, well illustrated by Nyffeler [1970](Fig. 6a) and more recently by Matlack [1972](Fig. 6b) is more difficult to explain. Again refractive scattering implies

$$10^{-2} < \Delta n/n < 2 \times 10^{-1} \tag{5a}$$

$$\lambda/D << \Delta n/n \tag{5b}$$

If refractive contrast in the sea reaches 2×10^{-1}, then (5b) implies particles of diameter $D >> 2.5\mu$, say $D = 25\mu$. We see from Table I, that although there are very few particles in that range, they provide the greatest contribution to the scattering coefficient. Particles with that refractive contrast are inorganic in the great majority. We cannot expect refraction to account for scattering at the lower angles, 10^{-2}, although refractive contrast of that order is common among biological particles; if refraction were dominant, $\lambda/D << 10^{-2}$ and the diameter would have to be much larger than 50 microns. Fig. 5 and Table I do not give enough information as to whether particles of that size exist in sufficient number to contribute to the total scattering cross-section. On the other hand, if diffraction is the dominant mechanism, it requires

$$10^{-2} \leqslant \lambda/D , \tag{6}$$

which calls for particles of the order of 50 microns, a size consistent with the concentration and scattering cross-section of Table I. It would seem from the above that both refraction and diffraction are responsible for scattering in the range $1/2° < \theta < 10^{-1}$. These simple considerations do not predict however the magnitude of the forward scattering. To get some numbers we must resort to wave theory, which takes into account refraction, diffraction and their interference. This is done in a set of scattering diagrams by Hodkinson [1963], shown in Fig. 7. They illustrate very well the forward scattering peak caused by various size particles of refractive contrast $\Delta n/n = .16$, suspended in water. Note how diffraction contributes to forward peaking much more than refraction for sizes ranging from 40 microns to 100 microns. Yet this does not explain forward scattering in the ocean: The scattering function of Fig. 7 drops down only by a factor of 10 between 0° and 10°, for a particle as large as 40 microns. Most particles in seawater are almost transparent, with contrast perhaps as low as $\Delta n/n = .01$, which would further reduce the slope of the scattering function shown in Fig. 7. To account quantitatively for the large scattering at small angles, either the refractive index must be much larger than .16, an unlikely possibility, or particles much larger than 50 microns must be present. The latter is more plausible but not many measurements show particle counts with that large a diameter. Salinity and temperature inhomogeneities have also been proposed as possible mechanisms. As discussed in Lecture 2.2,

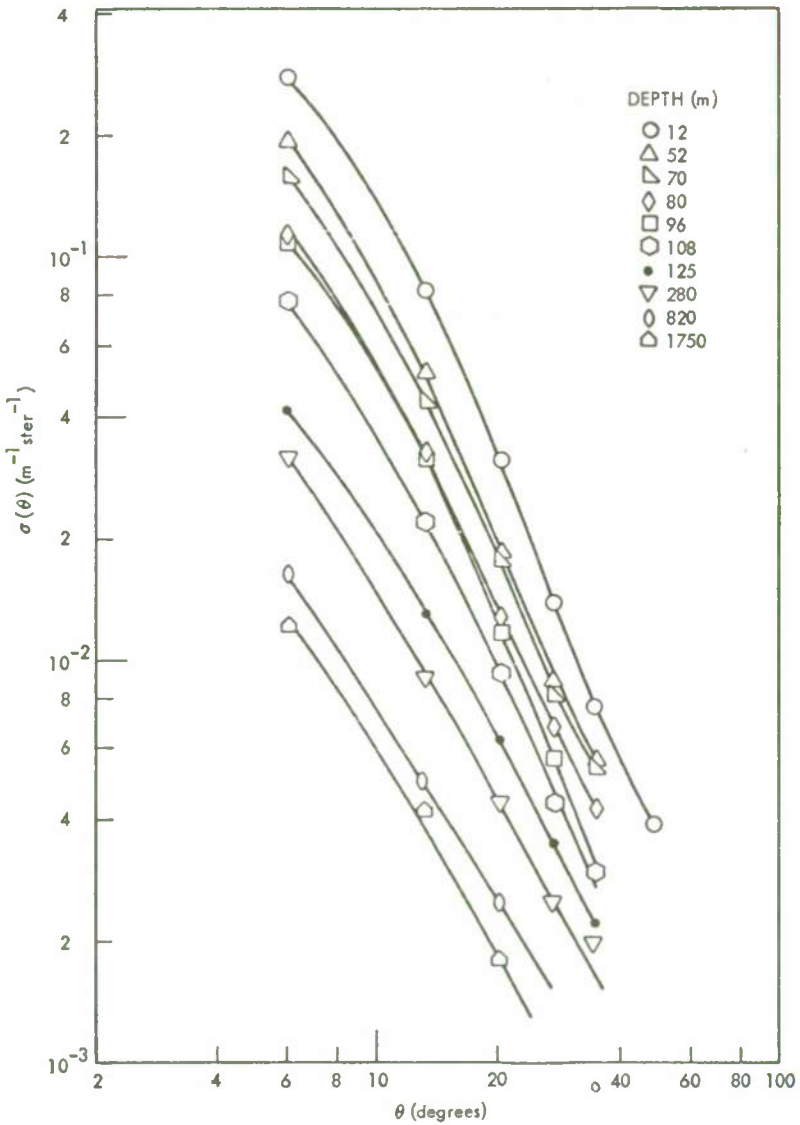


Fig. 6b: Volume Scattering Functions at Selected Depths

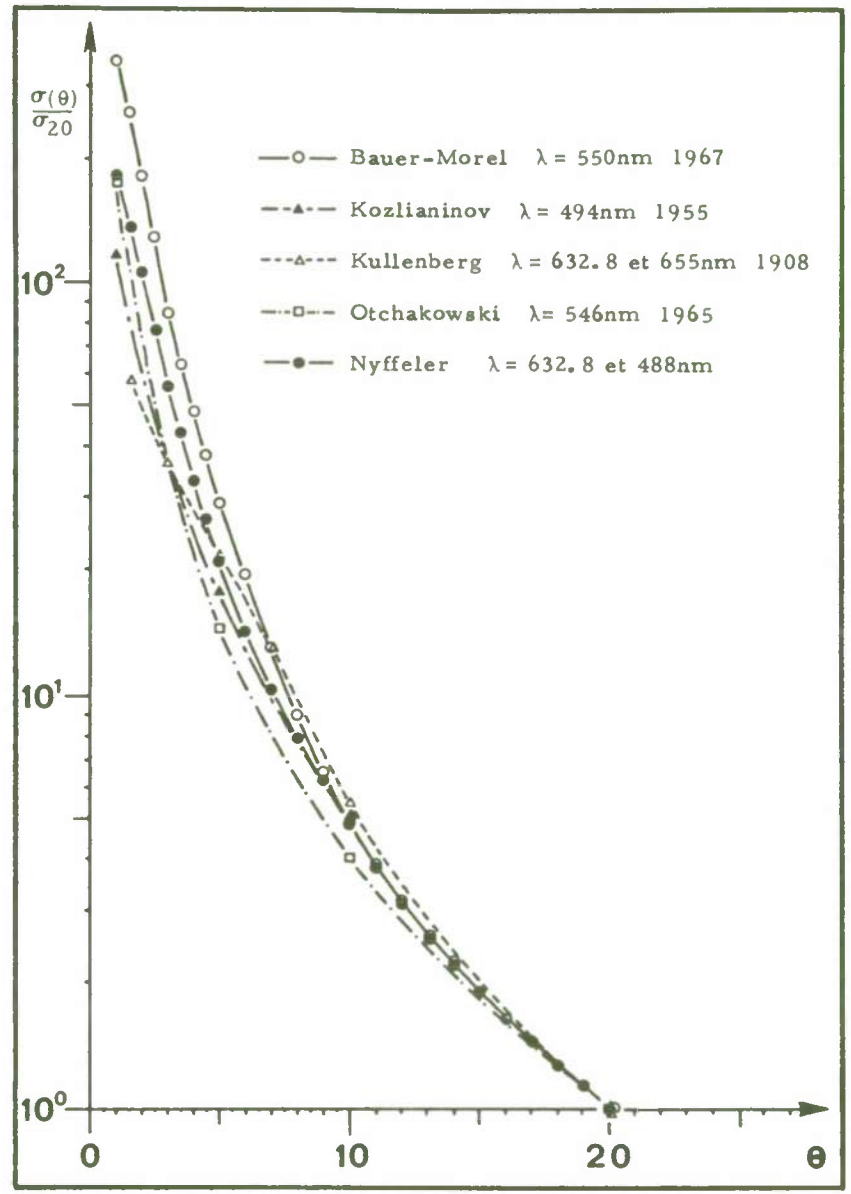


Fig. 6a: Small Angle Scattering Measured by Several Observers

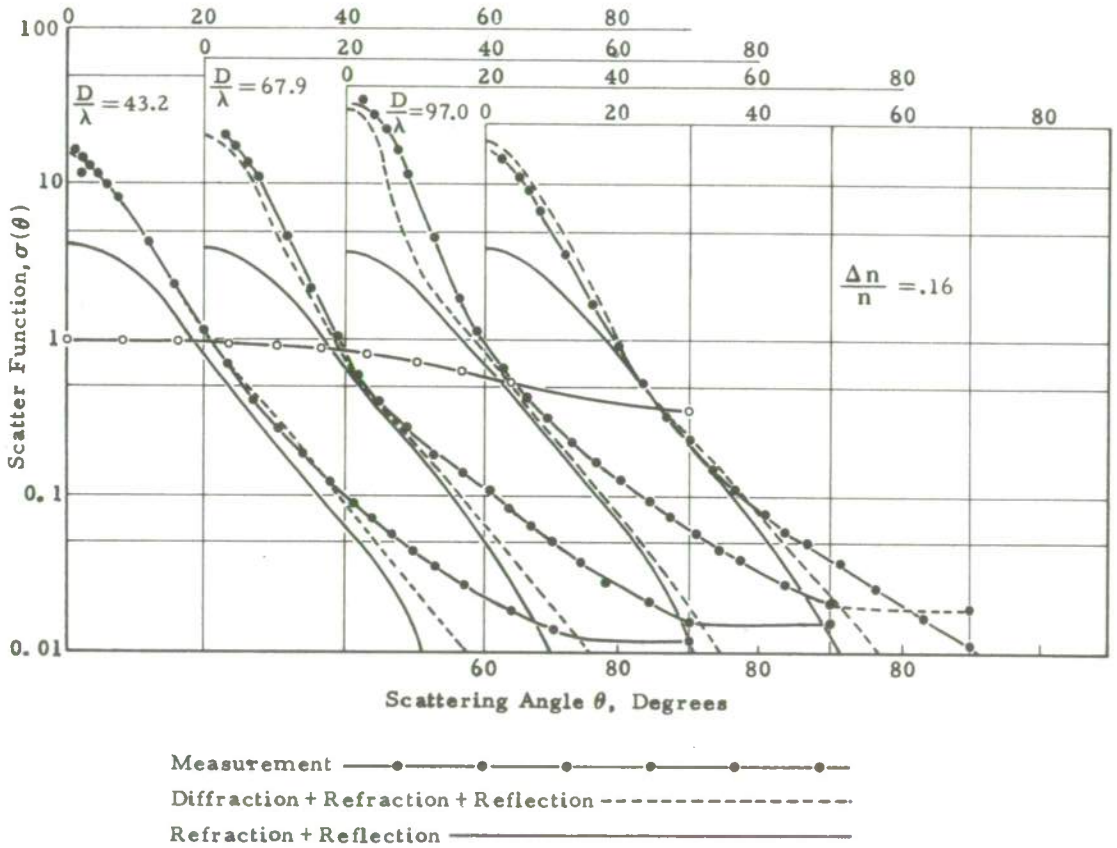


Fig. 7: Scattering Function of Quartz Spheres Suspended in Sea Water

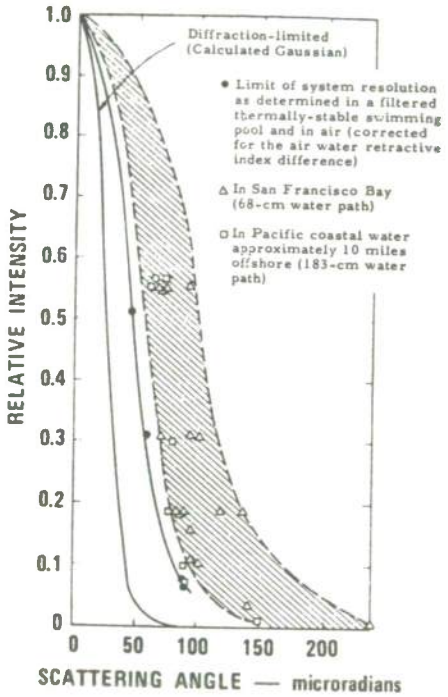


Fig. 8: Measurements of Narrow-Angle Forward Scatter

temperature inhomogeneities are indeed responsible for scattering at very small angles ($\theta < 1/2°$); they are much larger than 50 microns, more like 50 cm, but their refractive index contrast $\Delta n/n < 10^{-4}$, is much too small to account for scattering angles larger than 1/2°. Possible causes for scattering at these angles are detritus, and soluble decay products, but no consistent in-situ measurements are yet available.

Regime III: $\theta < 1/2°$

Let us close the above remarks by looking at the very small angle scattering. Very few in-situ measurements were made until recently when the need arose to understand better the effects of very small angle light scattering on optical images. More will be said about that in the next section. This scattering regime is characterized by two distinct contributing mechanisms. Below 10^{-1} radian down to around 10^{-3} radians, diffractive scattering predominates. This requires

$$10^{-3} \leqslant \lambda/D \leqslant 10^{-1}$$

or particle diameter

$$500\mu > D > 50\mu$$

There is some difficulty in finding many particles as large as 500 μ in seawater although calculations similar to those we gave in Table I show that if such particles amounted to less than .01% of the total distribution they would still contribute 25% of the total scattering coefficient! Some detritus and other biological wastes fall in that range size but are difficult to detect because they disintegrate during the process of seawater sampling and particle counting. Scattering below 10^{-3} radians is caused by refraction from large scale temperature and salinity turbulence. These phenomena are discussed in detail in Lecture 2.2 and will not be repeated here. One of the first measurements of very small angle scattering induced by turbulence was performed by Honey [1970] and his results are reproduced in Fig. 8.

So far we have not mentioned dispersion. The scattering function shows little wavelength dependence, almost none in the forward direction since most of the contributions come from particles larger than a wavelength. In the back direction, scattering is influenced by molecular scattering which exhibits some dispersion since it follows a typical λ^{-4} law.

Measurement of Volume Scattering Function

The concept of volume scattering function, $\sigma(\theta)$ is discussed in Lecture 3.3. The methods for measuring $\sigma(\theta)$ are well described in many publications (Jerlov [1968]). We shall concentrate instead on small angle scattering in-situ measurements.

To measure $\sigma(\theta)$ the water path length must be small enough not to include multiple scattering. Recall from Lecture 3.3 that $\sigma(\theta)$ implies single scattering. An instrument devised by Duntley and described by Tyler [1970] is shown in Fig. 9. (This instrument was the one used by Morrison in the small angle scattering measurements of Fig. 1.) A thin luminous cylindrical shell shown cross-hatched in the figure is projected across the water path. The shell of light provides greater leverage to scattered rays thus allowing the optics to be reduced in size. The light beam is focused onto a photomultiplier after passing through a movable stop that is set according to the angle of scatter being measured.

The preceding geometry still suffers from multiple scattering, as a ray scattered in the light shell may be scattered again through the water path. The succeeding scatters may be eliminated by replacing the water path, except where the light shell is, by a transparent material that closely matches the seawater refractive index. Recall that accurate scattering measurements need a short water path to avoid multiple scattering, yet long enough to provide sufficient intensity. Here we get around this conflict by reducing instead the path width to eliminate multiple scatter and making the path length long enough to build up the intensity. Fig. 9 shows how all rays are single scattered, and those that pertain to the same angle are focused through a movable stop onto a photomultiplier.

Indirect Measurement of Volume Scattering Function, $\sigma(\theta)$

The theory developed in Lecture 3.3 provides an indirect but simple and powerful method to measure the volume scattering function down to very small angles. The following describes such a measurement and the results.

Measurement Via Point Spread Function, $f(\theta, R)$

Shallow water measurements of the point spread function $f(\theta, R)$ were performed by Larry Mertens at High Cay in the Bahamas. A 2 watt cw argon laser behind a 2.5 cm diameter diffuser plate was utilized to illuminate a Pritchard photometer at ranges of 20m, 40m and 60m. The photometer was rotated and the intensity recorded as a function of angle θ. The measurements were performed in shallow coastal waters, at a depth of 5m. The water attenuation length was monitored continuously during the tests, averaging a value of $\alpha = .145\ m^{-1}$.

The resultant point spread functions, $f(\theta, R)$ are shown in Fig. 10 at the three ranges. The plateaus of the curve correspond to the unscattered beam subtended by the diffuser plate in the field-of-view of the photometer. The modulation transfer function of the water, $F(\psi, R)$ was calculated from the point spread function $f(\theta, R)$ through the Fourier-Bessel transform relationship developed (see Lecture 3.3).

$$F(\psi, R) = 2\pi \int_0^\infty f(\theta, R) J_0(2\pi\theta\psi)\theta\, d\theta \qquad (7)$$

Recall that the transfer function depends exponentially on range,

$$F(\psi, R) = e^{-D(\psi)R} \qquad (8)$$

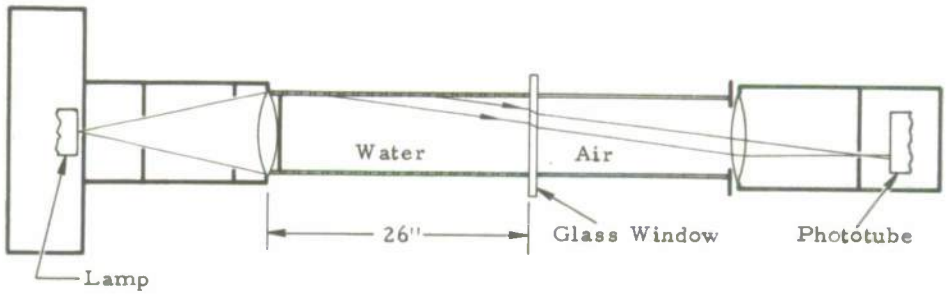


Fig. 9: Optical System of a Narrow Angle Scattering Meter, after S. Q. Duntley.

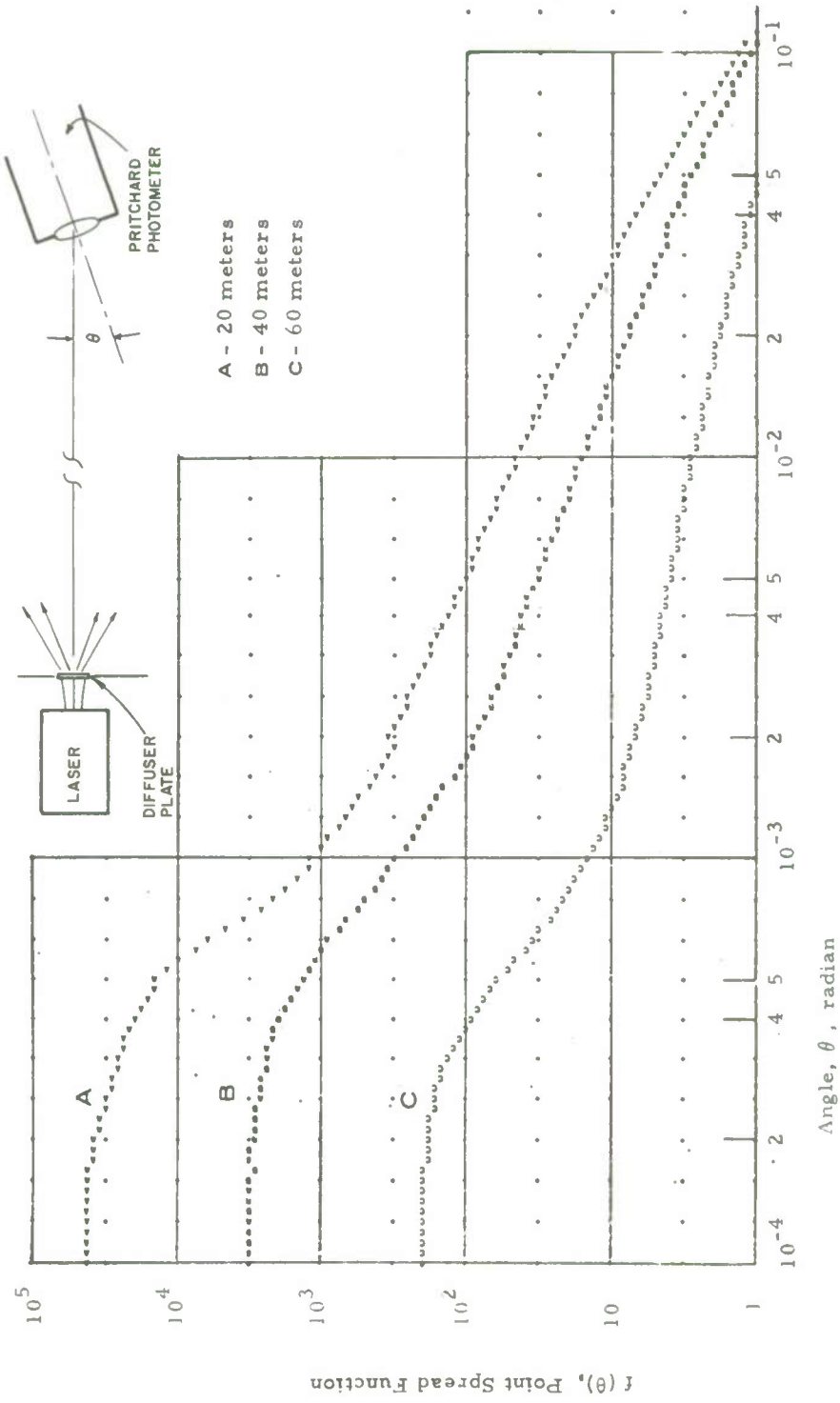


Fig. 10: Point spread function taken with Spectra-Pritchard Photometer and normalized to e^{-YR}

with the very important property that the focused spatial frequency decay function $D(\psi)$ is independent of range. To show that it is in fact independent of R, the inverse of the above equation, i.e.,

$$D^f(\psi) = -[\ln F(\psi, R)]/R \tag{9}$$

is plotted in Fig. 11, which confirms the range independence within the limits of experimental accuracy. The results are valid to about 400 cycles/radian; beyond that frequency, lack of smaller sources and computer deconvolution noise make the function rise unrealistically.

In order to recover $\sigma(\theta)$ we use the relationship developed in Lecture 3.3,

$$\sigma(\theta) = 2\pi\int_0^\infty \left[\alpha - \partial_\psi(\psi D^f(\psi))\right] J_0(2\pi\theta\psi)\,\psi\,d\psi = 2\pi\int_0^\infty \left[\alpha - D^c(\psi)\right] J_0(2\pi\theta\psi)\psi\,d\psi \tag{10}$$

A very good fit to $D(\psi)$ is

$$D^f(\psi) = \alpha - s\left(\frac{1 - e^{-2\pi\theta_0\psi}}{2\pi\,\theta_0\psi}\right) \tag{11}$$

with $\theta_0 = .030$ radians. The analytical fit is shown by a solid line in Fig. 11. Plugging Eq. (11) in Eq. (10) gives the simple expression for $\sigma(\theta)$

$$\sigma(\theta) = (s/2\pi\theta_0^2)\left[1 + (\theta/\theta_0)^2\right]^{-3/2} \tag{12}$$

The small angle scattering coefficient s is obtained by noting (See Lecture 3.3) that the intersection of $D(\psi)$ with the line $\psi = 0$ is γ, the coefficient which accounts for large angle scattering and absorption. From the curves of Fig. 11

$$\gamma = .033\ m^{-1}$$

and therefore $s = \alpha - \gamma = .112\ m^{-1}$.

The recovered $\sigma(\theta)$ after suitable normalization has been superposed over the summary plot of Morrison in Fig. 12 for convenience. Morrison's plots include data from many independent observers, over many years and in many waters, all clustered as shown and with nearly -3/2 slope. Our recovered $\sigma(\theta)$ agrees well with the classical observations, down to 1°. Note that it agrees surprisingly well to angles as large as 100° where the old data stop. The recovered $\sigma(\theta)$ levels off below 1° due to the coarseness of the point spread function measurement. In fact, the measurement is good down to $\theta \simeq \theta_0 = 2^\circ$, as seen in Fig. 12 and in accordance with our fit, Eq. 12. Obviously, long range spread function is not the way to go about recovering $\sigma(\theta)$. To include very small angle scattering, down to milliradians, one must measure $F(\psi, R)$ directly. This approach is described below.

Measurements Via Modulation Transfer Function, $F(\psi, R)$

The principle of such in-situ measurement is illustrated in Fig. 13. Light from a source is collimated across a fixed water path length (up to several meters) and focused through a reticle analyzer from which it passes into a photomultiplier. The analyzer consists of spatial frequencies (alternate transparent and opaque bars) spaced logarithmically around the wheel. The light instead of being focused to a point is spread into a blur circle, whose size depends on the water path length and its scattering properties. As the reticle revolves, it performs a Fourier analysis of the blur circle (See Fig. 14). Moving toward higher frequencies, the blur size eventually exceeds the size of the smaller openings causing a corresponding drop in the photomultiplier output. If this output is displayed on an oscilloscope, the envelope in Fig. 15, yields directly the $F(\psi, R)$ after suitable calibration. The spatial frequency is related to pattern slit width d through the focal length F according to the expression

$$\theta = 1/2\psi = d/F$$

θ is the angle d/F subtended by the reticle opening at the lens.

We have built an instrument based on the principle just described. It is called an MTF (modulation transfer function) meter. Its output displayed on an oscilloscope has an envelope as shown in Fig. 15. The envelope is not a sine wave modulation transfer function since the reticle patterns generate square waves. However, there is a simple transformation which is used to convert square to sine waves, originally published by Coltman [1954]. After this transformation the transfer function drops off much faster, almost exponentially as shown by $D(\psi)$ of Fig. 11, which is nothing else than the sine wave transfer function plotted on a logarithmic scale and normalized with respect to range. We have shown how scattering particles account for its decay reaching a plateau corresponding to the unscattered beam. Eventually it drops off again after reaching the limit of the instrument optics.

From the measured $F(\psi, R)$ the volume scattering function $\sigma(\theta)$ was recovered according to the formulas developed in Lecture 3.3, for a collimated beam

$$F^c(\psi, R) = e^{-D^c(\psi)R} \tag{13}$$

$$\sigma(\theta) = 2\pi\int_0^\infty \left[\alpha - D^c(\psi)\right] J_0(2\pi\theta_0\psi)\,\psi\,d\psi \tag{14}$$

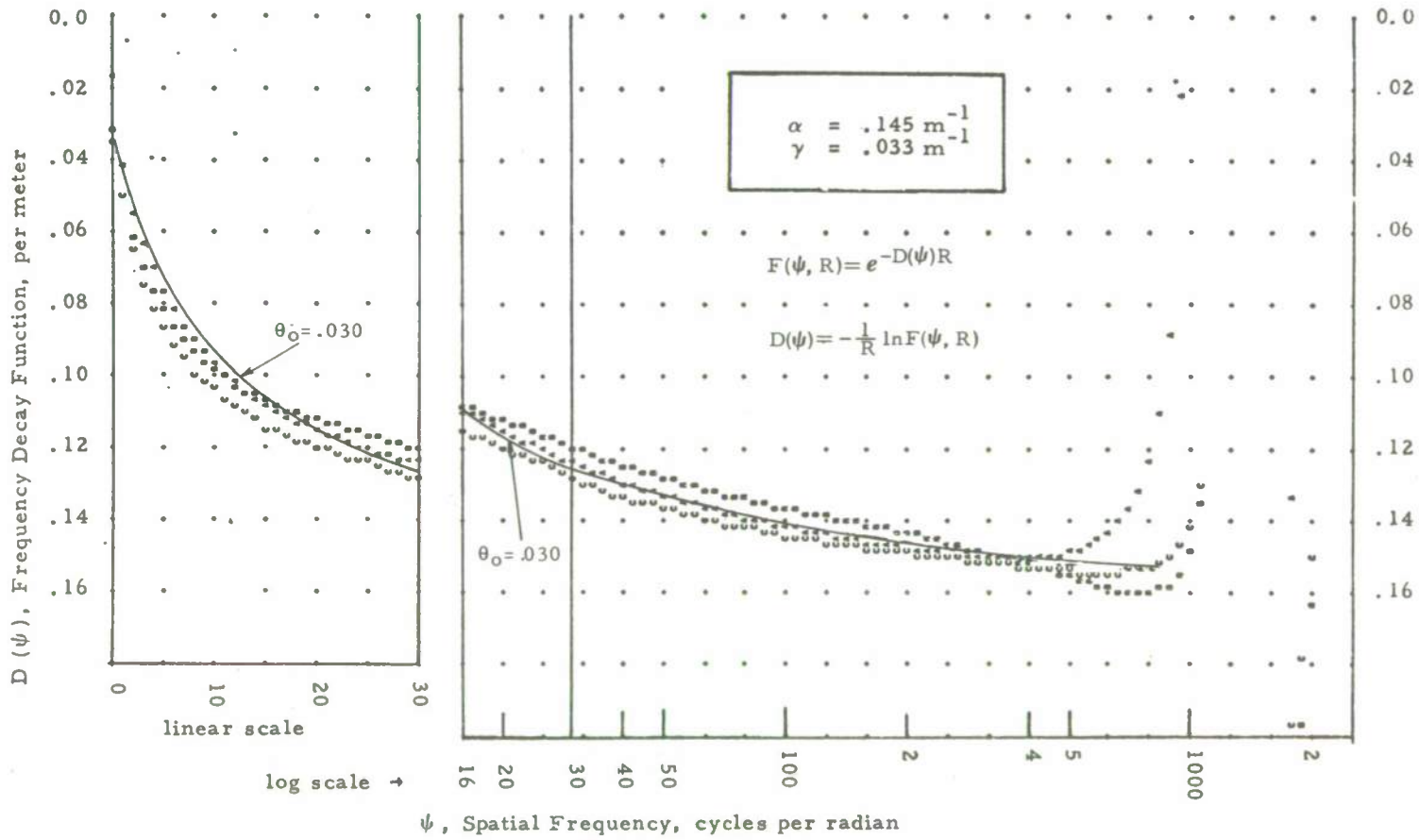


Fig. 11: Spatial Frequency Decay Function in 5 Meters Shallow Water

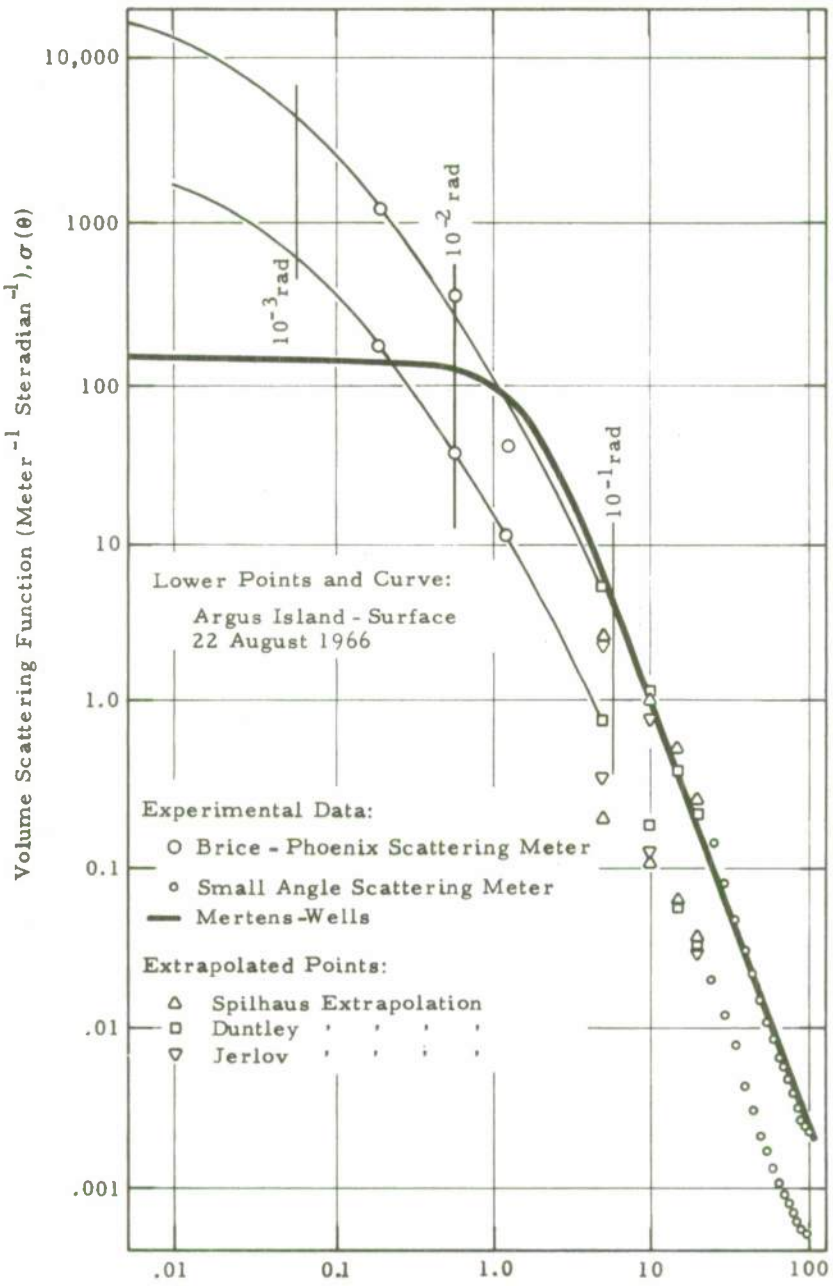


Fig. 12: Scattering Angle (Degrees), θ

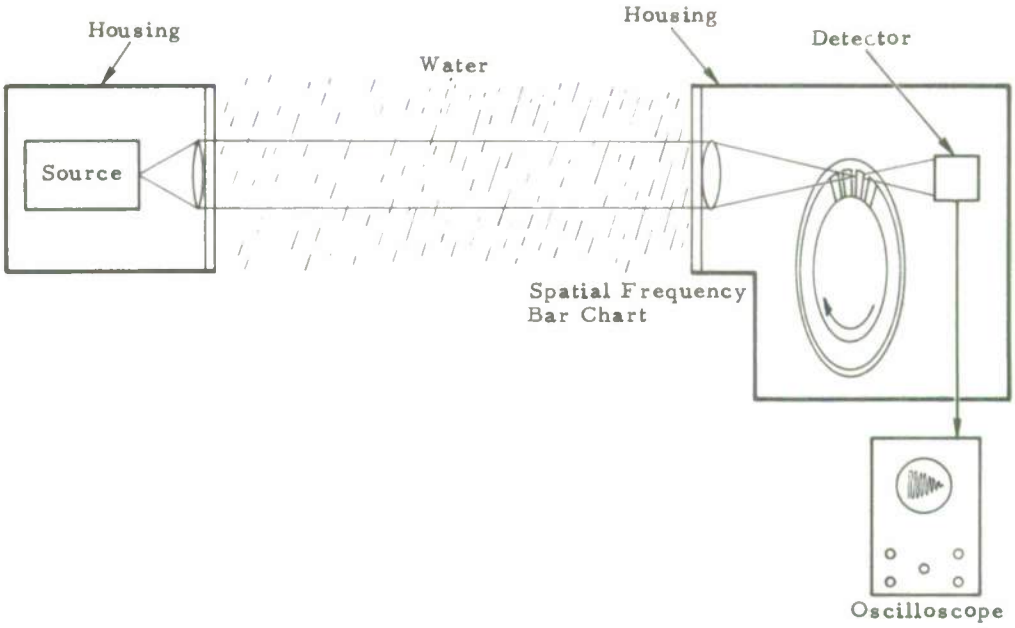


Fig. 13: Modulation Transfer Function Measurement

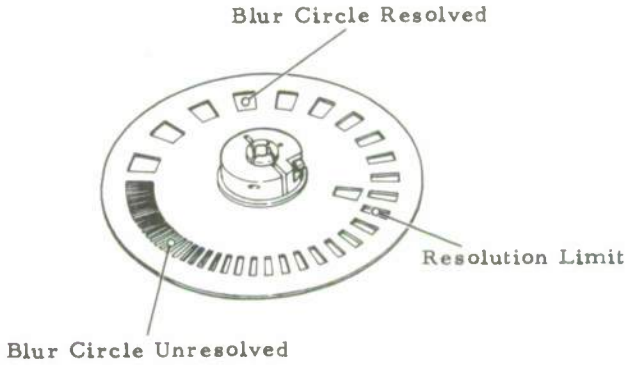


Fig. 14: Rotary Test Pattern With Increasing Spatial Frequencies

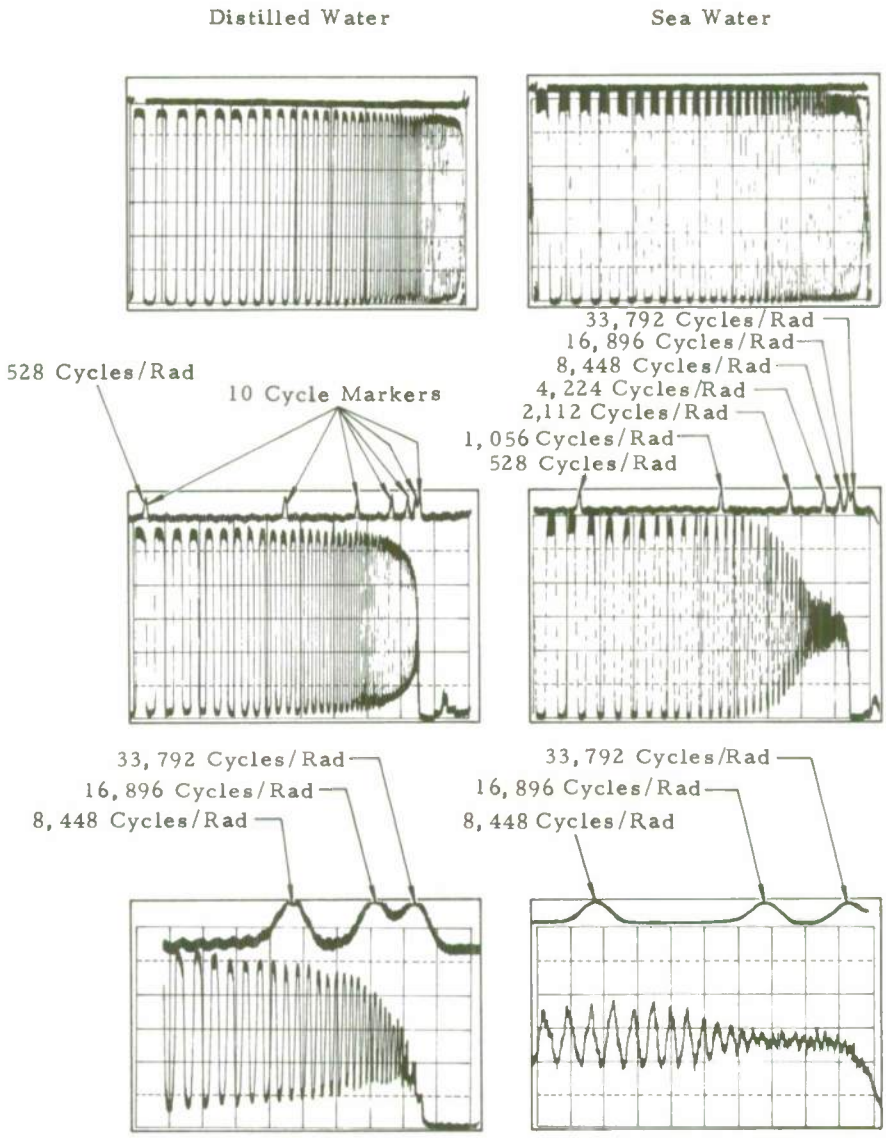


Fig. 15: Measured Modulation Transfer Functions of Distilled and Seawater

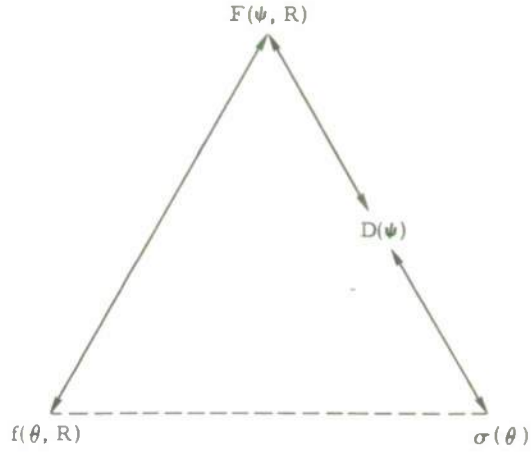
$$D^c(\psi) = \partial_\psi(\psi D^f) = \alpha - se^{-2\pi\theta_o\psi} \tag{15}$$

The results are plotted after suitable normalization on Morrison's data of Fig. 1, repeated for convenience in Fig. 16. Note the beautiful agreement with the old data, at large angles; the slope is approximately the same. The instrument capability is well illustrated by the fact that the recovered $\sigma(\theta)$ does not level off as $\theta \to 0$ but continues to rise with the same slope. Had the measurements been carried far enough, $\sigma(\theta)$ would eventually level off as a result of the water properties or the instrument's ultimate optics limitation. It is obvious that Morrison's measurements were not as accurate since they level off sooner, neither were the High Cay measurements described in the previous section.

Advantages of Modulation Transfer Function Measurement to Recover Small Angle $\sigma(\theta)$

Wells' theory developed in Lecture 3.3 establishes the one-to-one correspondence between modulation transfer function $F(\psi, R)$ and point spread function $f(\theta, R)$ on one hand through the Fourier-Bessel transform (Eq. 7), and on the other hand between $F(\psi, R)$ and $\sigma(\theta, R)$ through Eqs. (13) and (14). The symbolic graph below summarizes the situation.

Obviously to find $\sigma(\theta)$ by measuring $f(\theta, R)$ is a two-step process with the necessities of computing first the Fourier-Bessel transform of f. Measurements of $f(\theta, R)$ at small angles require a very wide dynamic range of energy detection to accommodate the sharp peaks of light intensity at small angles. In addition, a very narrow field-of-view detector is needed to resolve small angles without interference from the unscattered beam.



Measuring $F(\psi, R)$ directly to recover $\sigma(\theta)$ has many advantages. It eliminates the computation of Fourier-Bessel transformation; it is simply dependent on distance; it does not require a wide dynamic range of energy; it provides continuous real time monitoring of the waters optical quality; and finally $F(\psi, R)$ is convenient to convolve the seawater blur with apertures and offsets as described in Lecture 4.3.

When $\sigma(\theta)$ cannot be measured through $F(\psi)$ or directly, then the next best way is to measure the point spread function in collimated light, $f^c(\theta)$. Lecture 3.3 explained mathematically the advantages of this function over the focused one f^f. Physically the preference corresponds to the fact that all scatters have the lever arm of the full propagation distance R. One device for measuring f^c is the small angle scattering meter in Fig. 9. Shortcuts for correcting σ for multiple scatter are much simpler when f^c is measured rather than f^f. These methods derive from expanding

$$\exp[-D(\psi)R] = e^{-\alpha R}\exp[(\alpha - D)R]$$

in powers of $(\alpha - D)R$ and substituting the result in the transform

$$f^c(\theta, R) = 2\pi \int_0^\infty e^{-D^c(\psi)R} J_o(2\pi\theta\psi)\,\psi\, d\psi .$$

In Lecture 3.3 this procedure leads to Eqs. 3.3-39 and 3.3-40, an approximate closed form for f^c; if this form fits well enough, then σ is given by Eq. (3.3-34), which is the same as Eq. (12) in this lecture. When this does not fit well enough, then an iteration formula for σ is useful, one which is exact when σ fits the form of Eq. (12), and a good approximation otherwise. This form comes from substituting $\sigma(\theta)$, $\sigma(\theta/2)$, $\cdots$ $\sigma(\theta/m)$ in Eq. (3.3-38) and rearranging terms:

$$\sigma(\theta) = \frac{f^c - \delta_2(\theta)}{R} - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(sR)^{m-1}}{(m-1)!\, m^3}\, \sigma\left(\frac{\theta}{m}\right) \tag{16}$$

We see that the scattering function equals the point spread function after subtracting the unscattered beam and adding the correction terms under the summation sign. Eq. (16) above provides a useful expression to solve for $\sigma(\theta)$ at a given angle by successive approximations in terms of the scattering function at all angles smaller than θ.

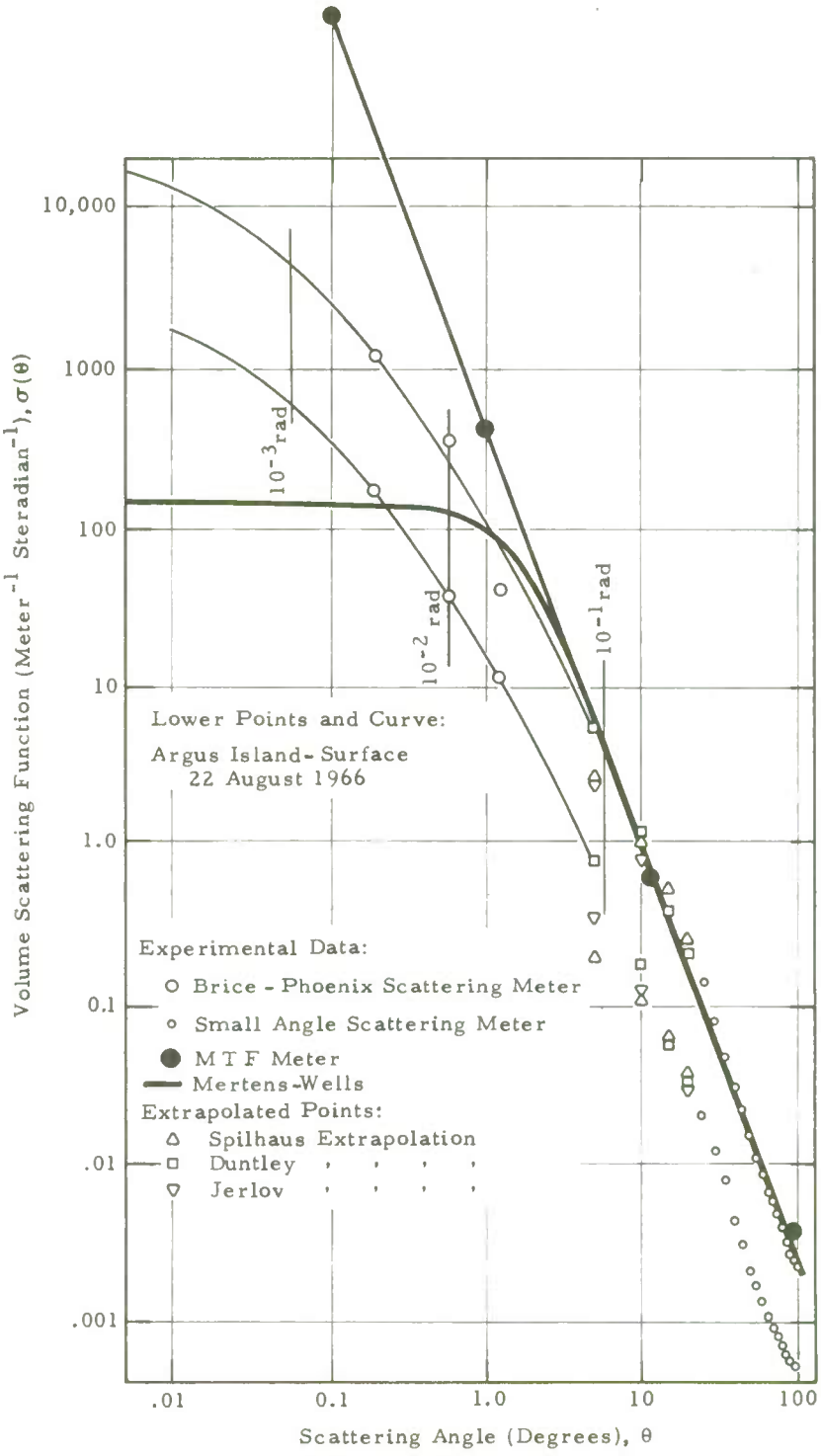


Fig. 16: Recovered $\sigma(\theta)$ (Large Dots) From Measurement With M T F Meter

References

Coltman, J. W., 1954, J. Opt. Soc. Am. 44, p. 469.

Dawson, L. H. and E. O. Hulburt, 1941, "Angular Distribution of Light Scattered in Liquids", J. Opt. Soc. Am., 11, p. 554.

Duntley, S. Q., 1963, "Light in the Sea", J. Opt. Soc. Am., 53, p. 214.

Gordon, H., H. Baker and O. Brown, 1972, "An Experimental and Theoretical Study of Suspended Particulate Matter in the Tongue of the Ocean and Its Influence on Underwater Visibility", University of Miami, Department of Physics, Coral Gables, Florida, Final Report, Contract F08606-71-C-0028.

Jerlov, N. G., 1968, "Optical Oceanography", Elsevier Publishing Company, N. Y.

Hodkinson, J. R., 1963, "Light Scattering and Extinction by Irregular Particles Larger than a Wavelength". In: ICES, Electromagnetic Scattering. Ed. M. Kerker. Pergamon, London, 5, p. 87.

Honey, R. C., and G. P. Sorenson, 1970, "Optical Absorption and Turbulence Induced Narrow Angle Forward Scatter in the Sea", AGARD Conference Proceeding No. 77 on Electromagnetics of the Sea.

Matlack, D. E., 1972, "Deep Ocean Optical Measurements Report NOLTR 72-284, Naval Ordinance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Maryland.

Morel, A., 1970, "Examen de Resultats Experimentaux Concermant la Diffusion de la Lumiere par les Eaux de Mer", AGARD Conference Proceeding No. 77 on Electromagnetics of the Sea.

Morrison, R. E., 1967, "Studies on the Optical Properties of Seawater, Argus Island in the North Atlantic Ocean and in Long Island and Block Island Sounds", Ph. D. Thesis, New York University, N. Y.

Nyffeler, F., 1970, "Etude de la Diffusion de la Lumiere par l'Eau de Mer", AGARD Conference Proceeding No. 77 on Electromagnetics of the Sea.

Ochakovsky, Yu. E., 1966, "On the Dependence of the Total Attenuation Coefficient Upon Suspension in the Sea", U. S. Dept. Commerce, Joint Publ. Res. Ser., Rep., 36 (816), p. 16-24.

Tyler, J. E., 1970, "Program of Research in Optical Oceanography at Scripps Institution of Oceanography, AGARD Conference Proceeding No. 77 on Electromagnetics of the Sea.

FACTORS AFFECTING LONG RANGE VISION

Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

Abstract

This lecture surveys the various phenomena that affect long range underwater vision and selects the important ones for detailed consideration in other lectures. The most important factors are decay of light in narrow and broad beams, light backscattered from particulate matter, return light whose image information is scrambled by small-angle scatter enroute to the detector, the statistics of detected photons, and signal-to-noise ratio criteria for imaging. Some phenomena of little importance are discussed to lay them to rest, especially coherence and polarization. Rejection of veiling luminance by polarization discrimination has been demonstrated, but rejection factors that may be impressive to the unaided eye are inadequate with respect to S/N in photoelectronic imaging.

The approximate concept of narrow and broad beam attenuation constants, α and γ, respectively, yield estimates of the S/N decay rate for various systems with artificial illumination. For a dual-scan system that illuminates and examines one resolution cell at a time, S/N decays exponentially at the rate α. For flood illumination of a large target, S/N in each small cell also decays at rate α, but for very small targets the rate falls to $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. Formulas are derived for the rejection of particulate backscattered light that is required to prevent more severe limitations. The result is that the detector must be shielded from illuminated water (direct backscatter) at distances closer than about 2 attenuation lengths in front of the target.

Long range vision in seawater is a complex topic owing to many interrelated influences, especially when artificial illumination is included. The latter is both an asset and a liability, a source of light in a dark environment, and a source of veiling luminance that obscures the field with scattered light. The various influences fall into three categories of importance as listed below.

A. Factors required for any reasonable estimates:

1. Attenuation of a narrow beam--exponential decay, $\exp(-\alpha r)$, described by the conventional attenuation constant α.

2. Broad-beam attenuation--the decay rate of light within a cone of about 20°, or more, attenuation constant γ, approximate decay law $\exp(-\gamma r)$.

   a. decay of illuminating beam

   b. decay of return light from the target whose information content is scrambled by small angle scattering.

3. Light backscattered from suspended particles--intensity of veiling luminance described by $\sigma_b = \sigma(180°)$, the volume scattering function evaluated in the backward direction, defined as the fraction of light scattered per unit distance per steradian in the backward direction.

4. Detector characteristics and criteria for detection/recognition/identification--primarily a matter of photon statistics and quantum efficiency in those detectors appropriate for long range vision.

B. Factors that enter into thorough design and feasibility studies:

1. Cross-over veiling luminance--light that scatters out of an illuminating beam, crosses over a space that separates the beam from the field-of-view, and then scatters into the receiver.

2. Details of return light scrambled by small angle scattering.

3. Small angle scattering as a resolution limitation.

C. Factors having small or negligible effect:

1. Polarization

2. Coherence

3. Absorption as distinct from attenuation--not treated separately because absorbed light and light scattered to one side have the same effect, merely missing power.

The last group of factors is discussed to show why they are not important (i.e., to lay them to rest).

In this lecture we concentrate on factors that are fairly independent of system details, especially

A-4 - photon statistics and detection criteria,

C-1 - polarization, and

C-2 - coherence.

Other factors are so entwined with system details that they are deferred to Lect. 5.4 concerning vision technique as applied to systems. However, some treatment is given to A1 and A2, the attenuation of narrow and wide beams of light as they apply to both illumination and imaging, and to A3 to determine the extent to which veiling luminance from the water competes with that from the target.

Coherence

Interest in the subject of coherence arose when it became apparent that lasers would play some role as underwater illuminators. As discussed in Lect. 5.1 they have three unique properties for certain underwater applications. (1) Lasers can be Q-switched to generate very short radar-like pulses that may be used to discriminate against veiling luminance in nearby water as discussed in Lect. 5.4. (2) An intense well-collimated laser beam can have a very small diameter, which is useful for passing through windows in pressure hulls, for scanning, for transmitting light by way of a mirror on a boom well removed from the camera, and even for achieving some image resolution from the illuminator as well as the detector. (3) Certain lasers are well matched to the seawater transmission window, especially the 488 nm emission from the argon laser (deep water) and 530 nm doubled YAG (coastal water).

Coherence means simply that, given the E-vector at one point in space, one can calculate the E-vector at surrounding points, within an uncertainty that increases with distance from the given point, until finally the E-field is random outside the coherence distance. Coherence along a ray simply means that light is monochromatic, so usually we use the word "monochromatic" and reserve "coherent" for the perpendicular directions along a wavefront. Light from a point source; e.g., starlight observed outside the atmosphere, is fully coherent along a wavefront, the same phase everywhere. However, light from an extended source has limited coherence since there is no one wavefront to follow, but many wavefronts for all the points on the extended source.

In seawater that exhibits particle scattering but no turbulent inhomogeneities, the situation regarding coherence is very simple: the unscattered component of the light is as coherent as the source allows, and the scattered component is incoherent. This is exactly what one would expect from ordinary scalar diffraction theory. In 1967 Hodara et al (Ref. 1) measured coherence in water with scattering particles by measuring the diffraction pattern from two slits whose separation was the coherence test distance. Compared to homogenious air there was no observable coherence loss in the unscattered beam within the 3% measurement accuracy (scatter in the data). Professor S. Q. Duntley has noted coherent fringes in light that has passed through a long specimen of seawater freshly pumped into a laboratory tank. He used some particularly murky water and observed coherence at distances in excess of 10 attenuation lengths (i.e., $\alpha R > 10$).

Turbulent temperature or saline inhomogeneities in the water are a different story. These scatter all rays by very small amounts, and if the distortions of a wavefront are significant compared to a wavelength, they then represent partial loss of coherence. This is the same as the situation in air, and the reader is referred to the vast literature on the subject for details if he is interested. However, the only significant result for imaging is a small blur circle, or circle of confusion in which random bright spots dance about at rates typical of the velocities of inhomogenities crossing the line-of-sight, as observed in astronomical telescopes. In seawater the size of turbulent blur circles has been studied very little, and the coherence structure within the blur not at all. The structure is probably very difficult to see because effects of turbulence are small and the blur circles are small compared to the resolution permitted by other factors. For long range vision in particular, the whole blur distribution may barely supply enough photons to detect an image point in the presence of photon statistics from scattered light; therefore, the turbulence statistics are completely obscured by photon statistics.

Much the same situation holds for coherence perpendicular to the wavefront; i.e., monochromatic light. It is well known that laser light striking a diffuse reflector produces a speckled image. The speckles are random interference from the various reflection points in the diffuse surface. In ordinary light, even very narrow band light, the different colors each produce such a random pattern, but the patterns overlap in such a way that the speckles are averaged out. In long-range underwater vision, the size of the speckles is such that each may contain one or fewer photons on the average. In other words, the achievable resolution cell will contain so many speckles that the effect is again averaged out. The speckle size is one resolution cell of the aperture; i.e., the resolution that would be achieved if energy permitted. Its angular diameter is approximately λ/D; i.e., wavelength divided by aperture diameter. Typically this angle might be $.5\mu m/10$ cm $= 5\mu rad \approx 1$ arc sec. However, energy-limited underwater resolution will be more like a milliradian (Lect. 4.2), say .5 mr for a fairly good case, in which there are about 100 speckles across the diameter of a single resolution cell.

Polarization

The distribution of light scattered in seawater has a dependence on polarization, (Ref. 2). In other words, the volume scattering function for the component of light polarized in the plane of incidence is slightly different from the scattering function for perpendicular polarization as shown in Fig. 1. The difference is quite significant at 90°, as much as a factor of three, but this is not a direction of any concern here since 90° merely scatters light out of the way as though it had been absorbed. In vision studies, scattering counts near 0 and 180°, where the polarization dependence is very weak. We therefore treat

all scattering problems as symmetrical.

There is still a possible use for polarization techniques, but it depends not on the direction of light scatter but on the extent to which scattering depolarizes the light. In any attempt to see long distances underwater, the most obvious problem is that of veiling luminance, the same problem as seeing in fog. Schemes have been proposed for discriminating against this luminance in favor of light reflected from the target, and one of these hinges on the polarization of artificial illumination. The scheme proves ineffective, but certain demonstrations have been deceptively encouraging. Therefore, it is worth the effort to dispose of the subject properly.

Polarized light reflected from particles retains most of its polarization, while that reflected from large objects is mostly depolarized, and this is the basis for the scheme to reject veiling luminance. This difference exists because large objects tend to have rough or penetrable surfaces where light rays refract and reflect enough times to randomize their polarization. On the other hand, particle reflections usually occur at a single dielectric interface, which preserves the polarization. Linearly polarized light retains the same plane of polarization. Circularly polarized light retains the same direction of rotation of the E-vector, but the name changes from right to left (or vice versa) because the handedness changes with respect to the reversed direction of propagation.

In practice then, a polarization system would transmit polarized light and receive light through an analyzer that accepts the crossed polarization in the linear case, or the same handedness in the circular case. (The circular is more convenient since it avoids precise angle alignment.) The rejection achieved in this way is more than one might think, for certainly targets reflect a polarized component from the first interface on their surface, and many translucent particles reflect a depolarized component that bounces about their internal structure.

A number of workers have studied polarization rejection. Hodara et al, (Ref. 1), studied both linear and circular polarization under controlled laboratory conditions using a suspension of spherical latex particles. A disk target with black and white stripes rotated through a polarized laser beam while a photomultiplier monitored the return with and without a polarization analyser. Results differed little for linear and circular polarization. In arbitrary units they are as follows:

	With Polarization	Without Polarization	Ratio
White	60	185	3.1
Black	15	140	9.3
Difference	45	45	1

Fig. 2 shows tracings of oscillograms from the receiver in which the signal alternates between levels for the black and white target areas, both superposed on top of a steady background of backscattered light. Gilbert and Pernicka, (Ref. 3), performed experiments with circular polarization in murkey fresh water at the Morris Dam facility near Pasadena, California, and Mertens et al, (Ref. 2), measured the volume scattering function for various linear polarization combinations in shallow seawater near Andros Island in the Bahamas. None of these three data sets differs enough to alter our conclusions, but Mertens' is surely the most pertinent. He observed a factor of 10 loss of intensity with crossed polarizers.

In a laboratory demonstration one can see a thin beam of light passing through murkey water and striking a target, then look through an analyzer and the lighted beam disappears while the bright spot on the target remains. However impressive, this demonstration is deceptive because the lighted water and the target spot are spatially separated from the observer's viewpoint. When an electronic detector is looking through a wide beam to see the target, its performance is degraded only by the statistical noise from the backscatter and the conclusion is quite the opposite.

Let us generously assume that the polarization analyzer reduces backscatter B by a factor of 20, and target return by a factor of 3 (2 would be perfect depolarization). Then the signal S is reduced by 3 while the noise $N \sim B^{1/2}$ is reduced only by the square root of 20, (see photon statistics, next section). We now see that the signal-to-noise ratio S/N improves by only 1.5 from the value S_o/N_o without polarization rejection:

$$\frac{S}{N} = \frac{S_o/3}{N_o/\sqrt{20}} = 1.5\,\frac{S_o}{N_o}$$

Even this improvement vanishes when the light source is incoherent, for then half the light is lost in polarizing the illumination:

$$\frac{S}{N} = \frac{S_o/6}{N_o/\sqrt{40}} = 1.05\,\frac{S_o}{N_o}$$

Image Criteria and Photon-Statistical Noise

Photoelectronic devices suitable for long range underwater vision will not be limited by such crude factors as amplifier noise. Instead they will have enough electron-multiplication gain so that their performance is limited only by the statistics of detection events. The number of these events is simply the number of incident photons times a quantum efficiency which is typically about 10%. These events, or detected photons, obey Poisson statistics. When the expected number is calculated as $\langle n \rangle =$ received energy divided by $h\nu$, then the probability of exactly n is

$$p(n, \langle n \rangle) = e^{-\langle n \rangle} \langle n \rangle^n / n!$$

This distribution approaches Gaussian for large $\langle n \rangle$. However, for most purposes we are only concerned with the rms deviation from the average (square root of the variance) which is simply $\sqrt{\langle n \rangle}$, i.e.,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n - \langle n \rangle)^2 p(n) = \langle n \rangle .$$

The important point here is that the signal-to-noise ratio for detected photons is the mean number bearing the information of interest divided by the square root of the total number. These matters are discussed in detail in Lect. 4.2 as regards detection criteria, and in Lect. 5.2 as regards device performance. Thus, any trade-off in system design should be guided by the rule that signal-to-noise ratio is directly proportional to the signal power but inversely proportional only to the square root of the uniform background intensity. This rule has already been used in the discussion of polarization to show that the discrimination ratio between signal and background is not enough.

Criteria for the image quality of various targets involves the mysteries of visual perception (psychophysics) that can only be resolved by experiments in judgement by human subjects. The relation between these experiments and photoelectronic imaging has been sumarized by Legault and Rosell, (Ref. 4). They employ a concept called the display signal-to-noise ratio, which is merely the signal-to-noise ratio in photon counts for all the light that falls within the image boundary of the object in question. Values near 5 seem to be the threshold for detection. Higher information levels; i.e., recognition and identification, probably correspond to the same criterion, but for a number of resolution cells within the image outline instead of the image as a whole. So far this discussion has assumed weak signals but no blurring. It would be desirable to have experiments in visual perception that include the effects of blurring using specifically the kinds of blur distributions that typify underwater point spread functions. Until more data are available, we have devised a way to proceed with plausible estimates. We inquire whether a certain size cell can be resolved; we calculate the light collected from that cell in object space, but only that part which falls within the same cell in image space qualifies to be counted as signal. Light that scatters into the cell image from neighboring areas counts as uniform background light.

Attenuation of Broad and Narrow Beams

In Lect. 3.3 we discussed attenuation constants α and γ for narrow and broad beams of light respectively. The former is the familiar attenuation constant, and the latter represents light that stays confined to a cone having a full angle of about 20°, although the value of γ is not sensitive to the exact choice of cone angle. In shallow seawater, γ is only about a quarter of α. With small changes in its value, a decay constant, say $\gamma(\theta)$, can be defined for cone angles of 20 to 120° and the law $\Phi = \exp(-\gamma r)$ will remain valid to a good approximation. In Lect. 3.3 we discussed equations (45 and 46) that give an exponential law for any cone angle, but these are only accurate in general for about 2 or 3 scattering lengths, or about 3 or 4 attenuation lengths. (A scattering length is $1/s$, and an attenuation length is $1/\alpha$.) It happens that the cone range 20 - 120° ($\frac{1}{2}$ angles $10 < \theta < 60^\circ$) follows the exponential law more accurately than smaller cones owing that the typical shape of the seawater scattering function $\sigma(\theta)$.

Let us review the concept of exponential decay a bit. Recall that the simple decay laws

$$e^{-ar}, \; e^{-\alpha r}, \; e^{-\gamma r}$$

hold when they represent the fraction of light that has never done something (never been absorbed, never scattered from a particle, etc.). Now the idea is to show that the light contained in a cone corresponds rather well to the light that has never scattered by an angle larger than the cone's half-angle θ, and this turns out to be a good approximation in regions where the function $\sigma(\theta)$ has dropped to a small value after falling off very rapidly at about $\theta/2$. Suppose for example that σ drops precipitously near 5° (as it does for typical seawater). To escape from a 20° cone, a ray must bend more than 10° off axis, and this requires on the average four scatters of 5° each in a random direction ($(10^\circ)^2 \div (5^\circ)^2 = 4$). For distances of interest, very little power scatters four times after σ has dropped to $\sigma(5^\circ) \ll \sigma(0)$. Therefore, it is fairly accurate to say that rays which never scattered more than 5° are all inside a 20° cone. Moreover, most rays that never scattered 5°- 10° are also inside, because $\sigma(5 \text{ to } 10^\circ)$ is even smaller and so multiple scatter in this range is a rare event. So finally a good approximation to the total power in a 20° cone is that part of the power that has never scattered more than 10° (the half-angle), and γ is a valid exponential decay constant representing absorption as well as scatter by more than 10° and given approximately by

$$\gamma \approx a + \int_{10^\circ}^{\theta_{max}} \sigma \, d\omega$$

Fig. 3 is repeated here from Lect. 3.3. It shows the integrated power within a cone angle normalized by multiplying all values by $\exp(+\gamma R)$; i.e., 100% on this curve represents the power in a broad beam (more like a 60° cone in this case). The good angles for defining an exponential decay constant are the flat places on the curve, for their values of σ have fallen from higher values at smaller angles as discussed above. The flat near $\Phi = 100\%$ represents γ (a result of normalization), and the one at 2 mrads represents α. The 2 mrad crossings are plotted vs range in Fig. 4, where the logarithmic slope of the curve gives $\alpha - \gamma = 0.100$.

Let us see how α and γ are useful in rough estimates that show how image signal-to-noise ratio depends on certain features of illumination and target size. Let S stand for the signal energy received in a detector resolution cell, but only the power reflected off the corresponding cell on the target surface; i.e., S does not include light that scatters into the cell enroute to the detector. (This differs from other lectures where S is the difference signal across the edge of a target feature, but both usages are proportional; i.e., using ρ for reflectivity, ρS and $(\rho_1 - \rho_2)S$ are both proportional to S.) Let T stand for total light on the detector cell, signal and background. Then noise is proportional to $\sqrt{T}$ and signal-to-noise ratio $\sim S/\sqrt{T}$. In the following we make rough estimates of S, T and $S/\sqrt{T}$ based on α and γ.

Suppose a 20° or more field of view is flooded with illumination; then the irradiance on the target decays in proportion to $\exp(-\gamma R)$. Assume that somehow veiling luminance from the water has been eliminated. As a first case, consider a very small target, encompassing only one resolution cell, and assume that this size is compatible with decay at the rate α. In Lect. 3.3 we showed that the same point spread function, hence the same α and γ, applies to detection of return light as well as to illumination, and so the target image decays as $\exp(-\alpha R)$ on the incoming path. In other words, the wide-beam decay constant applies to the wide cone of illumination, while the narrow-beam constant applies to the thin return beam as shown in Fig. 5. Moreover there is no additional background light scattered into the image from adjacent parts of the target, because the small target has none. So, taking both the outgoing and incoming losses into account we have

$$S \sim e^{-\gamma R - \alpha R}, \quad T = S, \quad S/\sqrt{T} \sim e^{-(\gamma + \alpha)R/2}$$

i.e., signal-to-noise ratio decays at the average rate $\frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$. This and other cases to follow are summarized in a table at the end of this lecture.

Next consider a large target that more or less fills the field of view. The light that falls on the image field then decays as $\exp(-\gamma R)$ on the return path. If the intent of the system is merely large target detection then all this return counts as signal and we have

$$S \sim e^{-2\gamma R}, \quad T = S, \quad S/\sqrt{T} \sim e^{-\gamma R},$$

i.e., the signal-to-noise ratio decays only at the small rate γ. This is a most favorable situation, but not one with much practical application. If R is 7 attenuation lengths ($\alpha R = 7$), then γR typically may be only about 1.5 (shallow water) and $\exp(-\gamma R)$ only 0.22.

More typical and much less favorable is the case when the intent is to resolve large target detail. The total target return still decays as $\exp(-\gamma R)$, but most of this light has been scrambled by scattering. Only the unscattered fraction $\exp(-\alpha R)$ counts as signal and so we have

$$S \sim e^{-\gamma R - \alpha R}, \quad T \sim e^{-2\gamma R}, \quad S/\sqrt{T} \sim e^{-\alpha R},$$

i.e., signal-to-noise ratio decays at the rate α, much faster than it does for the case of small targets, and still faster than the rate for simple detection of larger targets.

Next suppose we intend to resolve small detail in a target of any size, but now we employ a very special system that illuminates and examines only one resolution cell at a time; i.e., the illuminator and receiver must execute a synchronized dual scan to cover the field of view. The total illumination energy budgeted for the whole field of view is the same as any other case; the system merely parcels it out one cell at a time. Now for the first time there is an $\exp(-\alpha R)$ loss in illumination. Light that scatters out of the narrow beam is lost, whereas before light scattered away from one cell was mostly replaced by light scattered into the same cell from neighboring parts of the beam. This large illumination loss at first seems to preclude any advantage for dual-scan, but other factors compensate. The image on the receiver focal plane is a bright spot with round trip loss $\exp(-2\alpha R)$ surrounded by a halo of scattered light. However, this halo is masked off of the detector so that total received light decays as $\exp(-2\alpha R)$. Then we have

$$S \sim e^{-2\alpha R}, \quad T = S, \quad S/\sqrt{T} = e^{-\alpha R},$$

the same signal-to-noise ratio as the flood illuminated large target, except that now the receiver does not have to pull the signal out of a large background, but it does have to execute a synchronous scan. Clearly the desirability of one system over another hinges on other factors beyond the scope of this lecture.

Finally, suppose we retain the scanning light beam of the previous system, but remove the mask from the detector and let it look everywhere. The result is a flying spot scanner that derives its image resolution not from the detector but from the scanning illuminator. The reader may wish to prove that S, T and $S/\sqrt{T}$ are the same as in the case of flood illumination with a resolving detector. This fact holds for both large and small targets and represents a sort of reciprocity between illuminator and receiver. Thus there is a third candidate system with the same signal-to-noise ratio that decays as $\exp(-\alpha R)$. The decay rate of S, T and $S/\sqrt{T}$ are summarized in a table at the end along with some other information from the next section.

Veiling Luminance

An important topic in Lect. 5.4 is methods for suppression of veiling luminance in underwater vision, especially luminance close to the receiver where the light is strong. The purpose of this section is to compare the amount of light backscattered from the water to the light that reflects off the target. This comparison then yields an estimate of the distance z in front of the target where backscatter is tolerable; then this distance in turn indicates how much effort to reduce backscatter is really worthwhile.

Consider the case of a flood-illuminated field containing a large target as shown in Fig. 6. For each unit of energy transmitted, the return from the target is

$$\rho \exp(-2\gamma R)(A/\pi R^2),$$

where ρ is target reflectivity, $\exp(-2\gamma R)$ is the round trip decay of light, A is the detector aperture area, and $A/\pi R^2$ gives the fraction of the light intercepted in the collecting aperture since π is the effective solid angle of lambertian reflection. Similarly, the return from dr in the water is

$$(\sigma_b dr)\exp(-2\gamma r)(A/r^2).$$

In this case there is no π in the last factor, because the definition of σ contains the solid angle; i.e., $\sigma_b dr$ is the reflectivity per steradian, and A/r^2 is the aperture subtense in steradians. A reasonable criterion for sufficient backscatter rejection is that the return from the water be equal to that from the target. This condition doubles the total light but reduces the signal-to-noise ratio by only $\sqrt{\frac{1}{2}}$. To express the criterion we equate the first expression above to the integral of the second:

$$\frac{\rho}{\pi R^2} e^{-2\gamma R} = \sigma_b \int_{R-z}^{R} e^{-2\gamma r} \frac{dr}{r^2} \tag{1}$$

The integral on the right gives a function related to the exponential integral function. It is commonly called E_2 and included in standard tables of functions. However, for the estimate intended here, it suffices to approximate r with R - z (its most important limiting value) except in the exponent, and the resulting integral is then elementary. Solving it for z gives

$$\gamma z = \tfrac{1}{2}\log_e[1 + (2\gamma\rho/\pi\sigma_b)(1 - z/R)^2] \tag{2}$$

(This has a z on the right side, but think of z/R as one given parameter to be solved for R after z is known.) For this rough estimate it suffices to consider an example where σ_b is a bit on the large size and ρ on the small side to give a conservative (low) estimate of z, the point at which the receiver must be shielded from backscattered light. Assume

$$\gamma = .033\text{m}^{-1} \qquad \sigma_b = 6 \times 10^{-4}\,\text{m}^{-1} \qquad \rho = 0.10 \qquad R/z = 3$$

and then we find $z = .469\gamma^{-1}$. We are more accustomed to using α^{-1} as a scaling factor than γ^{-1}, so letus assume $\alpha = 4.4\gamma$, and then

$$\left.\begin{array}{l}\gamma z = .47 \\ \gamma R = 1.4\end{array}\right\} \quad \text{or} \quad \left.\begin{array}{l}\alpha z = 2.1 \\ \alpha R = 6.2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{when } \alpha/\gamma = 4.4 \\ \text{or } \gamma/\alpha = .23\end{array}$$

In other words, for long range vision, about 6 attenuation lengths, we can tolerate backscatter within about 2 attenuation lengths of the target, but no closer to the detector than this.

Variations of Eq. 2 for small targets and dual-scan appear in the table at the end. Small targets do not obstruct the illumination of water behind them, and so a note explains how to change the formula when z extends beyond the target instead of in front. In the latter case, z can become infinite signifying no need to restrict backscatter from the water beyond the target.

Lect. 5.4 expands on some of these topics and gives performance curves for some of the systems mentioned here.

TABLE OF APPROXIMATE DECAY RATES AND BACKSCATTER DISTANCE

	Decay rate of signal	Decay rate of total return	Signal-to-noise ratio decay rate	Distance in front of Target in which backscatter is tolerable $x \equiv (2\rho/\pi\sigma_b)(1 - z/R)^2$
Large target, unresolved	2γ	2γ	γ	$(2\gamma)^{-1}\log_e(1 + \gamma x)$
Large target, detail resolved†	$\gamma + \alpha$	2γ	α	ditto
Small target, one resolution cell†	$\gamma + \alpha$	$\gamma + \alpha$	$\frac{1}{2}(\gamma + \alpha)$	$(2\gamma)^{-1}\log_e(1 + \gamma x e^{-(\alpha-\gamma)R})$*
Dual-scan, any size target	2α	2α	α	$(2\alpha)^{-1}\log_e(1 + \alpha x)$*

†Either flood-illuminated in a 20° field, more or less, or illuminated by a flying-spot scanner operating with a wide-angle detector.

*For small targets, z may extend behind the target, in which case change the sign of α and γ and omit (1 - z/R) from x.

References

Ref. 1 -- H. Hodara, R. Marquedant, A. Merrill, S. Swiadek, "Investigation of Underwater Illumination Techniques," Tetra Tech Report 104, May 22, 1967.

Ref. 2 -- L. E. Mertens and D. L. Phillips, "Measurements of the Volume Scattering Function of Sea Water," Tech Rept. 334, Project Deep Look, March 7, 1972, Range Measurements Lab., Patrick AFB, Florida.

Ref. 3 -- G. D. Gilbert and J. C. Pernicka, "Improvement of Underwater Visibility by Reduction of Backscatter with a Circular Polarization Technique," Applied Optics 6, April, 1967, pp. 741-746.

Ref. 4 -- R. L. Legault and F. A. Rosell, Photoelectric Imaging Devices, Vol. 1, L. M. Biberman and Sol Nudelman, editors, Plenum Press, New York, 1971.

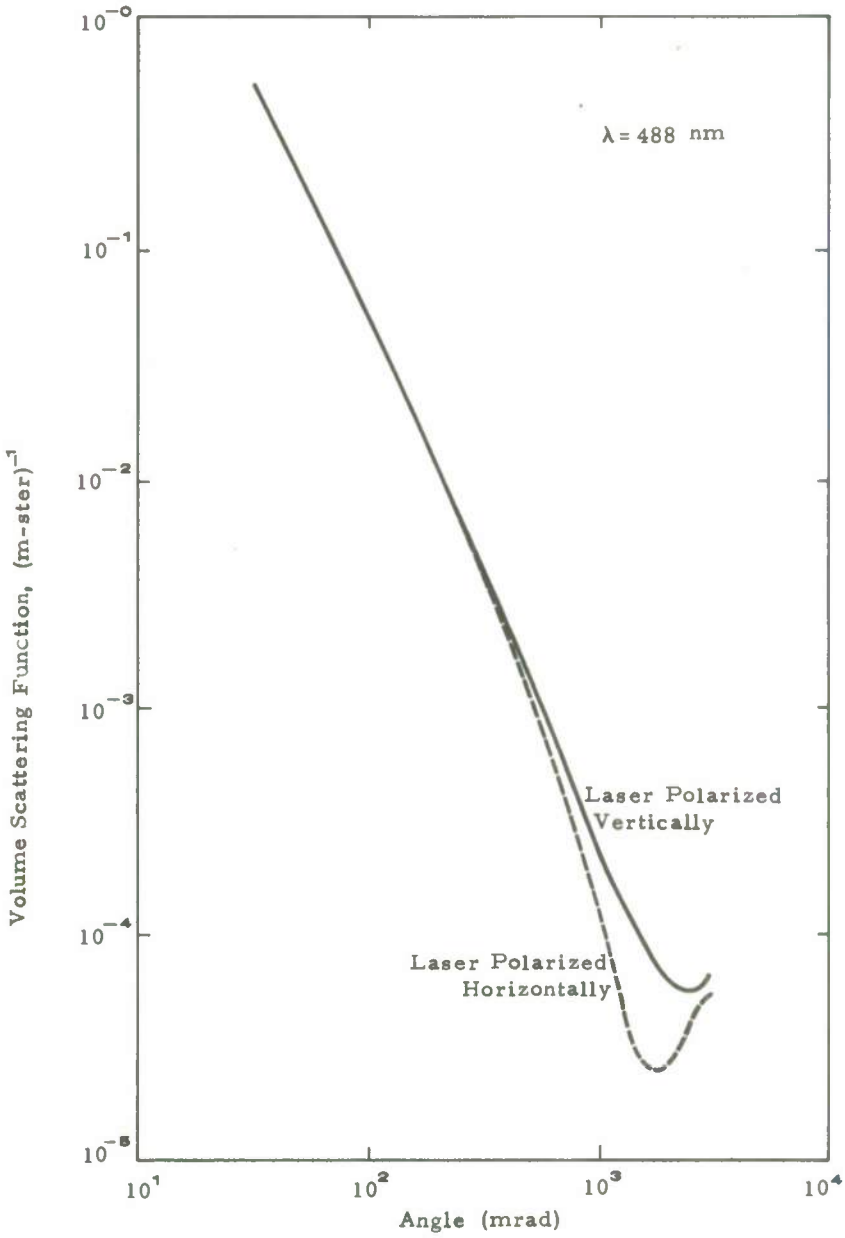


Fig. 1: DEPENDENCE OF VOLUME SCATTERING FUNCTION ON POLARIZATION, after Mertens, Ref. 2. Plane of incidence is horizontal.

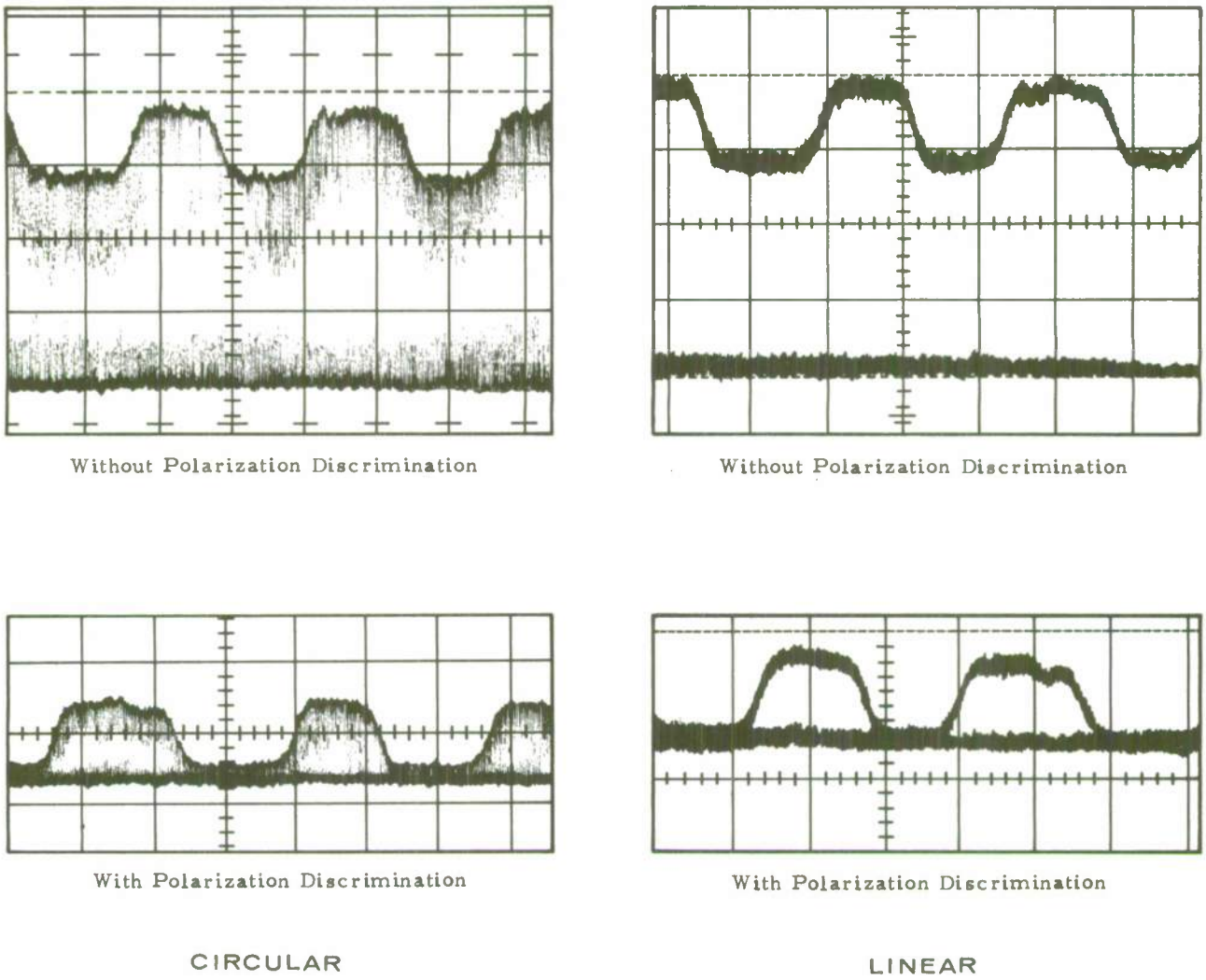


Fig. 2: POLARIZATION DISCRIMINATION AGAINST LIGHT BACKSCATTERED FROM SIMULATED SEAWATER, after Hodara et al, Ref. 1.

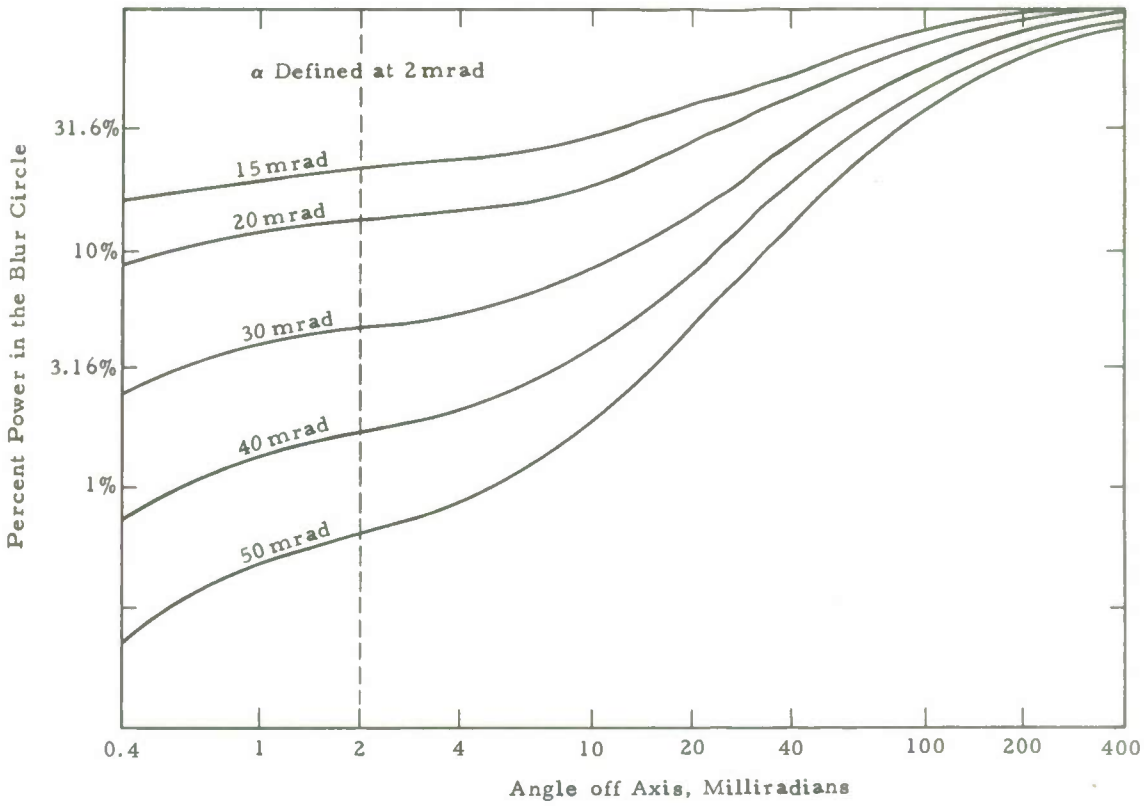


Fig. 3: INTEGRATED POWER WITHIN INDICATED ANGULAR RADIUS FOR COMPOSITE OF MERTENS' DATA IN SHALLOW WATER AT A RANGE OF 40 METERS

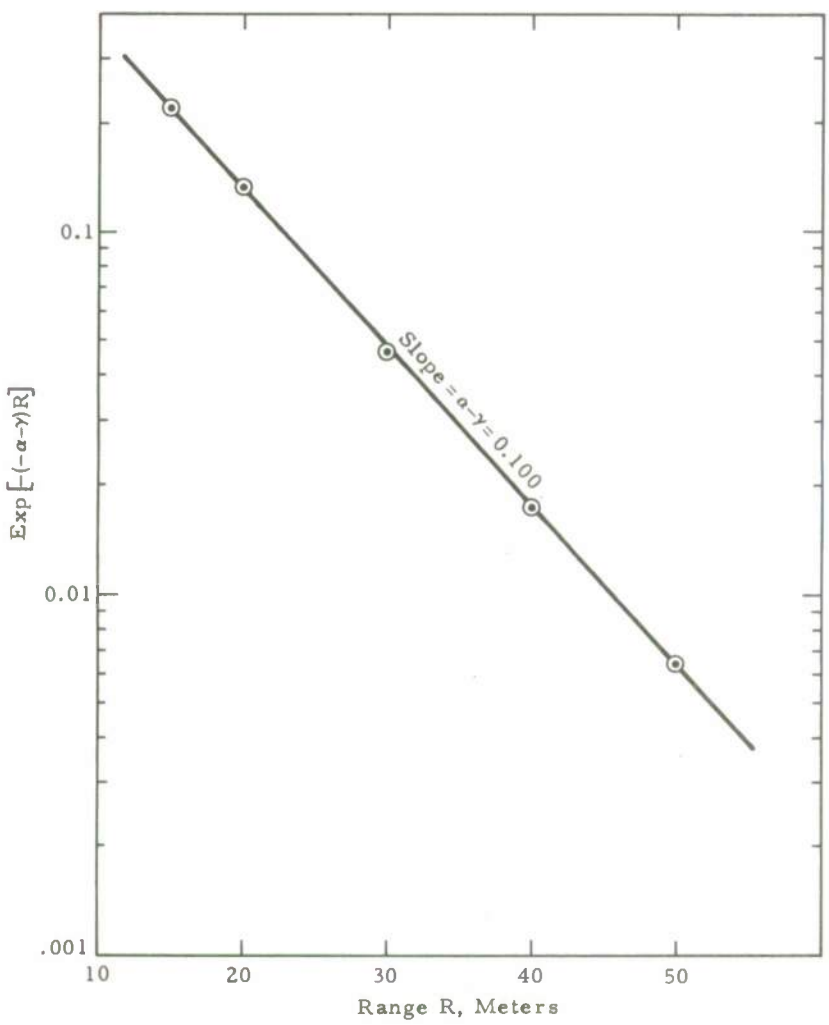


Fig. 4: POINTS AT 2 mrad FROM Fig. 3 TO DETERMINE $\alpha - \gamma$.

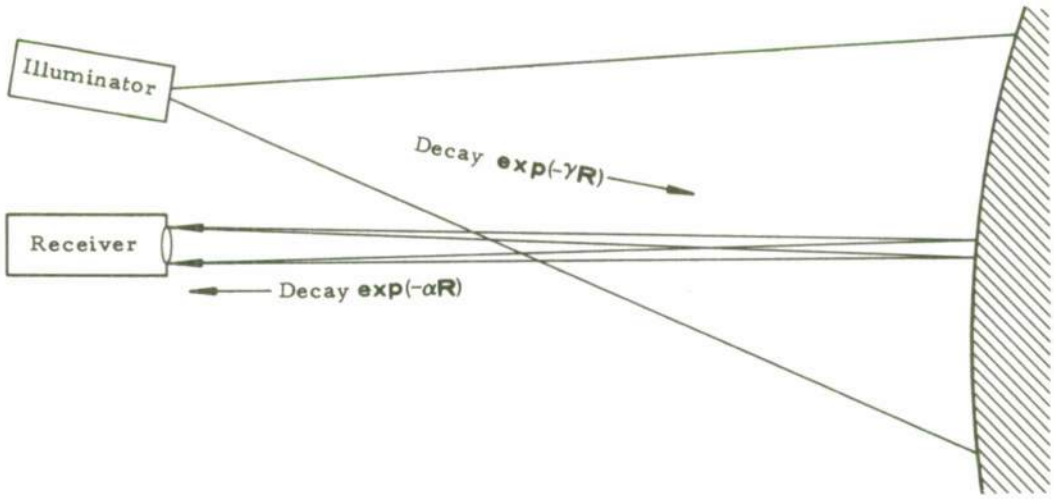


Fig. 5: FLOOD ILLUMINATION AND RESOLUTION OF TARGET DETAIL. This implies Wide Beam Attenuation γ on Outgoing Path, Narrow Beam Attenuation α on Return Path.

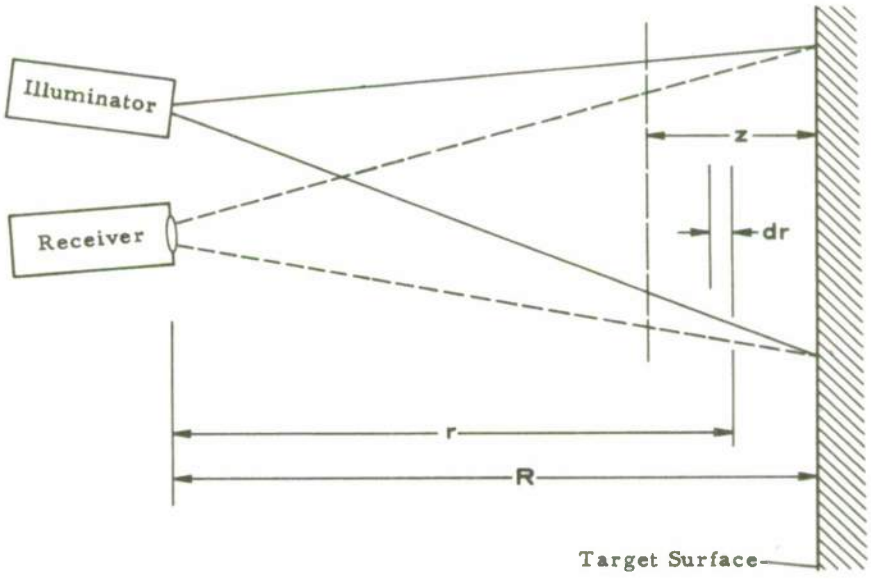


Fig. 6: GEOMETRY FOR BACKSCATTER ESTIMATES.

CRITERIA FOR VISION: RESOLUTION, SIGNAL-TO-NOISE RATIO AND CONTRAST

Henri Hodara
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

After reviewing carefully the vision criteria of resolution, signal-to-noise ratio and contrast we apply these concepts to calculate the ultimate resolution of underwater imaging systems. We show that it is obtained by equating the product of the contrast transfer function of the target, C_T and the medium, C_M to the minimum threshold contrast of the system, C_S, the latter being directly proportional to the acceptable signal-to-noise ratio. We also show by a calculation of false alarm probability that the commonly used signal-to-noise ratio of 5 is sufficient to ensure image quality.

Fundamental to underwater imaging are the concepts of resolution and signal-to-noise ratio, and to a lesser extent contrast. In this lecture, we first show how resolution and signal-to-noise ratio are intimately tied together. We then proceed to a careful formulation in terms of photon fluctuations and derive a threshold detection criterion. Next we introduce the concept of contrast pointing out briefly the historical but superfluous role it plays in relation to resolution. We finally apply these concepts to the calculation of attainable underwater resolutions when scattering and absorption loses cannot be ignored.

Resolution and Signal-to-Noise Ratio

This section treats ultimate limits to resolution. Without loss of generality we can best explain these concepts by referring to the operation of an underwater imaging system, the Dual Scan illustrated in Fig. 1. For the present assume that no light is scattered.

Let the target in Fig. 1 be divided conceptually into small resolution cells, all of the same area. The beam from the light source scans the target, illuminating one cell at a time, while the detector subtends the same cell as the light beam and scans in synchronism with the source. The detector output current, i(x) resulting from scanning two adjacent cells along the x-direction is shown in Fig. 2 for two cases: large and small resolution area. In either case, to resolve details comparable in size to the cell area means to distinguish or detect the difference in current level between the two scanned areas. Thus, if the illumination on the target is constant the level is proportional to the number of photons received while the beam sweeps that area; the current is then proportional to the cell area, its reflectivity and the scan time. The latter is often called observation or integration time. In short, what the eye or the detector does is to compare the number of photons n,* received from two adjacent areas of different reflectivities. If it detects a difference in photon number caused by the reflectivity change it is then capable of resolving details of a size comparable to the area in question. Obviously, if the cell size is reduced (Fig. 2b), while still holding the target illumination constant, everything else being unchanged, fewer photons are received from each cell and the signal, that is the difference Δn between the two levels, is reduced accordingly.

So far we have considered system and medium to be noiseless, that is with no random fluctuations in the detected current. In the absence of noise there is no limit to the difference in current level or photon number that can be detected, and correspondingly no limit to resolving power. What limits detectability and therefore resolution is noise introduced by the light source, the medium and the detector. Ultimate resolution is limited by the only source of noise that cannot be eliminated because it is inherent to the quantum nature of light: photon noise or shot noise, that is fluctuations in photon count translated into current fluctuations at the detector output. The fluctuations shown in Fig. 3 introduce an uncertainty band about the mean photon number $\langle n_1 \rangle$ and $\langle n_2 \rangle$ from each resolution cell. If that band is greater than the difference $\langle \Delta n \rangle = \langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle$ we are trying to detect (Fig. 3a), we can no longer resolve the cell. In the next section, we show that if we increase the light energy either by increasing integration time or light source power, the mean difference in photon count increases in direct proportion to the energy while the fluctuations about that level only go up as the square root. This is illustrated in Fig. 3 b where the uncertainty band caused by the noise fluctuations no longer masks the photon count difference from the two adjacent cells, which now become resolved.

Signal-to-Noise Ratio Formulation

Consider two adjacent resolution elements of equal area and let $\langle n_1 \rangle$ and $\langle n_2 \rangle$ be respectively the mean number of photons detected during a fixed observation time. The

$$\text{Signal} = \langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle = \langle n_1 - n_2 \rangle \qquad (1)$$

---

*- In the present discussion, photons always refers to detected photons, that is, photon number times quantum efficiency.

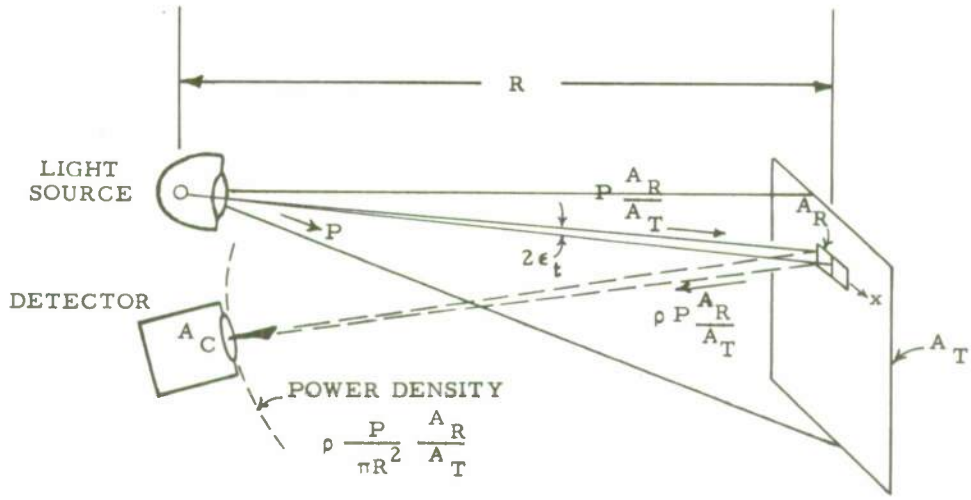
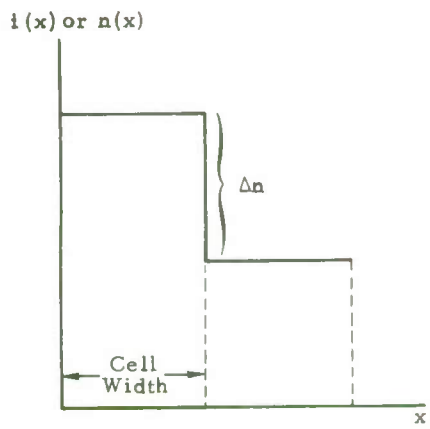
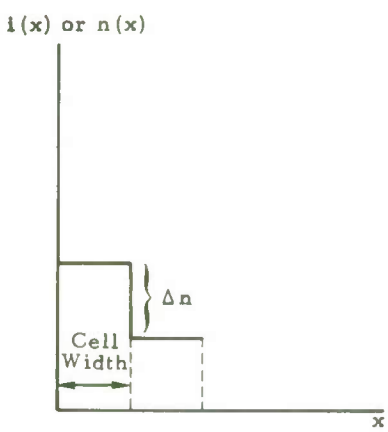


Fig. 1: Dual Scan Geometry

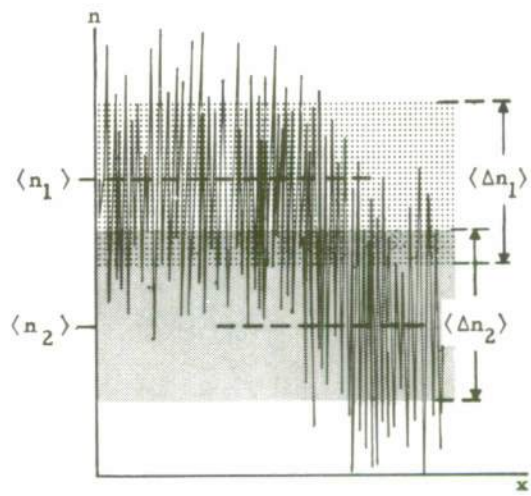


a) large cell

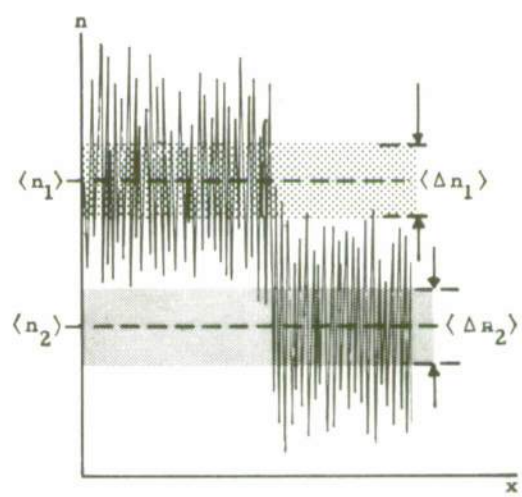


b) small cell

Fig. 2: Noiseless Output from a Two-Scanned Adjacent Resolution Cell.



a) unresolved cells



b) resolved cells

Fig. 3: Noisy Output from Two-Scanned Adjacent Resolution Cells.

NOTE: The uncertainty, $\langle \Delta n \rangle$ in mean photon count from a cell is smaller than the count fluctuation during the scan.

is the difference in the average number of photons reaching the detector from these two areas. The

$$\text{noise} = \sqrt{\langle ((n_1 - n_2) - \overline{\langle n_1 - n_2 \rangle})^2 \rangle} \tag{2}$$

is the rms fluctuation in that difference, which, if large enough, masks entirely the signal and renders detection impossible.

Eq. (2) can be simplified. First we rewrite (2)

$$\text{noise} = \sqrt{\langle [(n_1 - \langle n_1 \rangle) - (n_2 - \langle n_2 \rangle)]^2 \rangle}$$

and expand the radicand into

$$\langle (n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 \rangle + \langle (n_2 - \langle n_2 \rangle)^2 \rangle - 2\langle (n_1 - \langle n_1 \rangle)(n_2 - \langle n_2 \rangle) \rangle$$

Poisson statistics hold, so

$$(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 \equiv \langle \Delta n_1^2 \rangle = \langle n_1 \rangle \tag{3a}$$

$$(n_2 - \langle n_2 \rangle)^2 \equiv \langle \Delta n_2^2 \rangle = \langle n_2 \rangle \tag{3b}$$

$$\langle [(n_1 - \langle n_1 \rangle)(n_2 - \langle n_2 \rangle)] \rangle \equiv \langle \Delta n_1 \Delta n_2 \rangle = 0 \tag{3c}$$

The cross-correlation (3c) vanishes because the noise from adjacent resolution elements is uncorrelated. The final noise expression reduces to

$$\text{noise} = \sqrt{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} \tag{4a}$$

Note that the photon-statistical noise is proportional to the square root of the total average number of photons

$$\sqrt{N_t} = \sqrt{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} \tag{4b}$$

received from the resolution areas under consideration, while the signal is the difference between these numbers:

$$N_s = \langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle .$$

The photon signal-to-noise ratio SNR takes on the final form

$$\text{SNR} = \frac{N_s}{\sqrt{N_t}} = \frac{\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle}{\sqrt{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle}} \tag{5}$$

To gain a feeling for its dependence on various parameters consider two adjacent resolution elements of equal size, A_R, as part of a target area, A_T, in an ideal medium, e.g., a medium with no absorption or scattering losses, as shown in Fig. 1.

If the light source floods the target area, with power P, each cell receives a fraction $P\,A_R/A_T$ and reflects $\rho P\,A_R/A_T$. If the target is lambertian, the power density at the detector a distance R away, is $\rho(A_R/A_T)(P/\pi R^2)$. The power captured by the detector optics with collecting aperture, A_C, is $\rho P(A_R/A_T)(A_C/\pi R^2)$. If the observation time is t, the energy received is $\rho Pt(A_R/A_T)(A_C/\pi R^2)$ and the corresponding number of photons $\rho(Pt/h\nu)(A_R/A_T)(A_C/\pi R^2)$; $h\nu$ is the energy of a photon of frequency ν. For a detector of quantum efficiency, η, the average number of detected photons is

$$\langle n \rangle = \rho\eta \frac{Pt}{h\nu} \frac{A_R}{A_T} \frac{A_C}{\pi R^2} \tag{6}$$

For future applications to the underwater problem, we list below the energy of a photon at two wavelengths. These are of special interest for two reasons: 488 nm is near the peak transmission of deep blue water, and 530 nm is near the peak of green coastal waters; moreover these precise values correspond to available laser sources.

Argon-Ion Laser	YAG Laser
λ = 488 nm	λ = 530 nm
Deep Water	Coastal Water
$h\nu = 4.08\ 10^{-19}$ joules	$h\nu = 3.75 \times 10^{-19}$ joules

Substitution of (6) in (5) gives

$$SNR = \frac{N_s}{\sqrt{N_t}} = \sqrt{\eta \frac{Pt}{h\nu} \frac{A_R}{A_T} \frac{A_c}{\pi R^2}} \quad \frac{\rho_1 - \rho_2}{\sqrt{\rho_1 + \rho_2}} \tag{7}$$

For the detection limits set by these statistical or quantum fluctuations, we take

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 << \rho_1 \text{ or } \rho_2 , \bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$$

and (7) becomes

$$\frac{N_s}{\sqrt{N_t}} = \sqrt{\eta \frac{Pt}{h\nu} \frac{A_R}{A_T} \frac{A_c}{\pi R^2}} \quad \frac{\Delta\rho}{\sqrt{2\bar{\rho}}} \tag{8}$$

Before we interpret the above expression it is important to understand how vision works. To see and resolve features of a target means to detect sufficient photons from adjacent resolution areas so that their difference N_s exceeds the masking fluctuations, $\sqrt{N_t}$ enough to prevent errors or "false alarms" and make the detection event reliable. A good number to use is about 5, i.e., a mean signal level change of 5 standard deviations, or 5 times the noise. We shall see a little later a justification for the choice of this number.

When the eye or a photoelectric device scans across say an edge of a target, there must be sufficient difference in the photons received from both sides of the edges to overcome the inherent fluctuations, e.g., the ratio $N_s/\sqrt{N_t}$ must exceed 5. If this is not the case, one way to increase that ratio is by increasing energy, either power, P, or observation time, t. Other obvious ways are to increase the collecting optics size or attempt to improve efficiencies such as η. It is important to note that our eyes will automatically tend to select a large enough resolution area, A_R, and thus downgrade resolution until the signal-to-noise ratio is sufficiently high to make the brain register a detection or vision event. Note also that the smaller the reflectivity difference, $\Delta\rho$ between adjacent resolution element, the greater the resolving area must be (worst resolution) to meet the threshold signal-to-noise ratio demanded by the viewing device.

So far we have not said anything about contrast simply because it is totally unnecessary. However, for historical reasons, target contrast,

$$C_T = \Delta\rho/2\bar{\rho} \tag{9}$$

is commonly used in discussions of vision so we have recast (8) in a form consistent with (9) after noting from Fig. 1 that a resolution area subtends a half angle ϵ_t at the source, e.g.,

$$A_R = \pi \epsilon_t^2 R^2 \tag{10}$$

The resultant signal-to-noise ratio expression is

$$SNR = \frac{N_s}{\sqrt{N_t}} = \sqrt{\eta 2\bar{\rho} \frac{Pt}{h\nu} \frac{A_c}{A_T}} \quad C_T \epsilon_t \tag{11}$$

which lumps neatly under the square root the dependence of signal-to-noise ratio on received energy and brings out in accordance the role played by target contrast $\Delta\rho/\bar{\rho}$ and resolution half angle ϵ_t*. Eq. (11) brings out in evidence the direct proportionality between photon signal-to-noise ratio SNR and angular resolution, ϵ_t.

We proceed to apply these concepts to the problem of interest, underwater vision. We shall see in a later section that in spite of the modifications introduced by scattering and absorption losses into Eq. (11), the basic vision criterion of demanding sufficient photons to overcome statistical fluctuations holds just as well. Before proceeding with this task, we first illustrate a possible and rather conventional detection criterion in terms of a minimum or threshold signal-to-noise ratio.

Threshold Detection Criterion

We follow here the approach of Legault (1971). Fig. 4 illustrates the mean number of photons $\langle n_1 \rangle$ and $\langle n_2 \rangle$ received by two adjacent resolution elements and the uncertainties $\sqrt{\langle n_1 \rangle}$ and $\sqrt{\langle n_2 \rangle}$ about each mean caused by statistical fluctuations. By invoking the law of large numbers, it is a simple matter to show that the probability density of the sample reading of the signal, $n_s = n_1 - n_2$ is Gaussian

*- Note however that we could have written (11) as $N_s/\sqrt{N_t} = \epsilon_t \sqrt{\eta (Pt/h\nu)(A_c/A_T)\Delta\rho^2/2\bar{\rho}}$ and describe the target properties by $\Delta\rho^2/2\bar{\rho}$ without ever using the concept of contrast.

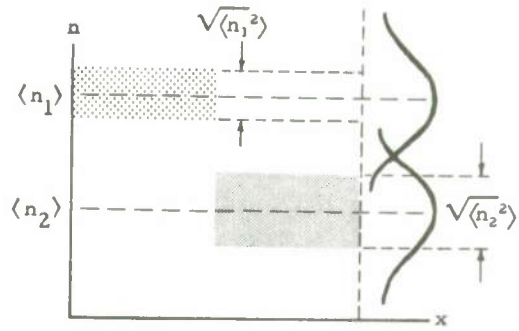


Fig. 4: Fluctuations in mean photon number from two adjacent resolution elements

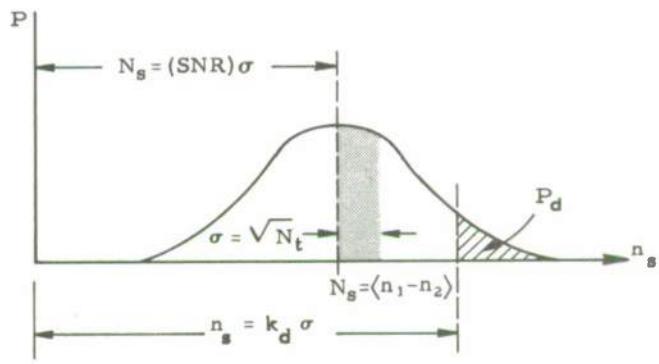


Fig. 5: Probability Density of Signal n_s

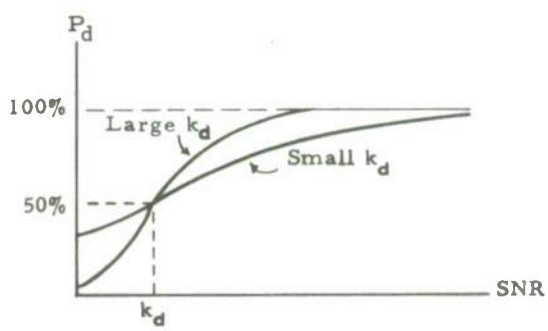


Fig. 6: Sketch of Detection Probability

with mean $N_s = \langle n_1 - n_2 \rangle$ and standard deviation the same as for the Poisson case, $\sigma = \sqrt{N_t}$. This is shown in Fig. 5. For a given observation time, the difference in photons, $n_s = n_1 - n_2$ received from adjacent resolution areas of equal size flutuates about its mean according to

$$P(n_s) = \sigma^{-1}(2\pi)^{-1/2} \exp[-(n_s - N_s)^2/(2\sigma^2)] \tag{12}$$

Calling a detection event whenever the signal equals or exceeds a given threshold above noise,

$$n_s \geqslant k_d \sigma$$

gives for the detection probability

$$P_d = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{k_d\sigma}^{\infty} \exp[-(n_s - N_s)^2/(2\sigma^2)\, dn_s \tag{13}$$

After the simple change of variable $y = (n_s - N_s)/\sigma$ and referring to Fig. 5 we see that

$$P_d\,(k_d, \mathrm{SNR}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_d - \mathrm{SNR}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \tag{14}$$

a well known integral. We interpret it as the probability that two adjacent cells are resolved when the mean difference in received photons is N_s, the detection threshold k_d is fixed at some value and the photon SNR is as usual $N_s/\sqrt{N_t}$. A sketch of the function is shown in Fig. 6.

Note that when SNR equals the detection threshold, the probability of detecting an event is always 50%. However, Eq. (14) is not the complete story. In order to increase P_d it is not sufficient to reduce k_d. For instance, choosing zero detection threshold ($k_d = 0$) and SNR = 3 gives detection probability higher than 99.9%! However the false alarm rate, namely the probability that our eye or other detector will resolve a detectable difference between adjacent resolution elements when there are none is tremendous! The false alarm rate is easily calculated by going back to Fig. 5, redrawing it in Fig.7 with a smaller detection threshold, k_d and superposing the statistics of fluctuations when there is no signal. The mean difference is naturally zero and the standard deviation $\sqrt{\langle n_1 \rangle} = \sqrt{\langle n_2 \rangle}$ is approximately $\sigma/\sqrt{2}$ since for small $\langle n_1 - n_2 \rangle$, $\sigma = \sqrt{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} \simeq \sqrt{2\langle n \rangle}$. The same line of reasoning as before yields the false alarm probability

$$P_F(k_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2}\,k_d}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx \tag{15}$$

It is obvious that if we choose a detection threshold $k_d = 0$, a detection event would be registered 50% of the time when there are none; in short, if our eye were the detector we would be seeing details where there are none, hallucinating half the time! To increase k_d to an acceptable level we must go to psychophysical data. Experimental data by Rosell (1971) are superimposed by Legault (1971) on a P_d vs SNR curve in Fig. 8 for the case of $k_d = 3.3$. The curve shows that if SNR = 5, then k_d - SNR = 3.3 -5.0 = -1.7, Eq. (14) integrates to P_d = 95% a respectably high detection probability and a fair agreement with experiments over a range of SNR. Eq. (15) also shows that the corresponding false alarm probability P_F, is practically zero, indeed a reliable detection. We tried other thresholds, k_d = 1, 2, 3, and the corresponding probabilities are plotted in the same figure. None agree very well with experimental data except for $3 \leqslant k \leqslant 4$. Thus for reliable detection, P_d = .95 requires an SNR of the order of 5.

Contrast and Signal-to-Noise Ratio

Contrast is an ill-defined quantity. There are many definitions all proportional to each other, one of them, a ratio of the difference in photon number from two adjacent areas of equal size, to the average number of photons from the same areas, e.g., $(n_1 - n_2)/[1/2(n_1 + n_2)]$. For reasons to be discussed later, we prefer to drop the factor 1/2 so as to identify this expression with the so-called contrast transfer function. Underwater, where scattering and absorption losses enter, it is important to distinguish between target contrast and image contrast at the receiver. The latter is the ratio of the difference in mean number of photons from two equal adjacent areas to the sum of the photons from these two areas, e.g.,

$$C_I = \frac{\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle}{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle} = \frac{N_s}{N_t} \tag{16}$$

where as always N_s stands for signal photons and N_t for total photons. At the target, we assume the same illumination on both areas so that target contrast reduces to

$$C_T = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2) \tag{17}$$

ρ being the reflectivities of the areas in question.

Recalling expression (5) for SNR, we see from (16) that image contrast and signal-to-noise ratio are related by

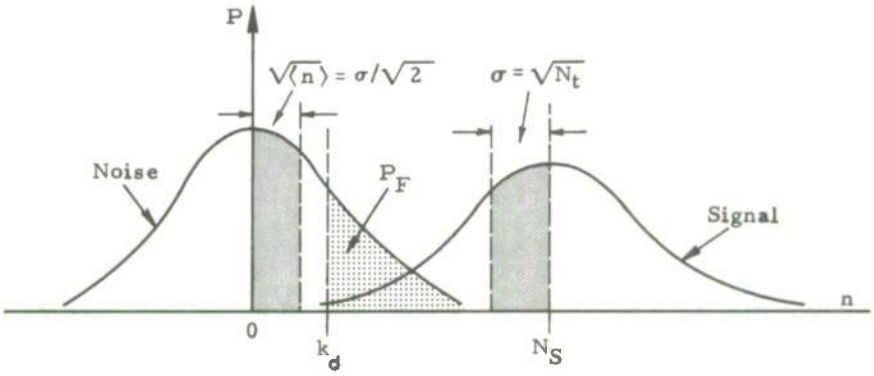


Fig. 7: Probability Density of Signal and Noise

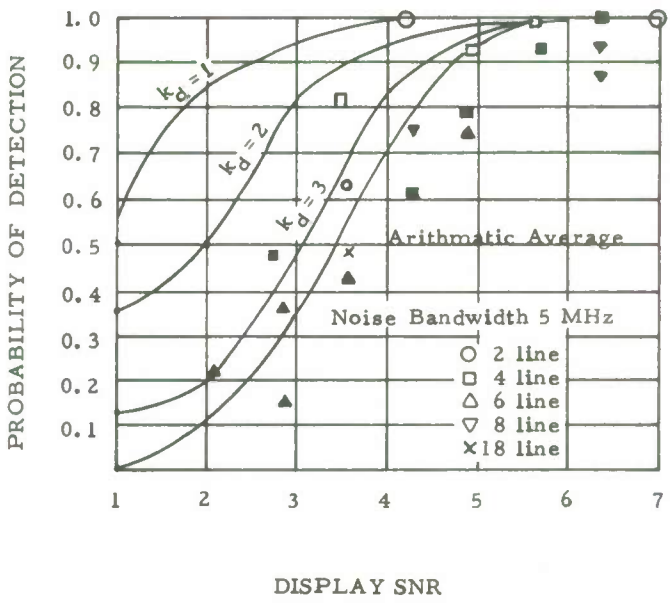


Fig. 8: Probability of Detection vs Display Signal-to-Noise Ratio

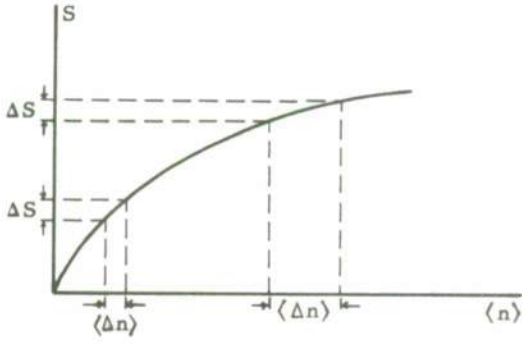


Fig. 9: Logarithmic Response of the Eye

$$C_I = SNR/\sqrt{N_t} \tag{18}$$

The signal-to-noise ratio is usually the quantity that is fixed by the required detection probability so that C_I varies inversely with $\sqrt{N_t}$. What (18) says is: the smaller the total average photon number from the resolution areas, the higher must be the image contrast to meet the detection criterion set by the SNR. When C_I is expressed in terms of SNR as in (18) we call it image threshold contrast.

Resolution can be calculated from (8) by fixing SNR without ever talking about contrast. On the other hand resolution cannot be related to contrast without specifying SNR. Thus the concept of contrast is to some extent superfluous. However, there are cases where it is a convenient quantity particularly the way we have defined it since (see next section) it is identical to modulation or contrast transfer function.

Parenthetically, it is worthwhile mentioning the historical reason behind the use of the contrast concept. There is an old physiophysical law, Fechner's law, proved since to be incorrect, that claims the eye response is logarithmitic. If we call average eye response S and the received number of photons n, Fechner's law states that

$$S = S_o \log n \tag{19}$$

S_o being a proportionality factor. The change in sensation, caused by receiving photons from two adjacent resolution areas, i. e., the output signal is

$$\Delta S = S_o \langle \Delta n \rangle / \langle n \rangle \tag{20}$$

which is approximately

$$\Delta S = 2S_o \frac{N_s}{N_t} = 2S_o C_T \tag{21}$$

where $N_s = \langle \Delta n \rangle = \langle n_1 - n_2 \rangle << \langle n_1 \rangle, \langle n_2 \rangle$

Eq. (21) shows that no matter what illumination is on the two resolution cells, the "eye signal" is the same provided that the contrast remains unchanged. This is illustrated in Fig. 9. In practice it turns out that the eye response is some power law of $\langle n \rangle$,

$$S = S_o' \langle n \rangle^m \tag{22}$$

where S_o' and m depend on many complex factors, particularly the average illumination level. Only for certain illumination levels does the eye behave like a square law detector (m = 2). Expressions (19) and (22) sketeched in Fig. 10 vs log $\langle \dot{n}_{\omega A} \rangle$ are taken from Mees and James (1966). $\dot{n}_{\omega A}$ is the number of photons per steradian per m^2 and per second emitted from the scene. The family of curves results from the fact that the position of the eye response curve shifts and steepens as it adapts itself to the average illumination of a large background against which small details of successively higher contrast are being resolved. The apparent steepening results from the use of a logarithmic scale; it is consistent with the fact that the eye is more sensitive to a fractional change in light at high level while the dark-adapted eye responds better to absolute changes. The steepening corresponds to <u>increase in exponent</u> with illumination level from m = 1.2 to m > 2.0 in Fig. 10b. There is an important aspect of the eye mechanism for which the concept of contrast is necessary to determine its performance limit. When the eye looks simultaneous at two patches of different reflectivities or illumination, the simultaneous contrast shifts and steepens the particular response curve on which it operates. This shifting and steepening of the response curve is translated into fluctuations at the "output" which mask the resolvable signal. For the same SNR, the two adjacent areas of small contrast may not be resolved while the same areas with large contrast are indeed resolved. This is illustrated in Fig. 11a and 11b. Thus the stability of the eye response curve sets a limit on the minimum contrast threshold. That limit is higher than the one imposed by the photons fluctuations, responsible for fixing the signal-to-noise ratio. We expect a well designed photoelectric detector to have a stabler response in which case SNR and not contrast would set its ultimate resolution.

<u>Contrast Transfer Function and Angular Frequency</u>

In the previous section we pointed out how resolution can either be expressed in terms of SNR, or by fixing the SNR in terms of contrast. We shall see how by reinterpreting the concept of contrast some useful applications follow.

Thus far resolution has been defined in terms of the minimum detectable difference in photon number from adjacent elementary areas subtending an angle $2\epsilon_t$ at the receiver. It is obvious from Eq. (18) that larger resolution elements provide more photons at the receiver (larger N_t), and raise the value of the image threshold contrast, C_T. From (4), (6) and (10) we know that $\sqrt{N_t}$ is proportional to angular resolution $2\epsilon_t$, hence C_I as given by (18) is inversely proportional to angular resolution.

It is convenient to express angular resolution in terms of an angular frequency in accord with the common practice followed in evaluating optical systems. The relation between angular resolution and angular frequency, ψ is easily seen from Fig. 12 where resolving a cell of angular subtense $2\epsilon_t$ means detecting the photon number difference between this cell and an adjacent one of the same size. Of course the threshold contrast is a function of the cell reflectivities and the intervening medium. Note that contrast and resolution always require a comparison of two adjacent cells of different reflectivities.

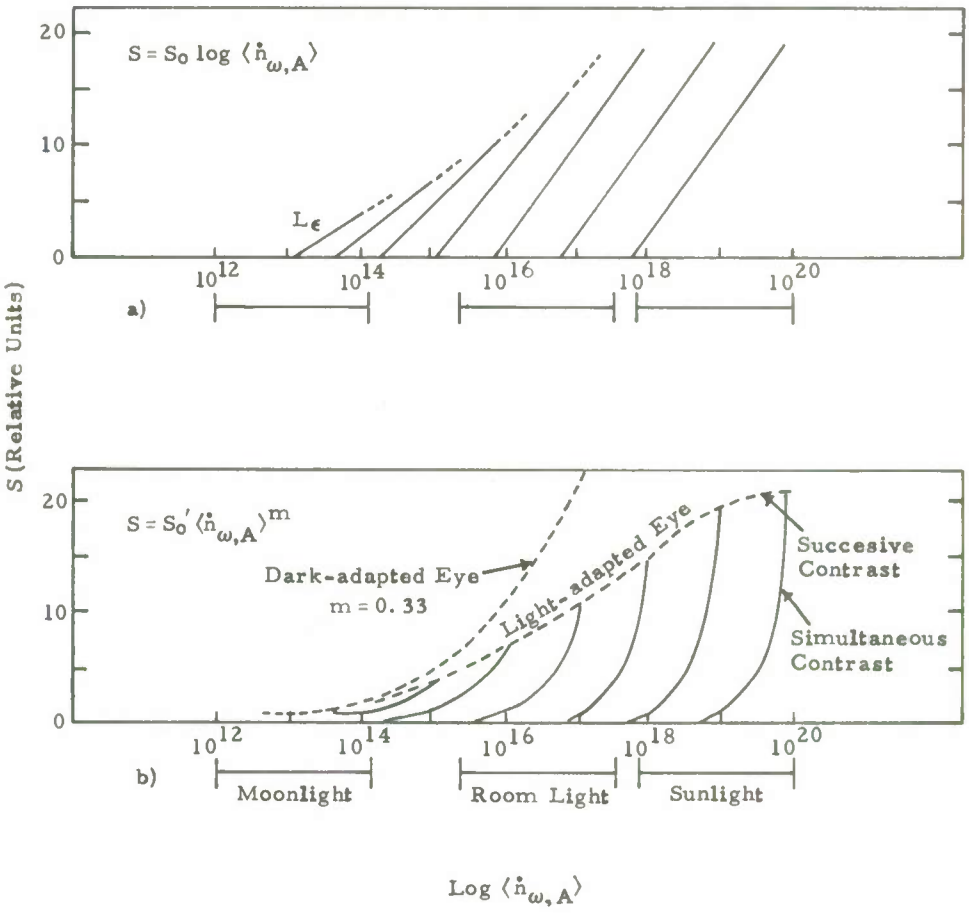


Fig. 10: Mathematical models that have been considered for expressing the relation between eye illumination and its response

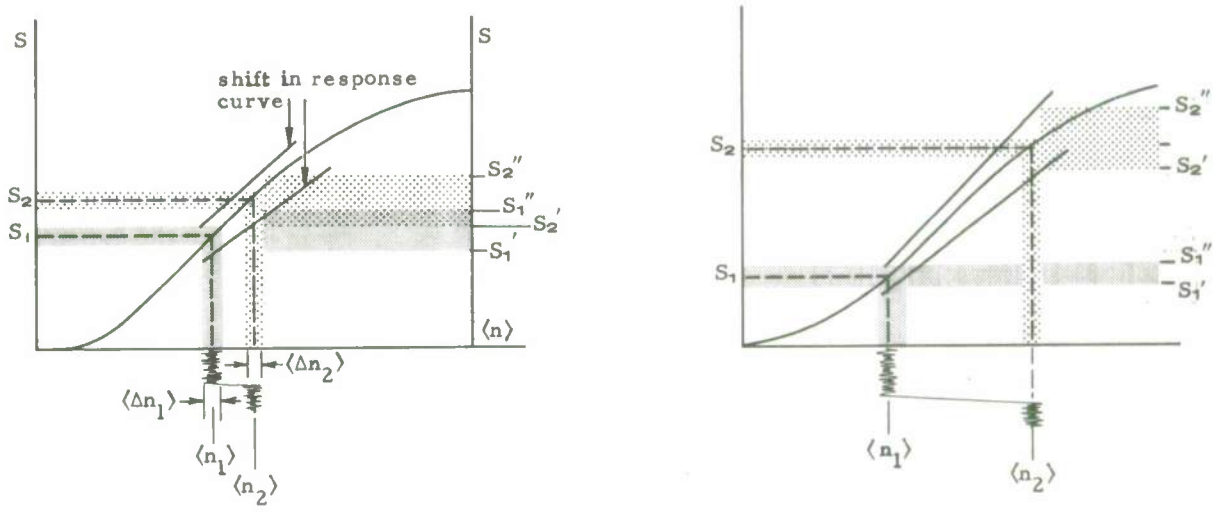


Fig. 11: Unstable eye response sets a limit on the minimum threshold contrast in spite of sufficiently high SNR (greatly exaggerated)

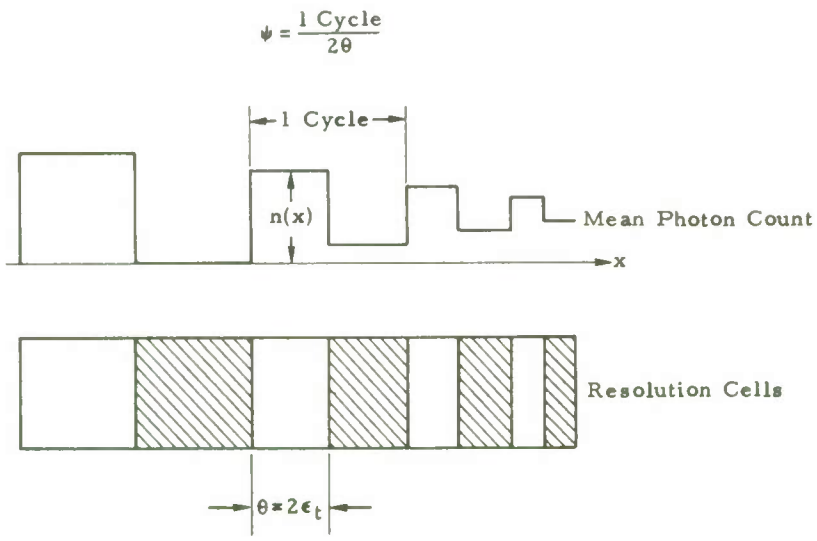


Fig. 12: Relation Between Resolution, ϵ_t and Angular Frequency, ψ

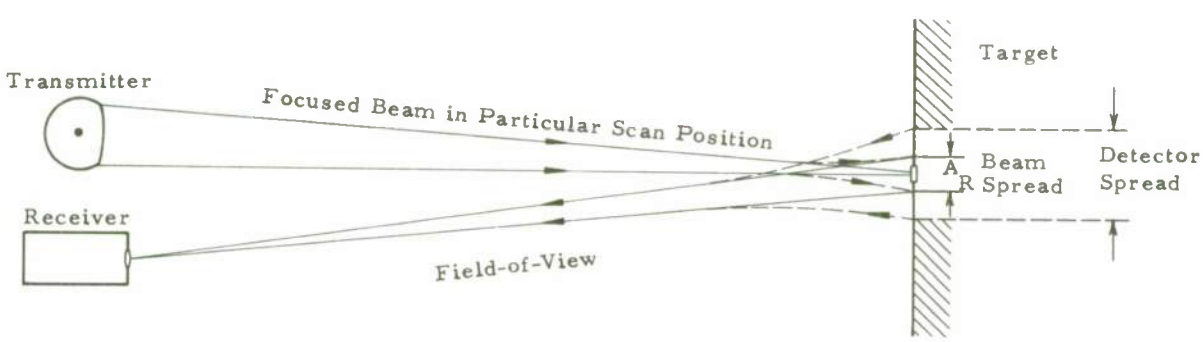


Fig. 13: Dual Scan Geometry Underwater

Each pair of cells as seen from the figure forms a cycle of a square wave that describes the change in mean photon count. For the purpose of calculating resolution the whole target is assumed to be covered by such pairs. The angular length of this cycle is $2(2\epsilon_t)$ and its angular frequency $\psi = 1/2(1/2\epsilon_t)$ [cycles/radian]. Consequently $\sqrt{N_t}$ is inversely proportional to ψ and image threshold contrast, C_I is directly proportional to ψ. As ψ increases, ϵ_t decreases and the required threshold contrast must be higher. C_I expressed in terms of ψ is called contrast transfer function. It gives the minimum contrast required to resolve any arbitrary size cell when the limitations are set by the statistical fluctuations in the detector (shot noise and others).

We now calculate the behavior of contrast functions underwater by considering again the Dual Scan Imaging System.

As shown in Fig. 13 the scattering in the water does not allow the beam to focus into a point but spreads it over a small area. Similarly light going from that elementary area to the receiver is scattered more giving the appearance of coming from a wider area. If we define a resolution cell as an area smaller than the one illuminated in that particular scan position, only a fraction S of the total number of photons at the receiver, contribute to the signal. S is the fractional number of photons coming from the defined resolution cell and scattered a sufficiently small amount to be accepted by a field stop in the receiver. On the other hand, some photons coming from the area surrounding the resolution cell are sufficiently scattered to appear as if they were coming from the cell in question and get through that same field stop. These photons, whose fraction is B, do not contribute to information but add statistical fluctuations that mask the detected signal and reduce the SNR required to resolve the desired target features. Of course $(S + B) < 1$ since many more photons received at the receiver collecting aperture have been sufficiently scattered so as not to be able to get in through the field stop. They do however reduce the total number available to the signal, thus reducing SNR and degrading resolution. Following the same line of reasoning that led us to Eq. (6), we find the number of photons at the aperture,

$$N = 6.12 \times 10^{17} \quad M \frac{e^{-2\gamma r}}{R^2} \pi \epsilon_t^2 \tag{23}$$

$M = E\eta D$ is defined as the system figure-of-merit since it is the product of the light source energy E, per scan position, the optical and quantum efficiency η and the collecting aperture diameter, D. $\bar{\rho}$ is to be incorporated in the equations below. The numerical factor includes the energy per photon at 488 nm and other numerical factors. The fraction of photons coming from the area of angular subtense $\pi\epsilon_t^2$ to be resolved is, S. B is the fraction of background photons which through scattering seem to have originated from the same area. To resolve means to detect a difference in reflectivity between this area and an adjacent area of the same size but of difference reflectivity. The number of signal photons is

$$N_s = \Delta\rho S N \tag{24}$$

The total number of background photons that compete with the signal in one cell area is

$$N_t = 2\bar{\rho}(S + B) N \tag{25}$$

The calculation of S and B which requires the Wells' scattering theory of light underwater, is carried out in Lecture 4.3 and will not be repeated here. It suffices to say that resolution is determined by fixing the signal-to-noise ratio as indicated by Eq. (11). The contrast transfer function is from (16) and (18)

$$\frac{N_s}{N_t} = C_I = \frac{SNR}{\sqrt{N_t}} \tag{26}$$

By substituting (24) and (25) into (26) we get

$$\underbrace{\left(\frac{\Delta\rho}{2\bar{\rho}}\right)}_{C_T} \underbrace{\left(\frac{S}{S+B}\right)}_{C_M} = C_I = \underbrace{\frac{SNR}{\sqrt{2\bar{\rho}(S + B) N}}}_{C_S} \tag{27}$$

Eq. (27) in terms of contrast transfer function provides the following useful interpretation: The quantities to the left of C_I are the product of the contrast transfer function of the target $C_T = \Delta\rho/2\bar{\rho}$ and the medium, $C_M = S/S+B$. The quantity to the right of C_I is the minimum threshold contrast, C_S required from the system to resolve an angular cell size ϵ_t in the presence of statistical fluctuations whose magnitude are fixed by the signal-to-noise ratio. We thus rewrite (27) as

$$C_S(\psi) = C_T(\psi)\ C_M(\psi) \tag{28}$$

- Note that C_M is the contrast transfer function of the medium as the system "sees it", in our case the Dual Scan.

Substituting (23) into $C_s(\psi)$ and recalling that $\epsilon_t = 1/4\psi$ gives

$$C_s(\psi) = \frac{4\,\mathrm{SNR}}{\sqrt{1.92 \times 10^{18}\,(S + B)2\bar{\rho}\alpha M}}\,\alpha R e^{\gamma R}\psi \tag{29}$$

Note that C_s is directly proportional to ψ, while C_T and C_M are both decreasing functions of ψ. We have plotted the two functions $C_M(\psi)$ and $C_s(\psi)$ in Fig. 14 for a target with contrast $\Delta\rho/2\bar{\rho} = 1$ and $2\bar{\rho} = .20$. The intersect of the two functions yields the maximum angular frequency or minimum achievable resolution of the dual-scan imaging system. The quantities S and B are listed under the graph and were obtained via calculations described in Lecture 4.3. The results obtained by this approach are identical to those obtained by the method described in that same lecture. The two curves intersect at the maximum angular frequency and by converting to angular resolution through $\epsilon_t = 1/4\psi$ one obtains an achievable angular resolution of 2 mrad.

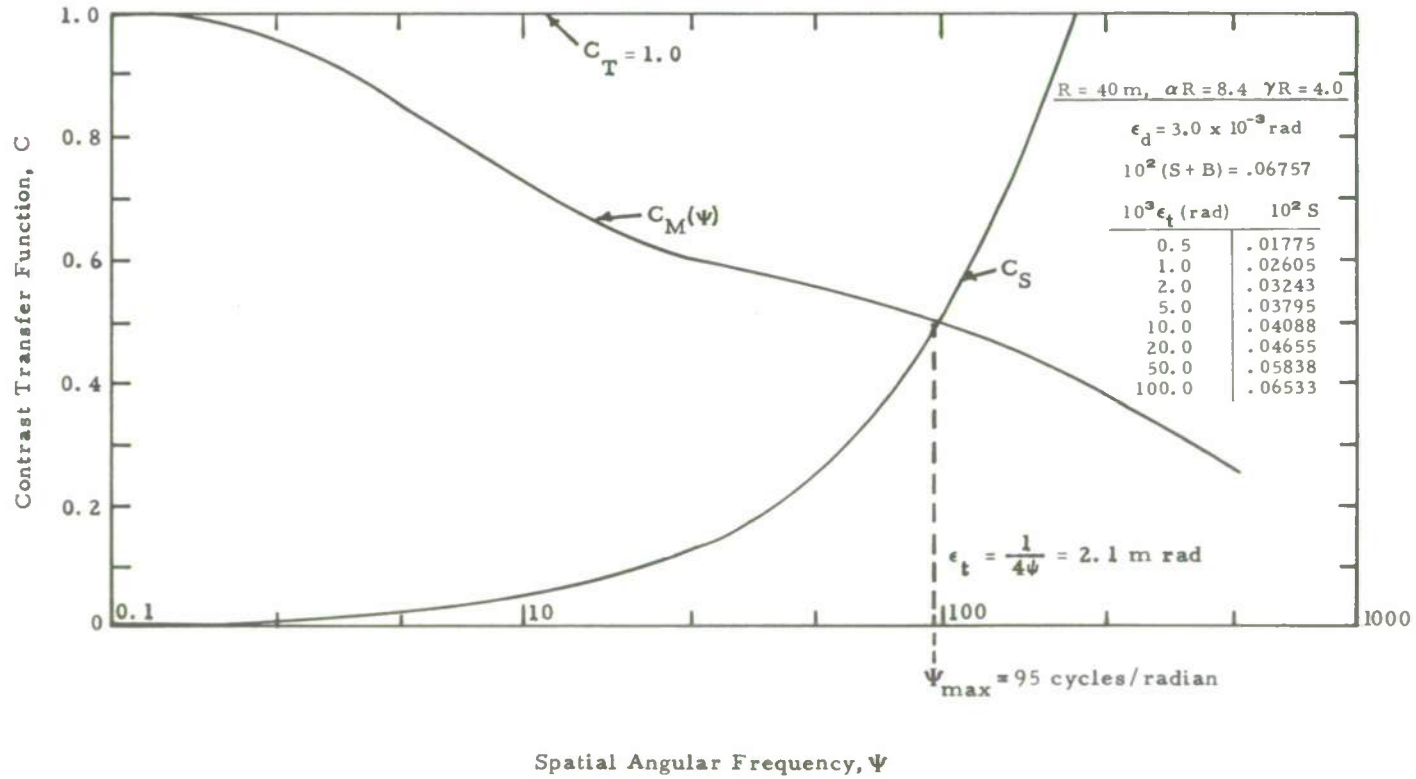
The expression (2) is useful not only conceptually but also for computations: The limiting resolution of underwater optical imaging systems is simply obtained by multiplying the contrast transfer functions of the medium and target and by equating them to the threshold contrast required by the receiver to meet a specified signal-to-noise ratio.

References

Legault, R. L., 1971, "Visual Detection Process for Electrooptical Images in Photoelectric Imaging Devices", Vol. 1, ed. Biberman, Nudelman, Plenum Press, N. Y., p. 69.

Mees, C. E. K. and T. H. James, 1966, "The Theory of the Photographic Process", 3rd edition, MacMillan, N. Y.

Rosell, F. A., 1971, "The Limiting Resolution of Low-Light Level Imaging Sensors in Photoelectronic Imaging Devices", Vol. 1, ed. Biberman and Nudelman, Plenum Press, N. Y., p. 307.



$10^3 \epsilon_t$ (rad)	10^2 S
0.5	.01775
1.0	.02605
2.0	.03243
5.0	.03795
10.0	.04088
20.0	.04655
50.0	.05838
100.0	.06533

Fig. 14 Plots of Target, Medium and System Contrast Function

MEDIUM AND SYSTEM TRANSFORM FUNCTIONS

Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

Abstract

Lecture 3.3 described the various techniques for finding the point spread function f for light in seawater. This lecture shows how to use Fourier techniques to calculate the spread of scattered light surrounding other distributions: a circular spot, a beam with Gaussian profile, and a linear stripe. Quantities needed for round-trip propagation, transmitter to target to receiver, are defined and discussed. Target irradiance h is f convolved with the unscattered beam profile. Detector sensitivity profile g is defined as the power incident on the detector per unit power aimed at the collecting aperture. It equals f convolved with the field-of-view profile times the solid angle that the detector or field stop subtends. The return from a target is hg times the target reflectivity integrated over the target surface. A simple formula for particle-backscattered light derived by Replogle results from treating the medium as a series of thin scattering veils hung across the propagation path, and integrating hg over each veil as though it were a target. In a dual-scan system, which illuminates only one point at a time and looks only at this point, the overall image transfer function is H*G, i.e., the convolution of the transforms of h and g. The target features most important to discern are edges or boundaries of features. Suppose the detector is looking at area A_1 on one side of boundary with reflectivity ρ_1, and A_2 on the other side has reflectivity ρ_2. Then let the integral of hg over A_1 be called S, and $\rho_1 S$ is the target return bearing true information. Similarly, let the integral over A_2 be called B, and $\rho_2 B$ becomes the false return or background. Finally, signal-to-noise ratio is proportional to $|\rho_1 - \rho_2| S/(\rho_1 S + \rho_2 B)^{1/2}$.

So far we have used a seawater transfer function only for the purpose of finding the point spread function. In this lecture we expand the theory with transfer functions for aperture, offset, and other features that make up an underwater vision system.

Seawater Transfer Function

In lecture 3.3 we derived mathematical expressions that relate various blur distributions of scattered light in seawater. About half of these expressions apply to the optical geometry shown in Fig. 1a and the other half to collimated light in a test cell, Fig. 1b. The corresponding symbols bear superscripts f, for end-focussed, and c, for collimated, respectively. As shown in the figure, the basic difference, is whether or not light scattered through the same angle at different distances comes to focus at the same point. The collimated case is of no concern in this lecture; instead, we deal only with the case depicted in Fig. 1a because operational situations will have all the optics at one end of the propagation path and the target at the other end as shown. We, therefore, drop the superscript f from the corresponding symbols.

Some review is appropriate before proceeding. The blur distribution of a point of focussed illumination is expressed as the fraction of transmitted power per steradian at range R that is deflected a distance $R\theta$ from the focal point. This function, $f(\theta, R)$ is called the point spread function and is exactly the same as the blur distribution of the image of a point source seen through the scattering medium. The spread function is computed as the Fourier-Bessel transform of the modulation transfer function (MTF) of the medium, $F(\psi, R)$:

$$f(\theta, R) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi\theta\psi) F(\psi, R) \psi \, d\psi \tag{1}$$

The reason for employing the MTF is its simple dependence on range:

$$F(\psi, R) = \exp[-RD(\psi)] \tag{2}$$

Once the spatial frequency decay function $D(\psi)$ is known, Eqs. 1 and 2 provide f at any range. Finally, the part of D caused by particle scattering $D_p(\psi)$ may be derived from the volume scattering function, $\sigma(\theta)$

$$D_p(\psi) = \alpha - \int_0^1 \Sigma(t\psi) dt \tag{3}$$

where $\Sigma(\psi)$ is its Fourier-Bessel transform:

$$\Sigma(\psi) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_0(2\pi\theta\psi) \sigma(\theta) \theta \, d\theta. \tag{4}$$

(We consistantly use capital symbols for Fourier transforms of quantities with lowercase symbols.) An additional part D_t proportional to ψ^2 may be required at high frequency to account for turbulent scattering. However, usually $D(\psi)$ has been found by using experimental point spread functions in the inverse of Eqs. 2 and 1:

$$D(\psi) = -R^{-1} \log_e F(\psi, R) \tag{5}$$

and
$$F(\psi, R) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_0(2\pi\theta\psi) f(\theta, R)\theta\, d\theta \tag{6}$$

The last equation is unnecessary if F is measured experimentally. It is the fraction of black-white contrast that remains in the image of a sinusoidally-graded bar chart of spatial frequency ψ cycles/radian. The MTF may also be obtained (Lect. 3.4) by using a transparent bar chart as a mask to analyze the frequency content of a blur circle.

Lect. 3.3 gave some techniques for using the above six equations without the aid of a computer by fitting $\sigma(\theta)$ or $D(\psi)$ to a simple mathematical expression of the right general shape. However, the expression for $f(\theta, R)$ approached the threshold of impractical complexity. The further manipulations in this lecture would definitely exceed this threshold, and so we assume that the analytic techniques developed here are used solely for numerical computation. The forms are as simple and elegant as the six equations above so long as you do not try to substitute analytic expressions and use integral tables.

Irradiance Distributions

When an unscattered illumination beam is focussed to a point, we know how to find the scattered irradiance distribution about that point; it is merely the point spread function. Now suppose that the unscattered beam does not strike the screen in a point but in some other blur distribution $h_0(\theta)$ due to the light source and optics. The problem now is to find the overall blur $h(\theta)$ that includes scattered light as well. It does not matter whether $h_0(\theta)$ represents the focussed image of an extended light source (incoherent), Fig. 2a, or an unfocussed blur from a point source (coherent), Fig. 2b. The target or screen is presumably diffuse, so that partial coherence is lost in any event.

Fig. 3 shows a simple vector diagram for calculating $h(\theta)$. Angles may be treated as vectors only when they are small ($\sin\theta = \theta$, etc.). Think of each angle vector multiplied by R to give a two-dimensional vector in the plane of the target screen. Light that is aimed at the differential element $d\omega$ at $\vec{\theta}'$, acts as a source that contributes scattered irradiance at position $\vec{\theta}$. The contribution dh at θ from θ' is $h_0(\theta')d\omega f(|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|, R)$, interpreted as the source strength $hd\omega$ times the fraction f that scatters from θ' to θ. Integrating all such contributions gives

$$h(\theta) = \int h_0(\theta') f(|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|, R) d\omega \tag{7}$$

We assume that both distributions h and f are symmetrical about their own axes. Since Eq. 7 is a convolution, it follows immediately that the Fourier transforms are simply related by $H(\psi) = H_0(\psi) F(\psi, R)$. Then $h(\theta)$ is recovered by inverse transformation:

$$h(\theta) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(2\pi\theta\psi) H_0(\psi) F(\psi, R)\psi\, d\psi \tag{8}$$

When the analyst describes the optical properties of seawater in the frequency domain, then the transfer function F required for Eq. 8 is readily available. This equation is central to the discussion in this lecture. The remainder of this section explains the most useful irradiance distributions $h_0(\theta)$ and corresponding $H_0(\psi)$, which are listed in the table on the following page. All except the linear stripe are normalized to unit total power; the stripe is normalized to unit power per radian. An example of computed $h(\theta)$ is also included.

The most common distribution is the circular spot. It can result from the focussed image of a circular light source, Fig. 2a, or from a circular beam of a point source striking the target out of focus, Fig. 2b. The spot and its transfer function are the first entry in the table. Some circular spots of different radius convolved with a typical seawater spread function are shown in Fig. 4. We computed these by using Eq. 8 with $H_0 = \mathrm{Cir}(\theta_0\psi)$, $F = \exp(-DR)$ and a typical $D(\psi)$. As another example, the focussed or unfocussed illumination from a laser, or the focussed illumination from a short-arc lamp may have a roughly Gaussian distribution. This spread and its transfer function are the second table entry.

Some of the systems to be described in Lect. 5.4 employ fan-beam illumination that lights the target in a linear stripe. This shape does not fit the circular symmetry used so far that lets us perform transforms on the radial variable only. However, it often does not matter which way the stripe is oriented, and so we conceptually rotate the stripe around an axis and generate a symmetrical distribution. (Even when the orientation does make a difference, say parallel or perpendicular to some feature in the target, we sometimes use an average orientation because there would be too many cases to solve otherwise.) Fig. 5 shows the stripe offset by angle ζ from the coordinate center. Such an offset may be determined by other factors, especially the spot where the detector is looking. The stripe extends an angle Λ one way from the point closest to the coordinate center, and any extension in the other direction may be regarded as a second stripe providing additional illumination. Let us make an exception to the usual normalization (unit power in the whole beam) and normalize this case to unit power per radian of stripe length. Then the distribution function and its transform are the third table entry. The derivation is deferred to the appendix along with interesting remarks about the line spread function. Usually the edge effects are not important if the slit is long enough compared to the offset ($\Lambda \gg \zeta$) in which case we can let $\Lambda \to \infty$, multiply by 2 for a stripe that is infinite in both directions, and find the results given in the fourth table entry.

Suppose that an illuminator focusses its unscattered light to a point on a screen, but this point is offset from the coordinate center by an angle ζ just as the stripe is offset in Fig. 5. Again suppose that the direction of the offset point is irrelevant so that the unit impulse $\delta_2(\vec{\theta} - \vec{\zeta})$ may be averaged around a circle of radius ζ and replaced by a radial impulse

$$\mathrm{ofst}(\theta, \zeta) = \delta_1(\theta - \zeta)/2\pi\theta,$$

i.e., a ring of unit illumination. The corresponding transform function (for use as a special case of H_0 in Eq. 8 is

$$\mathrm{Ofst}(\psi\zeta) = 2\pi \int_0^{\theta_{max}} J_0(2\pi\theta\psi)[\delta(\theta - \zeta)/2\pi\theta]\theta\, d\theta = J_0(2\pi\zeta\psi),$$

Name	Distribution	Transfer Function	Remarks
Seawater	$f(\theta, R)$	$F(\psi, R) = \exp[-D(\psi) R]$	$R \equiv$ range See Eqs. 3, 4, 5, 6
Circular spot	$\mathrm{cir}(\theta, \theta_o) = \begin{cases} 1/(\pi\theta_o)^2, & \theta < \theta_o \\ 0, & \theta \geq \theta_o \end{cases}$	$\mathrm{Cir}(\theta_o\psi) = 2J_1(z)/z, \quad z \equiv 2\pi\theta_o\psi$	$\theta_o \equiv$ angular radius
Gaussian beam profile	$\mathrm{gaus}(\theta, \theta_o) = \dfrac{\exp(-\theta^2/\theta_o^2)}{\pi\theta_o^2}$	$\mathrm{Gaus}(\theta_o\psi) = \exp[-(\pi\theta_o\psi)^2]$	$\theta_o \equiv$ standard deviation
Finite linear stripe, averaged orientation	$\mathrm{strip}(\theta, \zeta) = \begin{cases} (2\pi)^{-1}(\theta^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \zeta < \theta < \hat{\theta} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\mathrm{Strip}(\psi, \zeta, \Lambda) = \int_\zeta^{\hat{\theta}} J_o(2\pi\theta\psi) \dfrac{\theta d\theta}{(\theta^2 - \zeta^2)^{1/2}}$	$\Lambda \equiv$ one-way length; $\zeta \equiv$ offset; $\hat{\theta}^2 = \Lambda^2 + \zeta^2$ See Fig. 5 Unit power per radian
Infinite linear stripe, averaged orientation	$\mathrm{infstrp}(\theta, \zeta) = \begin{cases} \pi^{-1}(\theta^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \theta \geq \zeta \\ 0, & \theta < \zeta \end{cases}$	$\mathrm{Infstrp}(\psi, \zeta) = (\pi\psi)^{-1} \cos(2\pi\zeta\psi)$	Unit power/radian Infinite both ways $\zeta \equiv$ offset
Offset, averaged orientation	$\mathrm{ofst}(\theta, \zeta) = \zeta_1(\theta - \zeta)/2\pi\theta$	$J_o(2\pi\zeta\psi)$	$\zeta \equiv$ offset
Offset distribution, averaged orientation	$h_{off}(\lvert\vec{\theta} - \vec{\zeta}\rvert)$	$H_o(\psi, \zeta) J_o(2\pi\zeta\psi)$	$\zeta \equiv$ offset

TABLE OF BLUR AND OFFSET DISTRIBUTIONS AND THEIR FOURIER TRANSFORMS OR TRANSFER FUNCTIONS

also listed in the table. This is analogous to the ordinary one-dimensional Fourier transform in which shifting the origin of a function multiplies its transform by a phase factor. Finally suppose that a whole distribution of irradiance $h_o(\theta)$ is offset in a similar manner, and once again we wish to find the orientation-averaged distribution $h_{off}(\theta)$. From the general trend of this analysis the reader probably expects to find the Fourier transform of the offset distribution function simply by multiplying H_o by Ofst, and indeed this is the case as given in the last table entry. A proof is deferred to the appendix.

Be advised that there are pitfalls in averaging over unimportant offset orientations, because some relative orientation between elements of a system may be important even when the absolute orientation of the whole is irrelevant. For example, the offset infinite stripe has the transform Infstrp = $(\pi\psi)^{-1} \cos(2\pi\zeta\psi)$, and the on-center stripe ($\zeta = 0$) merely $(\pi\psi)^{-1}$. However, taking the on-center stripe and offsetting it by using Ofst gives $(\pi\psi)^{-1} J_o(2\pi\zeta\psi)$, quite a different result. The difference is that the first offset (with the cosine) had a relative orientation, always perpendicular to the stripe, which keeps light out of a circle of radius ζ. The second offset (with J_o) averages over all directions with respect to the stripe.

In conclusion, the irradiance of a light beam falling on a target or screen may be blurred by various influences, the medium, the light source, and the conditions of focus; offsets also act as though they were blurs when their orientation makes no difference in the problem. Each blurring influence has a transfer function, the Fourier transform of the irradiance distribution when the influence in question acts alone. The distribution that results from a number of blurring influences is found by taking the product of all the transfer functions and transforming back to the space domain. Eq. 8 is an example in which F is the medium transfer function and H_o is that of the source size and optical focus.

Detector Sensitivity Profile

Suppose a light detector is focussed on a point source of illumination at a distance R as shown in Fig. 6. This detector receives a certain amount of light depending on source emission, collecting aperture, etc. Now consider how this received power decays as the source is moved off axis an amount $R\theta$. If the medium is free from scatterers, the received power will drop off suddenly as shown by the dashed line in Fig. 7 when the image of the source strikes the edge of the stop that defines the detector's field of view. However, any scattering or other blurring influences will cause a detector sensitivity profile as shown by the solid line.

Next suppose that we remove the detector and replace it with a luminous source that fills the stop and converts the receiver into an illuminator. Similarly, we remove the point source and replace it with a target screen. Now by reciprocity of light rays one expects the distribution of irradiance on the screen to have exactly the same distribution as the sensitivity profile in Fig. 7, and indeed, this turns out to be the case. However, one must be careful of normalization. We have been normalizing illumination to unit power in the transmitted beam (except for the stripe). Thus if we broaden an illumination beam, the peak irradiance drops as in Fig. 8a. However, if we open the field stop of a receiver, the central intensity stays constant as in Fig. 8b. (These are only the most natural normalizations that result from the usual situations. We could employ a luminous source of fixed radiance, regulate it with a stop and have an irradiance function like 8b; or we could defocus a receiver so that the blur circle from a point source extends beyond the field stop and obtain sensitivity profiles like Fig. 8a.) We define detector sensitivity $g(\theta)$ as the amount of power incident on the detector when unit power is transmitted toward (not incident on) the collecting aperture. Note that g is unity when $\theta = 0$, the receiver is in focus, and the medium is ideal. In other words, there are three kinds of losses from object to detector:

- geometric -- inverse square law, radiant intensity pattern
- scattering and absorption in the medium
- optical -- efficiencies and transparencies in the receiver.

The function $g(\theta)$ describes only the second of these; the others are elementary and outside the scope of this lecture.

Now let us derive $g(\theta)$ systematically for the most important case, a circular field stop of radius ϵ focussed (through a scattering medium) on the target at range R. The test source in Fig. 6 aims unit power toward the aperture and produces a blurred distribution of light on the focal plane as shown by contours in Fig. 9. These are off-center from the field stop an angular distance θ. We proved in Lect. 3.3 that this vision distribution is the same as the illumination one, the point spread function $f(\theta, R)$. The detector is indifferent to the direction of offset, so the offset transfer function applies. Now to find the effective light distribution about the center of the field stop, we use the standard prescription given in the last section. We take the product of the pertinent transfer functions, F for the medium and $\mathrm{Ofst}(\theta\psi)$ for the offset, and transform to the space domain, angle θ' in $J_o(2\pi\theta'\psi)$, as follows:

$$f_{off}(\theta', \theta) = 2\pi \int J_o(2\pi\theta'\psi) J_o(2\pi\theta\psi) F(\psi, R) \psi \, d\psi \qquad (9)$$

Integrating over the field stop, θ' from 0 to ϵ as shown in Fig. 9, gives the power that the detector receives, which is the detector sensitivity profile because f is properly normalized for unit transmitter power, i.e.,

$$g(\theta, \epsilon) = 2\pi \int_0^{\epsilon} f_{off}(\theta', \theta)\theta' d\theta' = \pi\epsilon^2 \int \mathrm{Cir}(\epsilon\psi) F(\psi, R) \underbrace{J_o(2\pi\theta\psi) 2\pi\psi \, d\psi}_{\text{transform to angle}} \qquad (10)$$

new normalization

circle transfer function, Cir in the table

seawater transfer function

In the last part of Eq. 10, the θ' integration has been performed using an indefinite integral of J_o available in standard tables, and the factors have been arranged for easy comparison to Eq. 8 (using Cir as a special case of H_o). This comparison shows that the detector sensitivity profile is the same as the corresponding

illumination profile except for the normalizing factor, $\pi\epsilon^2$. For an ideal medium, F = 1, and Eq. 10 gives

$$g_{ideal}(\theta,\epsilon) = \pi\epsilon^2 \text{transform}\,(\text{Cir}(\epsilon\psi)) = \begin{cases} 1, & \theta < \epsilon \\ 0, & \theta > \epsilon \end{cases}$$

For the last step here, note Cir and cir in the table of transfer functions. The resulting step function on the right end is in accord with the normalization discussion concerning Fig. 8. Finally note that Eq. 10 may be written more compactly in the frequency domain:

$$G(\psi,\epsilon) = \pi\epsilon^2 \text{Cir}(\epsilon\psi) F(\psi, R) \tag{11}$$

Backscatter Computation

One of the factors that adversely affects underwater vision with artificial illumination is light that backscatters from particles in the water into the detector. The dual-scan system greatly reduces this interference by using a thin scanning light beam well displaced from a thin instantaneous field of view that looks only where the beam strikes the target. Nevertheless, the residual interference is not negligible, and techniques for calculating it are important. Frank S. Replogle of the Navy Underwater Systems Center, New London, has devised the most ingenious one, which also provides an excellent example of the transfer function techniques developed in this lecture. He has shown that the most important backscattered rays are those that scatter only once through a large angle, and one or more times through small angles, Fig. 10. More direct rays, like the dashed one in the figure that scatters through two large angles, do not count for much because the intensity scattered at large angles is so much less than that at small angles.

Replogle observed that the small angle scatters could be handled by the MTF theory, while the single large angle scatter may be managed by thinking of the medium divided into differential slabs of width dr (Fig. 11) and treating each slab as a thin veil hung across the propagation path having diffuse reflectivity proportional to $\sigma_b \equiv \sigma(180^\circ)$, the backscatter coefficient, which varies only slightly in a wide arc about 180°. The light beam makes a bright spot where it passes throught the veil; this bright spot has a halo of scattered light around it; the spot and halo are imaged on the receiver focal plane (off-center); and some part of the intensity falls within the detector acceptance angle or field stop. For one increment of solid angle $d\omega$ on one veil the faction of transmitted light backscattered into the detector is $(h(\theta,r)d\omega)(\sigma_b dr)(\pi d^2/4r^2)g(\theta,r)$. Here $hd\omega$ is the fraction of transmitted power incident on $d\omega$, $\sigma_b dr$ is the fraction scattered back per steradian; $\pi d^2/4r^2$ is the solid angle in which the aperture catches the scattered light, i.e., the fraction into the receiver; and finally g is the fraction that falls on the detector. Integration over all solid angle ($d\omega$) and over all the veils (dr) gives

$$B = (\pi d^2\sigma_b/4)\iint h(\theta,r)\,g(\theta,r)\,d\omega\,dr/r^2 \tag{12}$$

The theory of transfer functions permits us to write down the expressions for g and h, or rather their transforms G and H, with great ease. Referring to the offset and aperture in Fig. 11, we find:

$$G(\psi) = \pi\epsilon^2 \text{Cir}(\psi\delta)\,\text{Cir}(\epsilon\psi)\,F(\psi,r) \tag{13}$$

$$H(\psi) = H_o(\psi)\,\text{Ofst}(s\psi)\,F(\psi,r) \tag{14}$$

merely the product of all pertinent spreads and $\pi\epsilon^2$ in the G expression as discussed before in connection with normalization, Eq. 11. In Eq. 13 the first circle function applies to the out-of-focus image of a point detector at distance r, which has an angular radius δ as shown in the figure, and the second Cir refers to the additional spread from the finite field stop of radius ϵ. (Together the two Cir's correspond to a sensitivity profile with an umbra and penumbra.) In both Eqs. 13 and 14, F is the seawater transfer function; in Eq. 14 Ofst accounts for the angle s at distance r between the beam and the field of view; and finally H_o is the transform of the unscattered beam cross section, whatever it may be. Replogle assumes a small-aperture laser transmitter, neglects its diameter and, therefore, takes $H_o = 1$. Note that s and d in Eqs. 13 and 14 are both functions of r as shown in the figure. Since the product hg is integrated over the whole target plane in Eq. 12, Parseval's theorem applies, which for our symmetrical functions reads

$$\int_0^\infty g(\theta)\,h(\theta)\,d\omega = \int_0^\infty G(\psi)\,H(\psi)\,2\pi\psi\,d\psi.$$

In other words, the product HG may be integrated over frequency instead of hg over all solid angles. With the aid of Eqs. 13 and 14, Eq. 12 then becomes

$$B = (\pi d^2/4)(\pi\epsilon^2)\sigma_b \int_b^R\int_0^\infty \text{Cir}(\psi\delta)\,\text{Cir}(\epsilon\psi)H_o(\psi)\,\text{Ofst}(s\psi)\,F(\psi,2r)\,2\pi\psi\,d\psi\,dr/r^2 \tag{15}$$

Note that $[F(\psi,r)]^2$ has been written $F(\psi,2r)$ because $F(\psi,r) = \exp(-Dr)$. Also note that the integration on r is cut off at r = b instead of 0 because the contribution is very small for the first baseline distance, and this lets us use the convenient approximation $s = b/r - b/R$ that fails as $r \to 0$.

Replogle has computed B using this full theory with good results. However, here we emphasize an approximation to Eq. 15 that was devised by L. E. Mertens and is valid when the aperture d is small compared to the baseline b, i.e., $b \gg d$. This implies that $s \gg \delta$, ϵ, at least for the first couple of attenuation lengths where most of the intensity is found. In this case the halo of scattered light at angle s is not very dependent on the structure of the unscattered beam at the center, nor does the size of the small detector significantly influence the stop average intensity it intercepts. Then we may omit the factors H_o and two Cir functions that describe this fine detail. Stated in the frequency domain, $\text{Ofst}(s\psi)$ wipes out the integrand with rapid oscillations before $\text{Cir}\,\text{Cir}\,H_o$ deviates much from the initial value 1. Now using Ofst as listed in the table gives the ψ integral as

$$\int J_o(2\pi s\psi)F(\psi,2r)2\pi\psi d\psi = f(s,2r),$$

simply the point spread function for angle s and round trip distance, 2r, and Eq. 15 becomes

$$B \approx A_d \omega_d \sigma_b \beta(b,R), \tag{16}$$

where $A_d \equiv \pi D^2/4$ (collecting aperture area), $\omega_d \equiv \pi\epsilon^2$ (solid angle of the field of view), and

$$\beta = \int_b^R f(b/r - b/R,\ 2r)dr/r^2. \tag{17}$$

The integration here is still cut off at r = b as explained in connection with Eq. 15. This expression has a very simple physical interpretation. The receiver looking at the bright spot on one veil sees a blurred image with a scatter halo that is merely the point spread function for the round trip of distance 2r. The part of this halo that the detector intercepts is displaced off axis by the angle s = b/r - b/R that represents the displacement of the light beam from the narrow instantaneous field of view. Finally this contribution is integrated over r for all the scattering slabs (many veils) to give the total power per unit power transmitted. Dr. Mertens has integrated Eq. 17 by computer and found excellent agreement with experiments as shown in Fig. 12.

Round-Trip Image Transfer Function

We are accustomed to vision systems in which the illumination is very broad, daylight, flood lamp, etc., and all the resolution of detail in the object or target is achieved in the detector. However, there are systems which achieve resolution with the illuminator. In the flying-spot scanner, a small illuminating spot scans one resolution cell at a time. For a medium with such poor optical quality as seawater, it may prove advisable to attain as much resolution as possible by combining the resolving power of both receiver and transmitter. In other words, the transmitter focusses light on one resolution cell at a time and the detector focusses simultaneously on the same spot. To cover a field of view, the transmitter and receiver must execute a synchronized raster scan, so we call this the dual-scan system. Mathematically it is the most general system to analyze, since flood illumination may be treated as a special case in which the flying spot is very large.

Let us project all targets as plane surfaces perpendicular to the line of sight. The varying diffuse reflectivity over this effective target plane represents the true image one would see in an ideal medium. Let us call this planar distribution of reflectivities $\rho(\vec{\theta})$ and its transform $P(\psi)$ (rho, not pee). Now we have three functions of target position, irradiance h, sensitivity g, and reflectivity ρ, to somehow use in calculating the power that reaches the detector. Toward this end, let us review all the power losses from the transmitter to the detector, and see how these functions enter in. The losses are

1) Transmitter and its optics, efficiency and transparency
2) Scattering and absorption in outgoing light -- $h(\theta)$
3) Target reflectivity ---------- $\rho(\theta)$
4) Geometric loss -- radiance pattern (e.g., lambertian), inverse square law
5) Scattering and absorption in return light --- $g(\theta)$
6) Receiver, its transparencies and efficiencies

Items 1, 4 and 6 on this list are simple multiplying factors beyond the scope of this lecture. We pretend they are all unity, and look for the proper way to combine h, g and ρ to find received power.

Next, refer to the vector diagram of Fig. 13 and suppose that the dual scan is aimed at position $\vec{\theta}$; i.e., the system is forming the image of this point in its raster scan. Now we inquire what part of the (normalized) power on the detector comes from some nearby differential solid angle $d\omega$ at θ'. The answer is $h(\vec{\theta} - \vec{\theta}')d\omega'\rho(\vec{\theta}')g(\vec{\theta} - \vec{\theta}')$ since $h\,d\omega'$ is incident power, of which a fraction ρ is reflected, and of this the amount g reaches the detector. Integrating the above expression over all contributing parts of the target gives the image strength:

$$i(\vec{\theta}) = \int h(\vec{\theta} - \vec{\theta}')g(\vec{\theta} - \vec{\theta}')\rho(\vec{\theta}')d\omega'. \tag{18}$$

Think of the integrand as differential target return with a factor for target strength ρ, transmitter strength h, and detector sensitivity pattern g. Following common practice, let us denote convolution with the symbol $\star$, and multiplication with $\cdot$. Then

$$i = (h \cdot g)\star\rho, \tag{19}$$

and in the frequency domain $\star \longleftrightarrow \cdot$ and

$$I = (H\star G)\cdot P. \tag{20}$$

Eq. 20 is a most significant result. It shows that $H\star G$ is the round-trip (illuminator to target to detector) transfer function that describes the over-all frequency response of the system and the medium. To effect image restoration (Lect. 5.5) by deconvolving the blurs, one should compute the Fourier transform of the image and apply the reciprocal of $H\star G$ as the inverse filter to reconstruct $\rho(\vec{\theta})$; i.e., ρ = Transform (P) = Transform (I/(H$\star$G)) = Transform [(Transform i)/(H$\star$G)]. Of course i and ρ are not circularly symmetrical functions, and they, therefore, require the general two-dimensional Fourier transforms. However, H and G are symmetrical and may be prepared in advance by transforming on the radial variable only, i.e., the Fourier-Bessel transform we have been using throughout this lecture. $H\star G$ is converted into a square grid just before dividing into I; i.e., the point at (ψ_x, ψ_y) is $H\star G$ evaluated at $\psi = (\psi_x^2 + \psi_y^2)^{1/2}$.

To discuss $H*G$ further, recall the characteristics of H and G separately. G is given in Eq. 11 as the product of the medium transfer function $F = \exp(-DR)$ (for returning light) times the field-stop (circular spot) transfer function. Similarly, H is the product of $F(\psi, R)$ (for outgoing light) by whatever transfer function represents the unscattered spot or stripe of illumination on the target. With broad flood illumination, $h(\theta) = 1$, $H(\psi) = \delta_2(\psi)$, and $H*G = \delta_2(\psi)*G = G(\psi)$; i.e., resolution is left up to the detector. Similarly, with a flying spot scanner, $g = 1$, $G = \delta_2$, $H*G = H$ and resolution is left to the illuminator. Since $H*G$ is a convolution of two rather smooth frequency-response functions, it follows that $H*G$ is a broader function over the ψ axis than either H or G separately. This is advantageous because breadth in the frequency domain means improved frequency response; i.e., better resolution. This is the effect of combining the resolving powers of both the receiver and the transmitter.

Signal, Background and Photon-Statistical Noise

Eq. 20 has such a simple elegant form that we hope ultimately to use it as the basis of system performance predictions that will yield valid criteria for detection, recognition and identification of various targets. Certain classes of targets will produce unblurred images having a certain spectral content $P(\psi)$. Viewed through seawater, the image will have a degraded spectrum $I(\psi) = (H*G) \cdot P$. An image formed with limited energy will also include a superposed spectral density of noise, mostly photon-statistical noise, $N(\psi)$. These three spectra, the true image P, the blurred image I, and the noise N, should go into some comparison formula that includes properties of visual perception (psychophysics) and predicts whether the target is detectable, recognizable or identifiable. Until we know how to do this, however, we shall have to calculate the number of detected photons and their associated shot noise within certain images or parts of images and apply intuitive signal-to-noise ratio criteria to estimate detectability, etc. The exercise is instructive in its own right and may well play a role in the discovery of more elegant or accurate means for performance predictions.

Recall the prescription for finding the image intensity at any one point in the field of view. First calculate the intensity for a white target in an ideal medium using the inverse square law, efficiencies, etc., and then multiply the result by i, the relative image intensity, given in Eq. 18. Let us focus our attention on a single point in the image which we can take as $\vec{\theta} = 0$ without loss of generality and rewrite Eq. 18 as

$$i = \int h(\vec{\theta})\, g(\vec{\theta})\, \rho(\vec{\theta})\, d\omega \tag{21}$$

(The ' on θ' has been dropped.) The usual vision problems are concerned with the detection of boundaries, in other words for most practical problems, the target function of interest is

$$\rho(\vec{\theta}) = \begin{cases} \rho_1, & \vec{\theta} \text{ in area } A_1 \\ \rho_2, & \vec{\theta} \text{ in area } A_2 \end{cases} \tag{22}$$

Fig. 14 shows a simple field of view containing two regions of different diffuse reflectivities, A_2 with reflectivity ρ_2 indicated by hatching, and A_1, ρ_1 not hatched. Assume that the chosen image position $\theta = 0$ is the point marked thus: $\oplus$. As a result of small angle scattering, some light will arrive at the detector having reflected from the differential annulus at angle θ from the central point. Most of this annulus falls in the same (unhatched) region as the desired image point at the center, and so a corresponding amound of its light contains valid reflectivity information. However, a small arc (about 70°) falls in a region of different reflectivity, and the corresponding amount of received light contains false information.

Let the symbols S and B stand for dimensionless "signal" and "background", which prove to be slight but convenient misnomers. Suppose that area A_1 in Fig. 14 is perfectly white and A_2 is perfectly black, then Eqs. 21 and 22 give S:

$$S = i(A_1 \text{white},\ A_2 \text{black}) = \int_{A_1} h(\theta)\, g(\theta)\, d\omega \tag{23}$$

This represents signal, or true information, because all the return is from the area of the same reflectivity as the point under inspection. However, if A_1 is black, and A_2 is white, the detector still receives some light that bears false information from across the boundary line:

$$B = i(A_1 \text{black},\ A_2 \text{white}) = \int_{A_2} hg\, d\omega \tag{24}$$

If the detector field stop were very wide open, then the normalization would give $S + B = e^{-2\gamma R}$, just the round trip attenuation apart from small angle scattering. However, practical field stops will reject most of the scattered light with the result that

$$e^{-2\alpha R} < S + B \ll e^{-2\gamma R}.$$

Now let us consider realistic reflectivities instead of the extremes of black and white. Then the true information is $\rho_1 S$ and the false is $\rho_2 B$. However, the signal that indicates a boundary (outlining an object or part of an object) is the difference between $\rho_1 S$ and the value $\rho_2 S$ that it would have if there were no boundary. The total light power on the detector is proportional to $\rho_1 S + \rho_2 B$, and the photon-statistical noise is proportional to the square root of this total. Thus, the signal $\sim |\rho_1 - \rho_2| S$ and the noise $\sim |\rho_1 S + \rho_2 B|$, and so the signal-to-noise ratio $\sim |\rho_1 - \rho_2| S/(\rho S_1 + \rho_2 B)^{1/2}$ figures prominently in criteria for detection, etc., as described in Lect. 4.2.

The remainder of this section is devoted to evaluation of Eqs. 20 and 21 for areas of special interest, straight line boundaries and circular spots. If the arc length (radians) of the annulus falling in A_2 is called arc(θ), then that in A_1 is 2π - arc(θ), and then the solid angle in A_1 is $d\omega$ =

$(2\pi - \text{arc})d\theta$, and in A_2 it is $d\omega = \text{arc}\, d\theta$. Then

$$S = \int_0^{\theta_{mx}} h(\theta)g(\theta)[2\pi - \text{arc}(\theta)]d\theta \qquad \text{and} \qquad B = \int_0^{\theta_{mx}} hg\,\text{arc}\, d\theta \tag{25}$$

An important case to analyze in this manner is the simple straight boundary at the edge of an object in the field of view. Looking at a point a distance (angular) from the edge as shown in Fig. 15 gives

$$\text{arc}(\theta) = 2\phi = \begin{cases} 0, & \theta \leq a \\ 2\arccos(a/\theta), & \theta \geq a \end{cases} \tag{26}$$

This expression goes directly into Eqs. 25 to evaluate the case of a linear boundary.

All our computational effort to date has used a different special target, one that gives a worse case or maximum background because the region of contrasting diffuse reflectivity is all around. This is the simple circular spot of radius ϵ_t (t for target, white on a black field, or black on a white field, with illumination focussed at the center of the spot. In this case Eqs. 25 become

$$S = 2\pi\int_0^{\epsilon_t} hg\theta d\theta \qquad \text{and} \qquad B = 2\pi\int_{\epsilon_t}^{\theta_{mx}} hg\theta\, d\theta \tag{27}$$

We integrate Eqs. 27 on the computer as indefinite integrals so that there are many values of ϵ_t available. These are searched for values, i.e., spot sizes, that yield adequate signal-to-noise ratio for typical cases under consideration. When one such ϵ_t is found, it is regarded as a good indicator of the resolution, i.e., the minimum spot size that gives sufficient return from one point. Hodara gives the results in Lect. 4.2.

Conclusions

Lect. 3.3 developed all the techniques for calculating point spread functions at various distances in seawater. It turned out that the most accurate and often most convenient method employed a transformation to the frequency domain. This lecture has developed the techniques for finding the intensity spread surrounding beams of various cross sections and for taking into account round trip propagation with offset between the illumination and detection axes. Many convolutions involved are merely multiplications of transfer functions in the frequency domain, and so the Fourier transform formalism proves convenient for a second reason.

In Lects. 4.2 and 5.5 we describe the application of techniques developed here to system performance predictions.

Appendix

Some discussion of the linear stripe, Fig. 5, and the offset transfer function is too detailed to include in the main text, and is, therefore, presented here. First the derivation of the formula for strip(θ, ζ) the offset linear stripe averaged in orientation with unit power per radian. The power inside a circle of angular radius θ is merely the arc length of the stripe, which from Fig. 5 is seen to be

$$\Phi = (\theta^2 - \zeta^2)^{1/2}, \quad \zeta < \theta < \hat{\theta}, \quad \hat{\theta} \equiv (\Lambda^2 + \zeta^2)^{1/2}.$$

This does not change when the illumination is averaged by rotation. The average distribution is then

$$\text{strip}(\theta, \zeta) = \frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{1}{2\pi\theta}\frac{d}{d\theta}(\theta^2 - \zeta^2)^{1/2} = \begin{cases} (2\pi)^{-1}(\theta^2 - \zeta^2)^{-1/2}, & \zeta < \theta < \hat{\theta} \\ 0, \text{ otherwise.} \end{cases}$$

This is given in the transfer function table along with its Fourier-Bessel transform that follows directly from the transform formula, Eq. 6.

It is instructive to relate the long stripe formulas to the line spread function, i.e., the distribution of radiance near a long stripe of illumination analogous to the point spread function. Fig. 5 shows that the value of the irradiance at the center, $h(\theta = 0)$, in a scattering medium is merely a value of the line spread function for offset ζ. For the explicit expression, substitute Infstrp for H_o in Eq. 8, put $\theta = 0$, and find

$$\ell(\zeta, R) = h(0) = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi\zeta\psi)F(\psi, R)d\psi$$

This is not quite obvious, but take its Fourier transform, the ordinary one-dimensional kind, and find

$$F = 2\int_0^{\infty} \cos(2\pi\zeta\psi)\ell(\zeta, R)d\zeta \tag{A-1}$$

and look at it this way: to Fourier analyze $f(\theta, R)$ the symmetry lets us orient the cosine waves any direction, say along ζ. Then in the perpendicular direction (constant phase), we can blur the spread function into a line spread function with no effect, and Eq. (A-1) results.

Finally we wish to prove that the Fourier transform of an offset distribution function is given by

$$H_{off}(\psi, \zeta) = \text{Ofst}(\psi\zeta)H_o(\psi) = J_o(2\pi\zeta\psi)H_o(\psi), \tag{A-2}$$

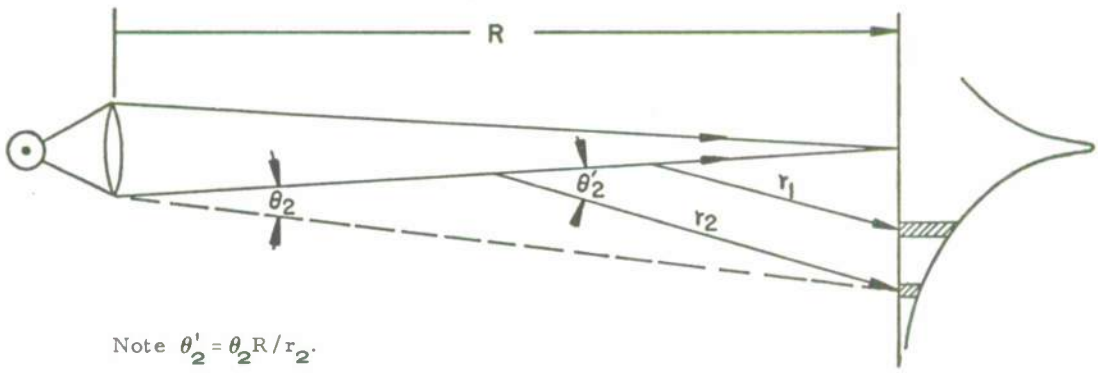
i.e., the offset function convolves like any normal distribution. Suppose the light is initially focussed but offset, then rotated through orientations to generate a ring distribution. Let this ring correspond to h_o in Fig. 3, with the ring along the dashed contour through $d\omega'$, and let h_o here correspond to f in Fig. 3. The ring is described by $ofst(\vec{\theta}', \zeta)$ and each element thereon acts as an origin of further spreading when the beam is defocussed to $h_o(|\vec{\theta} - \vec{\theta}'|)$. The result is

$$h_{off}(\theta) = \int h_o(\vec{\theta} - \vec{\theta}') \cdot ofst(\vec{\theta}', \zeta)\, d\omega',$$

where the integrand is interpreted as source strength $ofst \cdot d\omega'$ times the fraction h_o that transfers from θ' to θ. Eq. A-2 is merely the transform of this convolution, and this completes the proof. An alternate proof is slick but lacking in physical insight: The offset is defined by $h_{off}(0) = h_o(\zeta)$. Expressing each side of this equation in terms of H_{off} and H_o gives

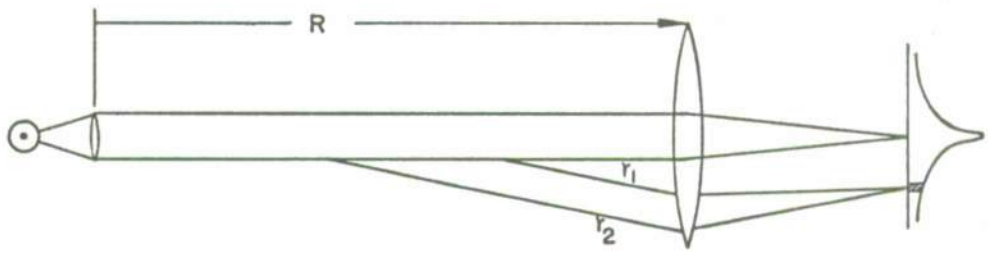
$$2\pi\int_0^\infty H_{off}(\psi)\psi\, d\psi = 2\pi\int_0^\infty J_o(2\pi\zeta\psi) H_o \psi\, d\psi.$$

Since this equality holds for every value of ζ; the integrands must be equal, but equating integrands gives Eq. A-2 to complete the proof. For a complete treatment of offsets without the assumption that orientation is averaged out, see Graf's vector addition theorem in any standard test that describes the properties of Bessel functions.



Note $\theta_2' = \theta_2 R / r_2$.

A) Focused Spread Function, $f^f(\theta, R)$



B) Collimated Spread Function, $f^c(\theta, R)$

Fig. 1: FUNDAMENTALLY DIFFERENT SPREAD FUNCTIONS FOR FOCUSED AND COLLIMATED LIGHT

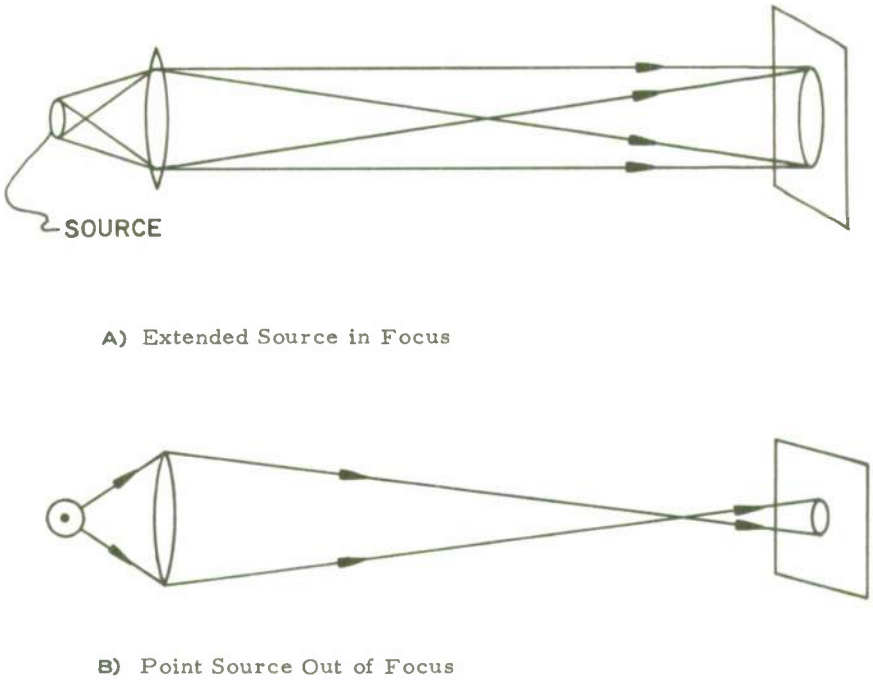


Fig. 2: UNSCATTERED IRRADIANCE DISTRIBUTION FROM EITHER A FOCUSED OR UNFOCUSED IMAGE OF THE SOURCE.

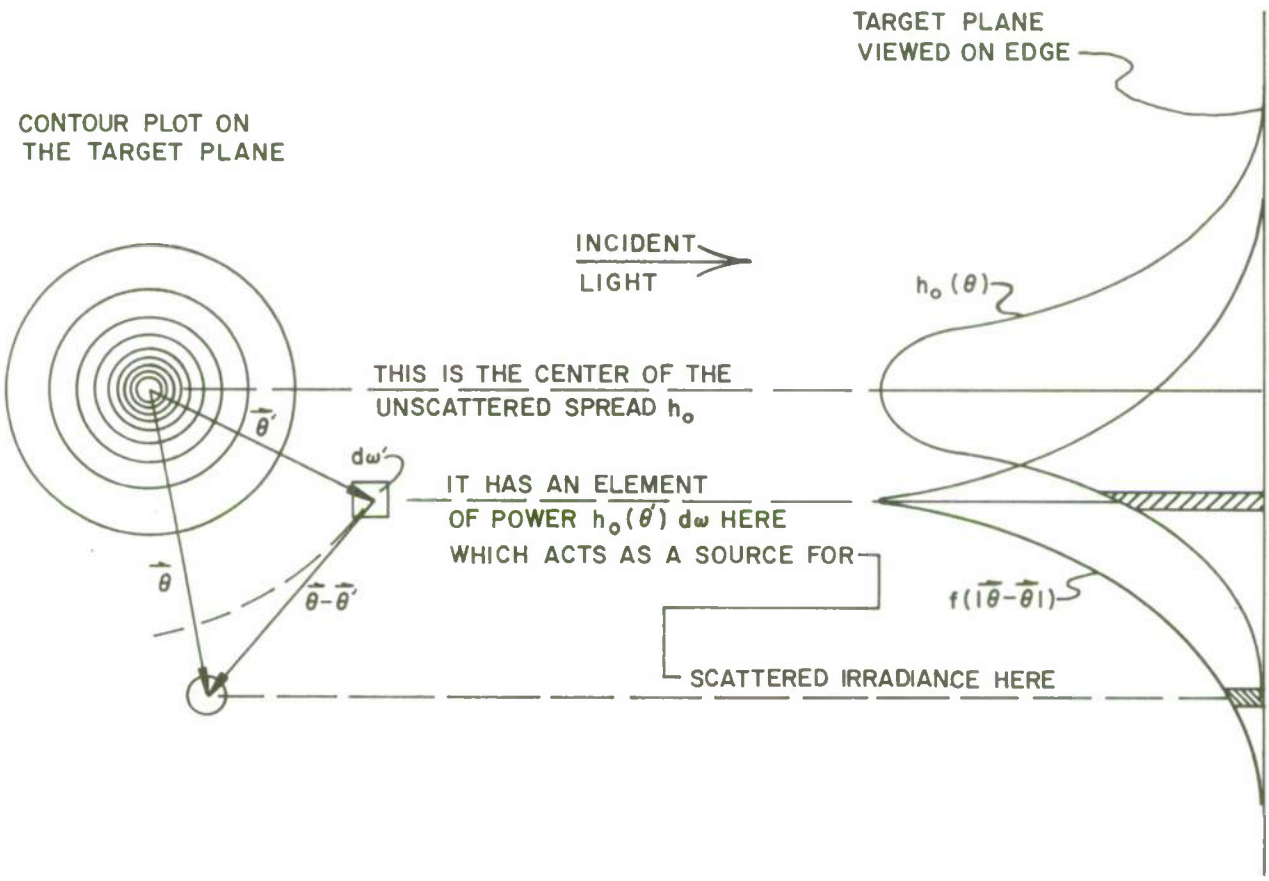


Fig. 3: CONVOLUTION VECTOR DIAGRAM. Rounded distribution is unscattered irradiance. Each element in it is a source for scattering according to the pointed distribution, the seawater point spread function.

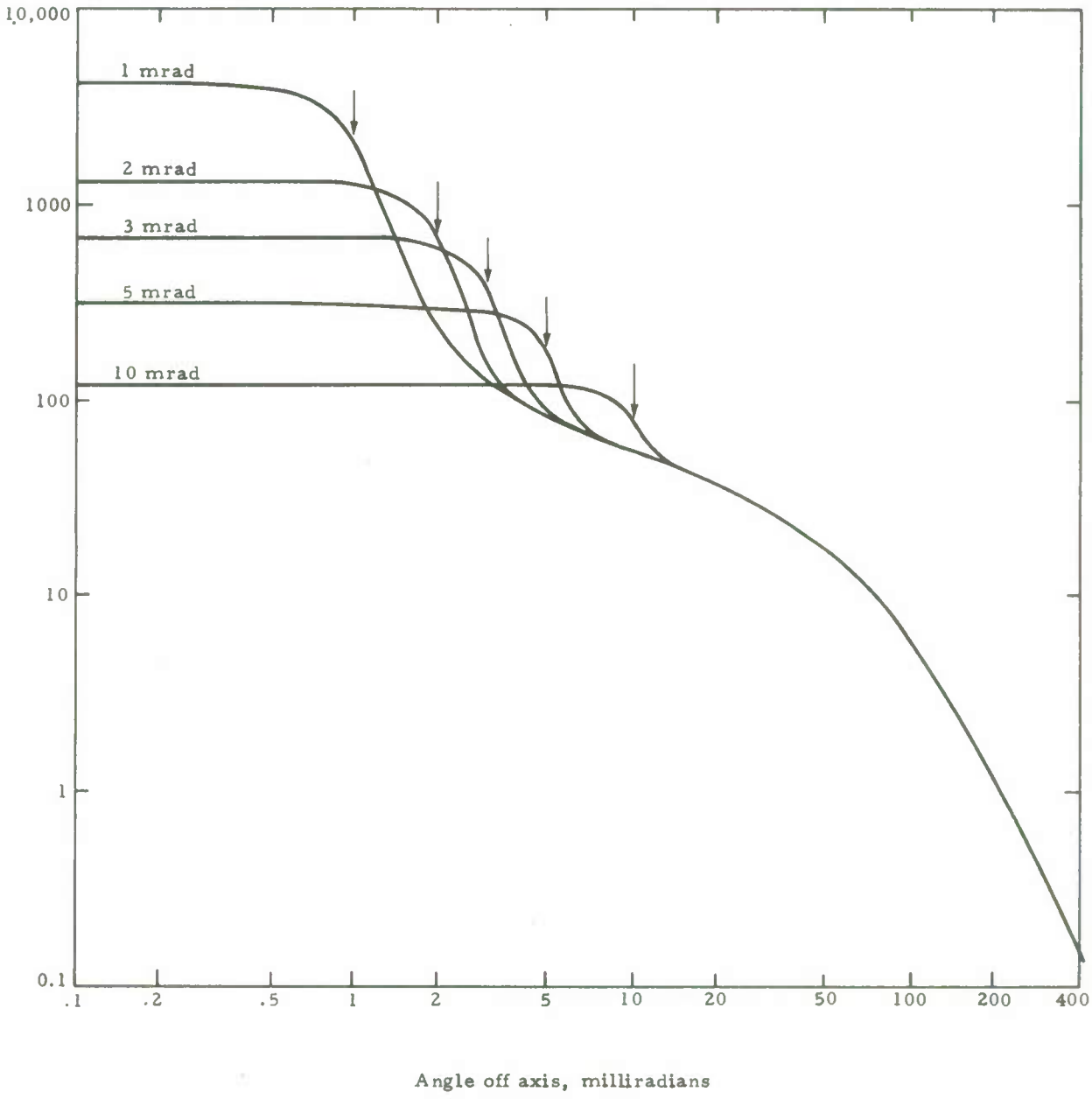


Fig. 4: CIRCULAR APERTURE CONVOLVED WITH A SEAWATER SPREAD FUNCTION USING TRANSFER FUNCTIONS IN A COMPUTER PROGRAM. Range = 40 m, $\alpha = 0.2\,m^{-1}$, $\alpha R = 8$, Radians of Aperture as indicated. Curves are normalized to unit total power. The unscattered radius is marked with an arrow in each case.

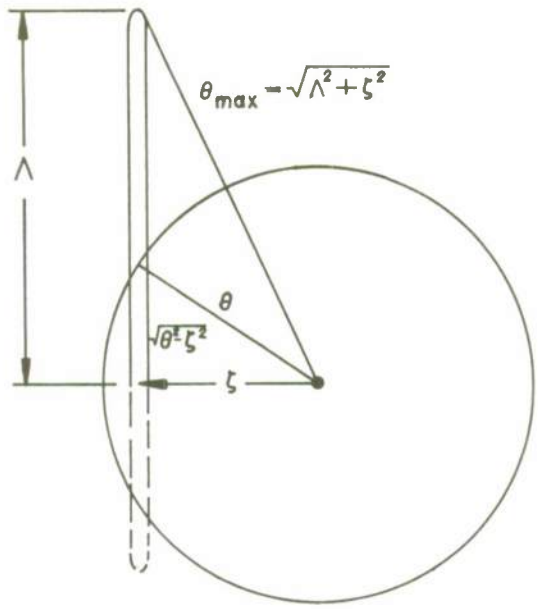


Fig. 5: LINEAR STRIPE GEOMETRY

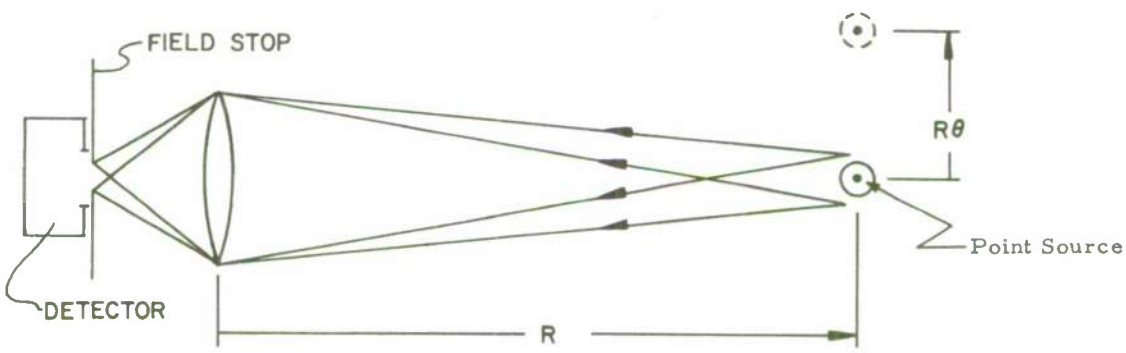


Fig. 6: POINT LIGHT SOURCE SCANNING DETECTOR SENSITIVITY PROFILE

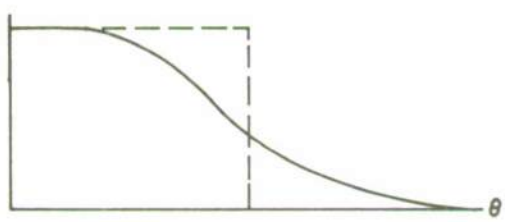
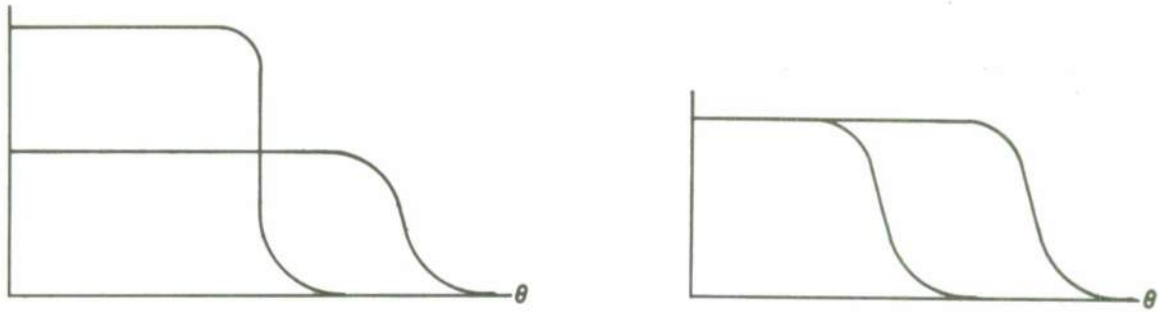


Fig. 7: PLOTS OF DETECTOR SENSITIVITY PROFILE WITH AND WITHOUT SCATTERING



A) Illumination Profiles Normalized to Unit Total Power

B) Detector Sensitivity Profiles with Different Field Stops

Fig. 8: NORMALIZATION OF ILLUMINATION AND SENSITIVITY PROFILE

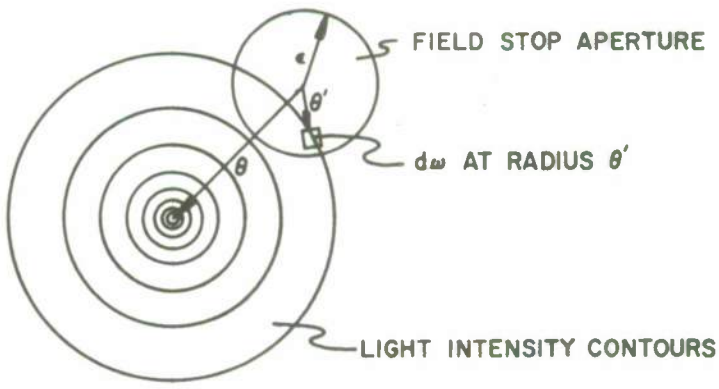


Fig. 9: FOCAL PLANE OF RECEIVER WITH OFF-CENTER IMAGE OF A LIGHT SOURCE

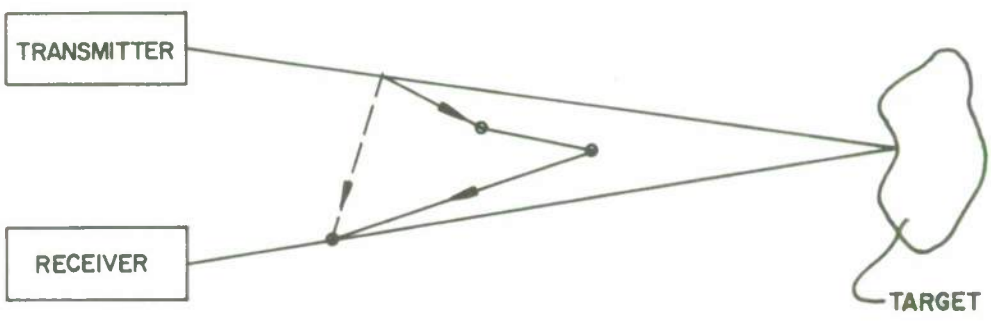


Fig. 10: IMPORTANT BACKSCATTER RAYS

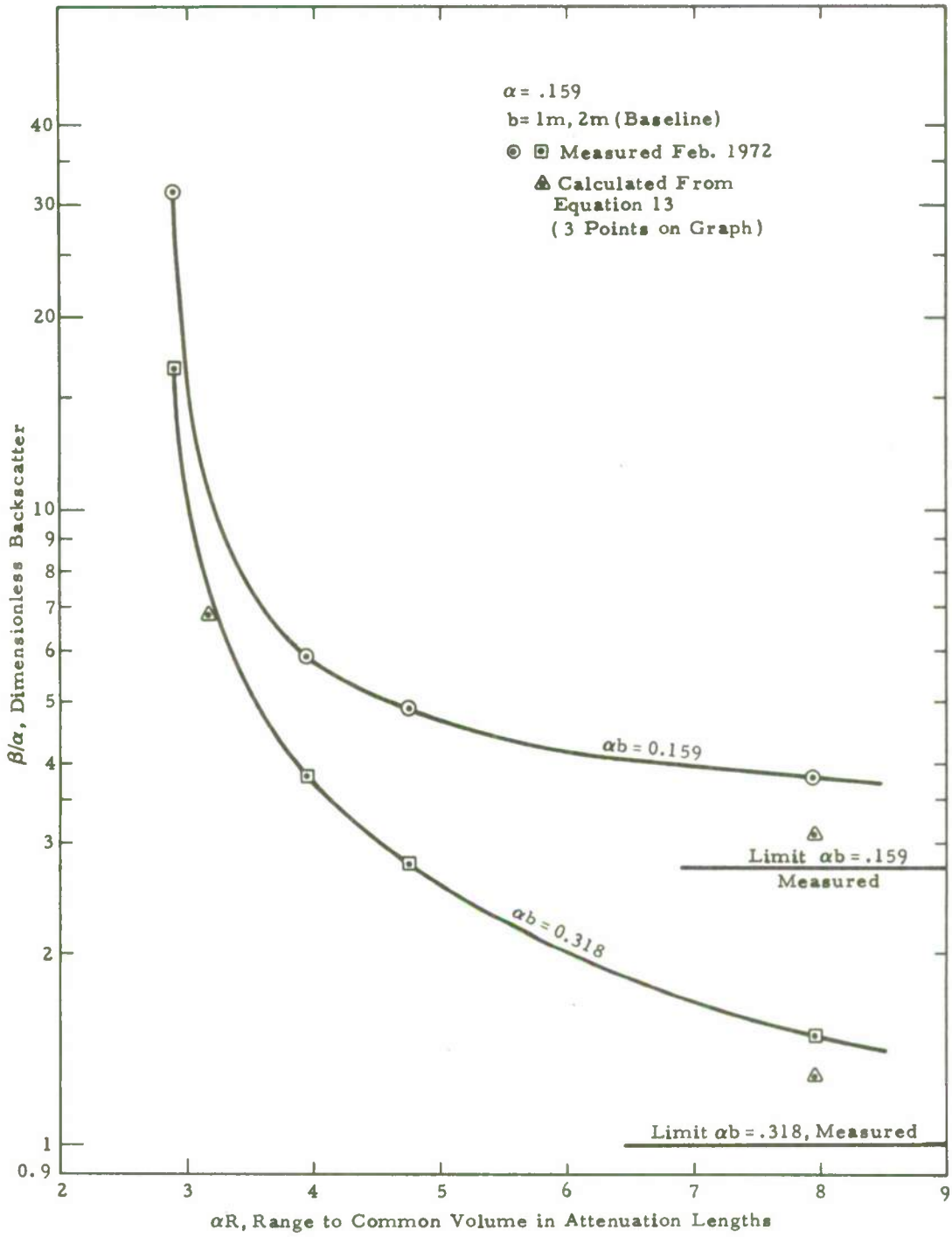


Fig. 12: BACKSCATTER EXPERIMENTAL RESULTS COMPARED TO THEORY. Point spread functions for theory were measured in March and May 1971 and were scaled for changes in α to compare to experimental data of February 1972.

[Fig. 11 appears on page 4.3-15]

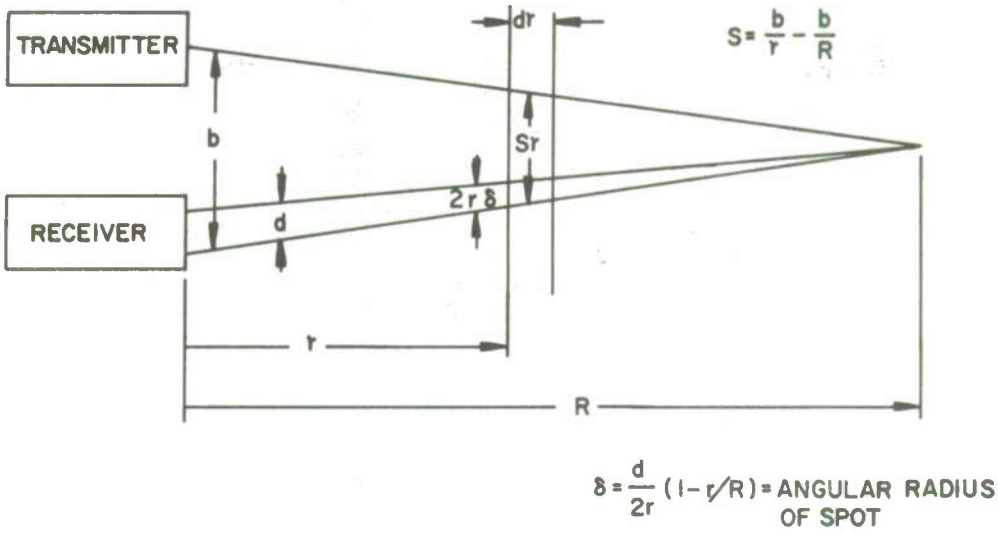


Fig. 11: GEOMETRY FOR BACKSCATTER CALCULATION

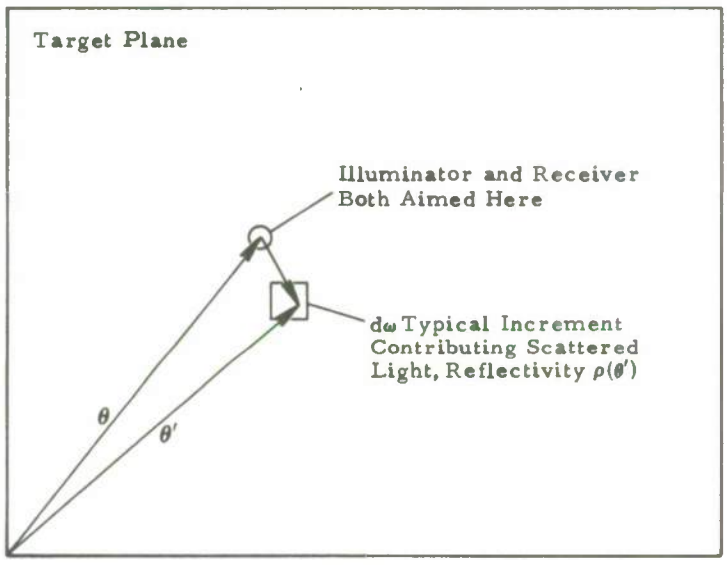


Fig. 13: VECTOR DIAGRAM FOR CALCULATING TARGET RETURN

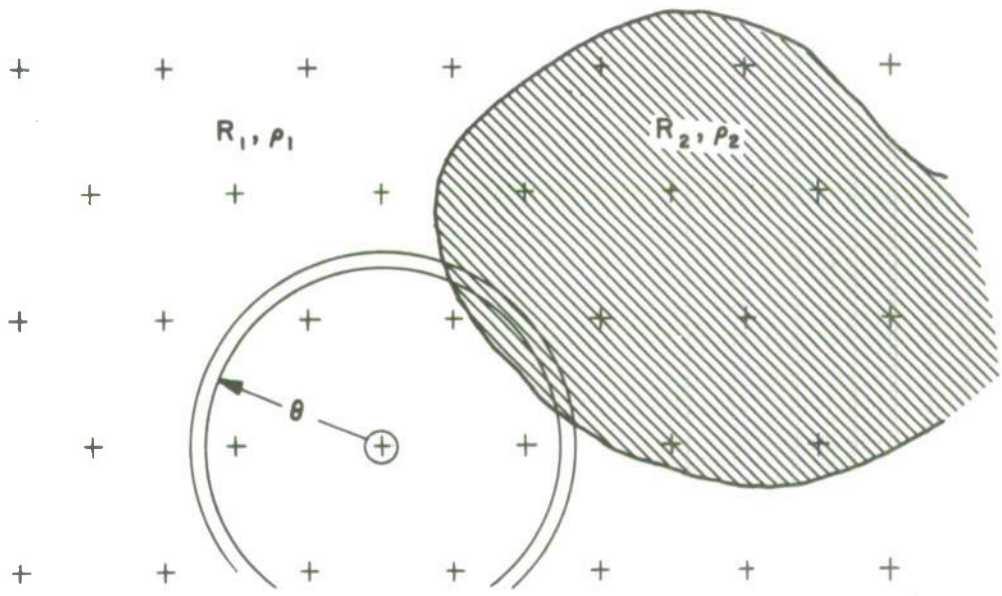


Fig. 14: POINT UNDER INSPECTION NEAR A BOUNDARY BETWEEN REGIONS OF DIFFERENT DIFFUSE REFLECTIVITY

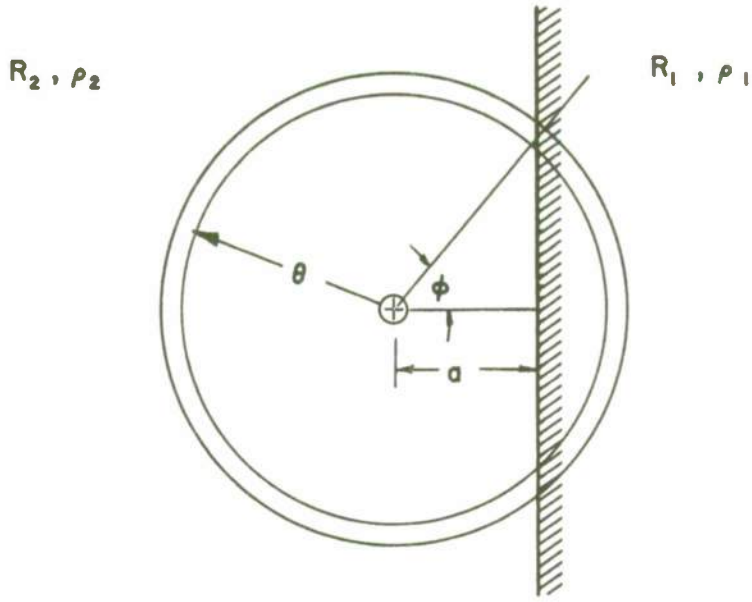


Fig. 15: GEOMETRY FOR CALCULATING TRUE AND FALSE RETURNS AT ONE SCAN POINT NEAR A STRAIGHT BOUNDARY.

SOURCES: ARC, FLASH, INCANDESCENT AND LASER LAMPS

Henri Hodara and Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

After a brief review of the physics of gas discharge and laser lamps, we review the major classes of incoherent and coherent sources available for underwater applications. A performance comparison figure, PCF, for lamps is developed based on the square root of the round trip light attenuation from lamp to camera, taking into account the source, the medium and the receiver spectral sensitivity. The PCF is calculated as a function of range for two types of water, coastal and deep ocean, using a detector with an S-20 photo-sensitive surface. The results show clearly that the selection of a lamp is almost exclusively dictated by efficiency; in that respect, incoherent sources are far superior to lasers. However, the laser finds applications where one must rely on narrow collimation or range gating to reduce backscatter.

Introduction

This lecture is divided in two parts. In the first part we review five types of lamps that have applications in underwater vision, Tungsten Quartz Iodide, Mercury Vapor Arc with Thallium Iodide, Xenon Flash Tube, Double Neodymium YAG and Argon-Ion Lasers. We discuss their mode of operation, their basic features and limitations particularly efficiency, as opposed to those factors more likely to change, size, weight and cost. In the second part we develop a criterion for comparing lamp performance that hinges on the matching of their spectra to that of water transmission and photoreceptor sensitivity. The five lamps are compared on this basis for two types of water: coastal and deep ocean, and the results are summarized in a set of plots.

Incandescent Lamps

The physics of incandescent lamps is too well known to be described here. Recall that their spectrum can be approximated by a gray body (black body with emissivity ϵ less than one). Their true emission characteristic is more like a colored body, that is a heated body whose emissivity varies with wavelength [ϵ (λ= .665μm) = .452; ϵ (λ= .467μm) = .482]. In comparing their performance to other lamps and taking into account the variability of the spectral attenuation of seawater, the black body (actually gray body) approximation is sufficient. A typical spectrum is shown in Fig. 1. Note that a good portion of the energy is in the red and beyond. As is well known, a black body radiator exhibits peak emission at a specific wavelength, λ_m determined by the body temperature T, according to Wien's displacement law,

$$\lambda_m T = 2.897°K\mu m \qquad (1)$$

Thus a body heated to 300°K exhibits maximum radiation at a wavelength $\lambda_m \simeq 10\mu m$. Most incandescent lamps for underwater use are operated around a temperature of 3000°K, with consequent peak emission in the infrared at 1μm. This color temperature accounts for the emission spectrum of Fig. 1 peaking in the red. It would be desirable to operate at higher temperature, say 6000°K in order to bring most radiation in the blue-green spectral range of seawater but filament materials are not sufficiently refractory. Tungsten in particular melts at 3640°K and suffers noticeable evaporation at 3000°K. Thus 3000°K is a compromise between life time and efficiency.

A major development in incandescent lamps to increase efficiency has been the Quartz-Iodide lamp. The name "quartz" refers to the envelope of the bulb containing the tungsten filament, which is capable of supporting the high thermal stress created by the heat of the filament and the cold environment. "Iodide" refers to tungsten iodide vapors contained within the bulb. Without iodine, evaporated tungsten would condense on the bulb walls blackening them and reducing lamp output and efficiency. Iodine vapor combines with the tungsten to form tungsten iodide vapor which decomposes on contact with the filament, depositing tungsten and completing the cycle. As a result blackening is almost totally eliminated.

Quartz iodide lamps have efficiencies (watts out per watt in) in the visible range between .4μm and .7μm of the order of 3 to 5% for color temperature between 3000°K and 3400°K; radiated visible output can reach as high as 50 watts. The lamp operates with direct or alternating current; one of its major features is that it does not require warm-up time. Although the red output is useful for color underwater imaging it is of no interest at longer range where most colors except blue, green and sometimes yellow are filtered out by seawater.

Gas Discharge Physics

Since gas discharge lamps, both arc and flash, are of major interest, we introduce the topic with a tutorial discussion of the physics of gas discharge. A single atom isolated in empty space will have a set of quantum energy levels qualitatively like those shown in Fig. 2. Here energy, E is plotted vertically. Energy levels are connected by so-called radiative transitions. A transition to a higher state represents an atom gaining energy by absorption of a photon. Similarly, an atom loses energy by radiation of a photon in a downward transition. The lower discrete levels represent orbits that are bound to the atom, while the high energy continuum of levels represents unbound orbits, an electron and an ion (rather than a neutral atom), since the electron is no longer attached to a particular

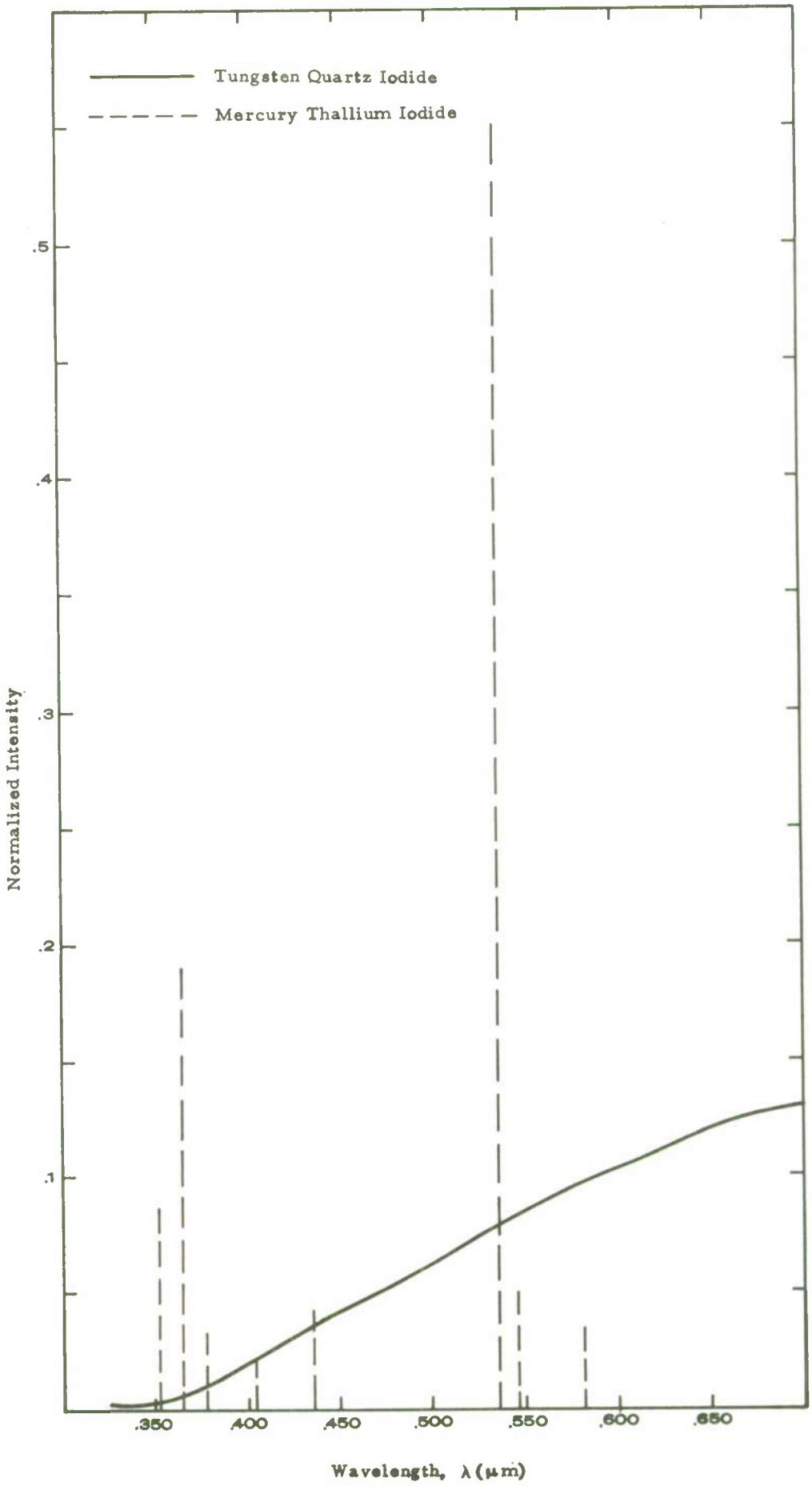


Fig. 1: Normalized Spectral Intensity of Quartz Iodide and Thallium Iodide Lamps

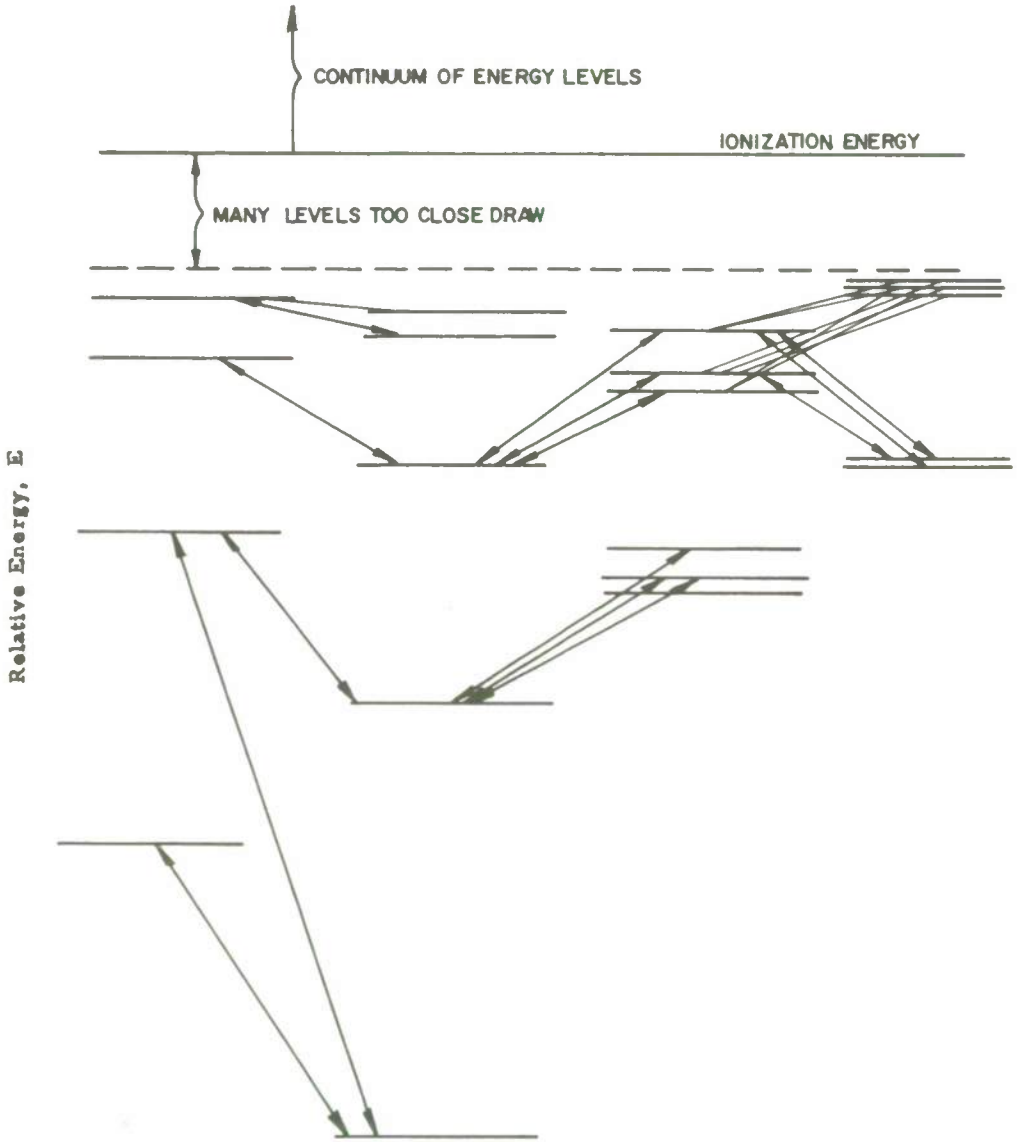


Fig. 2: Energy Level Diagram (Imaginary Atom)

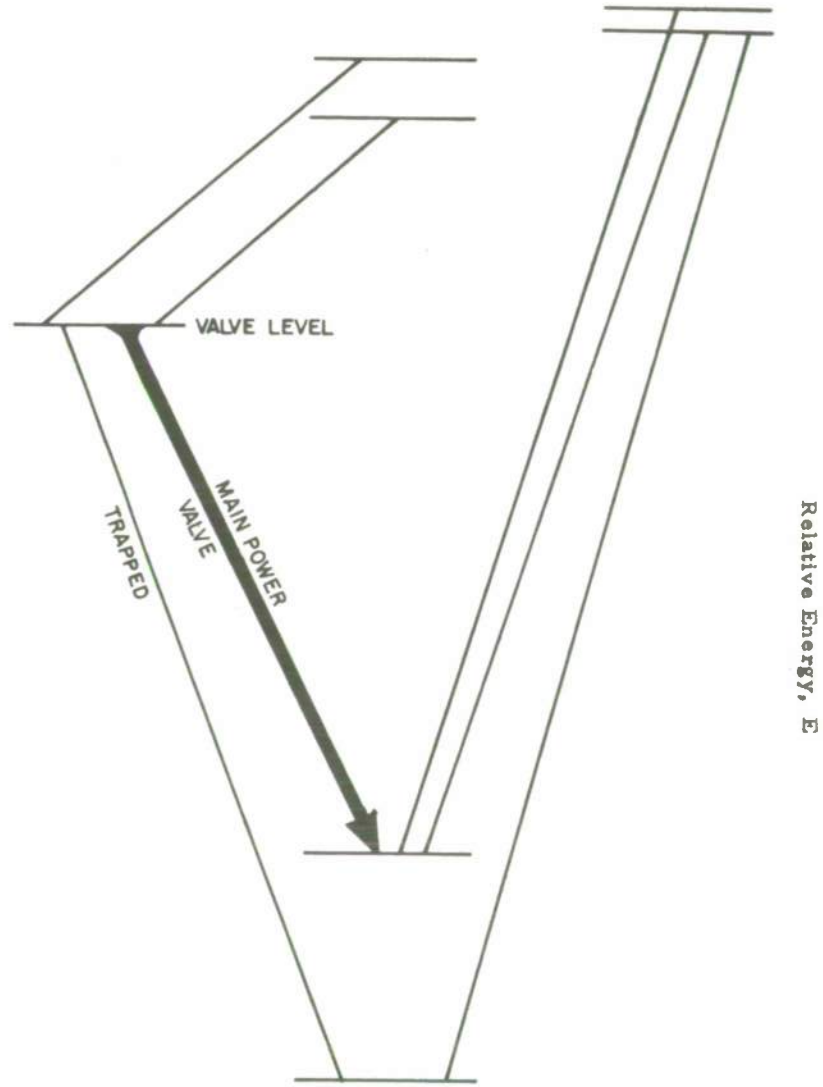


Fig. 3: Energy Level Diagram (Approximating that of Thallium showing valve transition)

atom.

The arrows in the figure represent the allowed radiative transitions. They are always two-headed arrows; the transitions that are strong absorbers are also strong radiators. The frequency of the light is given by

$$f = \Delta E/h \tag{2}$$

h is Planck's constant, ΔE is the energy difference between two levels indicated by an arrow; the wavelength is

$$\lambda = c/f = hc/\Delta E \ , \tag{3a}$$

or

$$\lambda = 1/\Delta\tilde{\nu}, \ \tilde{\nu} = E/hc \tag{3b}$$

Here $\tilde{\nu}$ is called wavenumber (wave per unit length) and is conventionally used on the vertical scale of energy level diagrams since it is proportional to energy.

The transitions between discrete levels are the resonance radiation of the atom, i.e., the discrete spectrum of sharp lines. Physically, these transitions represent changes in the bound orbit, i.e., an electron radiates its energy and falls closer to the nucleus (while other electrons adjust their orbits also), or the reverse in photon absorption. The transitions between continuum states represent the close encounter of an electron with an atom, ion or another electron. The electron orbit is bent sharply by the electrostatic force. This bending constitutes an acceleration, which by the laws of electrodynamics causes radiation of some of the electron's kinetic energy. The transitions of unbound electrons provide the white continuum in the spectrum of a lamp.

In an arc lamp, a few stray electrons are nearly always present in the gas to aid in striking the arc. The electric field between electrodes accelerates these until they are energetic enough to knock more electrons off the atoms of the gas. This process avalanches to establish the discharge. Free electrons often strike atoms hard enough to knock bound electrons into higher orbits, but not hard enough to ionize the atoms. As these atoms relax back to the lowest or ground state, they emit the line spectrum characteristic of the atomic species. Now consider a container of gas in thermal equilibrium. The relative population or number of atoms in each energy level is given by the Boltzmann factor

$$g_n \exp(-E_n/kT) = g_n \exp(-hc\,\tilde{\nu}_n/kT) = g_n \exp(-1.44 \text{ deg-cm } \tilde{\nu}_n/T) \tag{4}$$

where k is Boltzmann's constant, and E_n is the energy of the nth level, and g_n is the number of quantum states with the same energy E_n. To obtain absolute population we must multiply each factor by

$$N/\sum_n g_n \exp(-E_n/kT)$$

so that the total population adds up to N, the number of molecules. For the present qualitative discussion E_n is much more important than g_n because E_n appears in an exponent. We therefore ignore g_n except to note that the ionized states (continuum) are extremely numerous, and so many more atoms are ionized than the factor $\exp(-E_n/kT)$ would indicate by itself. For lamps it is well to have a thumb rule near 6000°K. At 6250°K, populations decrease by a factor of 10 for each 10,000 cm^{-1} (=1/10,000 Å) on the wavenumber scale.

Consider any pair of bound quantum states that are connected by a radiative transition. An atom in the lower of the two states is ready to absorb a photon of the resonant frequency. A population of such atoms yields an absorption constant proportional to their number density. An atom in the upper state is ready to emit a resonant photon and has a certain probability of doing so spontaneously, and a higher probability of emission if stimulated by resonant radiation from another source, usually other atoms of the same species. Now in a gas of these atoms there are mixed populations in both levels that oppose one another in the sense that one population amplifies the radiation while the other absorbs it. If the gas is in thermal equilibrium, the population of the lower energy state always exceeds the upper since $\exp(-E/kT)$ is a monotonically decreasing function of E. Hence, the gas is an absorber of the resonance radiation because the lower state of any pair is the more populous. (In laser oscillation the reverse is the case.)

The power output of a lamp in different parts of the spectrum may be understood in terms of the well-known Planck formula for black body radiation, $P(\lambda, T)$ for short. Suppose a beam of monochromatic light passes through two layers of hot gas, one at temperature T_1 and one at T_2, and suppose that fractions F_1 and F_2 of the light are absorbed in the two. Then the emission from the two gases (along the same line-of-sight) is $F_1 P(\lambda, T_1) + F_2 P(\lambda, T_2)$; i.e., emission occurs in the same proportion as absorption. A discharge in a very rarefied gas gives little light because there are not enough atoms to radiate much, but this can also be stated in terms of the absorption argument above by saying that the gas is a poor absorber, so thin that you see through it into cold space beyond the lamp. If you add more gas to the discharge, the output increases at the resonant lines, but between lines the gas is a poor absorber, and you continue to see through the gas into cold space beyond. As pressure increases still further some of the spectral lines that were strongest in the rarefied gas begin to fade. The reason is that there is always a cool layer of gas in contact with the glass envelope (otherwise the glass would melt), and the lines that fade are the ones that are strongly absorbed in this layer so that you cannot see through it into the hot core. Radiation in these spectral lines is said to be trapped. In the extreme the spectral line is inverted, i.e., a dark stripe appears in the more or less continuous spectrum from the hot core. An example is the Fraunhofer lines in the solar spectrum. Typical energies and temperatures in arc lamps are such that most of the atoms are in their ground (lowest) level. Therefore, unless the gas is quite rarefied, the radiation from any transition to the ground level is usually strongly trapped.

Suppose that the power and pressure in an arc lamp are adjusted low enough to give primarily a line spectrum. Under these conditions the lowest energy level (or levels) that can radiate an untrapped line (or lines) plays a rather special role. In Fig. 3 we call it the valve level, an ad hoc name that describes its role as a sort of power valve. Often the valve level is the lowest one that has a radiative transition to a lower level other than the ground state, since radiation to the ground state is frequently trapped. When the arc is first struck, the power into the tube exceeds the heat and radiation losses, and the difference determines the rate of temperature rise. The heat is partially trapped in the tube so long as the atomic radiation is trapped, and the temperature continues to rise until it reaches a value that excites the valve level to an appreciable population. At this point the "valve opens" to let the radiant power out, the temperature levels off, and the radiated power and heat losses approach the input power to establish the steady-state power balance.

Thus we see that a single energy level may exert considerable influence on the operating temperature of the tube. This is dramatically demonstrated by adding a small amount of thallium (in the form of its volatile iodide which decomposes in the plasma) to a mercury arc. The valve level in Hg is at 62,368 cm^{-1}. It emits the familiar violet, blue, and green lines (4047, 4358, and 5361 Å, slightly higher levels emit the yellow and infrared). The valve level in Tl is at 26,483 cm^{-1}. It emits only the strong green line 5350 Å that accounts for the use of Tl in monochromatic sources. The Tl value is so far below the Hg value that a very small amount of Tl opens the valve and lets the tube radiate before it ever reaches the temperature that strongly excites the mercury valve level. The additive typically cools the lamp about 1000°C and almost completely turns off the mercury spectrum. Suppose the lamp operates at 7000° with only Hg and 6000° with Tl added. We can readily calculate the ratio of Boltzmann's factors for the two valve levels and find

$$\frac{B_{Tl}(6000°)}{B_{Hg}(7000°)} = 630 \qquad (5)$$

If the transition probabilities of the levels are otherwise about equal, this means that the Tl spectrum will be quite evident when the density of Tl atoms is only 1/630 that of Hg, and Tl will dominate the spectrum at much higher concentration.

As we drive a fixed volume of gas harder and harder to extract more light, especially by pulsing the lamps with the discharge from a capacitor bank, the lamp soon loses its spectral selectivity and becomes essentially a hot black body source. This describes the spectrum of the higher power xenon flashtubes. (For conventional color photography this is the desired condition, since a 6000°K blackbody simulates the sun for good color rendition.) High temperature excites many energy levels. The high temperature and pressure produce continuous collisions between atoms. These disrupt optical phase and thereby broaden the spectral lines until they blur together to form a continuum of white light. Another mechanism also contributes to the blackbody spectrum. There always is a continuum of white light between spectral lines that represents transitions involving free electrons, top of the diagram, Fig. 2. Physically this radiation comes from high speed electrons colliding with atoms, ions and other electrons. With high excitation, this continuous spectrum grows into a blackbody spectrum that eventually overwhelms the discrete line spectrum.

Arc Lamps

An arc lamp contains a metal vapor or gas, usually mercury, xenon, or both, which is ionized in an arc discharge between two electrodes inside a glass envelope. At low and medium pressure the output spectrum from either the mercury or xenon is primarily a line spectrum. Neither is suitable for underwater use: the xenon spectrum falls mainly in the infrared and the mercury leaves a gap in the blue-green region of primary importance. At high pressures, the xenon lamp develops a strong blackbody spectrum with an excellent color temperature of about 6000°K, but the infrared line spectrum remains as a source of considerable wasted power. This spectrum is much like that of the xenon flashlamp, and so we defer xenon to the section on flashlamps and deal primarily with mercury here. At high pressure the mercury lines broaden so much that the spectrum starts to resemble a black body, but the deficiency in blue-green remains. However, the spectrum can be altered as discussed below. One advantage of the high pressure lamp is that there are enough atoms in a small volume to extract a large amount of light from a very small source, say a hundred watts of light output (1000 watts input) from an arc with dimensions a fraction of a centimeter. Thus when a small source is needed for collimated light, the high pressure arc lamp is a strong candidate.

In order to whiten the spectra of arc lamps, or in our case to match them as closely as possible to the ocean spectrum, a significant improvement was achieved many years ago by the addition of metal iodides inside the lamp. The use of an iodide instead of pure metal merely provides lower vapor pressure. The iodide decomposes in the discharge and forms again when the lamp cools. The elemental iodine is mostly inert in the radiation process. The iodide provides not only a better spectral match to seawater but higher efficiency and lower operating temperature. The latter results from the mechanisms explained in the last section on gas discharge physics. However, these lamps require considerable warm-up time to vaporize the iodide. A typical spectrum of a thallium iodide arc lamp is shown in Fig. 4 (Larson et al [1962]).

The major advantage of arc lamps as opposed to incandescent sources is their longer life at high color temperature and their higher efficiency, about 12% in the visible spectrum, which results from a temperature nearer the 5800°K color temperature of the visible spectrum. There are several disadvantages however: a high voltage supply is required to ionize the gas; a current limiting transformer (ballast) is required to offset the negative resistance of an established arc; and the start-up time for some types may extend to tens of minutes. If a mercury arc is extinguished, one must wait for the vapor to condense and lower the pressure so the arc can be struck again.

Electronic Flash Lamps

Electronic flash lamps are gas discharge lamps that are pulsed by discharging a capacitor

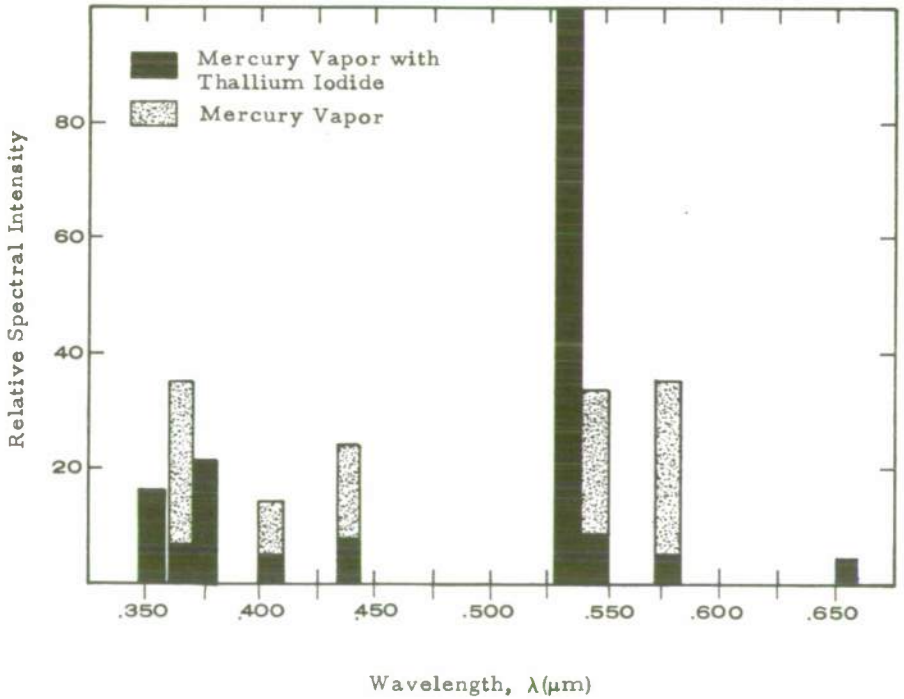


Fig. 4 : Relative Spectral Intensity of Mercury Vapor Lamps

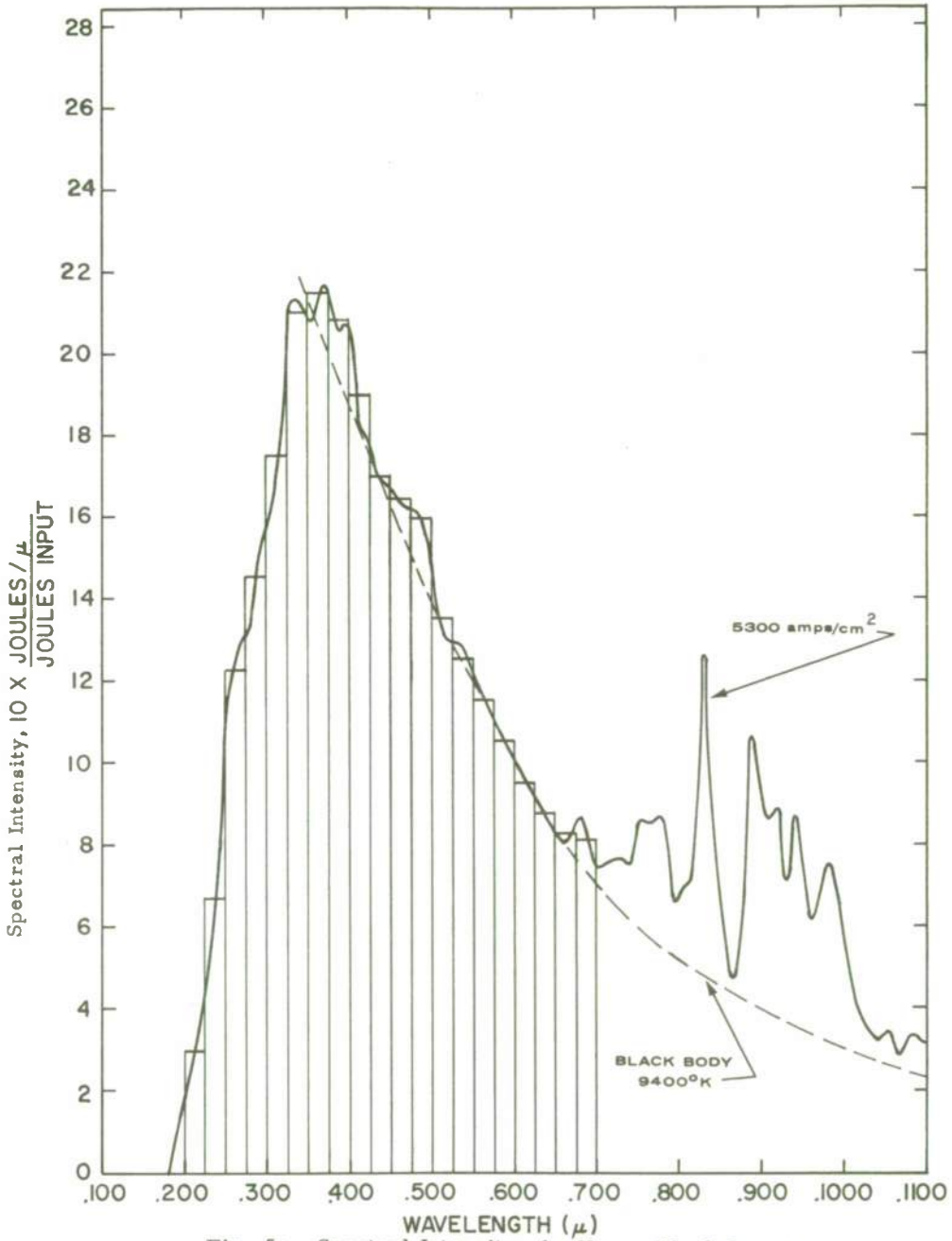


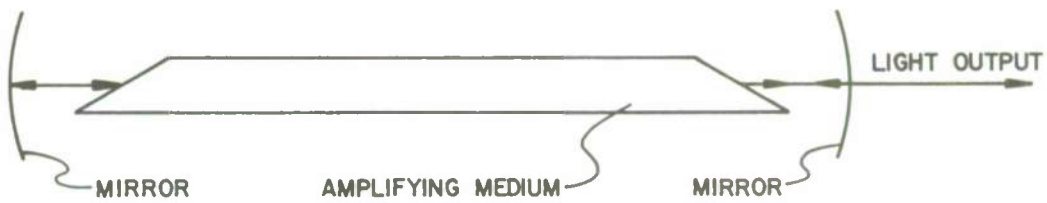
Fig. 5: Spectral Intensity of a Xenon Flash Lamp

bank. High efficiency in a small tube follows from the fact that a brief pulsed arc can operate at a much higher current density without exceeding the energy-dissipation limit of the envelope. The higher color temperature puts the peak spectral emission at shorter wavelengths nearer the peak transmission of sea-water. Another advantage of a flashlamp is in situations where exposure time is limited such as encountered when underwater turbulence may blur resolution. The pulse duration can be anywhere from microseconds to milliseconds but it is much too long to provide a range gate for backscatter reduction. For this latter application one must resort to pulsed lasers, described further on.

Flash lamps differ from the arc lamps described previously in that they operate at much higher current density (as high as 5300 amps/cm^2 compared to a few hundred amps/cm^2). At these currents, the gas is so hot that the spectrum is nearly that of a black body as discussed under "Gas Discharge Physics". A typical spectrum of a xenon flash lamp is shown in Fig. 5 (Gomez and Newell [1966]). Xenon is usually the preferred gas for these lamps because of its chemical inertia, low ionization potential and high efficiency which may reach 35% in the visible.

Principles of Laser Oscillators

Strictly speaking a laser is nothing more than a device that amplifies light of certain colors when the light is passed through an excited medium (solid, liquid, gas or plasma) inside the device. However, in common usage the word "laser" nearly always refers to a laser oscillator that generates power without any input; the exceptions are usually called traveling wave laser amplifiers. The medium acts as an amplifier after pumping atoms from the lower state to an excited state either by light from a flash lamp or by atomic collision between different species of gas. Amplification comes about when incident light stimulates atoms in the excited state to emit the amplifying power as they relax back to the lower states, mentioned in the section on "Gas Discharge Physics". To convert an amplifier into an oscillator one taps the output and feeds it back into the input. Then the same signal cycles over and over through the amplifier out one end, back into the other end, and through the amplifier again. In an electronic oscillator one feeds the signal back by connecting a wire from output to input, but in a laser the same thing is accomplished with mirrors as shown in the sketch below.



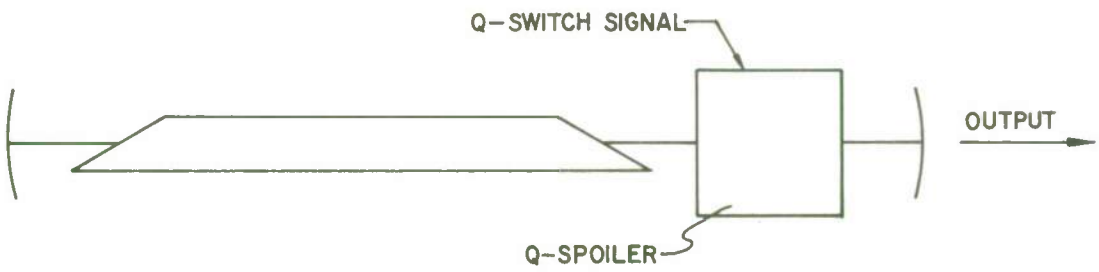
Simple Laser

The output and input ends of the excited medium are indistinguishable, and so the light is directed back on itself at each end of the medium. The two mirrors comprise a resonator which has normal modes for various patterns of round-trip reflections. The so-called Brewster's angle at the end of the amplifying medium prevents reflection of light polarized in the plane of the paper, which causes the laser to oscillate preferentially with this polarization. As a fairly typical example, suppose the laser medium, its length and excitation are chosen so that the power increases by 23% when a small signal makes a one-way pass. Then suppose a reflection off the mirror loses 3% for a net gain of 20%. Then the return pass and the following reflection yield another 20% for a round-trip gain of 44% (20% compounded, i.e., 1.20 x 1.20 = 1.44). This means that 43.999% of the power can be extracted at one of the mirrors, either through a hole or by making it partially transparent, and enough power remains in the resonator to sustain the oscillation. However, the actual power extraction in a good design would be more like 30%, so that power accumulates in the resonator, drives the medium into saturation and extracts the maximum amount of power even though the gain is somewhat reduced.

As an underwater light source, the laser is too expensive (both purchase price and power consumption) unless it is required for range gating to achieve maximum vision range by rejection of backscattered light. Therefore, an important topic is the means for storing energy inside a laser and dumping it in a sequence of very energetic pulses. One technique is called "Q-switching" and another is called "cavity dumping". We describe them in that order.

The Q of a resonator is a measure of the energy retained per pass in relation to the energy lost per pass; the greater the reflection feedback the greater the Q. A Q-switched laser employs a Q-spoiler inside the resonator as shown in the sketch on page 8. That is a device that spoils the feedback from one mirror either by absorbing light or by directing it out to the side. The Q-switching signal activates an electrooptic device that suddenly restores the reflection as in an ordinary laser. In operation, Q is spoiled most of the time, so that the feedback if any, is insufficient to sustain an oscillation. For lack of any light to amplify, the energy fed into the laser piles up in the excited molecules (or ions or atoms) that do the amplifying. When this accumulated energy approaches saturation, the Q is suddenly restored. At this time a giant pulse of light builds up, commensing with the small amount of random light that the excited medium emits spontaneously. This pulse empties all the available energy stored in the medium. The giant pulses often have many megawatts of power

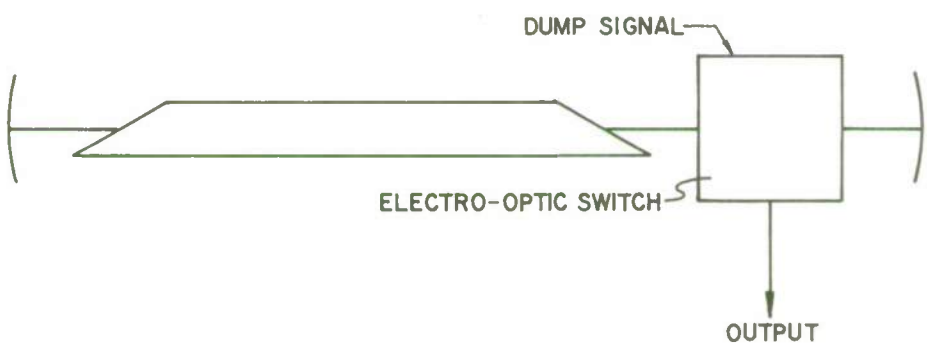
with a duration of nanoseconds.



Q-Switched Laser

The "cavity dump" could better be called the "resonator dump", but the two mirrors comprising a resonator are often called a "cavity" by analogy to the microwave resonator which really does have the form of a hollowed-out cavity.

The cavity-dump laser cannot store energy for a very long period of time, only about the time for a few tens of passes through the medium. This is acceptable if the pulse repetition rate is high or if the laser medium is one that does not store energy well for Q-switching. The cavity-dump laser stores energy as light bouncing between the mirrors in contrast to the Q-switched laser that stores it in molecular excitation. Between pulses light energy builds up inside a resonator that has no output from either mirror. When the stored energy begins to saturate, the electrooptic switch is activated to dump it out the side of the resonator all at once as shown in the sketch below.



Cavity-Dump Laser

Lasers for Underwater Applications

In spite of all the developments in lasers over the past ten years there are only two lasers of interest for underwater use. The argon-ion laser at 0.488 μm and the doubled neodymium YAG at .530 μm. Both lasers have high prices and low efficiencies that render them impractical except in very special cases. The YAG laser efficiency is no better than .2% from raw power into radiated power, and the argon laser is even worse, .01%. However, the laser has applications in special cases, particularly where extremely high collimation is necessary as in the Dual-Scan System (see Lecture 4.1) for minimizing resolution degradation, or in range-gated operation where nanosecond pulse widths are required to gate out backscattered light.

Because efficiency is often misquoted it is worthwhile elaborating on this point. Let us begin with the YAG laser; a neodymium doped yttrium aluminum garnet crystal is excited by a flash lamp. The laser output before doubling is at 1.06 μm. The efficiency in multimode operation at this wavelength is of the order of 1%. Conversion efficiencies better than 90% in the frequency doubling (wavelength halving) process with suitable non-linear crystals are theoretically possible. However, such efficiencies are achieved only if the laser operates in a single mode and the doubling crystal is inside the laser resonator. Multimode operation provides more power, hence higher efficiency at 1.06μm, but it reduces the doubling efficiency which depends critically on the angle of incidence of the wave

upon the doubling crystal (phase matching condition). Since each mode is characterized by a different angle inside the resonator, the efficiency gained in multimoding at 1.06 μm is partly lost after doubling to .530 μm. In addition, doubling efficiency is high when the crystal is inside the cavity where losses are low. However, inside the cavity there is sufficient energy generated at 1.06 μm to heat the doubling crystal and destroy it or reduce its conversion efficiency. As a result, most doubling crystals such as lithum niobate do not have conversion efficiencies better than 20%. The resultant overall efficiency is 20% x 1% = .2%.

The natural mode of operation of the YAG laser is the pulsed mode. Q-switching is used to obtain the nanosecond pulse lengths required for range gating (backscatter rejection). Pulse repetition rates are limited by cooling rates and so the pulse rate depends on the pulse energy. A 15 nanosecond pulse of 50 millijoules cannot be repeated much faster than 20 times per second.

Efficiencies of argon and other ion lasers are also frequently misquoted: 0.1% is often quoted but it applies strictly to the ratio of radiant output to power delivered to the gas discharge tube. One must include the efficiency of the power supply which amounts to another 10% so that the overall efficiency is no better than 0.01%.

The argon ion lasers are normally continuous wave (cw) oscillators of average power as high as four watts multimode, although some developmental lasers have reached 10 watts radiated output. They can be pulsed by means of the Cavity-Dump technique, achieving a pulse width of 15 nanoseconds and efficiencies approaching those of cw operation if the pulse repetition rate is high enough. Pulse rates of the order of 10 MHz are quite common with cavity-dump ion lasers.

Summary of Conventional Characteristics

In sections to follow we discuss the spectral properties of lamps in relation to the spectral transmission of seawater. However, first it is well to summarize the conventional properties of lamps as discussed in the preceding sections, and this summary appears in Table I below. Note the low efficiency of the lasers, the price one must pay for their special properties, thin beams and brief pulses.

TABLE I

Lamp	CW/ Pulsed	Spectrum	Typical Average Input Power or Energy	Typical Average Output Power or Energy	Efficiency	Start Up Time
Quartz Iodide (QI)	CW	Continuous	1000 watts	5 watts	5%	0
Thallium Iodide (TI)	CW	Line	1000 watts	12 watts	12%	tens of minutes
Xenon Flash (XF)	Pulsed	Continuous	1000 watts	30 watts	30%	seconds
Doubled Nd:YAG (Y)	Pulsed	Line	2000 joules/ pulse	40 millijoules/ pulse	.2%	seconds
Argon/Ion (A)	CW/ Pulsed	Line	40,000 watts	4 watts	.01%	seconds

Light Source Performance Criteria

There are no simple ways to compare lamps by themselves. The only meaningful comparison is between entire imaging systems, that is source, medium and receiver. The important quantity to compare is the signal-to-noise ratio based on the round-trip propagation path. It is this ratio that determines one's ability to detect and recognize objects in the field-of-view. Fortunately, two of the most important vision systems yield the same formula for lamp comparison, and it is this formula that we shall use in our final plots of lamp results.

The two systems are called "flood" and "dual-scan" for short. Suppose that each uses the same radiated power for illumination and examines the same field-of-view attempting to resolve the same amount of image detail, but the flood system illuminates the whole field at once, while the dual-scan illuminates and examines only one resolution cell at a time, rejecting scattered light in the detector. In Lecture 4.1 we discussed the rates at which three quantities of interest decay with target distance for various systems, especially the two considered here. The three quantities are signal (information bearing light), total light returned to the detector and signal-to-noise ratio. The last of these is computed as the ratio of the first to the square root of the second. The results are repeated for convenience in Table II below. Here R is the target range, α the thin beam attenuation constant and γ, a

TABLE II

	Signal Decay Factor	Total Return Decay Factor	SNR Decay Factor (First column/square root of second)
Flood	$\exp[-(\gamma + \alpha)R]$	$\exp[-2\gamma R]$	$\exp(-\alpha R)$
Dual-Scan	$\exp[-2\alpha R]$	$\exp[-2\alpha R]$	$\exp(-\alpha R)$

much smaller decay constant for a wide cone of light. The results in the last column show the same decay rate (α) for the SNR in each system, but the derivation of these expressions neglected the wavelength-dependence of α and γ.

The generalization to include wavelength dependence is easily introduced as an integral over λ shown in the middle columns of Table III below, where factors $L(\lambda)$ and $S(\lambda)$ in the integrand are the lamp spectrum and the detector sensitivity spectrum respectively. These integrals are constructed

TABLE III

	Signal Decay Factor	Total Return Decay Factor	SNR Decay Factor (First column/square root of second)
Flood	$\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-\gamma(\lambda)R - \alpha(\lambda)R]d\lambda$	$\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\gamma(\lambda)R]d\lambda$	$\sqrt{\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda}$
Dual-Scan	$\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda$	$\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda$	$\sqrt{\int L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda}$

from the block diagram of Fig. 6 as follows. For each watt of raw power to the illuminator, the lamp puts out useful power $L(\lambda)d\lambda$ within the wavelength increment $d\lambda$; of this a fraction $\exp[-\alpha(\lambda)R]$ or $\exp[-\gamma(\lambda)R]$ (depending on which case) reaches the target; the target is assumed grey, and so its reflectivity is a constant that drops out of the comparison; another factor with α or γ describes the return path to the detector; and finally the fraction $S(\lambda)$ generates detection events. In the old treatment, which treated α and γ as constants, the factors $\exp(-\alpha R)$ and $\exp(-\gamma R)$ factored out of the integrands, and $\int LSd\lambda$ was then a common factor that dropped out of the comparison leaving the expressions in Table II. The last column of Table III is again the decay factor for signal-to-noise ratio computed as

$$\text{signal} + \sqrt{\text{total return}} ,$$

and again the result is the same for the two systems, but this does not follow until we make a slight approximation.

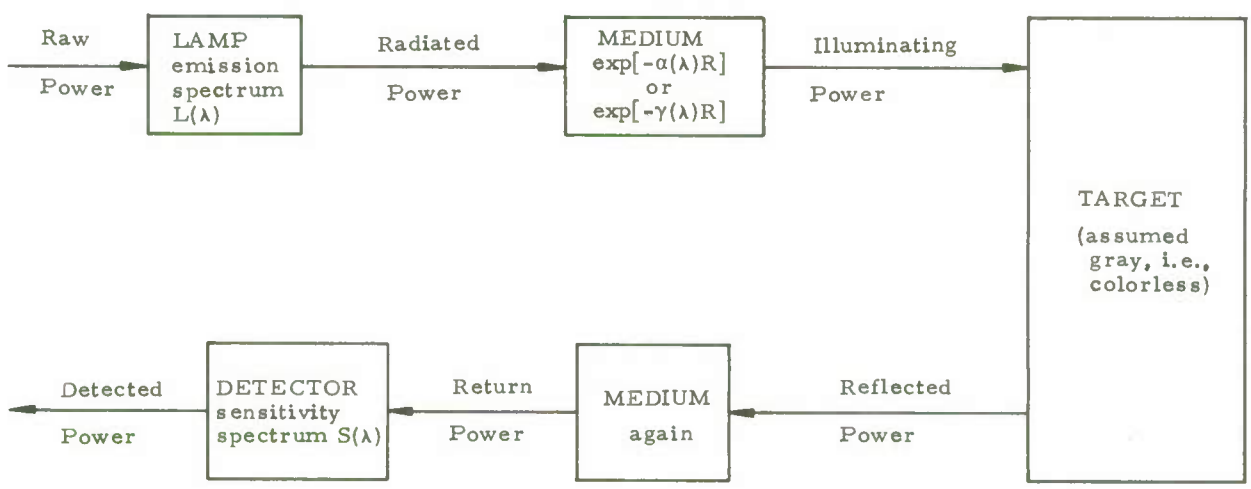


Fig. 6: Block Diagram for Lamp Performance Comparison

The difference between α and γ is s_s the small-angle scattering constant. This constant is independent of wavelength to a good approximation as has been demonstrated experimentally. This is also expected theoretically since small-angle scattering is a refractive phenomenon, and the refractive index varies little with wavelength. When we put $\alpha(\lambda) = \gamma(\lambda) + s_s$, the results in the last column follow after a little manipulation.

The SNR decay factor in the last column of Table III is the one computed as a basis for comparing various underwater lamps, i.e.,

$$\text{Performance Comparison Figure, PCF} = \sqrt{\int_0^\infty L(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda} \qquad (6)$$

The comparison is unfortunately very sensitive to the spectrum of attenuation, and since seawater exhibits an inordinate amount of variability in attenuation, one must be careful in interpreting results. For the analysis to follow we have chosen spectral attenuation α for two types of waters, coastal and deep ocean. The data are taken from extensive in-situ measurements by Matlack [1972] and are plotted in Fig. 7. Curve 1 is for coastal waters and Curve 2 for deep ocean. We also have included Curve (1') in the same figure for bay waters from Hulburt [1945] as an example of data that should not be used. These data appear suspicious inasmuch as its slope in the infrared or ultraviolet is radically different from the other two curves. Obviously one set is in error. In looking into the details of Hulburt's measurements, which incidentally were made in 1941, we find that they are not in-situ measurements. He used specimens from Chesapeake Bay taken in special containers to a laboratory where measurements of scattering, $\sigma(\theta, \lambda)$ and absorption $a(\lambda)$ were made after the samples had been in the laboratory for several days. The scattering coefficient, $s = \int \sigma(\theta, \lambda)d\omega$ (see Lecture 3.3) was then calculated and added to the absorption coefficient to yield the attenuation $\alpha(\lambda)$! For this reason we have more confidence in Matlack's in-situ measurements. Unfortunately, none of the in-situ measurements (including those of Matlack) extend over a sufficiently broad range of wavelengths, say from 0.35 to 0.75 μm. Such a range is necessary because many lamps have appreciable output around these extremes (see for instance, the xenon flash lamp of Fig. 5). Thus, the spectral sensitivity of the detector such as an S-20 photocathode surface extends over a broader spectrum than the eye, including wavelengths as short as 0.35 μm over short propagating distances.

We use the seawater attenuation curves (1) and (2) of Fig. 7 and an S-20 photosensitive surface whose spectral sensitivity $S(\lambda)$ is shown in Fig. 8. We have chosen an S-20 surface because it is more sensitive and has broader spectral response than either the eye or film, and it is the practical choice for modern photocathodes in the visible. (There are other surfaces more properly matched to the water spectrum but they are not transparent. They cannot be used on most low-light level television tubes because the latter usually require a semi-transparent photocathode.) At any rate, the approach to be outlined below can be applied to any photoreceptor, be it the eye or a film, and should be used in comparing lamp performance if the imaging system includes this type of receptor. We now have all the factors needed for Eq. (6) except the lamp spectrum $L(\lambda)$.

Performance Comparison of Some Lamps

We have evaluated Eq. (6) for five lamps: quartz iodide (QI), mercury arc with thallium iodide (TI), xenon flash (XF), argon Laser (ARG) and doubled neodymium YAG (YAG), in two different waters, coastal and deep ocean, all with an S-20 photosensitive surface. The spectral lamp characteristics of Quartz and Thallium Iodide are shown in Fig. 1. The Xenon flash spectrum is shown in Fig. 5. Laser spectra are assumed single spectral line at wavelengths .488 μm and .53 μm for Argon and YAG respectively. The seawater attenuation is given by curves 1 and 2 of Fig. 7, and the spectral sensitivity of the detector in Fig. 8. The PCFs for the five lamps are presented by separating this quantity into two factors. First we put

$$L(\lambda) = \eta L'(\lambda)$$

where η is a special form of efficiency. Then Eq. (6) becomes

$$PCF(R) = \sqrt{\eta}\sqrt{\int_0^\infty L'(\lambda)S(\lambda)\exp[-2\alpha(\lambda)R]d\lambda} \qquad (7)$$

For each lamp the value of η is chosen so that

$$\int_0^\infty L'(\lambda)S(\lambda)d\lambda = 1$$

If $S(\lambda)$ were the eye response, then L' would be the lamp spectrum normalized to one lumen total output, and η would be the lamp efficiency in lumens out per watt in. However, S is the relative spectral sensitivity of the S-20 photocathode and so η and L' are the analogous quantities for this detector. There are two reasons for pulling $\sqrt{\eta}$ out of PCF. One is that η is more dependent on assumptions and the state-of-the-art than L' is, and the other reason is to make the curves in our plotted results cluster and thereby show how little difference there is in the PCF except for $\sqrt{\eta}$. The efficiencies η are tabulated below, and the square root of the integral in Eq. (7) is plotted in Figs. 9 and 10 for coastal waters and deep ocean respectively.

TABLE IV

Lamp	Efficiencies		Overall
	Conversion	Collimation	
Quartz Iodide (QI)	5%	30%	1.5%
Mercury Arc with ThalliumIodide (TI)	12%	30%	4%
Xenon Flash (XF)	30%	30%	9%
Argon Laser (ARG)	0.01%	100%	.01%
Doubled Neodymium YAG	0.2%	100%	.2%

In this table we have separated out the collimation efficiency which is not well-defined without more detail about the system in which the lamp is to be used. This efficiency is the fraction of the total light radiated

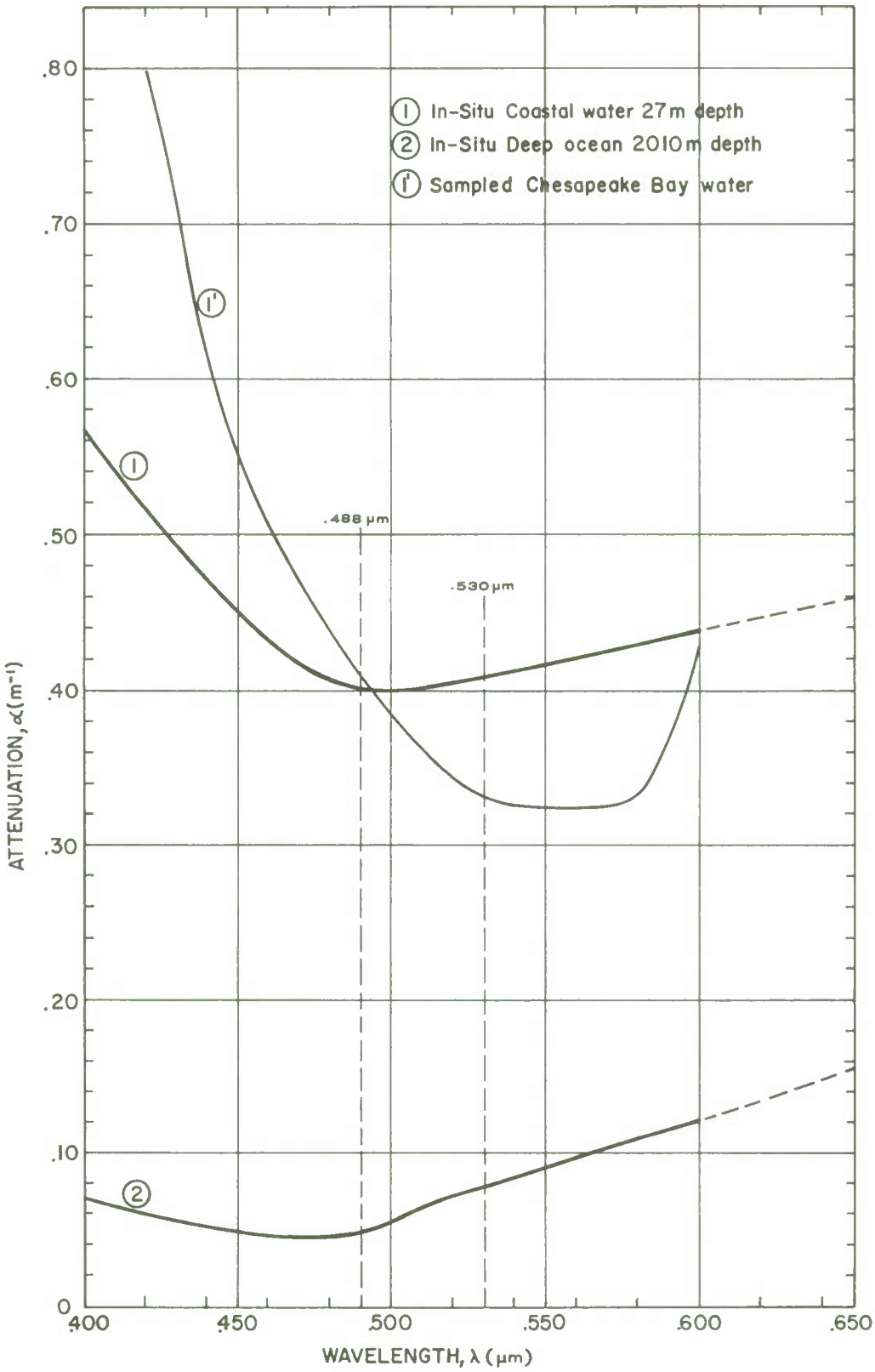


Fig. 7: Spectral Attenuation of Coastal Waters and Deep Ocean

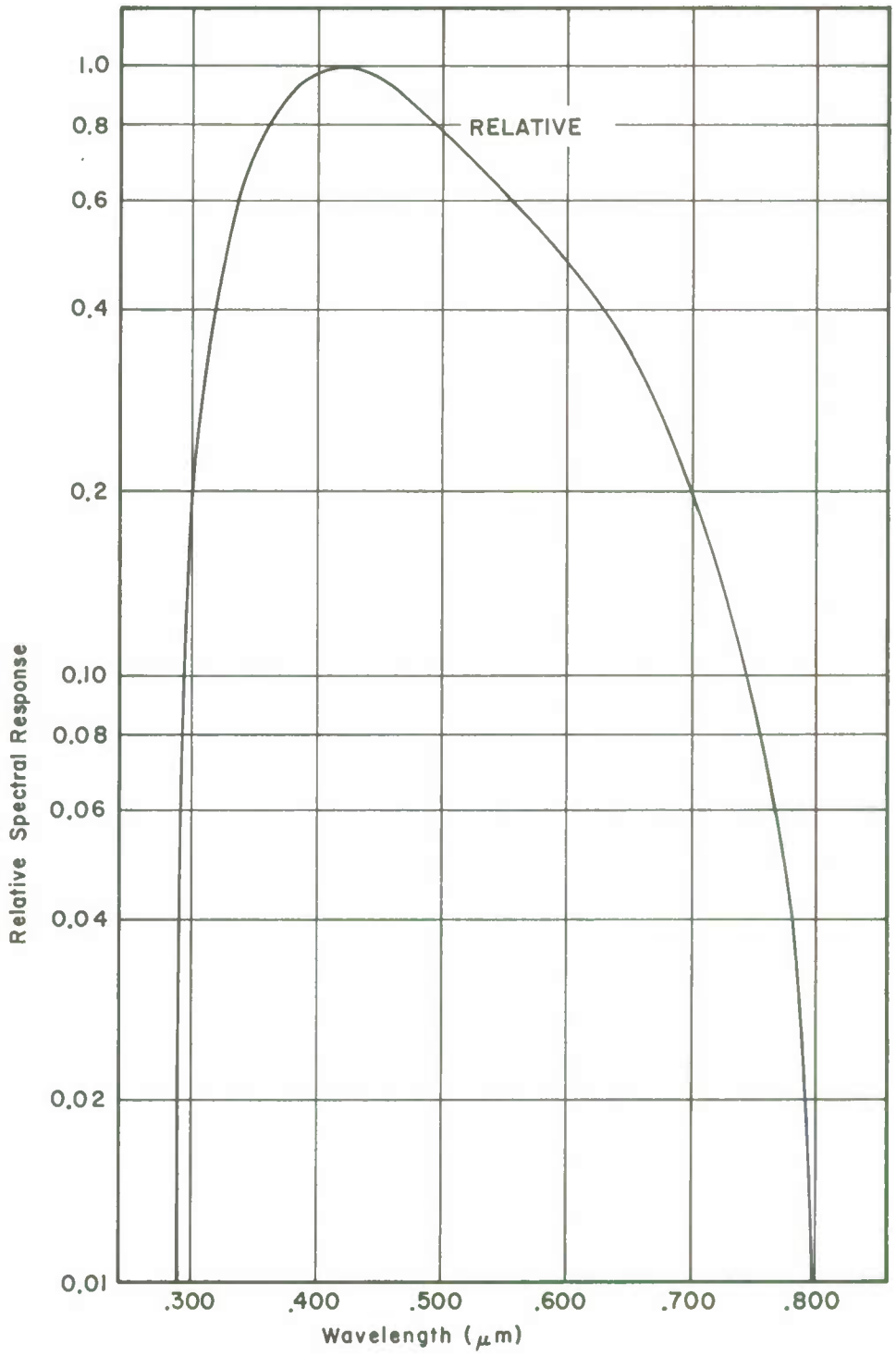


Fig. 8: Spectral Sensitivity of S-20 Photosensitive Surface

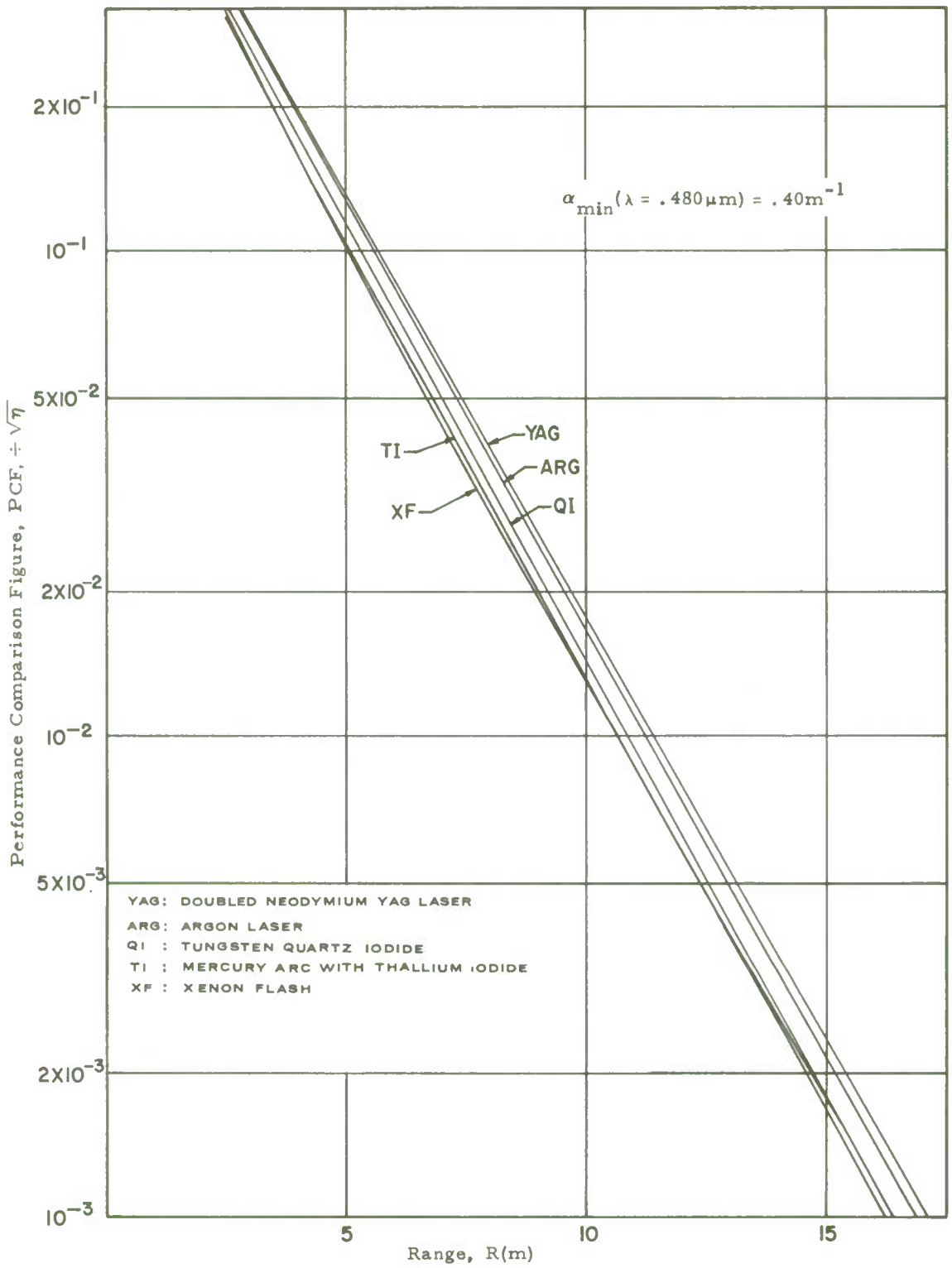


Fig. 9A: Comparative Lamp Performance in Coastal Waters

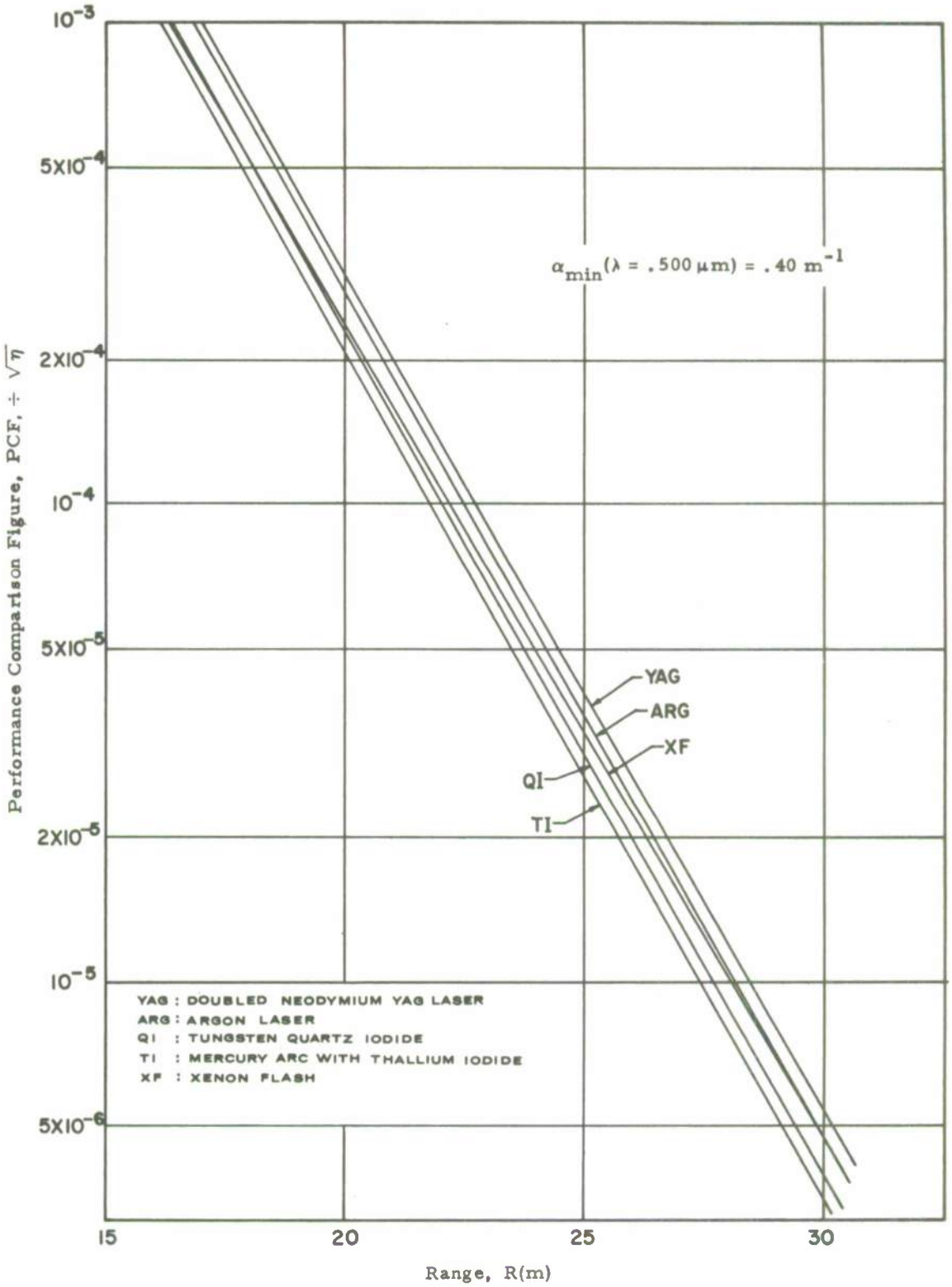


Fig. 9B: Comparative Lamp Performance in Coastal Waters (Continued)

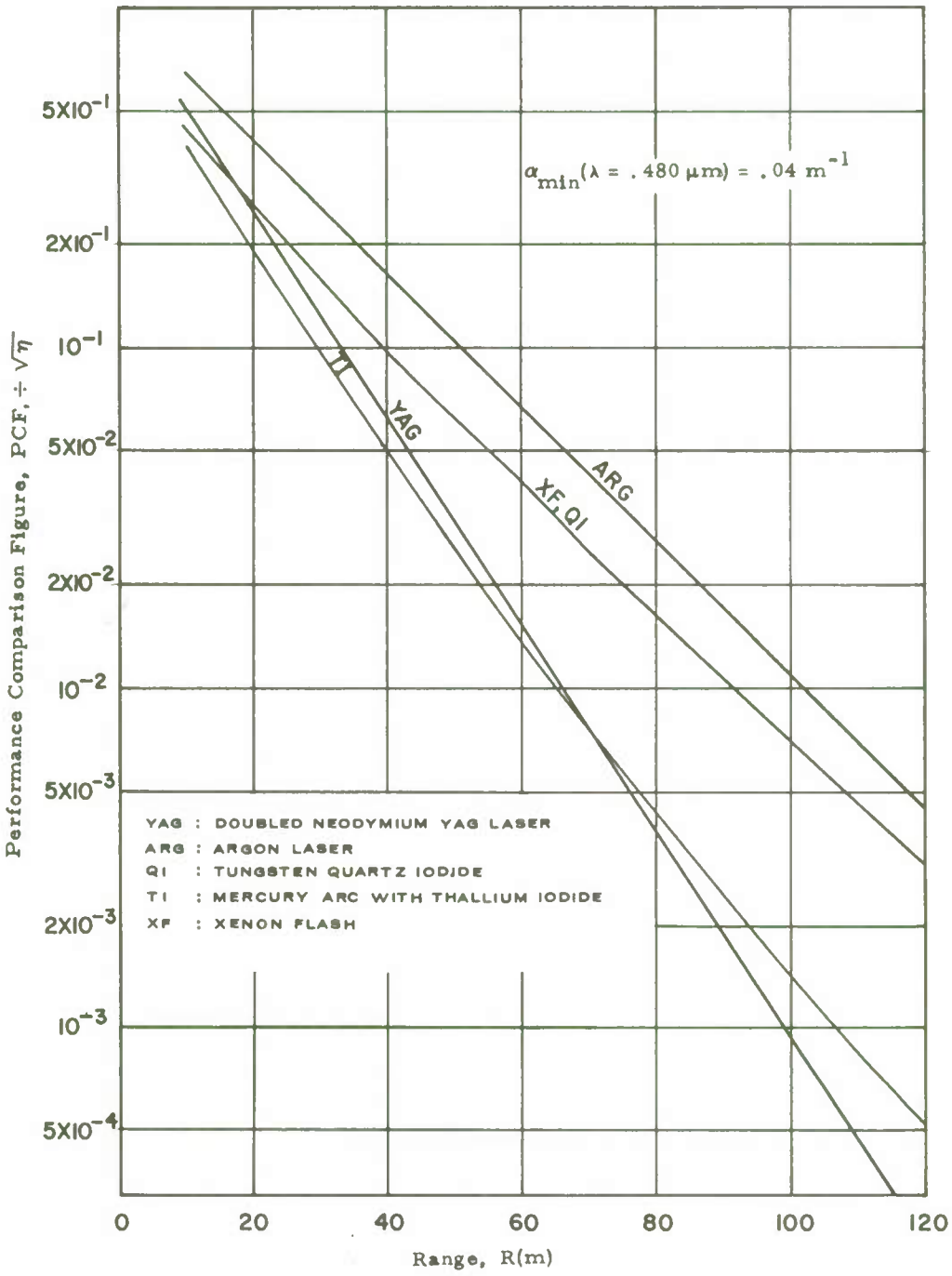


Fig. 10: Comparative Lamp Performance in Deep Ocean

in all directions that can be collected and directed in a more or less collimated beam. For crude collimation in a conical beam this efficiency can be made quite high by placing the lamp in a deep parabolic reflecting bowl. For precision collimation, the source size and envelope become problems and collimation efficiency drops. Since lasers do not have this problem, we had to assume something reasonable to make a valid comparison between conventional and laser light sources, and 30% was chosen as a round number in mid-range. The values selected for conversion efficiency are also questionable since they hinge on the art of making efficient power supplies, the choice of arc temperature, and numerous adjustable parameters in the laser design.

Turning to Fig. 9 for coastal waters, we see that all the performance curves are clustered within a band that does not vary in general by more than a factor of two, at most five. The lamp performance is then dictated almost exclusively by efficiency, confirming well-known experience that Xenon Flash and Thallium Iodide are the practical choice. In deep waters, Fig. 10, the Argon laser as expected stands out if efficiency is of no concern. If efficiency is the overwhelming selection criterion, then the Argon laser curve in the figure drops by a factor of 20 compared to TI(.4%/.01%). At long ranges (100 m) it performs better than Thallium Iodide but it still loses out with respect to Quartz Iodide or Xenon Flash. Obviously the laser advantage lies in other features, such as the short pulses for range gating plus excellent collimation without the large aperture that an incoherent source would require. The reader is reminded that these results are by no means the final answer but are only intended to illustrate the method based on PCF(R).

References

D. A. Larson et. al., 1962, "Higher Efficiency Light Source Through Use of Additives to Mercury Discharge", Preprint No. 29, National Technical Conference of the Illuminating Engineering Society, September 9-14, 1962.

J. H. Gomez and P. B. Newell, 1966, "Spectra of Pulsed and Continuous Xenon Discharges", Journal of the Optical Society of America, Vol. 56, No. 1, January 1966.

E. O. Hurlburt, 1945, "Optics of Distilled and Natural Waters", Journal of the Optical Society of America, Vol. 35, pp. 698-705, November 1945.

D. E. Matlack, 1972, "Deep Ocean Optical Measurements (DOOM) Report", NOLTR 72-284, 20 November 1972, U.S. Naval Ordnance Laboratory, White Oak, Silver Spring, Maryland.

RECEIVERS: PHOTOELECTRONIC AND PHOTOGRAPHIC DETECTORS

Henri Hodara and Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

The main theme of this lecture is how to compare on a common basis photoelectronic and photographic detectors. A criterion is developed which consists in most cases of the product SNR $\cdot \Psi$, the signal-to-noise ratio times the spatial bandwidth. We describe in detail how we arrive at this formulation and how it is used to compare all detectors not only among themselves but to the ideal quantum detector, that is one that converts all incident photons into detection events.

Considerable efforts are spent on how to calculate the product SNR $\cdot \Psi$ for television tubes and photographic films from available manufacturer's data. In passing we also review the basic principles and modes of operation of both photoelectronic and photographic detectors.

The selection of a detector to perform a specific underwater imaging task cannot be boiled down to a few hard calculations; there are too many variables and constraints involved. In this lecture we attempt to establish a general criterion of detector performance, whether photographic or photoelectronic, taking into account the limitations of the medium, in particular loss of resolution through scattering and selective spectral absorption. We also review the principle of operation of the various detectors suitable for underwater applications and compare their performance.

1.0 Fundamentals for Comparing Detector Performance

Image detectors are compared on the basis of attainable resolution and signal-to-noise ratio in terms of the required illumination on the photosensitive surface. The first subsection here deals with the proper choice of a unit for measuring resolution as independent as possible from related system details. Another subsection presents the theory of the ideal quantum (photon) detector as a point of departure for comparing real detectors in later sections.

1.1 Units for Measuring Resolution

Resolution data for television camera tubes manufactured in the United States are usually specified in "Limiting Resolution--TV Lines Per Picture Height". The number of TV lines, N_y gives directly the number of vertical resolution elements and equals twice the system spatial bandwidth. The aspect ratio of the TV photocathode is usually 4/3 in the U.S.A., that is horizontal width $L_x = 4/3 L_y$(height). The horizontal resolution is always taken equal to the vertical so that there are $N_x = 4/3 N_y$ horizontal resolution elements. A TV line is half of an optical line pair and is expressed in units of half cycles per picture height or per millimeter. The picture height unit is appealing for good reasons: it is dimensionless; and $N_x N_y = 4/3 N_y^2$ gives the number of resolution cells in the picture. Combined with signal-to-noise ratio this quantity gives the maximum information content of each frame. However, the picture height unit proves inferior to cycles/mm for comparing photoelectronic and photographic detectors on a common basis. For one thing the total information content of a frame is likely to be limited more by the medium than by the tube size, so the full picture height may not even be used. Two other reasons connected with photography and optics are explained below.

U.S. tube manufacturer's data are usually given as TV lines per picture height versus illumination of the faceplate (see Fig. 1). This is a curious choice of mixed units that results in entirely different numbers for different size tubes of the same type. The curves would be more nearly independent of size if both quantities were either something per frame (picture) or per unit length and area, but not one of each, i.e., either

- TV lines/picture versus power/picture (watts or lumens), or
- TV lines/mm versus illumination (watts/mm^2 or footcandles).

For television tubes, the first of these is more desirable and gives graphs that are nearly independent of tube size. This is because the blur circle occupies not so much a fixed diameter as a fixed fraction of the photosensitive area. However, photography requires the second measure of resolution because film is characterized by a fixed number of grains per mm^2, not per picture. The information content, resolution of image detail, and signal-to-noise ratio in a film are not invariant to expanding the picture to twice the size while halving the illumination because of nonlinear quantum effects in the individual grains. The best comparison between film and television comes from using the second unit for film and accommodating television by plotting separate curves for the discrete sizes available.

Ultimately the resolution of a vision system should be expressed in cycles per radian, the unit appropriate for object space. However, we cannot compare detectors separate from the system on this basis because cycles/radian depend on focal length:

$$\psi \text{ (cycles/radian)} = \Psi \text{(cycles/mm)}\, F = \Psi \text{(cycles/mm)}(F/D)D \qquad (1)$$

The last form of Eq. (1) with the collecting aperture D and the "f-number" F/D is the more useful because it displays the factors that usually determine F. F/D accounts for the image being small and bright or large and dim. This ratio cannot be less than $\frac{1}{2}$, and optical aberrations (or the expense of correcting them) become serious when F/D is less than one. As seen in Fig. 2, if n_o photons per unit area impinge on the target, the detector collects $\rho_T n_o (\pi D^2/4)\pi R^2$ photons. Since image and target resolution area are in the ratio $a/a_T = (F/R)^2$, it follows that the number of photons collected per unit area is

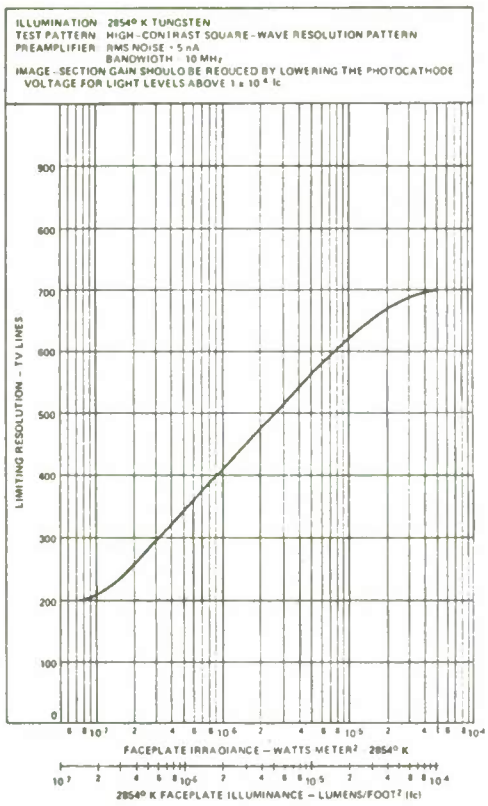


Fig. 1: Typical Manufacturer's Data on Television Resolution

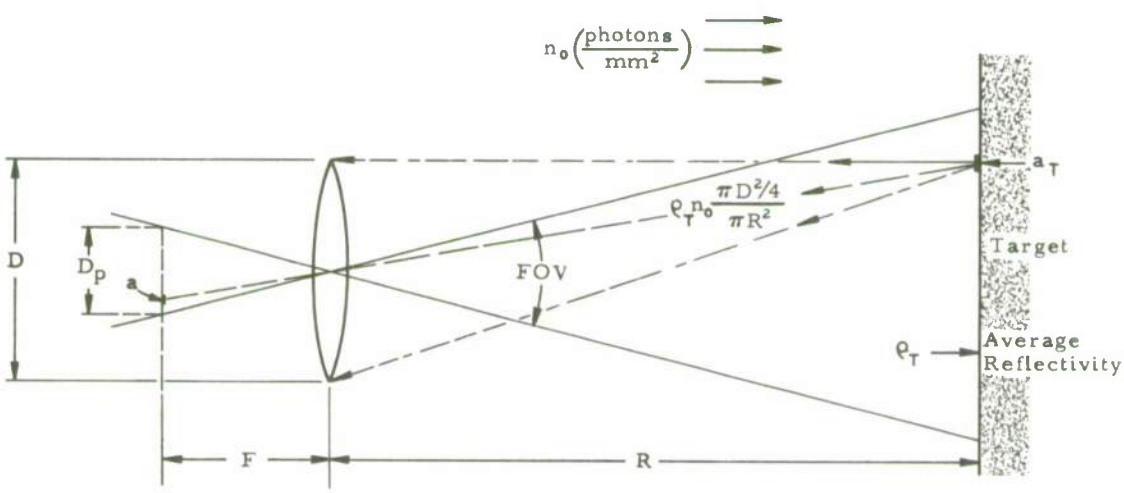


Fig. 2: Geometry of Typical Underwater Television Imaging System

$$n = \rho\, n_o / 4(F/D)^2 \tag{2}$$

It is clear from Eq. (2) that the maximum occurs for $n = n_o$ with $\rho = 1$ so that $F/D = 1/2$. Within these constraints, designers like to make F/D small (regardless of the detector chosen) to keep equipment small, forming a bright image on a small sensitive surface instead of a large dim image. Similarly, the last factor D in Eq. (1) is limited by cost or by the size of the pressure seal in a submersible, but otherwise it should be large to collect as much light as possible.

Eq. (1) and the argument that follows it show that Ψ in cycles/mm makes a good basis for comparing detectors because the factors D and F/D are determined by considerations that are fairly independent of the choice of detector, although these considerations do vary from one system to another. The same cannot be said for N_y in half cycles or TV lines per picture height. The corresponding equation is

$$\psi(\text{cycles/radian}) = \frac{1}{2} N_y(\text{TV lines/picture}) F/L_y = \frac{1}{2} N_y(\text{TV lines/picture})(F/D)(D/L_y)\,, \tag{3}$$

where L_y is the photocathode picture height, which can vary considerably from one detector to another. For example, television camera tubes are often available in 16, 25 and 40 mm, but photographic film can be made most any size, although certain sizes (such as 35 mm) are fairly standard.

1.2 The Ideal Quantum Detector

The ideal quantum detector has unit quantum efficiency; i.e., all incident photons are converted into detected events. The achievable image resolution is completely determined by the signal-to-noise ratio. Recall from Lecture 4.2 that photon noise follows Poisson's statistics and that the signal-to-noise ratio is

$$\text{SNR} = \frac{(\dot{n}_1 - \dot{n}_2)\, at}{\sqrt{(\dot{n}_1 + \dot{n}_2)\, at}} \tag{4}$$

$(\dot{n}_1)$ and $(\dot{n}_2)$ are the photons per unit time per unit area from two adjacent resolution elements on the target imaged by equal areas, a, on the detector during the exposure or integration time, t. The preceding expression can be rewritten in a more convenient form in terms of the image contrast [see Lecture 4.2, Eq. (16)]

$$C_I = \frac{\dot{n}_1 - \dot{n}_2}{\dot{n}_1 + \dot{n}_2} \tag{5}$$

thus reducing to

$$\text{SNR} = \sqrt{[\dot{n}_1 + \dot{n}_2]\, at}\;\; C_I \tag{6}$$

In comparing detector performance the variable of interest is exposure or energy, so calling the total number of photons per unit area

$$n = \dot{n}t$$

reduces Eq. (6) to

$$\text{SNR} = \sqrt{[n_1 + n_2]\, a}\;\; C_I \tag{7}$$

It is convenient to express the resolution area as a spatial frequency Ψ, optical line pairs in cycles/mm. From the sampling theorem, the square area is expressed in terms of the highest frequency, ψ_x and ψ_y along two rectangular axes in the image plane

$$a = (2\psi_x\, 2\psi_y)^{-1} \tag{8}$$

The spatial frequency along an arbitrary direction is

$$\Psi^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 \tag{9}$$

We want equal resolution in both directions (square resolution element of area a), so we set the maximum frequencies $\psi_x = \psi_y$ and

$$\Psi^2 = 2\psi_x^2 \tag{10}$$

which together with Eq. (8) reduces Eq. (7) to

$$\text{SNR} = \sqrt{\frac{[n_1 + n_2]}{2}}\;\; \frac{C_I}{\Psi} \tag{11}$$

The quantity under the radical is recognized as the average number of photons per unit area reaching the detector which we denote by

$$n_{xy} = \frac{n_1 + n_2}{2} \tag{12}$$

After substituting (12) into (11) we finally get

$$\boxed{SNR \cdot \Psi_{ideal} = C_I \sqrt{n_{xy}}} \tag{13}$$

Eq. (13) simply states that the product of the signal-to-noise ratio by the resolution in cycles/mm equals the square root of the number of photons/mm^2 reaching the photosensitive surface scaled down by the image contrast. We shall compare both photoelectronic and photographic detectors against the ideal quantum detector in terms of the product SNR $\cdot \Psi$. This product is analogous to the more familiar product of SNR by bandwidth (also the gain-bandwidth product for amplifiers) since Ψ is the spatial analog of bandwidth. The SNR $\cdot \Psi$ product for the ideal quantum detector is the straight line plotted in Fig. 3.

2.0 Photoelectronic Image Detectors

The following subsections derive the appropriate figure-of-merit for comparing image tubes and describe some of the devices available.

2.1 Theory of SNR and Resolution

Photoelectronic detectors, image tubes and photomultipliers, depart from the ideal quantum detection that lead to Eq. (13). The most important departure is the failure to convert all incident photons into detection events. To account for this failure we merely insert a quantum efficiency Q in Eq. (13) so that it counts only the detection events instead of incident photons:

$$SNR \cdot \Psi = C_I \sqrt{Q\, n_{xy}} \tag{14}$$

When this is the only source of degradation, quantum efficiency is identical to the detective quantum efficiency Q_D of Clark Jones [1959] defined as follows

$$Q_D \equiv \frac{(SNR)^2_{measured}}{(SNR)^2_{ideal}}, \quad \text{for fixed n and } \Psi \tag{15}$$

To show this equivalence, take the ratio of Eq. (14) to Eq. (13), square it, and Eq. (15) results.

Other forms of degradation include additive noise in the receiver, important for weak illumination, and blurring effects in the image tube, important at high resolution (hence strong illumination required to see high resolution). Let us represent blurring by a receiver modulation transfer function (MTF), $F_r(\Psi)$, and consider only the case of white noise, which is equivalent to noise from a photon flux density n_n (photons/mm^2). Then starting from Eq. (4) and assuming the noise sources are uncorrelated, i.e., noise $= \sqrt{n_1 + n_2 + 2n_n}$ (2 for n_n in two resolution cells) leads to the generalization of Eq. (14),

$$SNR \cdot \Psi = C_I \sqrt{\frac{Q\, n_{xy}}{1 + n_n/n_{xy}}}\; F_r(\Psi) \tag{16}$$

When $F_r = 1$ and n_{xy} overwhelms n_n, this expression reduces to Eq. (14). For each detector type (which specifies Q, n_n, and F_r) we would like to plot Eq. (16) to relate the various seeing conditions given by SNR, Ψ, C_I and n_{xy}. This requires three variables since only SNR and C_I out of the four listed combine by a simple scaling rule to give a compound variable SNR/C_I along with the simple ones Ψ and n_{xy}. Fortunately there is a way to simplify. For weak illumination and low resolution, $F_r = 1$, and Eq. (16) reduces to

$$SNR \cdot \Psi = C_I \sqrt{\frac{Q\, n_{xy}}{1 + n_n/n_{xy}}} \quad \text{——noise limited} \tag{17}$$

which may be plotted in terms of two variables, SNR $\cdot \Psi / C_I$ and n_{xy}. Similarly when illumination is strong for high resolution, $n_{xy} >> n_n$, and Eq. (16) reduces to

$$SNR \cdot \Psi = C_I \sqrt{Q\, n_{xy}}\; F_r(\Psi), \text{ or}$$

$$\Psi = \sqrt{Q\, n_{xy} (C_I/SNR)^2}\; F_r(\Psi), \quad \text{—— MTF limited} \tag{18}$$

which also may be plotted in terms of two variables, the simple one Ψ and the compound one $n_{xy}(C_I/SNR)^2$. This latter case loses the combination SNR $\cdot \Psi$, a slight inconvenience in using the curves. The graphs in Fig. 3 have two sets of scales, the inner one with SNR $\cdot \Psi / C_I$ versus n_{xy} for Eq. (17), and the outer one with Ψ versus $n_{ny}(C_I/SNR)^2$ for Eq. (18). When $C_I = 1.0$ and SNR $= 1.2$, the two sets of scales are equivalent and the curves apply throughout their range. For most cases of interest either n_n or F_r is the dominant degradation, so one of the two sets of scales applies.

2.2 Performance of Photoelectronic Imaging Devices

In this section we calculate SNR $\cdot \Psi$ product for several imaging devices, which are described in the following section. Data come from manufacturer's performance graphs and from Rosell [1971]. The results of Fig. 3 hinge on the following assumptions:

1. Limiting television resolution lines as given in tube data is achieved under a signal-to-noise ratio, SNR = 1.2.

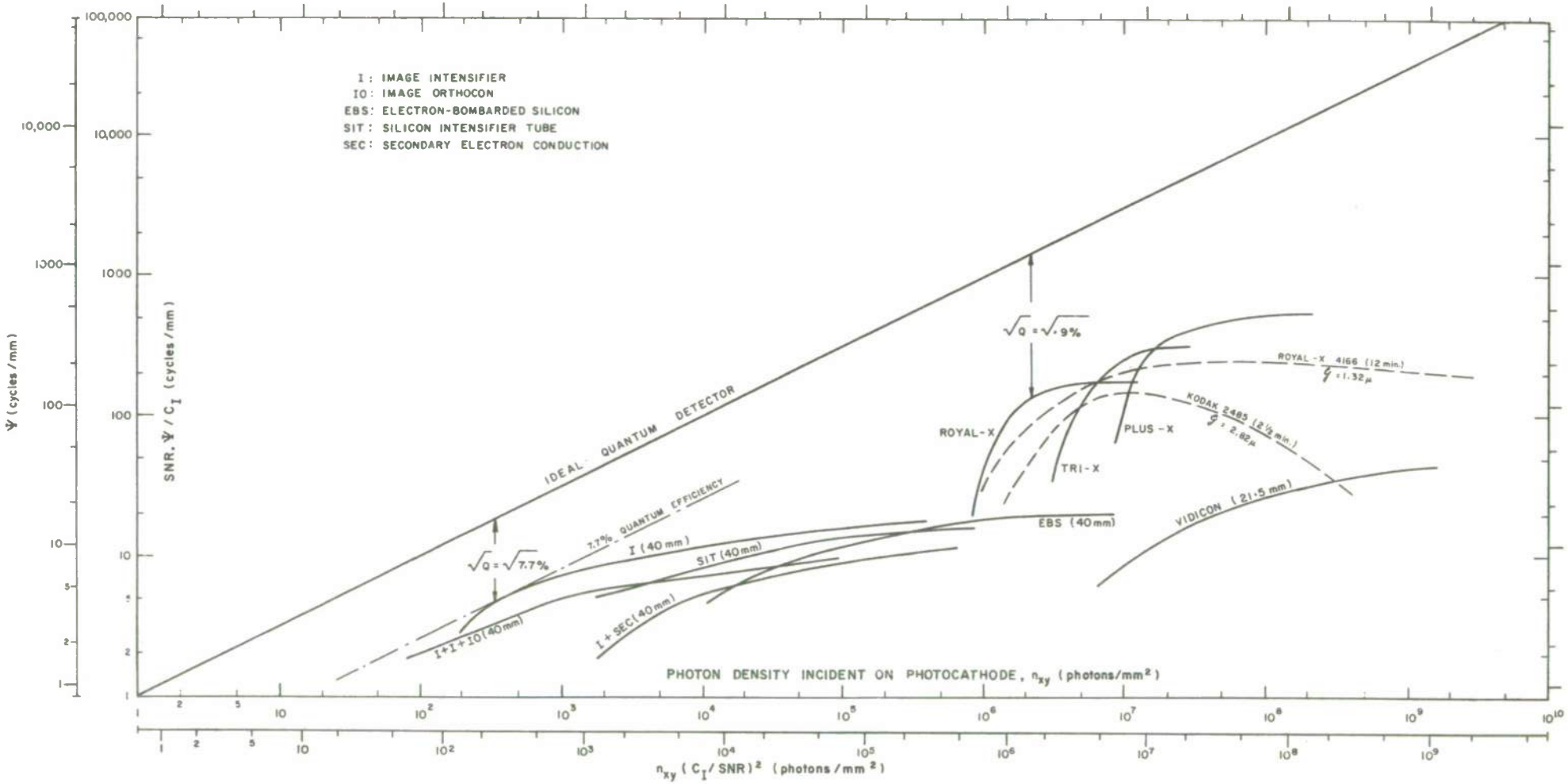


Fig. 3: Performance Curves for Photoelectronic and Photographic Imaging Sensors

2. To convert from irradiance as given in tube data to energy (photons) we have assumed an eye integration time, t = .2 sec. under static conditions.

3. Our energy calculations are made at $\lambda = .555\mu$, as it is near the peak of seawater transmission and the eye's visibility. The energy per photon, hc/λ is

$$\epsilon = \frac{1.986 \times 10^{-19}}{\lambda(\mu)} \text{ joules/photon} \tag{19}$$

At $\lambda = .555\mu$ we find

$$\epsilon^{-1}(.555\mu) = 2.79 \times 10^{18} \text{ photons/joule} \tag{19a}$$

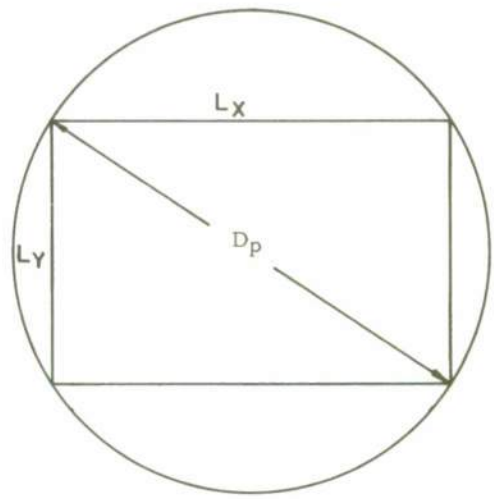
4. Manufacturers often give limiting resolution in terms of footcandles (lumens/ft^2). We have used the conversion

$$1 \text{ watt} = 680 \text{ lumens}^* \ @ \ .555\ \mu$$

The resultant conversion factor used for Fig. 1 is

$$1 \text{ Footcandle} \rightarrow .885 \times 10^{10} \text{ photons/mm}^2 \text{ at } .555\ \mu, \text{ for } .2 \text{ sec. integration time.} \tag{20}$$

5. We have converted the number of television lines per picture height, N_y given in tube data to optical line pairs per millimeter, Ψ (cycles/mm) assuming a rectangular field of dimensions L_x, L_y inscribed in a photocathode of diameter, D_p as shown in the sketch to the right. Calling the aspect ratio $q = L_x/L_y$ and recalling that there are two television lines per optical line pair we find



$$\Psi = \frac{N_y}{2L_y} = \frac{N_y}{2D_p}\sqrt{1+q^2} \tag{21}$$

Standard video systems have an aspect ratio q = 4/3 yielding

$$\Psi = \frac{5}{6} N_y/D_p \tag{21a}$$

Using the preceding equation and SNR = 1.2 we find

$$SNR \cdot \Psi = N_y/D_p \tag{22}$$

Thus by looking up manufacturer's curves of N_y versus footcandles, such as the one of Fig. 1, we are able to construct the curves in Fig. 3, using Eqs. (20) and (22). Either set of scales applies in plotting these points because the assumed SNR = 1.2, $C_I = 1.0$ is the condition under which the two sets are equivalent. For other cases, consider the Image Intensifier as an example. At 340 photons per mm^2 (lower scale), the curve has slope $\frac{1}{2}$ just as the curve for the ideal quantum counter does. Near that point the behavior corresponds to a simple quantum counter with efficiency 7.7%, and either set of scales applies. For weaker illumination (or lower resolution) the curve falls of below the quantum-efficiency tangent. This cannot be an MTF drop-off since the frequency is decreasing, and so we attribute the drop-off to the n_n term. Then Eq. (17) applies along with the inner set of scales in Fig. 3, $SNR \cdot \Psi/C_I$ versus n_{xy}. For illumination stronger then 340 photons per mm^2, the curve also falls off from the quantum-efficiency tangent. This cannot result from noise since the illumination is increasing, and so we attribute the drop-off to the MTF factor $F_r(\Psi)$. Then Eq. (18) applies along with the outer set of scales in Fig. 3, Ψ versus $n_{xy}(C_I/SNR)^2$. Low contrast cases tend to fall in the latter category because the photon statistical noise of the excess background light (included in n_{xy}) overpowers the other noise n_n.

To gain an idea of the long-range limit of the useful part of the curves in Fig. 3, consider an underwater vision system intended to resolve 0.7 mr using F = 15 cm (perhaps D = 15 cm, i.e., an f/1 system). Then the resolution cell on the photocathode is .1 mm, or $\Psi = 5$ cycles per mm. If SNR = 1.2, $C_I = .1$, then the alternative variable $SNR \cdot \Psi/C_I = 60$, but this puts us on the part of the curves where this variable does not apply, so for long-range systems the outer set of scales will be used with Ψ and $n_{xy}(C_I/SNR)$.

* - Occasionally manufacturers give irradiance in watts/m^2 from a 2854°K or 2870°K tungsten lamp instead of footcandles. Since these radiate most of their output in the infrared, the number of lumens per watts is much smaller, more like 20 instead of 680. We obtained that number from the definition of lumens/watt = $680[\int H(\lambda)v(\lambda)d\lambda] \div [\int H(\lambda)d\lambda]$, where the second bracket equals σT^4, and H is the source irradiance in watts/m^2, $v(\lambda)$ the eye visibility curve, T the source temperature and σ the Stefan-Boltzmann constant. Having thus obtained the lumens, we then applied the conversion (18) to get the number of photons at $.555\mu$.

The curves in Fig. 3 are labeled with abbreviated names that are explained in the legend. All cathode diameters, D_p, are shown in millimeters by the curves. We have tried to stay with 40 mm cathode tubes in order to make the comparison as uniform as possible and because it is close to the standard 35 mm used in photography. The figure shows that the image intensifier appears to be the most versatile and best image detector, but the problem of choosing a detector for an underwater system is more complicated than this owing to the effects of scattered light as discussed in Lecture 4.1 and 5.4. A particular application may have resolution limited by small angle scatter, or it may have a detector requirement constrained by a technique for removing veiling luminance.

2.3 Photoelectronic Imaging Devices

Imaging devices fall into two broad categories: image intensifiers, which "amplify" dim images into bright ones (light to light), and image detectors, which convert images into electrical signals by means of a raster-scanning electron beam. The latter class includes a wide variety of tubes starting with the old image orthicon, the workhorse vidicon and recent classes of low light level tubes designated by impossible acronyms: SEC, SEBIR, EBIC, EBS, SIT! (The last four are the same basic design with a silicon diode target.)

Image intensifiers are capable of generating a brighter image by re-emitting more photons than absorbed. They contain a front surface photocathode which emits electrons upon absorption of photons. The electrons are accelerated and focused onto a luminescent phosphor surface at the rear of the tube which reproduces the original image. There are no scanning beams in this device, and no storage is available for image integration. The major application of image intensifiers is to build up the signal to the point where it overwhelms all noise sources except the fundamental photon noise. It can then be coupled into light converter tubes such as an image orthicon or a vidicon, overriding all the other noise sources that plague these devices. In effect, the intensifier acts as the preamplifier of a communication receiver, and by making the combination of light amplifiers and converters photon-noise-limited, it approaches the ideal receiver performance except for its quantum efficiency and modulation transfer function being different from unity. To avoid light losses or impractically large optics, the intensifier is usually coupled to the succeeding tubes by optical fibers. The quantum efficiency and signal-to-noise ratio of such a coupled system is generally that of the intensifier since it generates enough output light to overpower the noise in the succeeding detector.

Image detectors employ as many as five basic operations inside a single glass vacuum envelope (see Fig. 4):

1. The image is focused on a photosensitive surface, a photoemitter or a photoconductor, that converts photons to electrons (or holes).

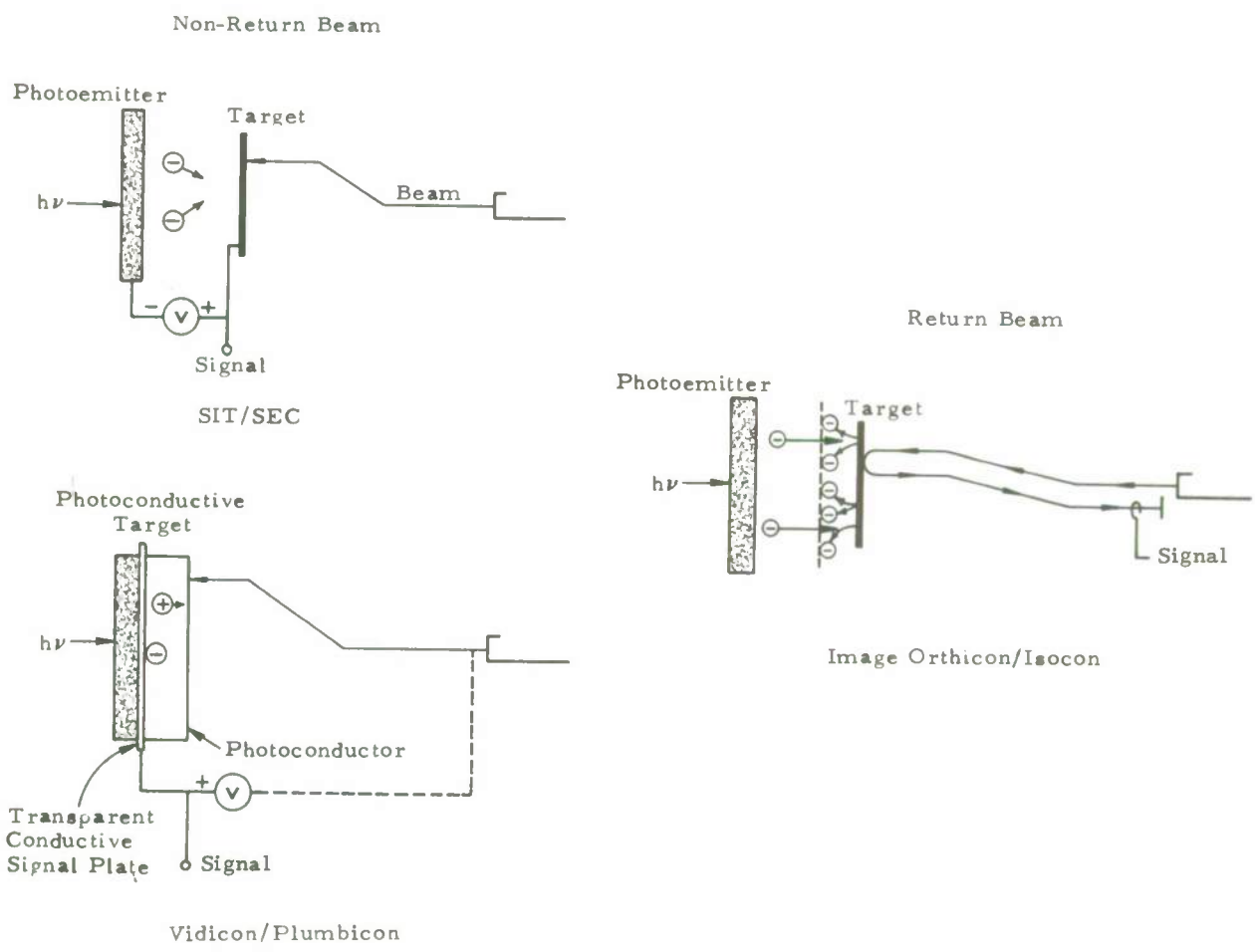


Fig. 4: Basic Modes of Operation of Low Light Level Television Tubes

2. If the photosensitive surface is an emitter, the electrons are accelerated and focused onto a target where secondary emission gain produces a more intense charge image than the one from the photocathode.

3. The target stores and accumulates charges for the full frame period between readout scans.

4. An electron beam executes a raster scan reading the information from the target.

5. Electrons scattered from the target are further multiplied by secondary emission, as in a photomultiplier.

Most image detectors omit one or more of these processes.

The simplest image detectors are the vidicon and its improved descendent the plumbicon. These two tubes skip processes 2 and 5 and combine 1 and 3 into a single element, a photoconductor whose local electrical conductivity is proportional to the light incident on that point. Target storage and photon-to-electron conversion occur in the photoconductive target, the front side of which is coated with a transparent conductor acting as signal electrode and as the plate of a capacitor with variable resistance determined by the incident light. The back of the photoconductor is initially discharged by the beam. When light is incident on the photoconductor the conductivity is increased by the generation of electron-hole pairs with the positive charge being driven to the back of the target and creating a charge distribution which is a replica of the optical image. The vidicon is by far the most common television tube in use but is not sensitive enough for most underwater applications (see Fig.3). The plumbicon is not common but is available commercially from the Philips Company. The vidicon uses a homogeneous photoconductive target, while the plumbicon achieves improved performance with a junction-type photoconductor of PbO (hence the name).

The output signal from a video camera tube usually comes from the electrode that backs the target and discharges it. The exception is the orthicon class, which reads out information from a return electron beam that reflects off the target. From this class we consider the image orthicon and its improved descendent the image isocon. These two tubes are quite complex and employ all five of the processes listed above. The fifth comes about because a slow electron beam reads the target cancelling the positive charges (proportional to light intensity) and the remainder of the beam reflects along a return path where it is picked up by an electron multiplier that provides further gain. The isocon improvement accepts in the final multiplier only electrons that have scattered from the target surface as opposed to the electrically reflected part. This provides greater signal-to-noise ratio and much improved dynamic range and low-level threshold at a price of more critical adjustment.

The SEC (for Secondary-Emission-Conductivity) tube is the workhorse of low-light-level television; however, the similar tubes of the new SIT (RCA name), EBS (Westinghouse), SEBIR or EBIC class show the greatest promise and may be replacing it. The SEC uses a porous insulator target, while the others are very similar but use a silicon diode array. Both types use all the processes except number 5 (which is peculiar to orthicons). Back of the target they resemble vidicons, and this part is often called the "vidicon section". They also retain much of the ruggedness of the vidicon class.

Table I categorizes all these tubes according to their mode of operation. Advantages and disadvantages of these tubes depend obviously on the type of applications--the image orthicon and isocon are rather fragile for underwater applications, and the vidicon not sensitive enough at long ranges. The SIT class of tubes are probably one of the best having high sensitivity and wide dynamic range. Even greater sensitivity is available by coupling to an image intensifier, thereby approaching the photon noise limit. However, the price one pays for this is the decreased resolution that always results from cascading optical stages.

TABLE I: LIGHT CONVERTERS MODE OF OPERATION

	Photoemitters	Photoconductors
Return Beam	(IO) Image Orthicon (II) Image Isocon	
Non-Return Beam	SEC (Secondary Electron Conduction) SEBIR (Silicon-Electron-Bombardment Induced-Response) EBIC (Electron-Bombardment-Induced Conductivity) EBS (Electron-Bombarded-Silicon SIT (Silicon Intensifier Tube)	Vidicon Plumbicon

In certain imaging systems that have been proposed and studied the detector must sense a small target return in strong veiling luminance. Special problems for this case are discussed in the appendix.

2.4 Photographic Films

A photographic film consists of a gelatinous emulsion of photosensitive silver halide grains, which act as point detectors. When the film is immersed in a "developing" solution, the transparent silver halides are reduced to opaque metallic silver. If the silver halide absorbs light above a certain threshold it reduces to silver much faster during development than those grains not sufficiently exposed. Thus by controlling the development time and the critical exposure, the resultant variations of opacity across the film can be translated into an image which is a replica of the photographed object.

A measure of the sensitivity of film is determined by the increase in opacity, or equivalently by the reduction in transparency brought about by the action of light on the photographic grains. The quantity of interest here is the transmission coefficient,

$$T = \text{fraction of light transmitted by } \underline{\text{developed}} \text{ negative} \tag{23}$$

Its transmission varies exponentially with the material thickness. This coupled with dimensional analysis leads to the following form for T,

$$T = \exp(-n_g a_g), \tag{24}$$

where n_g is the average number density of developed grains (number of grains per unit area) and a_g the average grain area. The preceding expression has been proved rigorously by many workers and can be found in several textbooks (for example, O'Neill [1963]). When $n_g a_g$ is small, $T \approx 1 - n_g a_g$, and the second term is simply the fractional film area occupied by developed grains. For larger $n_g a_g$, the exponential form takes overlap into account.

Since both exposure E (light energy) and transmission T extend over several orders of magnitude, it is better to present film data on a log-log scale showing $-\log_{10} T$ versus $\log_{10} E$. This is known as the characteristics curve, the sensitometric curve or the H and D curve named after Hurter and Driffield who introduced it in 1890. The quantity

$$D = \log_{10} T^{-1} \tag{25}$$

is called the density and is proportional to the number of grains developed. A typical characteristic curve is shown in Fig. 5. We have maintained our stand to stay away from photometric quantities (e.g., lumens, candles, etc.) and have marked off the abscissa of Fig. 5 in photons/mm^2, n_{xy}, so as to provide a direct comparison with television camera tube performance. The curve of Fig. 5 features a toe (threshold) followed by a region of constant slope (linear range) and a shoulder (saturation). Some density (opacity) is always produced during development without exposure. This threshold density called gross fog increases with development time. So does the density of exposed grains, the difference being that exposed grains develop faster than the unexposed or fog grains.

Film γ

The slope γ of the transfer characteristic curve, Fig. 5, is usually taken as a measure of image contrast, higher γ yielding higher contrast. We mentioned in Lecture 4.2 that contrast is really not the fundamental quantity in analyzing detector performance because contrast can always be adjusted for eye comfort by some secondary process, the photographic techniques for making a positive print, or in the television case the ordinary controls on the monitor console. The real quantities of interest are SNR and Ψ, since these determine the information content, and no amount of secondary processing can restore lost information.

From any detector the output signal S may be expressed as a multiple R of the input power P, i.e., S = RP, where R is called the responsivity. A certain minimum R is usually needed to maintain a good SNR. Usually there is some fundamental noise N_f associated with the input, photon noise in our case, and some other noise N_o associated with the output. Then the SNR is

$$\text{SNR} = \frac{RP}{RN_f + N_o} \xrightarrow[R \to \infty]{} \frac{P}{N_f} \tag{26}$$

To maintain SNR near its limiting maximum value we need $R > N_o/N_f$, in other words enough output to overpower secondary sources of noise. R usually represents some sort of gain, in television the electron multiplication process, and in photography the area increase of the detection centers after they precipitate into metallic silver under the action of photon absorption and subsequent development. In photography N_o represents the granularity noise and fog in the developed film and in television it is some electronic noise such as Johnson noise in the first amplifier following the camera tube.

In television the output is a current, and S = RP becomes

$$i = RP \tag{27}$$

Here the responsivity is a simple constant, current proportional to illumination, up to some strong illumination,that saturates or even damages the tube. We did not discuss responsivity in the television section because we take for granted considerable electron multiplication gain (large R) except in the vidicon types, or else a coupled image intensifier to provide the gain needed to approach the limit in Eq. (26). However, in photography the relationship is more complex and considerable gain (large γ) is needed to offset granularity noise and fog. The input is exposure E, and the output is density D, so

$$D = RE. \tag{28}$$

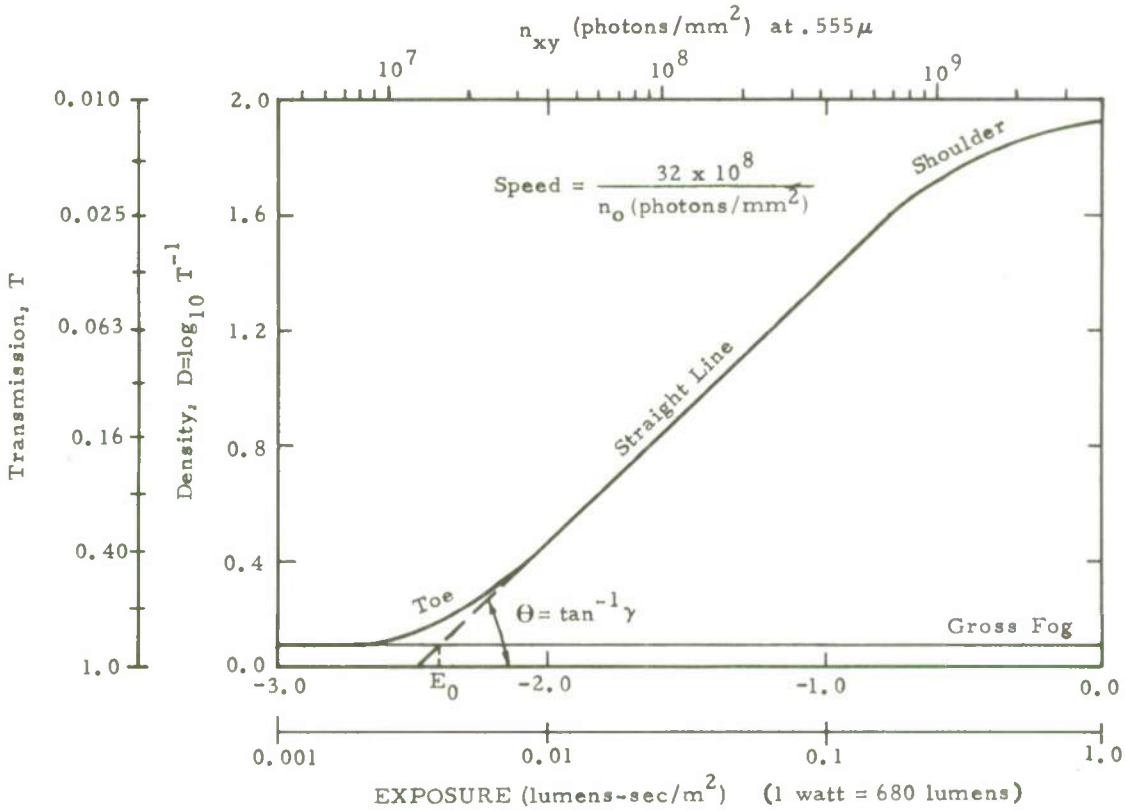


Fig. 5: Typical Film Manufacturer's Characteristic Curve

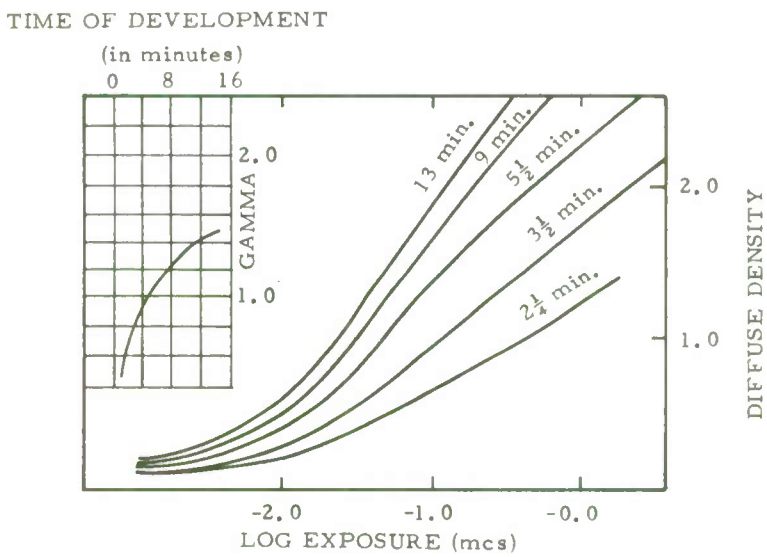


Fig. 6: Effect of Development Time on Characteristic Curve

Over the linear range of Fig. 5

$$D = \gamma \log_{10} E - \log_{10}(0.8\ E_o^{\gamma}) \tag{29}$$

where E_o is the exposure at which the linear portion intersects the 0.1 density fog level. Comparing Eq. (29) to the logarithm of (2.7), i.e., $\log_{10} i = \log_{10} P + \log_{10} R$, leads to the common statement that television has $\gamma = 1$. From (28) and (29) it follows that

$$R = E^{-1}[\gamma \log_{10} E - \log_{10}(0.8 E_o^{\gamma})] \tag{30}$$

The most important feature in Eq.(30) is the exponent γ. Large γ means large R and good SNR [Eq.(26)]. Fig. 6 is a typical manufacturer characteristic curve and shows the effect of development time on γ. Unfortunately the exposure is given in meter-candela-seconds (mcs). The corresponding number of photons/mm^2 can be read from the upper abscissa scale of Fig. 5 or better yet, through the conversion

$$1 \text{ mcs} = 1 \text{ lumen-sec/m}^2 = \frac{1}{680} \text{ joule/m}^2 \simeq 4 \times 10^9 \text{ photons/mm}^2 \text{ at } .555\mu \tag{31}$$

after using the number of photons/joules given by Eq. (19a).

Film Speed, S

The film speed is a measure of the minimum exposure required to produce a developable image. Although it is a quantity that does not enter in the calculation of the product of SNR $\cdot\ \Psi$ discussed in the next section, it is given with all films and provides a useful guide to the selection of the proper film for a given range of exposures. It is defined in terms of the exposure E_o, shown in Fig. 5, the intersection of the extended straight portion of the characteristic curve with the gross fog level.

$$S = .8/E_o \tag{32}$$

with E_o unfortunately expressed again in meter-candela-seconds. In terms of photons/mm^2

$$S = 32 \times 10^8 / n_o$$

For instance if we want to operate at a minimum photon level of $10^8/mm^2$, a film speed S = 32 is needed. This is considered a slow film.

Film Noise

As mentioned in the discussion of film γ most film noise comes from random fluctuations in film density σ_D caused by fluctuations in the number σ_n of developed grains. The latter can be related to film density fluctuations.

From Eqs. (24) and (25)

$$D = .434\ n_g a_g \qquad (\log_{10} e = .434) \tag{33}$$

Let $\bar{n}$ be the average number of developed grains in a resolution cell of area a, and N the total number of of available grains in that cell. The average number of developed grains <u>per unit area</u> is of course

$$n_g = \bar{n}/a \tag{34}$$

The grains in a film are not laid out simply on a sheet. The film has thickness and there is considerable amount of overlap between the projected areas of the grains within the emulsion. It is reasonable to assume that the statistics of overlap do not change with respect to the resolution cell size, so that

$$n_g / N_g = \bar{n}/N \tag{35}$$

N_g being the total number of grains per unit area. Substituting (35) into (33) gives

$$D = .434 \frac{\bar{n}}{N} N_g a_g \tag{36}$$

The relation sought between σ_D and σ_n follows directly from (36)

$$\sigma_D = .434 \frac{\sigma_n}{N} N_g a_g \tag{37}$$

In order to relate σ_n to some measurable film property, assume (Zweig [1961]) that a random sample of the number of grains, m in the resolution cell follows the binomial distribution

$$P(m) = C_N^m \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^m \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^{N-m} \tag{38}$$

The corresponding standard deviation is

$$\sigma_n = \sqrt{N \frac{\bar{n}}{N} (1 - \bar{n}/N)} \tag{39}$$

The fluctuation in density D follows from (39) and (37)

$$\sigma_D = .434\ N_g a_g \sqrt{\frac{\bar{n}}{N^2}(1 - \bar{n}/N)} \tag{40}$$

Availing ourselves of Eqs. (34) and (35) we get after substitution in (40)

$$\sigma_D \sqrt{a} = .434\ a_g \sqrt{n_g(1 - n_g/N_g)} \tag{41}$$

Eq. (41) expresses the important result that σ_D varies inversely with the diameter of the resolution area, and depends on average grain size and number density of developed and total grains. The constancy of the product $\sigma_D\sqrt{a}$ is to be expected, as it is inherent in the binomial assumption of Eq. (38) which implies total lack of correlation in number density fluctuations from point to point on the film. This result has been confirmed experimentally for areas $a >> a_g$. If the film is scanned with a microdensitometer of aperture a^* such that $a_g << a^* < a$, the corresponding density fluctuations, σ^* are higher or vice versa

$$\sigma_D^2 = \frac{\sigma_D^{*2}}{a/a^*} \tag{42}$$

since the fluctuations from one area to another are uncorrelated. From Eqs. (41) or (42) we see that

$$\sigma_D^2\, a = \sigma_D^{*2}\ a^* = \text{constant} \tag{43}$$

The product

$$\mathcal{S} = \sigma_D\sqrt{2a} \tag{43}$$

is called Selwyn's granularity after Selwyn who first pointed out its constancy. Film manufacturers usually do not list $\mathcal{S}$. Instead they give an r.m.s. granularity expressed as $1000\,\sigma_D$ and the diameter d^* of the scanning aperture of area a^*. For instance, a film may be quoted as having an r.m.s. granularity 34 with a scanning aperture diameter of 48 μ. Translated it means $\sigma_D = 34 \times 10^{-3}$, $a^* = (\pi/4)(48\mu)^2$ yielding $\mathcal{S} = 2.05\mu$. Typical Selwyn granularities for Plus-X, Tri-X and Royal-X are as low as .3μ, .8μ and 1.2μ respectively.

2.5 Calculation of Film SNR $\cdot\Psi$ Product

Unlike low light level Television tubes, photographic detectors perform poorly compared to the ideal qunatum detectors because film noise greatly exceeds quantum noise. The SNR $\cdot\Psi$ product can still be accounted for by a film quantum detective efficiency, Q as defined by Eq. (14) repeated below for convenience

$$\text{SNR} \cdot \Psi = \sqrt{Q\, n_{xy}}\ \ C_I \tag{45}$$

However, we must be careful in defining signal-to-noise ratio, SNR. One may argue whether the signal is the change in film transmissivity T, or in film density D. For practical purposes it makes no difference, for if we call

$$\text{SNR} = \Delta D/\sigma_D \tag{46}$$

then

$$|\Delta T|/\sigma_T = |\Delta D|/\sigma_D \tag{47}$$

as long as

$$\Delta T/T << 1 \tag{48}$$

which is always the case when we want to evaluate the ultimate performance of a detector limited by weak illumination. Eq. (47) is easily proven by noting that $|D - \bar{D}| = .434 \ln T/\bar{T} = .434 \ln[1 + (T-\bar{T})/\bar{T}] \simeq .434\,(T-\bar{T})/\bar{T}$ and therefore $\sigma_D = .434\,\sigma_T/\bar{T}$, $|\Delta D| = .434|\Delta T|/\bar{T}$, and Eq. (47) follows.

Returning to (46), note that ΔD is the average density difference between two adjacent resolution areas. It is of course related to the difference in photon number (exposure) between the two areas. Hence σ_D must include the contributions from both resolution areas to the total spatial fluctuation in density, in which case our signal-to-noise ratio must be redefined as

$$\text{SNR} = \frac{\Delta D}{\sqrt{2}\sigma_D} \tag{49}$$

since squares of random fluctuations from resolution cells add. We must now express (49) in terms of the film parameter. The maximum slope of the characteristic curve is γ. Calling the slope at any point on the curve $\gamma(n_{xy}) = \gamma_n$, then

$$\gamma_n = \partial D/\partial \log_{10} n_{xy} \tag{50}$$

and

$$\Delta D = \Delta(\log_{10} n_{xy})\,\partial D/\partial \log_{10} n_{xy}$$
$$= .434\,\gamma_n \Delta n_{xy}/n_{xy} \tag{51}$$

Since the image contrast is

$$C_I = \Delta n_{xy}/n_{xy} \tag{52}$$

Eq. (49) reduces to

$$\mathrm{SNR} = \frac{.434\gamma_n}{\sqrt{2}\,\sigma_D} C_I \tag{53}$$

Recalling that resolution area and spatial bandwidth are related by

$$\sqrt{2a} = \Psi^{-1} \tag{14}$$

we find the final expression for the product

$$\mathrm{SNR} \cdot \Psi = \frac{.434\,\gamma_n}{\sqrt{2}\,\mathcal{G}} C_I \tag{54}$$

We are now in a position to evaluate films according to the criterion of Eq. (54) and compare them with television tube performance. From the characteristic curves provided in film data such as Fig. 6, we can extract $\gamma_n = \gamma(n_{xy})$; and from data sheets we get $\mathcal{G}$. We have carried out the calculations for two films, a low-light level fast recording film Kodak 2485 and a Royal-X 4166. The results are shown in the grand Fig. 3, as dashed lines. There are several sources of inaccuracy and one should exercise caution in passing final judgment on film evaluation. The curves illustrate how to evaluate films using Eq. (54) and manufacturers' data; they are not the final word on these two films. A major source of inaccuracy stems from the fact that H and D curves and granularity are measured by usually exposing the film to tungsten light or other broadlight sources quoted by the manufacturer. Emulsions are generally made to show a balanced color response over a broad spectrum as indicated by the wedge spectrogram of Fig. 7, which is a composite of the film and lamp spectra. The true film spectral response shown by the wavelength sensitivity curve of Fig. 8 is far from flat; most films exhibit a dip in the blue green, a region of particular interest in underwater applications. So, our conversion from exposure to photon number, n_{xy} at .555 μ based on H and D curves exposed to tungsten light is in error, probably by as much as a factor of five. For underwater applications and particularly for long range photography, one should request H and D granularity measurements made in the narrow portion of the optical spectrum where seawater exhibits minimum attenuation.

More accurate film measurements were performed by Clark Jones [1959] who determined the maximum detective quantum efficiency Q for three types of film, Royal-X, Tri-X and Plus-X. As noted from Fig. 8, film spectral sensitivity peaks around .400μ and Q was obtained near this wavelength. As an illustration, we have used these values of Q in Eq. (14) to obtain SNR $\cdot\Psi$ after converting to an equivalent number of photons at .555μ. In spite of the inaccuracy introduced by this conversion, the results indicated by the solid line for these three films are fairly consistent with our calculations from commercial film data.

Both sets of calculations point out distinctly how far removed is the film performance from the ideal quantum counter and how small is the linear range compared to photoelectronic sensors unless the development time is extended at the expense of resolution. Note that in terms of resolution alone, not efficiency, the photographic film is superior to photoelectronic devices. Finally, note how poorly the vidicon compares with both films and low-light-level tubes. It lacks the resolution of the former and the low noise of the latter.

As a final note, it is enlightening to arrive at the concept of Q in terms of basic film parameters by recasting Eq. (54)

$$\mathrm{SNR} \cdot \Psi = \frac{.434\,\gamma_n}{\sqrt{2}\,\mathcal{G}} C_I \tag{54}$$

into the form of Eq. (14)

$$\mathrm{SNR} \cdot \Psi = \sqrt{Q n_{xy}}\; C_I \tag{14}$$

To this effect we use (51)

$$.434\,\gamma_n = n_{xy}\frac{\partial D}{\partial n_{xy}}$$

which together with (36)

$$D \simeq .434\, n_g a_g$$

yields

$$.434\,\gamma_n = .434\, a_g n_{xy}\frac{\partial n_g}{\partial n_{xy}} \tag{55}$$

Substituting (41) into (43) we get

$$\mathcal{G} = .434\, a_g \sqrt{2\, n_g (1 - n_g/N_g)} \tag{56}$$

We finally obtain from the last two equations and (54) and (14)

$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (n_{xy}/n_g)\,\frac{(\partial n_g/\partial n_{xy})^2}{(1 - n_g/N_g)} \tag{57}$$

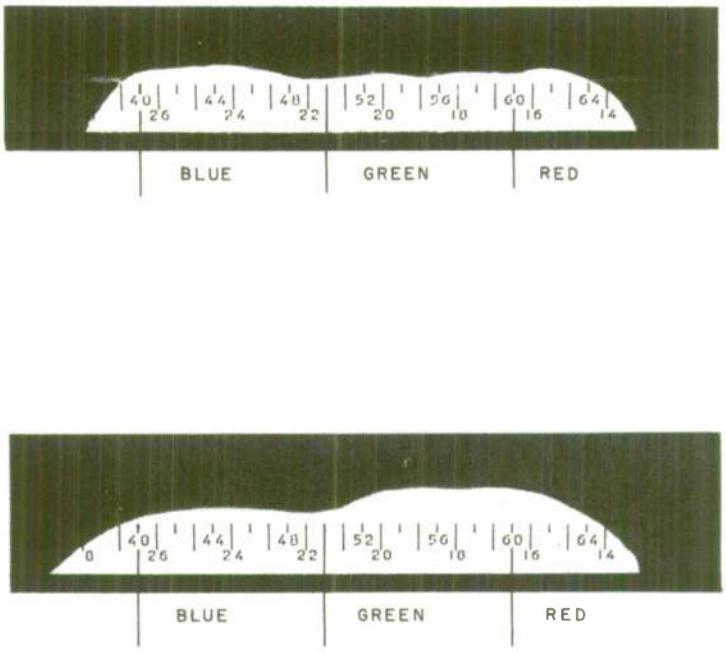


Fig. 7: Wedge Spectrogram

Fig. 8: Film Wavelength Sensitivity

Eq. (57) shows that detective quantum efficiency varies directly with the ratio n_{xy}/n_g, the ratio of incident photons to numbers of grains developed, a measure of the film conversion efficiency from light to image. $\partial n_g/\partial n_{xy}$ is the rate of change of this measure with exposure and n_g/N_g the average fractions of developed grains. Interestingly enough when (57) is recast in the form

$$Q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\lambda[f'(\lambda)]^2}{f(\lambda)[1 - f(\lambda)]} \tag{57a}$$

with $\lambda = n_{xy}/N_g$ the number of photons per grain and $f(\lambda) = n_g/N_g$ the fraction of developed grains, the expression is identical with the one obtained by Zweig [1961] except for the $(1/2)^2$ factor, which results from our definitions of noise from adjacent resolution cells, $\sqrt{2}\sigma_D$ and our spatial bandwidth $1\sqrt{2a}$.

References

R. J. Clark Jones, 1959, "Advances in Electronic Physics", Vol. 11, p. 87, Academic Press, New York.

F. A. Rosell, 1971, "The Limiting Resolution of Low Light-Level-Imaging Sensors in Photoelectronic Devices", Vol. 1, ed. Biberman and Nudelman, Plenum Press, New York, p. 307.

E. L. O'Neill, 1963, "Introduction to Statistical Optics", Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

H. J. Zweig, 1961, "Theoretical Considerations in the Quantum Efficiency of Photographic Detectors", J. Opt. Soc. Am., 51, 3, March, p. 310.

APPENDIX: Television Camera Tubes For Low Contrast

Some of the promising schemes for long-range vision would burden the detector with a considerable background of veiling luminance. In Fig. 9 of Lecture 5.4 (page 12) we even include contrast as low as 2% for one of the curves. There and in other lectures we take into account the photon statistical noise of the background light; the concern here is that there be no additional degradation owing to tube performance in the presence of this unwanted light.

The first concern is saturation. Suppose various parameters, the amount of light, gain, number of intensifier stages if any, etc., are adjusted so that the target return gives a signal well above the threshold for detection. Then the question is, will a background level 50 times stronger than the signal drive the tube into saturation? We have not checked all candidate tubes in detail, but in general the answer is no. Published curves of output current versus faceplate irradiance show two or three orders of magnitude of dynamic range free from saturation, and this is enough if the target return is adjusted to fall in the first order of magnitude. Of course it is possible to drive a tube into saturation with background light, but this is simply bad design when the target return falls too high in the linear dynamic range and the background light then exceeds it.

The next consideration is not so easily dismissed: the constancy of gain over the area of image detection. Suppose the gain is a constant G plus a small part g(x, y) that varies with position (x,y) over the image area. Then suppose the input is a large constant background B plus a small signal s(x,y). The output is then

$$[G + g(x, y)][B + s(x, y)] = GB + Bg(x, y) + Gs(x, y) + gs$$

The term GB is amplified background, a large constant that is filtered out; the gs term is negligible; the Gs(x, y) term is the desired amplified signal; and the Bg(x, y) term is the troublesome one that may mask the signal. The best solution is to find a tube with little fluctuation in gain, i.e., $g(x, y) \to 0$. This probably precludes the SIT class with silicon diode arrays for targets because variations from one diode to the next account for a sizable g(x, y). Other tubes including the SEC with targets of uniform material are probably satisfactory, but one should exercise caution in tube selection. For the ultimate in low contrast, one could devise a system to record the term Bg(x, y) and subtract it out of each image, but the expense and complexity of this is considerable, and B may vary considerably with water conditions.

UNDERWATER LENSES AND OPTICAL PORTS

Lawrence E. Mertens
Manager, Deep Look Program
RCA Service Company, RCA/DL, Patrick AFB, Florida 32925

Summary

Basic theoretical and practical aspects of using lenses and ports in underwater imaging systems are reviewed. Terminology is defined and formulas for estimating field of view, distortion and other aberrations are presented. Several types of optical systems for correcting aberrations are reviewed. The depth of field and relative apperature are compared for several lens port combinations. Applications of short focal length, long focal length, and supplementary lenses are reviewed.

1. Introduction

Light transmission in water is very poor even under the best conditions. Methods of predicting illumination levels and contrast transmission, together with several filtering and supplemental lighting techniques that can be used for improving contrast and color balance, are described in several references. This material is more or less universal in nature and is independent of the viewing method, whether it be direct vision, television, still camera, or motion-picture camera. With these fundamentals established it is appropriate to consider the lens systems that are used to form an image on the recording medium.

Since virtually all in-water cameras are operated within watertight housings, it is necessary to consider the optical properties of the window, or viewing port, in the housing. The water interface at a plane, or flat, port is well known to have a magnifying effect and can also introduce many serious aberrations. Until recently little emphasis has been placed on producing port-and-lens combinations that have been corrected for the significant aberrations. Even at present the vast majority of in-water cameras consist of conventional (in-air) cameras packaged in a watertight housing with a plane-glass port. Photographs acceptable for many purposes can be produced by this simple arrangement as long as a very wide field of view is not required. Improved results can be obtained by designing a special lens to compensate for the aberrations of the port or by using a nonplanar port that minimizes the aberration itself. In the future we can expect to see more lens-and-port combinations that will be specifically designed and optically corrected for in-water use.

Almost every paper on in-water photography emphasizes the need for wide-angle lenses. Wide-field coverage permits the photographer to move closer to the subject and thus shorten the water transmission path. It is obviously preferable to eliminate as much as possible of the image deterioration caused by the water transmission path, rather than attempt to correct for it at the camera. As we have seen, correction techniques are complex, not completely effective, depend critically on water conditions and geometry, and may introduce an additional set of problems.

Despite the strong trend to wide-angle lenses, the in-water photographer may have occasion to use normal, telephoto, and zoom lenses. Some of these applications are discussed. In cases where the viewing range is fixed for some system reason it is found that long-focal-length lenses can provide substantially higher resolution than the short-focal-length lenses normally employed.

2. Plane Optical Ports

The vast majority of camera housings have a simple and reliable plane-parallel window made of glass or optical plastic materials. The transmission of light across the water-glass-air interfaces is governed by the laws of refraction. The angles of incidence and refraction are sketched in Fig. 1 and are simply related by the expression

$$n_w \sin \varphi_w = n_g \sin \varphi_g = n_a \sin \varphi_a \qquad (1a)$$

where n_w, n_g, n_a are the indices of refraction in water, glass, and air, respectively, and φ_w, φ_g, φ_a are the angles of incidence or refraction in water, glass, or air, as defined in Fig. 1a.

If the glass window is sufficiently thin, its optical effect can be neglected. The window can then be represented by a simple plane water-air interface, as shown in Fig. 1b.

If the angle of incidence is small, Eq. (1a) can be simplified by approximating the sine of an angle by the angle (in radians). Thus

$$\varphi_a = 1.33\varphi_w \quad \text{for } \varphi_w \ll 1 \qquad (1b)$$

where n_w and n_a have been assumed to be 1.33 and 1.00, respectively. A plane-paralled port thus will produce a magnifying effect, which is almost never desired. The field of view of the camera will be reduced by approximately 1/1.33 as a result of refraction at the port, as shown in Fig. 1c. This means

that a wide-angle lens will be converted to a normal lens and a normal lens will be converted to a mild telephoto lens by the magnifying characteristics of the port. In-water applications almost always require the widest fields of view, and this reduction can be quite detrimental.

It is instructive to estimate the maximum field of view that is possible in water with a plane port. This can be computed by using Eq. 1a and assuming a camera lens with a full 180° field. The resulting field in water, however, is only about 97°. Although this field is quite wide, it represents the theoretical maximum, and in practice we must settle for much less because of the very great distortion produced at the large angles of incidence.

The magnifying action of a plane port is sometimes referred to as the plane diopter effect. The plane port is also said to increase the effective focal length of the camera lens. This latter statement is not strictly valid even though the resulting field of view is equivalent to that produced by a longer focal length lens. In order to understand this situation it is necessary to define certain optical terms, such as the focal points, principal points, and focal lengths. The first focal point of a lens is the position of an object that will produce an image at infinity. Figure 2 shows that rays diverging from the first focal point will be parallel to the lens axis after emerging from the lens. In an analogous fashion, the second focal point is the image point of an infinitely distant object lying on the lens axis. Thus incident rays that are parallel to the lens axis will pass through the second focal point. Now if the incident and emergent rays are projected until they meet, the points of intersection will be on a plane. The plane of intersection shown in Fig. 2a is called the first principal plane, whereas the corresponding plane in Fig. 2b is called the second principal plane. The entire deviation of light produced by the lens can thus be considered to occur at the corresponding principal plane. The intersections of the principal planes with the lens axis are called the principal points. The first and second focal lengths of the lens can now be defined as the distance between the corresponding focal point and principal point. It can be shown that both the first and second focal lengths of a given lens will be identical as long as the propagating medium has equal indices of refraction on both sides of the lens. All of the above arguments have been somewhat simplified and are strictly valid only for paraxial rays. More generally for off-axis rays we shall encounter curved principal and focal surfaces rather than planes.

Returning now to the plane port, it can be seen that the second focal length of a lens is not changed by the presence of a plane port in front of it. Rays from an infinitely distant object along the lens axis will be incident normal to the port surface. Since there is no bending with normal incidence, the rays will pass through the port undisturbed. An image will be formed at the same point regardless of the presence of the port. Consequently the second focal length of the lens is not changed. The situation, however, is quite different for determining the first focal length and first principal plane. In this case the rays pass through the port at oblique angles and will be significantly bent, or refracted. The first focal point and principal plane will be displaced from the no-port case and result in an increase of the first focal length by a factor of approximately 1.33 (for paraxial rays).*

The image position for an object located somewhere between the first focal point and infinity can be computed from the well-known lens relations

$$X_1 X_2 = f_1 f_2 \tag{2a}$$

or

$$n_2/P_2 - n_1/P_1 = n_2/f_2 \tag{2b}$$

These relations can be derived by using triangles similar to those shown in Fig. 2c. A normal (in-air) lens has a calibrated focusing scale based on an index of refraction $n_1 = n_2 = 1.0$. When this lens is used in water behind a plane port, both n_1 and f_1 are increased by approximately 1.33. Referring to either Eq. (2a) or (2b), it can be seen that the actual in-water object distance should be 1.33 times the focus scale setting.**

In addition to the magnifying effect, the plane port introduces several serious aberrations that degrade the image. Aberrations are classified by optical designers in accordance with the type of degradation they produce. Some of the more common types of aberration are known as spherical aberration, chromatic aberration, distortion, lateral color, coma, astigmatism, and field curvature. A good photographic lens consists of a complex set of optical elements that is carefully designed to minimize or correct these aberrations. However, unless specially designed for in-water use, these lenses will not correct for the aberrations introduced by the port.

Complete analysis of all the aberrations caused by the plane port is quite complex and is beyond the scope of this paper. Several of the aberrations, such as distortion and chromatic aberration, are relatively easy to analyze and are considered in detail in the following paragraphs. This analysis will provide some insight into the optical problems of the plane port and methods of correcting them.

---

*It is quite often stated that a plane port in water increases a lens' focal length by a factor of 1.33. This is not strictly true since the lens-port combination has two different focal lengths: one focal length is increased by a factor of 1.33 times and the second remains unchanged. If the second focal length were actually changed, the camera focusing distance for an infinitely distant object would have to be increased. This is not the case. It is true, however, that the lens-port combination acts like a lens with a 1.33 times greater focal length when we consider the angular relations between the object and image space. These relations are described in greater detail by G. T. McNeil in Optical Fundamentals of Underwater Photography, Photogrammetry, Inc., Rockville, Md. (1968).

**A more complete analysis of a thick port indicates that

Apparent object distance = (actual distance in water)/n_w + (port thickness)/n_g + lens-to-port distance

Normally we desire an image that is geometrically similar to the subject. If the magnification of the port or lens is not the same over the entire field of view, some portions of the subject will appear either disproportionately stretched or shrunken. This type of aberration is called distortion and affects only the shape of the image and not its sharpness. Pincushion, or positive, distortion results when magnification of the outer portions is greater than that of the center portions. Barrel, or negative, distortion, on the other hand, results when magnification of the outer portions is less than that of the center portions. A plane port produces pincushion distortion similar to that illustrated in Fig. 3. In order to analyze the distortion produced by the plane port consider an object at a relatively large distance from the camera, as shown in Fig. 4. The angle φ_w subtended by the object is given by

$$\tan \varphi_w = y_o/d \tag{3}$$

where y_o = object's length (see Fig. 4)
d = distance from object to camera

When viewed through the plane-parallel port, the object will appear to subtend an angle φ_a:

$$\sin \varphi_a = n_w \sin \varphi_w = 1.33 \sin \varphi_w \tag{4}$$

A high-quality lens that is corrected for use in air will produce an image that has a size y_i:

$$y_i = C \tan \varphi_a \tag{5}$$

Combining the above equations, we obtain

$$y_i = 1.33 \frac{C}{d} \frac{\cos \varphi_w}{\cos \varphi_a} y_o \tag{6}$$

After further manipulation, this reduces to

$$y_i \simeq 1.33 (C/d) (1 - 0.78 \tan^2 \varphi_w)^{-1/2} y_o \tag{7}$$

Distortion is often measured as the percent difference between the actual and ideal image sizes:

$$\text{Distortion} = \frac{y_i - y_i'}{y_i'} \times 100 \text{ (percent)} \tag{8}$$

where y_i = the actual image size
y_i' = the ideal image size
$= 1.33 \frac{C}{d} y_o$

Distortion of the plane-parallel port can now be expressed as

$$\text{Distortion} = 100[(1 - 0.78 \tan^2 \varphi_w)^{-1/2} - 1] \text{ (percent)} \tag{9}$$

This equation is plotted as Fig. 4 and shows that the distortion is small for small fields of view. Distortion reaches its maximum value (of infinity) at a 48.5° angle of incidence, which has been previously shown to be the widest (half) angle of view possible with a plane-parallel port in water. Unfortunately wide-angle lenses are desired for most in-water photography, and serious pincushion distortion will result near the edges of uncorrected wide-angle photographs. Distortion will be small near the center of the photographs regardless of the lens' field of view.

Small amounts of distortion may be difficult to detect in marine scenes that do not contain straight lines for comparison. Thus for many applications the simple and inexpensive plane port may prove to be entirely satisfactory. On the other hand, metric applications, such as bottom mapping, require correction of the distortion in order to achieve useful results. Correction is also essential for all applications involving a very wide field of view.

Another major difficulty introduced by the plane port is chromatic aberration, which is the inability to focus light of all wavelengths into a single image point. Chromatic aberration is caused by the dispersive nature of all transparent materials. Dispersion is a measure of the increase of refractive index as wavelength changes from the red to the blue end of the spectrum. It is conventional to describe the dispersive characteristics of an optical material by means of the relative reciprocal dispersion V (which is sometimes referred to as the Abbe constant)

$$V = \frac{n_D - 1}{n_F - n_c} \tag{10}$$

where the subscripts indicate the wavelengths at which the indices of refraction are measured:

F designates 486.1 nm (blue),
D designates 589.3 nm (yellow),
C designates 656.3 nm (red).

These wavelengths may appear to be rather unusual choices, but in fact they are quite convenient since they correspond to some of the prominent lines in the solar spectrum. The values of V for optical glasses

range from a low of 20 to a high of about 80. Such optical plastics as may be used for ports are characterized by V values from about 30 to 60.

The variation of the refraction index for pure water is plotted as a function of wavelength in Fig. 5a. The corresponding V value for pure water is 55.7. Figure 6 shows schematically how light of different colors will be refracted or bent by varying amounts at the water-air interface. The variation of the angle of refraction with wavelength can be computed by differentiating φ_a with respect to wavelength as follows:

$$\frac{d\varphi_a}{d\lambda} = \frac{d\varphi_a}{dn_w}\frac{dn_w}{d\lambda} = \frac{d}{dn_w}\left[\sin^{-1}(n_w \sin\varphi_w)\right]\frac{dn_w}{d\lambda} \tag{11}$$

$$= \frac{\sin\varphi_w}{\sqrt{1 - n_w^2 \sin^2\varphi_w}}\frac{dn_w}{d\lambda} \simeq -1.5 \times 10^{-3} \tan\varphi_a$$

(degrees per nanometer) (12)

Color dispersion is quite small for near-normal incidence at the port, but it will produce very significant chromatic aberration as the angle of incidence increases, as shown in Fig. 7. Consequently wide-angle lenses, which are required for most in-water photography, will be seriously affected by chromatic aberration unless special steps are taken for correction. In color photography this aberration will appear as undesirable color fringes or smudges surrounding the image. Black-and-white photographs will have blurred images as a result of the chromatic aberration even though the color of the fringes is not reproduced. Blurring effects will be minimized when the incident light has a narrow spectral range. Such conditions will occur after light has traveled over long paths in water. This is one of the few occasions on which the water path actually helps image resolution.

Chromatic abberation can easily be observed by a skin diver with a conventional face mask. All that is required is to view obliquely a dark object (such as a swim fin) through the edge of the face plate. One edge of the object will show red, orange, and yellow fringes, and the other will show blue and violet fringes. These fringes are not normally observed since the diver usually looks through the center of the mask, and the angles of incidence of light are nearly normal. Objects to the side are usually observed by turning the head rather than looking through the edge areas of the mask.

Plane ports introduce a number of other aberrations that reduce the sharpness of the image. This degradation occurs because not all the rays that enter the port and lens from a single point on the object will come to the same focus point in the image. All normal photographic lenses are carefully designed to correct these aberrations when used in air. However, aberrations of the plane port will not be corrected by conventional lenses, and the image will appear as shown in Fig. 8. As in the preceding cases, these aberrations will be most serious for light rays that have large angles of incidence at the port. Thus cameras with wide angles of view or large apertures will be affected most seriously by these aberrations. Consider the spherical aberration of rays from a point on the optical axis, as shown in Fig. 8. The virtual image produced by the port will not be a point, and consequently the conventional lens system will produce a blurred image at the film plane. Light rays passing near the rim or edge of the optical system will suffer the maximum blurring effect. When the lens is used with a small aperture (i.e., large f-number) only the rays near the axis of the lens will be admitted, and the aberration or blurring will be very small. However, this aberration will increase when either the lens aperture is increased or the object gets closer to the port.

Several additional aberrations will affect the images of object points located off the optical axis. Coma and astigmatism, for example, produce asymmetrical blurring of images. These aberrations are more difficult to visualize than the previous types but are basically results of the fact that rays from an off-axis point do not converge to a single image point. Lateral chromatic aberration represents a change in the magnification of the lens, and hence image size, with color. The image will have color fringes, which are very objectionable in color photography. Even black-and-white images will appear blurred unless color filters are used to limit the spectral width. The lateral chromatic aberrations for several different lenses and a plane port are shown in Fig. 9 as a function of the angle of incidence in water. As before, image degradation increases toward the edge of the field of view.

Lateral color aberration is seen to limit the field of view in water to about $\pm 15^\circ$ for a lens of 25-mm focal length if we wish to achieve a resolving power of 20 lines per millimeter or better.

3. Corrected Optical Systems

3.1 Introduction

Several undesirable effects are introduced by the use of a simple flat window or port in a watertight housing. The plane port not only reduces the camera's field of view but produces distortion and blurring of the image, as shown in the preceding section. Many photographers just accept this image degradation as part of the overall problem of working in the rather difficult water environment. Despite these difficulties many very satisfactory pictures have been taken with conventional lenses and flat optical ports. However, improved optical systems were desperately needed for critical applications in which sharp, undistorted images and wide fields of view were essential. A number of optical systems have recently been designed to correct, partially or fully, for the magnification of the port as well as the distortion and other aberrations.

There are several basic approaches to the implementation of a corrected in-water optical system. For example, a correcting port can be used in conjunction with a conventional in-air camera lens or, on the other hand, a plane port can be used with a specially corrected lens. An auxiliary cor-

recting lens placed between a plane port and a conventional in-air lens is another possible configuration.

A novel system that completely eliminates the troublesome port and immerses all the camera components in water might even be envisioned. Lenses can of course be made to function while immersed in water, as long as the index of refraction of the glass is different from that of the water. The major difficulty of this novel approach is the potential corrosive effect of salt water on the camera parts and the film. Fortunately photographic film is not necessarily destroyed by immersion in salt water. Some specialized applications of the fully immersed system may conceivably be found, even though no system of this type is being manufactured at the present time.

The design of corrected in-water optical systems follows the same basic techniques that are used for conventional lens design. The water-air interface, however, must be included as one of the basic elements. The designer then has under his control the curvature of lens surfaces, index of refraction and dispersion of the optical glasses, as well as the thickness, spacing, and diameter of the various components. With present manufacturing techniques the designer is restricted almost exclusively to spherical lens surfaces. Aspherical surfaces are difficult to manufacture and therefore very costly.

Design of a well-corrected lens with a large relative aperture is a complex and lengthy task. Many rays must be traced through each of the refractive surfaces of the lens system. The optical designer then adjusts the various parameters in order to produce a sharp and distortion-free image. Other considerations, such as the number of lenses and the cost, must be taken into account in choosing the final design. The increasing use of high-speed electronic computers will make special optimized designs more readily available.

3.2 Spherical Ports

The use of a spherical surface to form the window is one relatively simple method of avoiding many of the aberrations of the plane port. A hemispherical port with concentric inner and outer surfaces is usually employed. Ports for fish-eye lenses and the port for the Ocean Eye camera are typical examples. The principal point of the camera lens should be located near the center of curvature of this spherical dome. Incident rays will pass through the dome at near-vertical incidence, and little refraction or image deterioration will result. The field of view of the camera lens will not be affected by the spherical port.

Only those rays incident at the center of the camera lens will pass through the dome at exact normal incidence. Rays entering near the rim or edge of the lens will undergo a small amount of bending at the dome and will thus introduce some image aberration unless somehow corrected. A small lens aperture relative to the dome radius is desirable to reduce these aberrations.

Notice that the curved surface of the spherical port with different indices of refraction on each side will act as a lens. The first and second focal lengths of the port in water are

$$f_1 = \frac{n_w}{1 - n_w} R \simeq -4R$$

$$f_2 = \frac{1}{1 - n_w} R \simeq -3R$$

where R is the radius of the spherical port and the negative sign indicates a diverging-lens effect.

Camera-lens design should compensate for this lens action of the spherical port. The smaller the port radius, the greater the degree of correction required. A converging lens (of about 1/(4R) diopter*) can be added to the camera lens for correction purposes.

The most serious aberration resulting from the spherical dome is known as curvature of the field and is a curvature of the image plane. It is desirable to minimize curvature of the image plane so that a sharp image can be produced over the entire flat surface of the film. Small-radius domes result in the strongest field curvatures and should be avoided where possible. A correcting lens can be placed between the dome and the camera lens in order to balance the field curvature.

Detailed studies of the aberrations of the dome-lens combination show that high image quality can only be obtained for small apertures and narrow field angles. When high image quality is necessary for large apertures and wide angle coverage, the lens-dome system should be designed as an integral unit. Several high quality in-water lenses based on concentric spherical domes are now commercially available and are listed in Table 1.

A hemispherical port is virtually the only method of obtaining extreme-wide-angle pictures in water. The 180° field, or fish-eye, lens is generally used in a dome 4 to 6 in. in diameter. For shallow-water applications thin plastic domes obtained from small marine compasses will be found very

*The dome radius R must be expressed in meters. The focal length of the combined dome and compensation lens is

$$Rf_L/[Rn_w + (1 - n_w)f_L]$$

where f_L is the focal length of the compensation lens: it is assumed that this lens is placed at the center of curvature of the dome.

Table 1: ELCAN Water Contact Lenses*

Format Size	Focal Length	Aperture Range	Field of View in Water
$2\frac{1}{4}'' \times 2\frac{1}{4}''$	30 mm	f/4 to f/22	90°
$2\frac{1}{4}'' \times 2\frac{1}{4}''$	43.7 mm	f/2.8 to f/16	67°
16 mm motion picture or TV	6.64 mm	f/2.4 to f/16	76°
16 mm motion picture or TV	13.25 mm	f/2.4 to f/16	38°
16 mm motion picture or TV	28.64 mm	f/2.4 to f/16	19°

*Manufactured by Ernst Leitz Canada Limited.

satisfactory. The spherical shape is excellent for resisting hydrostatic pressure since the material is maintained in nearly uniform compression. This feature is also very advantageous for thick glass domes at greater depths, since glass is quite strong in compression but not in tension.

3.3 Color-Corrected Plane Port

Chromatic aberrations associated with the plane port can be largely corrected by making the port from two optical glasses with the same indices of refraction (at some specific wavelength) but different color dispersions (see Fig. 11). The dispersions and curvature of the spherical surface separating the two glasses are chosen so as to minimize the chromatic aberration. In general it is possible to achieve a perfect match at only two colors of the spectrum. The very small residual aberration for other colors is referred to as the secondary spectrum.

Since the indices of refraction of the two glasses are nominally equal, the port will behave in essentially the same manner as a normal plane port with respect to all noncolor-dependent distortions and aberrations. Achromatization of the port will produce a sharper image because color aberrations are eliminated, but all other problems of the plane port will remain.

3.4 Correction of Distortion with a Concave Lens

The plane-parallel port has been shown to produce a positive, or pincushion, type of distortion. A concave lens will produce negative distortion, which can be used to balance the distortion resulting from the plane port (Fig. 12). By choosing appropriate refractive index and curvature of the lens surfaces the distortion shown in Eqs. 6 and 7 can be greatly reduced. For practical convenience the lens itself can be used to form the port. Alternatively the lens can be used in combination with the color-corrected port. By correcting both distortion and color aberrations of the port a relatively-wide-angle camera lens of conventional design can be employed with good results. However, the single correcting lens does not have sufficient degrees of freedom to correct fully all the important aberrations.

3.5 Ivanoff-Rebikoff Correcting Lens

One of the most serious problems introduced by the plane port is its magnification factor of 1.33, which reduces the field of the camera lens. A reversed "telescope" system with magnification of 1/1.33 would eliminate this problem. In addition, it is desirable to correct the positive distortion and color aberrations of the port. A lens system that can accomplish all these corrections has been developed by A. Ivanoff and D. Rebikoff. Basically the system comprises a reversed Galilean telescope in which the front concave lens is used for the watertight window. The basic elements of the Ivanoff-Rebikoff correction lens are shown in Fig. 13. The lens system will be afocal if

$$f_p = f_n + d \tag{13}$$

where
f_p = focal length of the positive lens
f_n = focal length of the negative lens
d = separation between the lenses.

The magnification of the lens system is equal to the ratio of the focal lengths of the front and rear components and is chosen to be $1/n_w$:

$$m = \frac{f_n}{f_p} = \frac{1}{n_w} = 0.75 \tag{14}$$

For a thin lens the focal length is given in terms of the curvature of its front and rear surfaces:

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{R_2}\right) \tag{15}$$

where R_1 and R_2 are the radii of curvature of the lens surfaces and n is the refractive index of the lens. Eqs. 13, 14 and 15 can be used to estimate the focal lengths and lens radii for the Ivanoff-Rebikoff corrector.

By appropriately selecting the color dispersions of each lens in addition to the various lens curvatures and spacing, a number of aberrations can be corrected. The reverse Galilean telescope has an inherent negative distortion that can be used to balance the positive distortion of the plane port. It is possible to improve the correction further by replacing each of the lenses by a cemented pair of elements with suitable curvature and dispersive powers.

The Ivanoff-Rebikoff correction lens has several very useful properties, which can be summarized as follows:

1. It is afocal and can be used in conjunction with a conventional camera lens of any focal length as long as it does not vignette the corners.

2. The focal length and field of view of the camera lens are the same in water as in air.

3. Pincushion distortion, chromatic aberration, and other aberrations of the plane port are corrected.

4. The depth of field is increased by about a factor of 2 over a plane port with the same camera lens and aperture.

Alignment of the optical axes of the camera lens and correcting lens is quite critical. Consequently it is recommended that all the lenses and critical optical elements be mounted as one rigid mechanical unit. With this arrangement any flexure of the housing resulting from hydrostatic pressure will not affect the quality of the photographic image.

When a correction lens is used, the camera should be focused for the true (not apparent) distance to the subject. The depth of field will be quite large when wide-angle lenses are used in conjunction with the correction lens. In practice one or possibly two focus positions will suffice for most subject conditions. The only exception will occur when very large lens apertures (small f-numbers) are needed because of low light levels. Large depth of field offers a very important practical advantage since the photographer will not be required to focus the camera continually to adjust for fast-moving subject matter.

3.6 Fully Corrected Optical Systems

Conventional (in-air) camera lenses of excellent quality are readily available in many focal lengths and at very reasonable prices. Afocal correcting systems, such as the Ivanoff-Rebikoff lens, permit the use of a wide variety of these relatively inexpensive in-air lenses for in-water photography. Distortion and other aberrations can be corrected sufficiently for many critical applications, such as photogrammetry, to become practical.

However, when size and performance are the dominant considerations, it is advantageous to consider a lens-port optical system that is specifically designed for use in water. The designer has more control of the aberrations if all the lens elements and the port can be simultaneously optimized. In the past there have been very few optical systems specifically designed for in-water use. Growing commercial and scientific interest in this field as well as the increasing availability of high-speed computers will make optimized in-water designs more readily available in the future. Experience has indicated that an optimized in-water lens can be as fully corrected for aberrations as the highest quality in-air lenses. At present only one lens specifically optimized for in-water photography is in large quantity production (28mm f/3.5 UW-Nikor).

In designing a corrected optical system it must be remembered that the refractive index of water is not constant and varies slightly with temperature, salinity, and pressure, as shown in Fig. 5. The appropriate index for the conditions under which the lens will be used should be selected. Lenses for deep-sea photography will require different optical design than those used near the surface because of the stronger and thicker port requirements and differences in the index of refraction. Physical distortion of the port at great depths might also be taken into account in refined designs.

High-resolution airborne reconnaissance systems have encountered degradation resulting from a turbulent boundary layer at optical windows. In-water systems may also encounter similar degradations as the vehicle speed capability is increased. Techniques for maintaining laminar water flow across the window will be helpful in reducing the degradation resulting from turbulence.

4.0 Selection of Lenses

Choosing a lens for a specific purpose will depend on many interrelated economic and performance factors. Some of the most important lens characteristics that should be specified include the focal length, focusing range, maximum and minimum aperture, and the image sharpness, or resolution. In addition mechanical features—such as size, mounting arrangements, and controls for focus and aperture—must be considered.

Most in-water photography is done at relatively short subject distances in order to minimize the image degradation resulting from the water path. A wide-angle lens with the capability of focusing down to a range of a few feet is desirable for a majority of applications. Fig. 16 can be used to find the lens focal length that is required to produce the desired field of view in water for the specified film size. Curves are shown for both corrected and plane-parallel ports. Distortion and other aberrations introduced by the plane port increase rapidly with the field of view. Consequently plane ports should be avoided when fields of view greater than 20 or 30° are required.

As a general rule illumination levels encountered in water are relatively low because of the attenuation of sunlight by the water and the practical difficulties in providing adequate artificial illumination. Lenses with large apertures are desirable in order to produce adequate exposure of the film at low illumination levels. Unfortunately lens cost and the difficulty of correcting aberrations increase significantly for large relative apertures. Lenses with maximum apertures corresponding to f-numbers from about f/2.0 to f/4.0 represent a reasonable cost-performance compromise for normal applications. When adequate exposure cannot be obtained with such lenses, it is generally preferable to modify the lighting system or use more sensitive films, rather than to design a "faster" lens.

The depth of field of the lens is quite important to the in-water photographer. In many applications both the subject and photographer have continuous relative motion and there is little time for critical focusing of the camera. Furthermore distance is difficult to measure or estimate in water, which often leads to substantial focusing errors.

The depth of field represents the range of subject distances over which the image is in acceptable focus at the film plane. If an image resolution of 30 lines per millimeter is desired, an image blurring or circle of confusion of as much as 0.033mm can be tolerated. The depth of field corresponding to a specified circle of confusion can be computed from the relation

$$d_{min} = \frac{d}{1 + (fa/F^2)(d - F)} \tag{16}$$

$$d_{max} = \frac{d}{1 - (fa/F^2)(d - F)} \tag{17}$$

where d_{min} = near limit of the field
d_{max} = far limit of the field
a = diameter of the maximum allowable circle of confusion
F = focal length of the lens
d = distance for which the camera is focused
f = f-number at which the lens is set

Eq. 16 and 17 can be used for the case of a lens behind a plane port by considering the virtual image produced by the port. The quantities d, d_{max}, and d_{min} will then correspond to the apparent distances.

All quantities involving distance in these equations must be expressed in the same units. For a given lens the depth of field will increase for larger f-numbers and longer distances from the subject. Unfortunately short subject distances are preferred in water, and the depth of field can become critical. Consequently it is essential to operate at as high an f-number as possible. This can be accomplished by using a high-speed film or artificial illumination where necessary. The short subject distances will assist materially in obtaining adequate illumination from relatively low-wattage lamps.

A knowledge of the depth of field relations is important in critical applications. Manufacturers often place on their lenses scales that indicate the d_{min} and d_{max} values. Watertight housings should be constructed so as to permit adequate visibility of the depth of field scales. In the design of most conventional lenses there is no consideration of the diver's problems, and scales are usually quite small and difficult to read at a distance or at low illumination. Even some of the well-known underwater lenses have scales whose lettering is very small and difficult to read. It is to be hoped that, in future models, the manufacturers will thoroughly consider human factors as well as optical performance in their designs. Large controls that can be manipulated with a gloved hand and large lettering are indispensible for diver-operated equipment.

If a lens is either specifically designed for use in water or is used in conjunction with a correcting port, its depth of field scale or Eqs. 16 and 17 can be used provided the true distance to the subject is also used. However, when the housing has a plane port, the lens scale or equations can be used provided the apparent* distance is used.

Comparison of the depths of field for different lens and port combinations can be quite misleading. Fig. 17 attempts to clarify this problem by providing several methods of comparison. Curve A shows the depth of field as a function of the lens f-number for a 35mm focal length lens used with a fully corrected port. This curve was computed for the lens focused at 4-ft. true distance and will be used as the standard for comparing the other configurations. Curve B assumes that the same lens is now used with a plane (uncorrected) port. The lens must be focused at 3 ft. in order to produce a sharp image of a subject at a 4-ft. true distance in water. Notice that the corrected port allows a much greater depth of field than the plane port when used with the same lens at the same subject distance. The field of view for these two cases will be quite different, so that this may not appear to be a fair comparison. If the plane port is moved to about 5.6 ft. from the subject, the resulting photograph will cover the same area in the subject plane as the reference system. The depth of field for this case is shown in Curve D and is somewhat greater than that for Curve A. The resulting photograph, however, may not be as satisfactory as the reference system since it will have considerable degradation as a result of the plane port and the 40% longer water path. Another approach might be to use a wider angle lens with the plane port at the original 4-ft. distance. A 23.5mm focal length lens is required to match the field of view of the corrected 35mm lens. Curve C shows the depth of field for this case, which is again greater than that for the reference case. Although the water path is not increased, the photograph will be quite poor because of the very great distortion for the wide angle short focal length lens.

The comparisons above have not been completely fair to the corrected port. In the next section it is shown that the effective f-number for a plane port is slightly larger than that for a corrected port. Thus in order to produce the same film exposure the lens used with a plane port must be operated at a lower f-number, all other conditions being equal. This reduction is about one-half to one f-stop and will in turn reduce the depth of field. In summary, the corrected port achieves a good depth of field without sacrificing image quality and should be employed whenever relatively wide fields of view are required.

*This assumes that the diver is using a face mask with a plane port and his apparent distance is $1/n_w$ times the true distance.

The depth of field will always be greater beyond the distance for which the lens is focused rather than in front of it. For Curve A of Fig. 17 the depth of field extends about 1.7 ft. in front and 10 ft. beyond the critical focus range of 4 ft. when the lens is used at an aperture of f/22. Frequently the far limit of the depth of field is not as significant or important as the near limit since the long water path alone will introduce very significant degradation. Images at the long ranges may not be sharp regardless of the focus adjustment. Furthermore, when artificial illumination is used, backscatter of light from particles near the lens produces bright out-of-focus images. By focusing at a point somewhat closer than the actual subject distance, the near depth of field limit can be brought closer to the lens. More of the backscattering particles will then produce sharper and often less troublesome images. A recommended focusing adjustment for a typical situation with flashbulbs is shown in Fig. 18.

Applications may arise that require photographs of relatively small objects. If the subject distances are small and the water is clear, image degradation due to absorption and scattering of the water path is not a major problem. A practical question then arises concerning whether a short-focal-length lens and a short subject distance are preferable to a longer-focal-length lens and proportionally longer distances. For a reasonable range of focal lengths it turns out that depth of field is approximately constant. In the general case basic limits are set by either (a) high image distortion when the focal length is too small, (b) lens cost and other difficulties when the focal length is too long, (c) large water-path absorption and scattering when the distance is large, and (d) difficulty in approaching certain live or dangerous subjects. These limits are sketched in Fig. 19; a reasonable or acceptable operating zone is shown in the center. In general lenses of short focal length should be used for all large objects and lenses of longer focal length should be reserved for certain small subjects. Notice that the acceptable operating region can be appreciably extended by the use of correcting ports or by operation under conditions of high water clarity. Specific numerical values for the curve will depend on the expected water clarity, film size, and certain factors concerning the subject and application. For example, certain fish may be very difficult to approach, whereas sessile animals and inanimate objects present little problem in this respect. In addition to these considerations it should be recalled that the apparent perspective of the photograph will be influenced by the choice of lens focal length. Either very long or very short focal lengths will produce an unnatural perspective effect.

Complete correction for all lens aberration is impossible and thus every lens represents some type of cost-performance compromise. Generally speaking a lens configuration with many elements offers the designer many degrees of freedom for reducing the various aberrations. In practice, however, a lens with a large number of elements may not live up to its theoretical capability because of problems of accurate manufacture and assembly. In addition each air-glass interface in the lens will reflect a small quantity of light, which can be predicted by Fresnel's equations. Without special techniques to reduce the reflection, about 4% of the light will be reflected at each lens surface. A lens with six elements might reflect close to one-half of the incident light, which is equivalent to a one-stop exposure loss.

Almost all modern lenses have a thin antireflection coating that reduces the reflection to about 1% at each surface. The coating reduces reflections by creating a destructive interference pattern for the reflected wave. A coating that is 1/4 wavelength thick at the desired wavelength will produce such a pattern . For most optical glasses best cancellation occurs for coating materials with indices of refraction in the range of 1.24 to 1.30. Although cancellation is not perfect for all wavelengths and angles of incidence, coated lenses (particularly those with multiple layers) are considerably superior to noncoated types. Lens flare resulting from multiple reflections is normally much more serious than the light loss. Bright light sources in the field of view can cause serious flare, which reduces image contrast. Coated lenses thus produce more brilliant images and are much less subject to flare problems.

Flare can be introduced by light reflections from many other parts of the camera than just the lens surfaces. Lens barrel, shutter and diaphragm blades, and even dirt on the lens can contribute to the flare. Lens hoods or lens shades are advisable even with coated optics whenever photographing highly reflecting subjects or against a light. Lens shades are often built as a permanent part of the in-water housing. They produce no harmful effects unless a portion of the field of view is cut off by the shade.

Lenses are commonly rated in terms of their resolving power, which is given in terms of the maximum number of lines per millimeter than can be resolved. The resolving power of a lens cannot be made arbitrarily large even if all the aberrations were corrected. Diffraction of light passing through the camera aperture provides a basic resolution limitation, which is approximately as follows:

resolving power

$$= 10^6/[\lambda(\text{f-number})]$$

$$= 1800/[\text{f-number}] \quad (\text{cycles/mm}) \tag{18}$$

Notice that the largest apertures (i. e., small f-numbers) have the maximum potential resolving power. Resolving power of all real lenses will be less than the limit shown in Eq. 18 because of various aberrations that will tend to further blur the image.

Resolving power can be a very misleading term. Optical systems with the highest resolving power do not always produce the most satisfactory photographs. Two different types of point-spread function are illustrated in Fig. 21. Spread function (a) has a very sharp central peak but has a broad blur area surrounding it, perhaps because of flare or aberrations. Spread function (b), on the other hand, has a much broader central peak but no surrounding halo. Maximum resolving power will be achieved by (a), but (b) will produce a high-contrast image that will be more satisfying than that of (a).

A more effective method of describing lens performance uses the modulation transfer function (MTF). A diffraction limited lens has an MTF that is given by

$$T(k) = \frac{2}{\pi}\left[\cos^{-1}\left(\frac{k}{k_L}\right) - \frac{k}{k_L}\left(1 - \frac{k^2}{k_L^2}\right)^{1/2}\right] \tag{19}$$

where k = spatial frequency (cycles/meter)
k_L = $1/f\lambda$ = limiting spatial frequency
λ = wavelength of the light (meters)
f = f-number of the lens

The MTF is the Fourier transform of the point-spread-function. The MTF for the diffraction-limited lens is thus the transform of the lens diffraction pattern, which is a bright central disk surrounded by a series of rings of diminishing intensity.

Real lenses will have aberrations that enlarge the point-spread-function. Furthermore aberrations increase as the distance off-axis increases and are often skewed, or nonsymmetrical. Thus we see that a single MTF is not adequate to describe lens performance completely.

5.0 Relative Aperture

Exposure of a photographic film is determined from the irradiance or illuminance of the image in the camera's focal plane. The image illuminance can be computed by considering a subject with a small area A_s and luminance B in air or in a nonattenuating medium. The amount of light from the subject that is collected by the camera lens is

$$BA_s\frac{\pi D^2}{4R^2}$$

where D = diameter of lens aperture
R = distance from subject to camera

When the subject distance is large, the image will be located at the focal plane and will have an area

$$A_i = m^2 A_s = \left(\frac{F}{R}\right)^2 A_s$$

where F = focal length of lens
m = magnification of lens

Now if all of the light collected by the lens is imaged in the area A_i, the image illuminance will be

$$E_i = BA_s\left(\frac{\pi D^2}{4R^2}\right)\frac{1}{A_i} = \frac{\pi B}{4}\left(\frac{D}{F}\right)^2 = \frac{\pi B}{4f^2} \tag{20}$$

The ratio F/D is called the f-number of the lens and is very useful for exposure computations. Most camera lenses have adjustable aperture stops that are used to control the light reaching the image. The adjustable aperture is normally calibrated in terms of its f-number. A standard series of f-numbers—namely, 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22, 32—have been adopted by most manufacturers. Each successive number in the series represents a decrease in image illuminance by a factor of 0.5.

Exposure computations for subjects in air are relatively simple since the image illuminance is essentially independent of subject distance. Exposure computations for subjects in water must include the water attenuation and the effect of the port or window in the camera housing. Reduction of the effective f-number by the port is of principal concern in this section since water attenuation has been already covered. Corrected ports will have negligible effect on the camera f-number provided they do not produce any vignetting. Plane ports, however, increase the effective f-number of the camera lens and thus require some compensating increase in exposure. For a subject in water and a plane port the image illuminance is

$$E_i = \frac{\pi B}{4}\left(\frac{D}{F}\right)^2\frac{T}{n_w^2} \tag{21}$$

where T = attenuation due to water path
n_w = 1.33 = refractive index of water

This is the same image illuminance that would be produced by a lens with a 33% longer focal length (which is of course the effective focal length of the plane port and camera lens combination). The effective f-number of a lens used with a plane port is thus 1.33 times larger than the f-number indicated on the lens scale. This corresponds to a reduction in image illuminance by a factor of about 0.56.

In underwater photography it is common practice to use the f-numbers on the lens scale rather than the effective values. Reduction of the image illuminance is usually taken into account by modifying the water attenuation values.

Since a plane port will affect both exposure meter and camera in essentially the same manner, meter readings can be used directly with the calibrated lens f-number scale with no corrections.

Eq. 20 is strictly valid only for distant subjects located near the optical axis of the lens. This is a consequence of changes in lens magnification and other geometrical factors. Lens magnification can be shown to change with the subject distance. For subject distances of the same order as the focal length this magnification change becomes appreciable:

$$m = \frac{F}{R - F}$$

The effective f-number then becomes

$$f_{eff} = \frac{R}{R - F} f \qquad (22)$$

Most cameras cannot be focused for subject distances that are small enough to modify the lens f-number appreciably. However, in extreme-close-up photography with extension tubes and bellows for focusing the change in f-number can be very significant.

Off-axis points in the subject plane will also have an effective f-number that differs somewhat from that for axial points. Some of the contributing factors are the following:

1. Lens distortion produces a variation in magnification that depends on the off-axis distance. Pincushion distortion encountered with plane ports produces greater magnification off axis; hence the effective f-number increases for off-axis points.

2. The subject distance increases and both the effective source area and collecting area of the lens decrease as the off-axis angle increases. The net effect of these geometrical factors is a further increase in the effective f-number for off-axis subjects given by

$$f_{eff} = f/\cos^2 \theta \qquad (23)$$

where θ is the angle measured from the lens axis.

Reduction of image illuminance due to the distortion of the port and the geometrical factors becomes appreciable for the extreme-wide-angle lenses that are frequently used for in-water photography.

6.0 Zoom Lenses

The zoom lens is a variable-focal-length lens that does not require refocusing for each of its focal-length settings. One or more movable lens elements are employed to produce the zoom action. The basic lens for in-water photography has of course a short focal length and a wide field of view. Nevertheless a ready choice of focal lengths can be advantageous in certain situations, as shown in the preceding section. The subject area that is imaged on the film can be varied more or less as desired without changing the camera position. In cinematography zoom action gives the impression that the camera is moving either toward or away from the subject. The zoom effect can be very effective and dramatic when properly employed, but unfortunately it is often considerably overworked. The diver can often produce a similar effect by simply swimming toward the subject. The closeness of approach to the subject is limited by depth-of-field considerations since the lens cannot normally be refocused while the diver is filming. Furthermore it is somewhat more difficult to produce a smoothly increasing distance effect by swimming.

Until recently zoom lenses had rather limited focal ratios and relative apertures, could not produce truly wide fields of view, and had somewhat greater aberrations than conventional lenses. The popularity of zoom lenses for motion pictures and television has stimulated the development of improved lenses with continuously variable focal ratios greater than 10:1 and fields up to 60°. Many recent designs compare favorably with normal fixed objectives with respect to image sharpness throughout their range of aperture and focal length.

It still remains difficult to correct the zoom lens fully for large film formats. Consequently the zoom lens has had rather limited use for large-format still cameras.

Zoom lenses are somewhat larger and more expensive than the fixed-focal-length objective. For many in-water applications it is doubtful whether zoom lenses have sufficient advantages to outweigh their cost and other problems. At present they are quite popular and relatively inexpensive for Super-8 motion-picture cameras. Increasing application can be anticipated for in-water 16mm motion-picture cameras. Unmanned, remote-control television cameras can also take advantage of the flexibility of the zoon lens.

For in-water cinematography electric, rather than manual, drive is desirable for the zoom mechanism. Smooth zoom transitions can be produced by the electric drive without undue diver effort.

Certain of the correction techniques for in-water port distortion, such as the Ivanoff-Rebikoff lens, are afocal and thus compatible with the use of zoom lenses. The inability of most conventional zoom lenses to focus at the short distances encountered in many in-water applications is an important problem. Supplementary close-up lenses should be considered if a zoom with suitable close focusing

capability cannot be obtained.

7.0 Supplementary Lenses

Supplementary lenses may be used in conjunction with the regular camera lens in order to achieve certain special objectives such as modifying the camera's focal length, or allowing the near focusing limit to be brought closer to the camera. The in-water photographer will find supplementary lenses particularly useful for the photography of small objects.

Both positive (converging) and negative (diverging) supplementary lenses are available. They are rated conventionally in terms of their power in diopters, which is the reciprocal of the focal length expressed in meters. Thus

$$D_s = 1/F_s \tag{24}$$

where D_s = power of supplementary lens in diopters
F_s = focal length of supplementary lens in meters

Lens power is frequently written as 3+, with the numeral representing the power in diopters and the sign indicating a positive or negative lens. When two or more lenses are used together, their combined power is approximately the sum of the individual powers:

$$D = D_1 + D_2 \quad \text{(diopters)} \tag{25}$$

or in terms of focal lengths:

$$1/F = 1/F_1 + 1/F_2 \tag{26}$$

Thus the combination of a 1+ lens and a 3+ lens is equivalent to a 4+ lens. Eq. 26 can also be used to compute the combined focal length of the supplementary and camera lens (provided the lens separation is small compared with either focal length). Addition of a positive supplementary lens will yield a combined focal length that is always less than that of the camera lens by itself. Conversely addition of negative supplementary lens will produce a longer combined focal length.

Many of the important properties of the supplementary lenses can be estimated by means of the simple thin-lens formulas. The relation between object distance and image distance is given by

$$1/F = 1/U + 1/V \tag{27}$$

where F = focal length
U = object distance
V = image distance

All distances must be expressed in the same units, and the object and image distances are measured from the principal points of the lens. Reasonable accuracy can be achieved for thin lenses by measuring from the center of the lens. Eq. 27 shows that the image will be at the focal point (i. e., at a distance F from the lens) when the object is a large distance away.

When a supplementary lens is added, the above relation may be written for the combination as follows:

$$1/F_{comb} = 1/F_{cam} + 1/F_{supp} = 1/U + 1/V \tag{28}$$

Now if the object is placed at the focal point of the supplementary lens (i. e., $U = F_{supp}$), the image distance is given by

$$1/F_{cam} + 1/F_{supp} = 1/F_{supp} + 1/V \tag{29}$$

or

$$V = F_{cam}$$

In other words, a subject located at the focal point of the supplementary lens will be imaged by the camera lens just as though the subject were located at infinity. Supplementary lenses will thus allow the camera lens to be used at distances much closer than normally possible. The depth of field of the combination can be computed by using Eqs. 16 and 17, and is normally quite small. This means that the subject distance must be carefully estimated, and the smallest practical lens apertures should be used. Small ranges of the subject distance can be accommodated by changing the focus setting of the camera lens.

By manipulating Eqs. 28 and 29 the appropriate subject distance can be obtained as a function of the focus setting S of the camera lens:

$$U = 1/[(1/F_{supp}) + (1/S)] \tag{30}$$

where U = subject distance that will be in focus
F_{supp} = focal length of supplementary lens
S = focusing scale setting of camera lens

All distances are measured in the same units.

The width of the field in the subject plane is also of prime importance when supplementary lenses are used; it can be estimated from the equation

$$W = w\frac{U}{V} \simeq w\frac{U}{F_{cam}} \tag{31}$$

where W = width of field (linear distance)
w = usable width of film
F_{cam} = focal length of camera lens

The preceding equations apply to normal (in-air) use of supplementary lenses but are also applicable for in-water photography when a corrected port is used. When a plane port is used, both the subject distance that is sharply imaged and the field of view will be modified due to refraction at the air-water interface. Appropriate values can be computed for the plane-port case either by employing effective focal length of lenses and port or by considering the virtual image produced by the port. Figs. 22 and 23 can be used to determine the focus settings and field width for several frequently encountered cases with either a plane or a corrected port.

Parallax and very shallow depths of field make it extremely difficult for a diver to perform simultaneously both focusing and framing at close distances. A very simple wire-frame device, such as that shown in Fig. 24, can be of great assistance in close-up photography. Many frame designs are possible, but a frame covering only half the field of view is usually adequate. Eliminating half the frame has several practical advantages. Shadows from the frame are less likely to be cast on the subject, and a smaller frame is less likely to disturb or frighten such subjects as fish. Frame dimensions can be computed from the above equations or by reference to Figs. 22 and 23. Normally it is preferable to make the frame only long enough to reach the near limit of the expected depth of field. The shorter length will be more convenient when working in close quarters, such as crevices in the reef. The diver will not find it difficult to estimate the center and far edge of the depth of field.

Some camera housings are equipped with mechanisms for inserting or changing supplementary lenses and thus provide the diving photographer with wide flexibility. The same flexibility can be provided in a simpler fashion by using a supplementary lens that is external to the waterproof housing. The lens can either be used directly immersed in the water or it can be placed in a separate watertight cylinder with glass windows at both ends. Operation of the close-up lens in its own watertight housing will be nearly the same as if the lens were inside the camera housing. The two additional window surfaces will introduce some aberrations as well as a small light loss from reflection. Mechanical limitations with this arrangement will prevent the supplementary lens from being placed very close to the camera lens. The preceding equations are less accurate for large lens separations and more exact relations must be used if high accuracy is required.

If the close-up lens is used without any housing, its power and focal length will be modified because of the higher refractive index of water compared with that of air. The effective focal length of a lens immersed in water is given by

$$\frac{1}{F_w} = \left(\frac{3}{4}n_g - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{32}$$

or

$$\frac{F_w}{F_a} = \frac{n_g - 1}{0.75\,n_g - 1} \tag{33}$$

where F_w = focal length of the lens when used in water
F_a = focal length of the lens when used in air
n_g = refractive index of the lens material

For typical optical glasses with indices of refraction ranging from 1.5 to 1.9 the focal length of a lens will be increased by a factor ranging from 4 to 2.1, respectively. Use of glass with a high index of refraction is thus desirable to prevent a large reduction in the lens power when it is immersed in water. Even using glass of high refractive index the diopter power of a lens will be cut approximately in half when it is immersed in water.

In addition to being used in close-up photography, positive diopter lenses can also be employed to shorten the effective focal length of the camera lens. The combined focal length is given by Eq. 26. Unfortunately the combined lens cannot be focused for image distances that are much greater

than the focal length of the supplementary lens. This limitation is illustrated in Eq. 30. In order to produce sharp images at longer subject distances the lens-to-film distance must be made shorter than normal. This may be difficult, or even impossible, for many types of camera.

When supplementary lenses with a negative diopter are used, the focal length of the camera is increased. Extension tubes or bellows are required to increase the lens-to-film distance and produce a sharp image. However, when the lens-to-film distance is increased, the effective aperture will be decreased. Conversely, of course, the effective aperture will be increased when positive supplementary lenses are used for wide-angle effects at very short lens-to-film distances. The effective f-number can be expressed as

$$f_{eff} = \frac{V}{F_{cam}} f \quad \frac{F_{comb}}{F_{cam}} f \tag{34}$$

where f_{eff} = effective f-number of the combination of supplementary and camera lens
f = f-number of camera lens
F = focal length of camera lens or combined lens, as designated by the subscripts

8.0 Long Focal Length Lenses

Long focal length lenses are rarely used by underwater photographers mainly due to the desirability of covering a large subject field with the shortest possible waterpaths. Some applications, however, require large camera-to-target distances and it is of great importance to choose a lens which maximizes image resolution. Figs. 25 and 26 indicate that maximum achievable resolution is very strongly affected by the focal length of the lens. In the cases shown the lens focal length is even more important than the type of film employed. Naturally the longer focal length lenses will require either larger film formats, multiple frames, or panoramic scanning in order to cover the same angular field as the shorter focal length lenses.

The advantage of the longer focal length lenses can be easily visualized by considering the resolution degradation in two parts, namely:

1. Contrast loss affecting all spatial frequencies approximately equal and due to scattering of ambient or source light in the water path.

2. Contrast or modulation losses which increase with spatial frequency and are caused by narrow angle scattering of the image light (due in turn to thermal and salinity inhomogenities in the water, suspended particles, as well as lens, port, and film MTF's.

The non-spatial frequency dependent contrast loss is quite large for long water paths and most common illumination conditions. The additional water path loss which vary with spatial frequency are not usually dominant except at very high spatial frequencies. For most systems the cutoff frequencies of the lens or film is significantly less than that of the water path. Under these conditions the resolution will be greatly effected by the focal length of the lens (i. e., the image size relative to the films resolution cell size).

Long focal length lenses are also useful for long range imagery with an illumination source near the camera. By using a narrow beam source of illumination on a correspondingly narrow field of view receiver the "common volume" backscatter can be minimized. (In other words, the camera does not look through a wide beam of illuminated sea water.) An extreme example of this approach is the volume scanning or synchronous scanning system.

References

Ivanoff, A., and P. Cherney, "Correcting Lenses for Underwater Use," Journal of the Society of Motion Picture and Television Engineers, 69 (April 1960).

Kingslake, R., Applied Optics and Optical Engineering, Vols. I and III, Academic Press, New York, 1965.

McNeil, G. T., Optical Fundamentals of Underwater Photography, Photogrammetry, Inc., Rockville, Md. (1968)

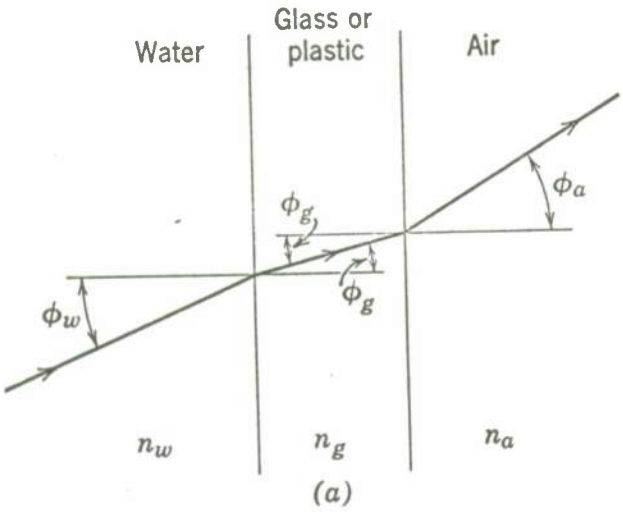
Mertens, L. E., In-Water Photography, John Wiley & Sons, New York, 1970.

Rosen, J. S., Journal of the Optical Society of America, 37 (1947).

Thorndike, E. M., "A Wide-Angle Underwater Camera Lens," Journal of the Optical Society of America, 40, No. 12 (1950).

Tilton, L. W., and S. K. Taylor, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 20 (1938).

Wakimoto, Z., "On Designing Underwater Camera Lenses," Photogrammetric Engineering, 925-936 (1967).



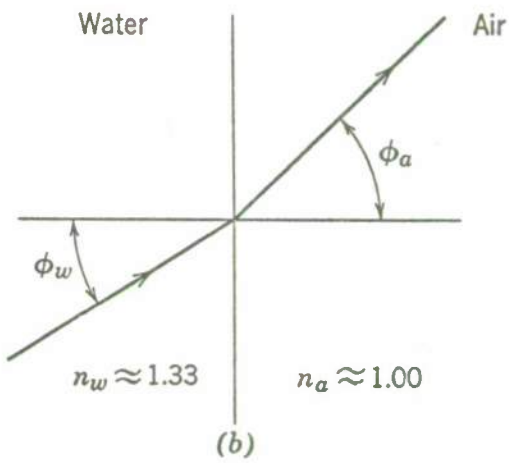
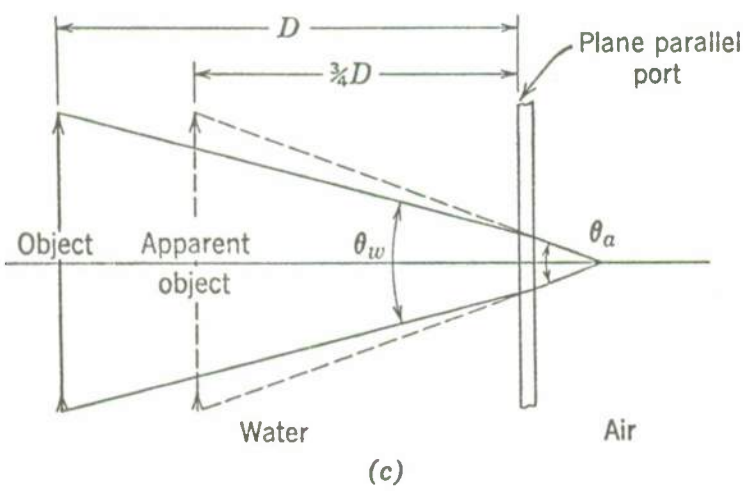


Fig. 1: Refraction of light passing from water through a plane glass or plastic port into a watertight housing (a). A simplification is shown in (b) for cases in which the port is relatively thin. Refraction of light passing through the plane window of a watertight housing makes objects look closer than they are (c).



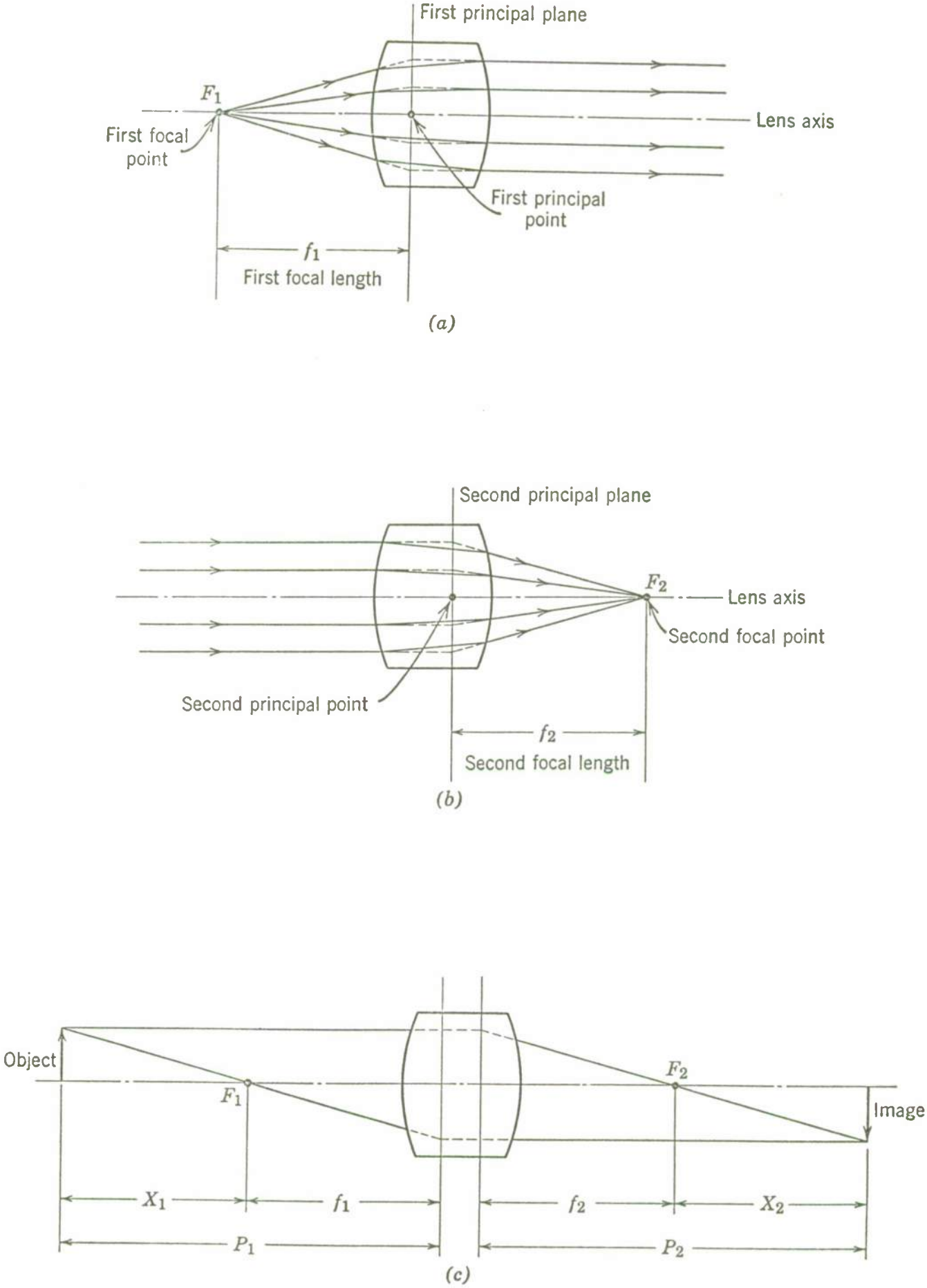


Fig. 2: Definition of focal points, principal points, and focal lengths of a lens. Focal length is the distance between the corresponding focal point and principal point.

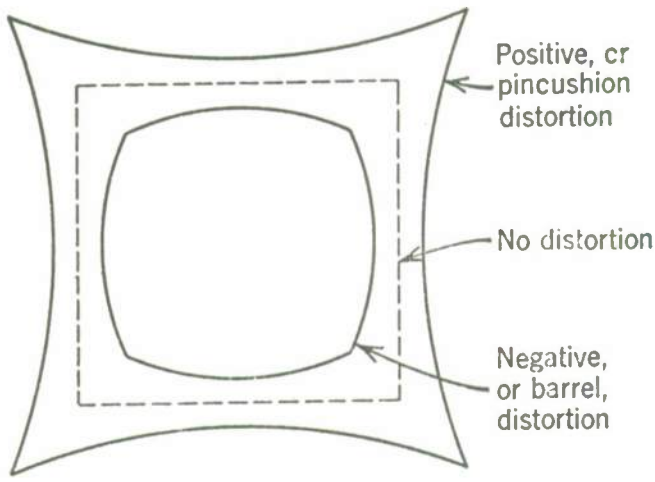


Fig. 3: Pincushion and barrel distortions.

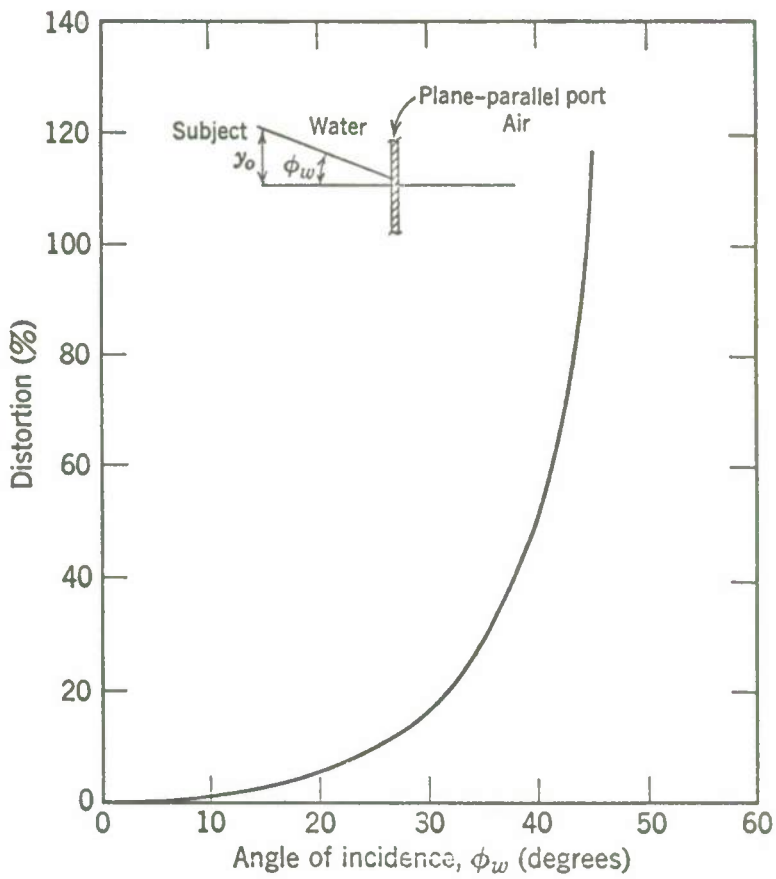
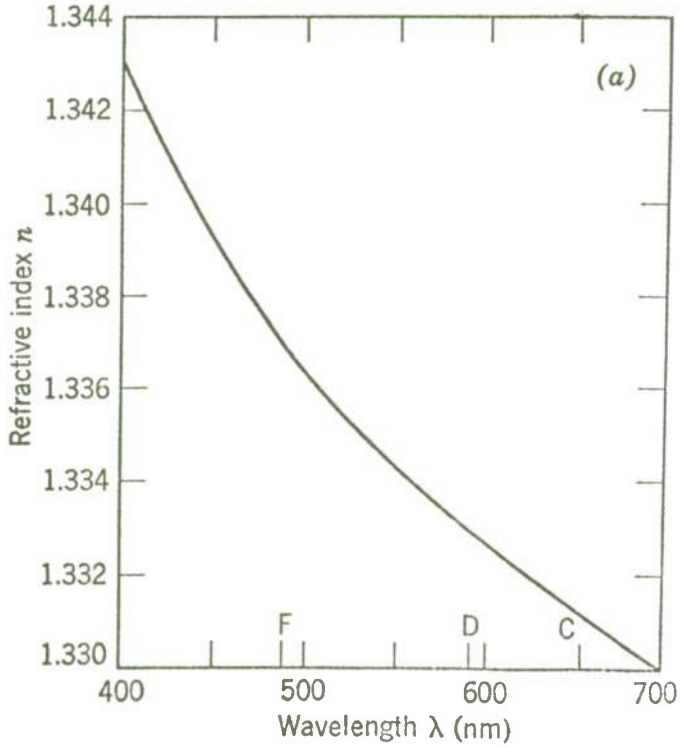
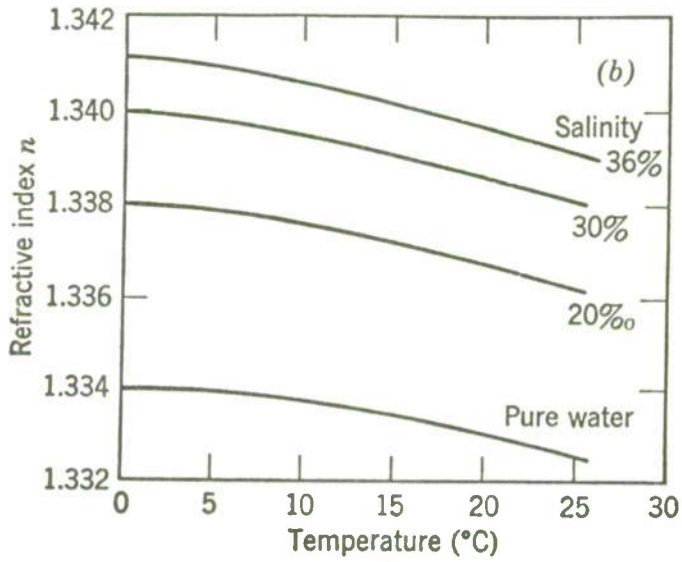


Fig. 4: Distortion of a plane-parallel port in water as a function of the maximum angle of incidence.

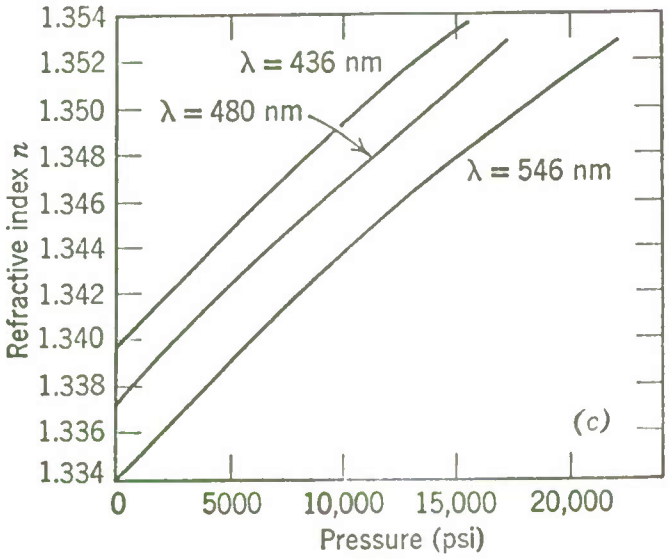


(a)



(b)

Fig. 5: Variations in the refractive index of water as a function of wavelengths (a); temperature and salinity (b); and pressure (c). The curves are based on data by J. S. Rosen, Journal of the Optical Society of America, 37, 1947, and L. W. Tilton and S. K. Taylor, Journal of Research of the National Bureau of Standards, 20, (1938).



(c)

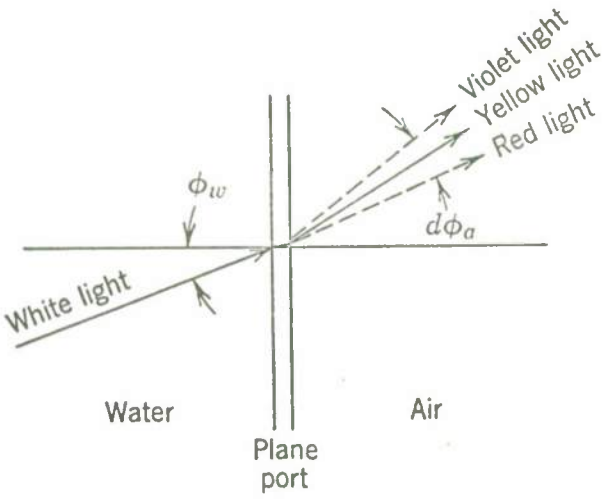


Fig. 6: Color dispersion produced when light passes through a plane-parallel port in water.

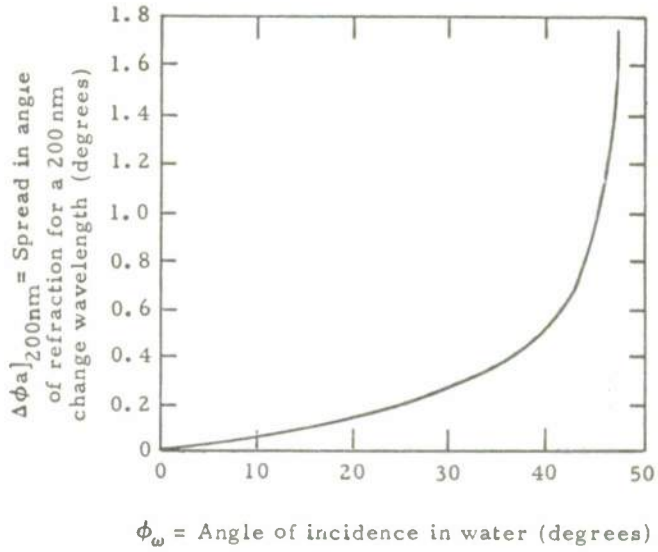


Fig. 7: Dispersion in the angle of refraction for a wavelength difference of 200 nm and a plane-parallel port in water.

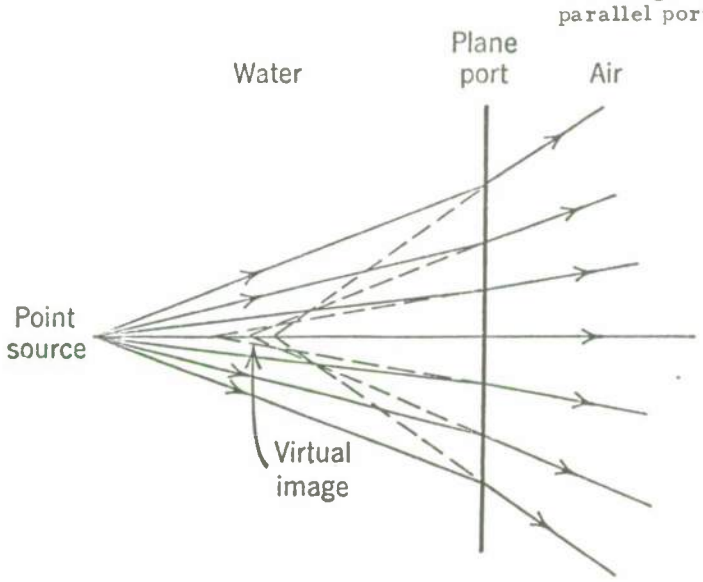
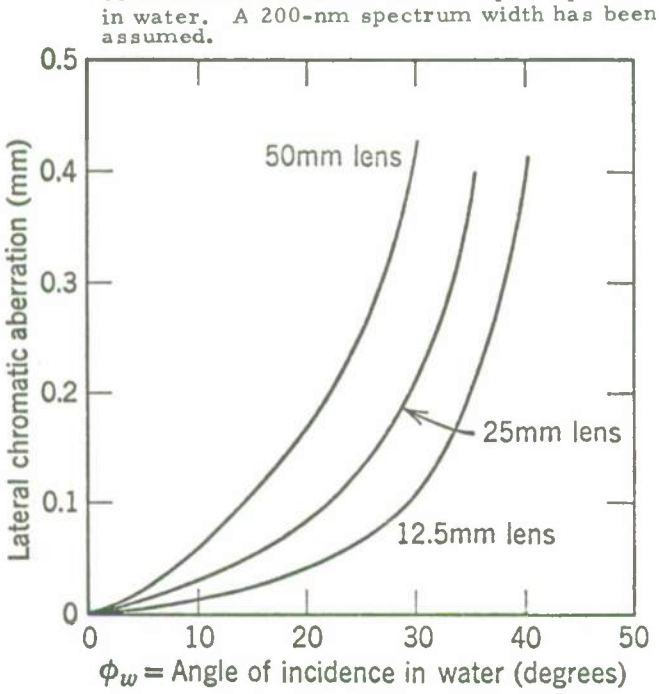


Fig. 8: Axial aberration due to a plane port. Light from a point source will not appear as a point image when viewed through a plane port in water.

Fig. 9 (below): Lateral chromatic aberration for several camera lenses behind a plane port in water. A 200-nm spectrum width has been assumed.



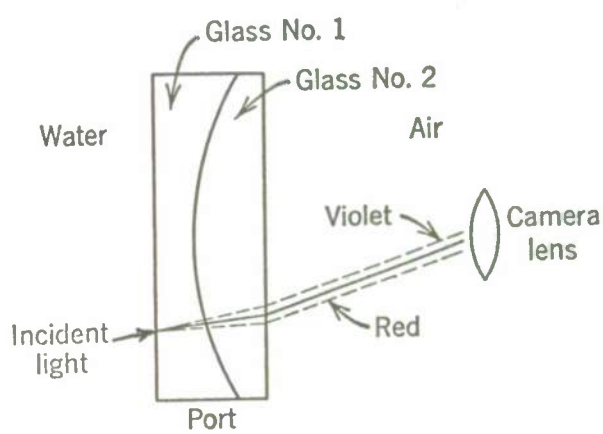


Fig. 11 (above): Color-correction port constructed of two glasses with different color dispersion but the same nominal index of refraction.

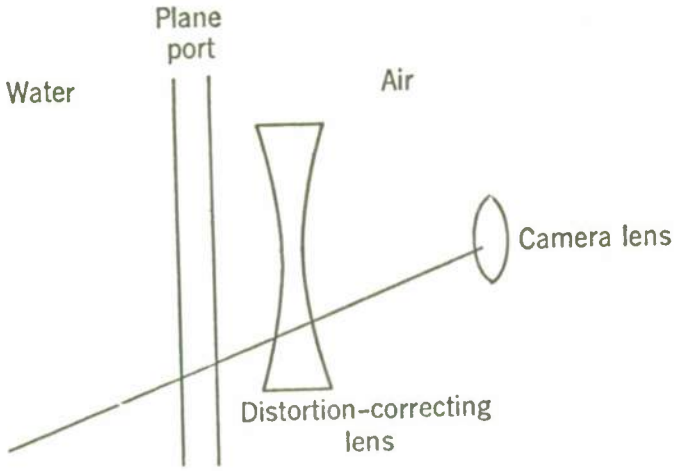


Fig. 12: Concave lens used to correct distortion of the plane port.

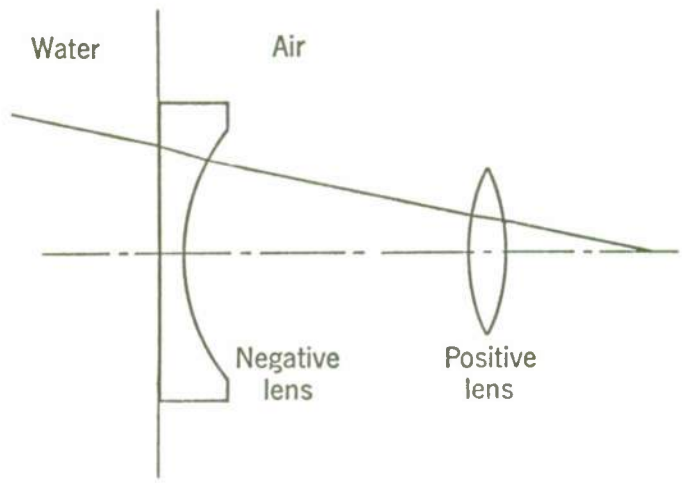


Fig. 13: The Ivanoff-Rebikoff correction lens is basically similar to the reversed Gallilean telescope.

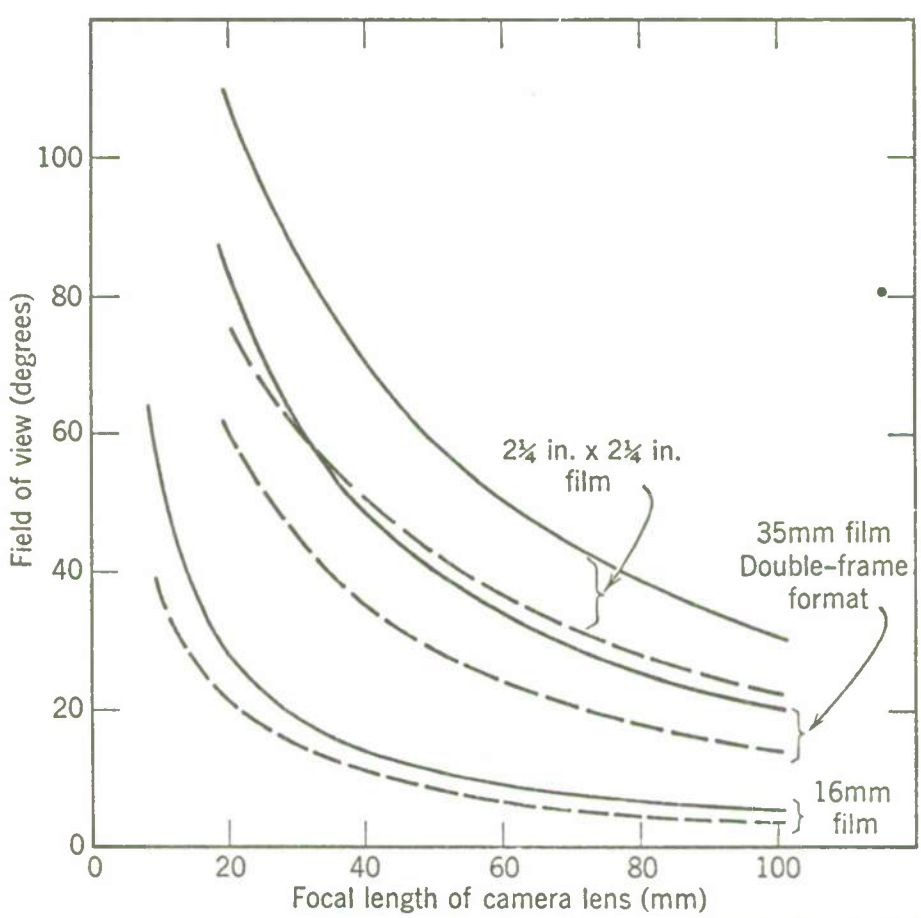


Fig. 16: Field of view in water as a function of lens focal length for corrected and plane ports. Field angle corresponds to maximum usable rectangular dimension of the specified film. Solid curves: in air or in water, with a corrected port; broken curves: in water, with a plane port.

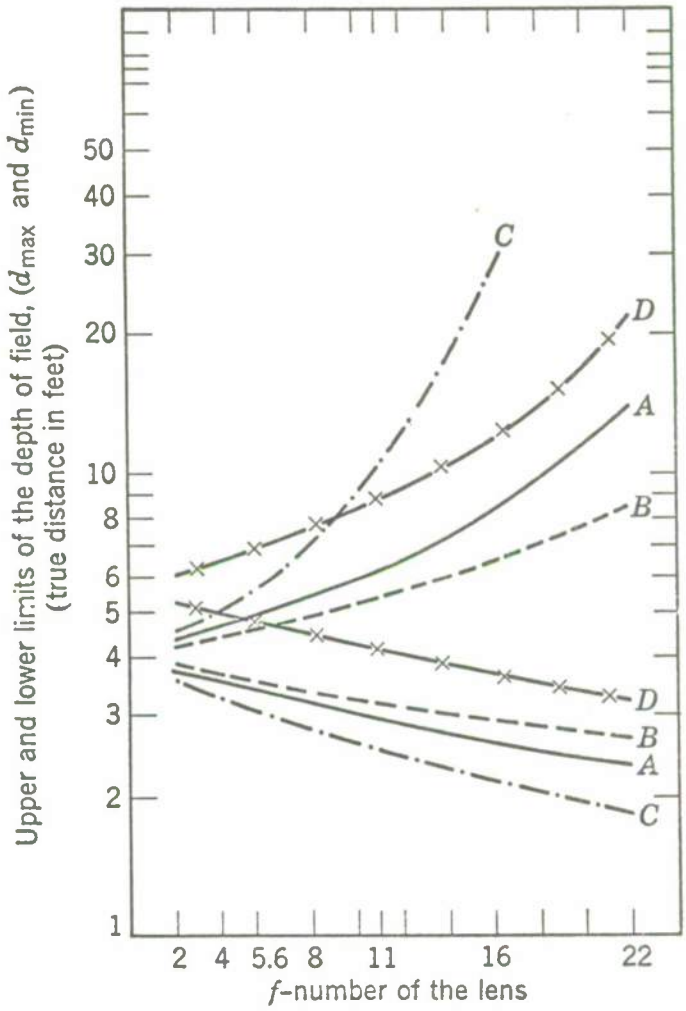


Fig. 17: Depth of field for several lens-port combinations for a 35mm camera focused for an object at a true distance of 4 ft. (curves A, B, C) and 5.6 ft. (curve D). A circle of confusion of 0.033mm in diameter was assumed allowable. Curve A: 35mm lens, corrected port; curve B: 35mm lens, plane port; curve C: 23.5mm lens, plane port; curve D: 35mm lens, plane port.

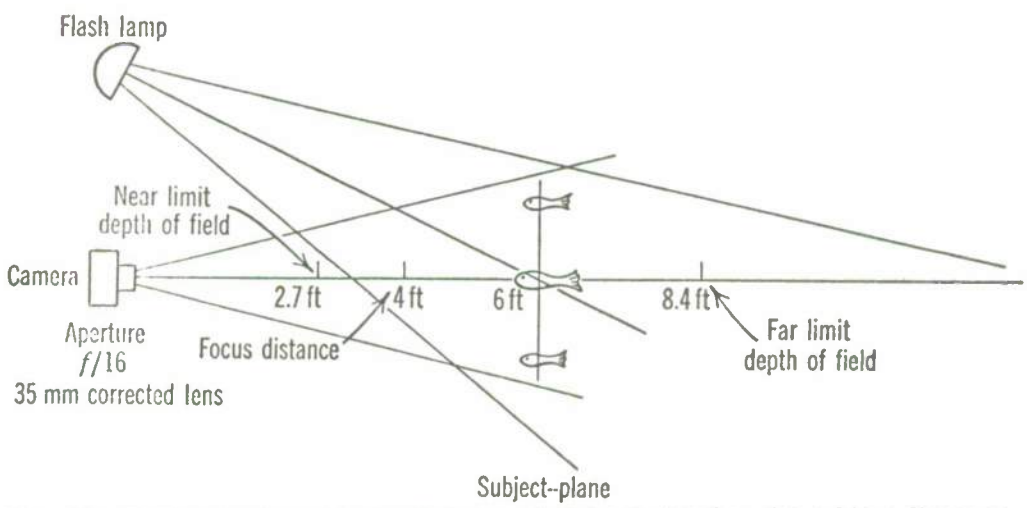


Fig. 18: Camera is focused at a distance slightly closer than the subject distance. The near limit of the depth of field will be close enough for the backscatter from particles in the water to be in sharp focus. This will diminish the backscatter interference by reducing the size of the particle image.

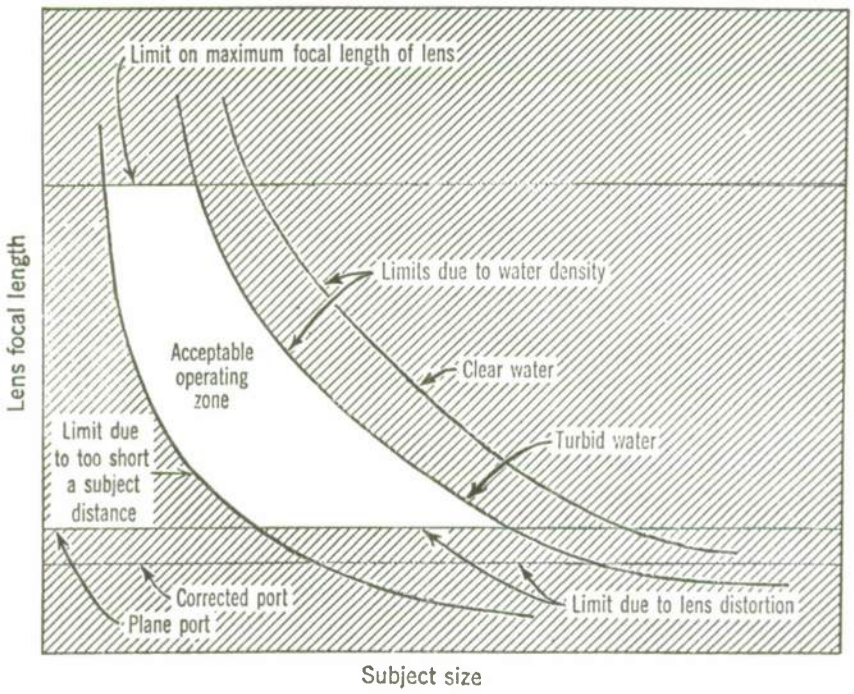


Fig. 19: Factors affecting the choice of focal length of the camera lens.

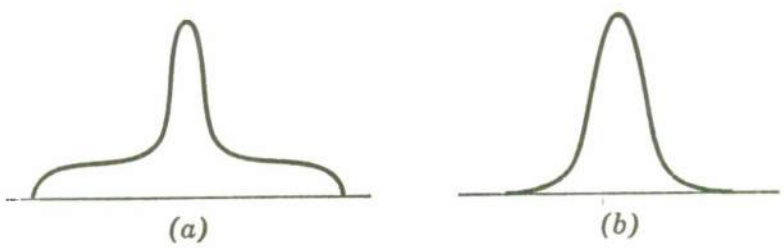


Fig. 21: Lens-spread functions that will yield high resolving power (a) and high contrast (b).

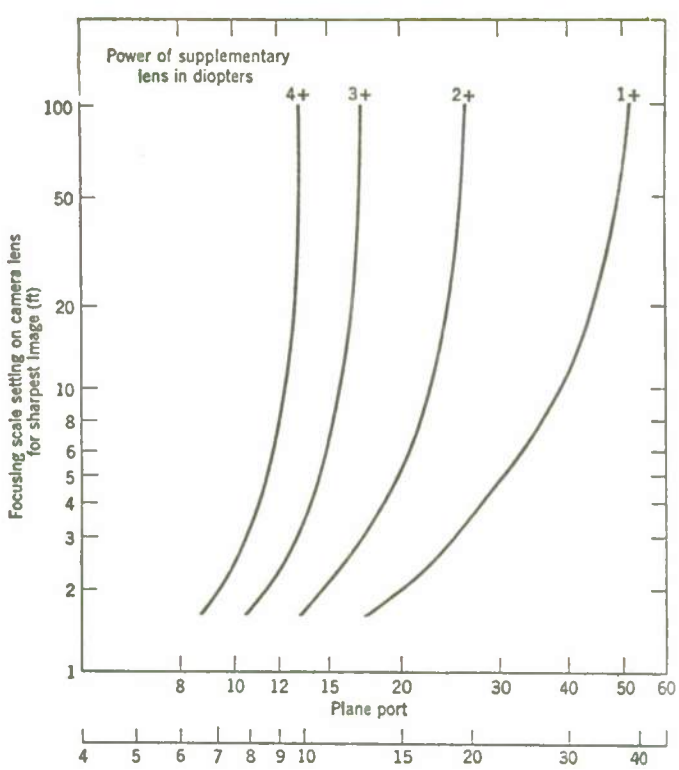


Fig. 22: Camera focus setting as a function of subject distance when close-up lenses of 1+, 2+, 3+, and 4+ diopters are used.

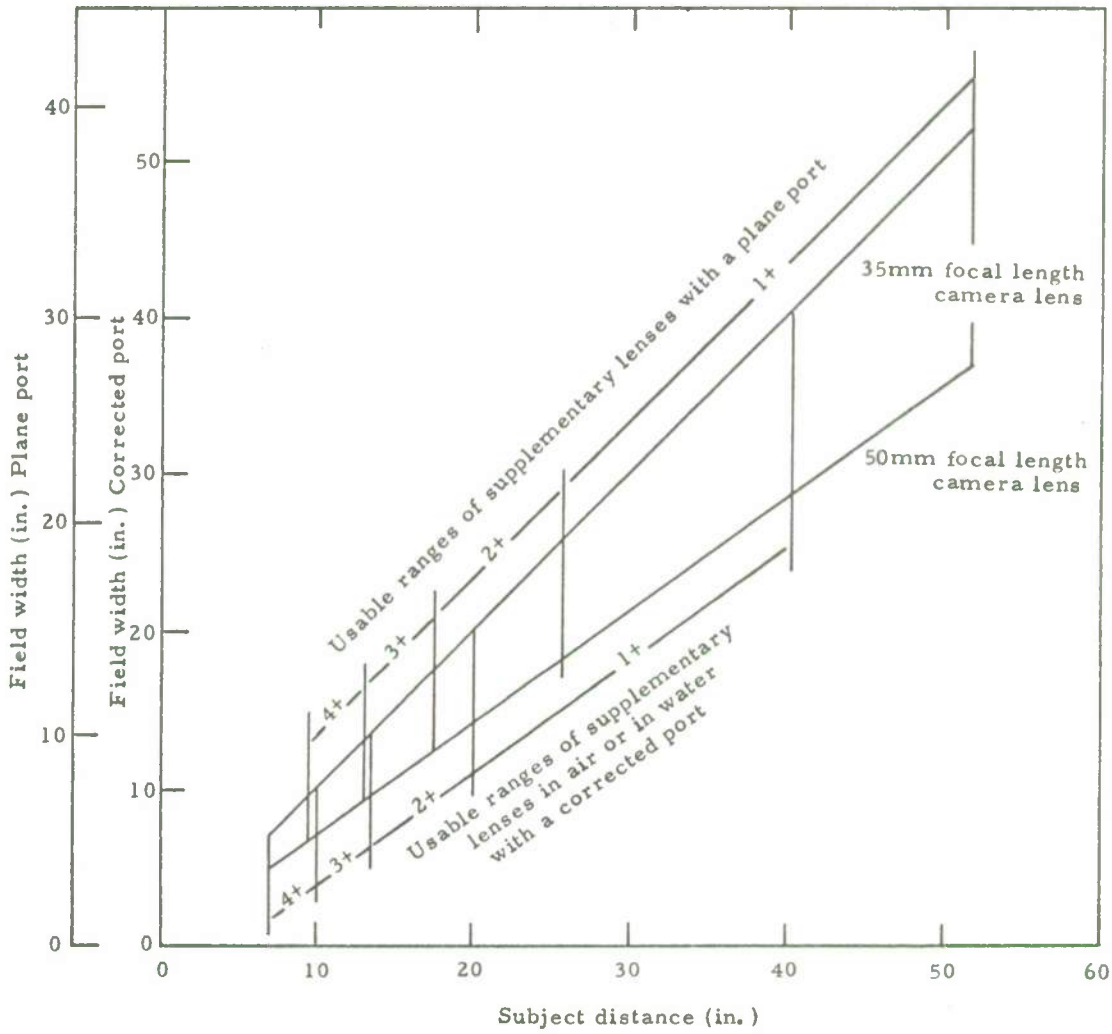


Fig. 23: Field widths at the subject plane for a 35mm camera with 35 and 50mm lenses when used with supplementary lenses. Working ranges for 1+, 2+, 3+, 4+ supplementary lenses are shown for a corrected and a plane port.

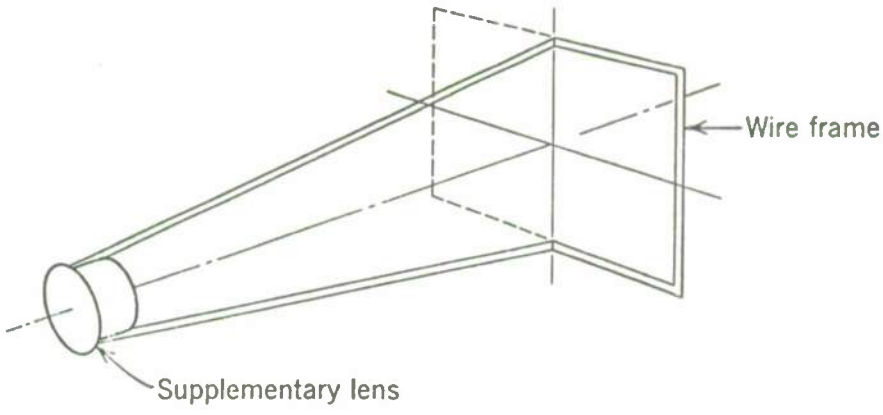


Fig. 24: Wire frame used for estimating subject distance and field. For convenience the frame outlines only half the field.

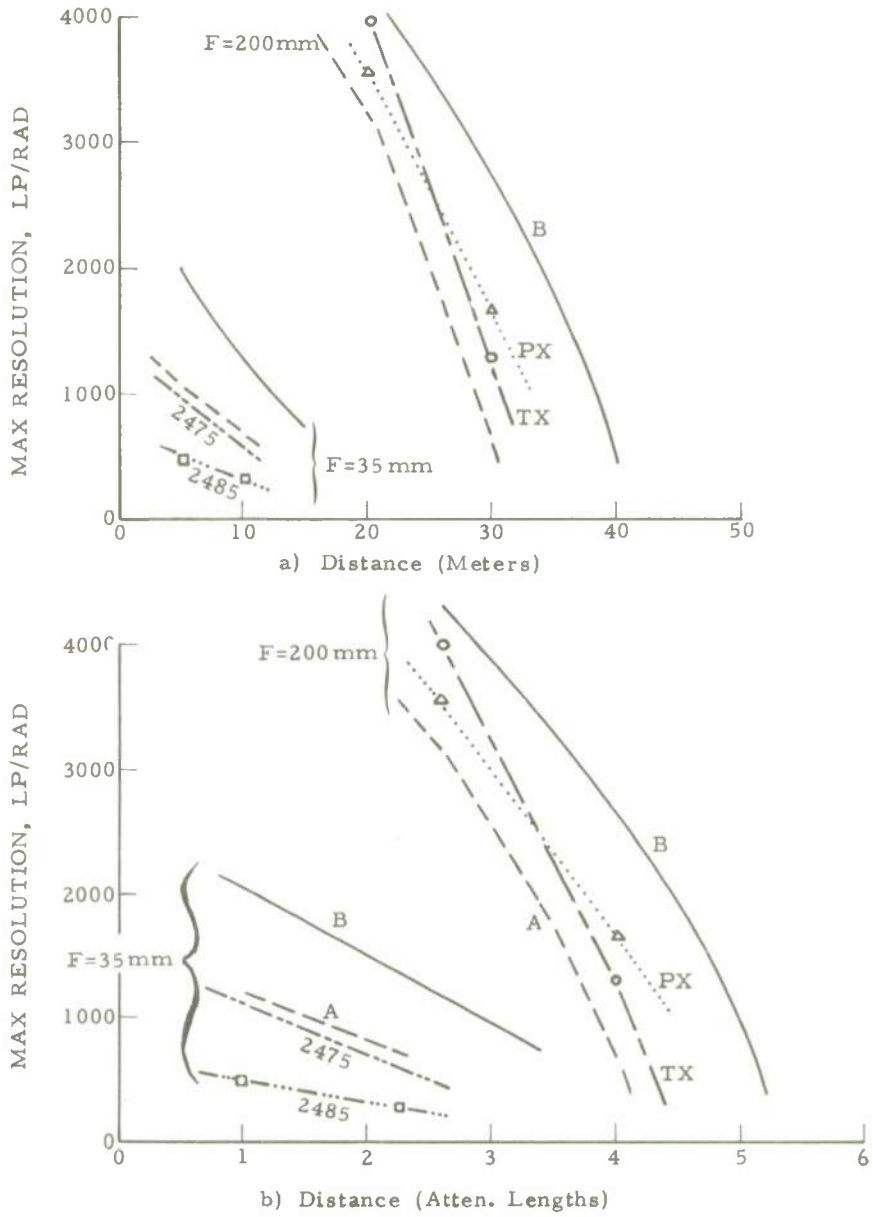


Fig. 25: Comparison of maximum resolution measured in water for 35mm and 200mm focal length lenses and several different films (PX = Panatomic-x, TX = Tri-x, A = experimental high-speed, high-control film, B = experimental medium-speed, very high contrast film). Fig. 25(a) shows resolution vs range in meters while Fig. 25(b) shows the same information vs normalized range expressed in attenuation lengths. All exposures used a horizontal path at 15 ft. depth in daylight.

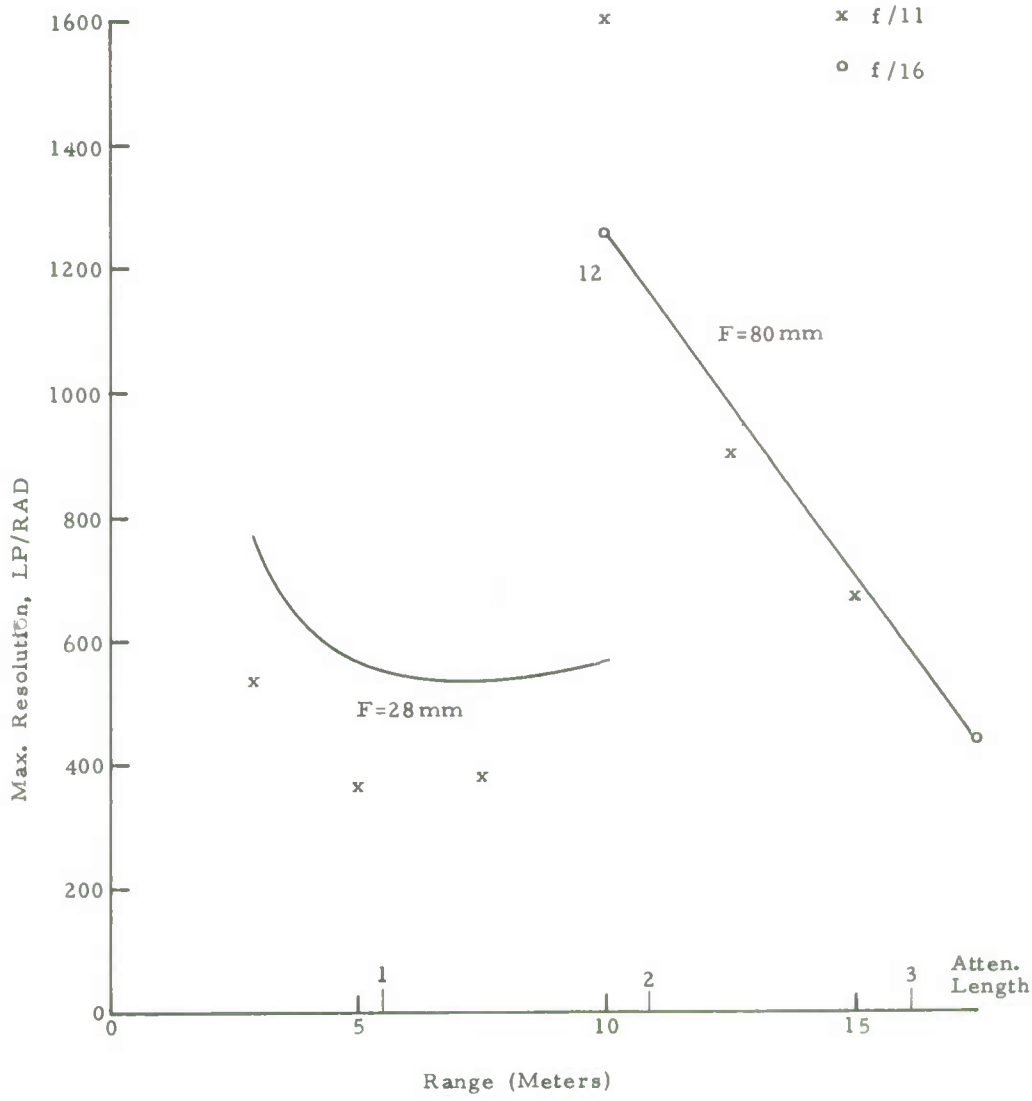


Fig. 26: Maximum resolution vs range for EF color film and Nikonos camera with 28mm and 80mm lenses. All exposures for a horizontal path at 15 ft. depth in daylight.

LONG RANGE VISION TECHNIQUES

Willard H. Wells
Tetra Tech Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

Abstract

Techniques for long range vision are classified according to the way in which they reject veiling luminance from lighted particles in the water. This lecture emphasises two of these, range-gating and dual-scan with parallax. The treatment assumes unsaturated photoelectronic detectors that are limited by photon noise, not contrast.

A range-gated system with radar-like pulses offers the ultimate in long-range vision, as far as 8 attenuation lengths and beyond with badly degraded resolution. The price is high, however. The pulsed illuminator, probably a Q-switched laser, is not likely to have an energy conversion efficiency better than 0.05%. As much as 10 joules of light energy is required for one frame, which comes to 20 kj of energy from the power supply.

The best alternative to range-gating is a dual-scan system in which the illuminator and receiver are separated for parallax. They execute a synchronous scan examining one resolution cell at a time, or one stripe at a time in a medium-range fan-beam system. The main drawback of such systems is their shallow depth of field. Various adaptive schemes have been proposed to shift, tilt, or even warp the shallow field to conform to the target shape. Dual-scan is limited by veiling luminance that crosses over the space between the light beam and the instantaneous field of view and scatters into the detector. The practical limit is about 7 attenuation lengths unless range-gating is added to eliminate luminance in nearby water.

In any attempt to see long distances in the water, whether in natural or artificial illumination, the most obvious problem is interferring background light, the same problem as seeing in fog. Wherever the line-of-sight penetrates illuminated water, the veiling luminance from particulate matter obscures the field-of-view. This problem takes first priority in the design of any system for long-range underwater vision. Since we have no control over natural light, we concentrate all our attention on schemes that use lamps or lasers and look for some means to discriminate against light reflected from particles in favor of that reflected from the target.

The first countermeasure to veiling luminance is to use a good image detector that is not limited by image contrast, i.e., the ratio of useful image light to total light. Background light will not saturate a good photoelectronic detector or image tube operating with the right amount of gain. Instead background light merely degrades performance by the photon statistical noise which is proportional only to the square root of the total light intensity. This square root advantage is discussed in Lects. 4.1 and 4.2, and here we assume that the background degradation is no worse than this. Ultimately the human eye demands a certain average light intensity and contrast for comfortable vision with high resolution, but a properly adjusted video system will provide independent control of intensity and contrast on the display devices, just as a home television set does. The average veiling luminance can be removed by the twist of a knob, and only the noise remains. In some systems described here the video camera will be selected and adjusted to tolerate much more veiling luminance than the eye would, while the display provides a picture adjusted for eye comfort and resolution. Despite these measures, the noise from the luminance remains the limiting factor.

Fig. 1 shows five ray diagrams of scattered light that generates veiling luminance. These are listed in order of decreasing light intensity when nothing is done to eliminate one or more of them. Fig. 1a shows veiling luminance from single scattering of particles close to the illuminator and detector. This light cannot be tolerated. The different types of long range vision systems are classified according to the manner in which they discriminate against this type of luminance. In practice we never eliminate all of it, but merely limit the backscatter to a fraction of the propagation path near the target, so that the backscattered light is strongly attenuated just as the signal is by absorption over the full distance and by the inverse square law.

Fig. 1b and c show higher order scattering events that are strong enough to be quite troublesome. In b the ray reflects from the target just as the signal does, but then small-angle scattering on the return path scrambles the information content. In Fig. 1c the target is not involved, but light scatters from two or more particles to cross over from the light beam to the field of view. The rays in b and c are eliminated more or less effectively in the systems described here. Finally, Figs. 1d and e show the rays that none of our schemes can discriminate against. Ray e is entirely negligible, but d is not, and it limits the performance of the ultimate system, a topic discussed in Lect. 4.2 and repeated to some extent here.

1.0 BASIC TECHNIQUES

Three schemes for rejecting veiling luminance have been devised and studied: the first is based on polarized light, the second on range-gating, and the third on parallax between illuminator and detector. A study of these possibilities quickly identifies the main problems and avenues for development. The trouble with the polarized light scheme is that it does not offer enough discrimination against the

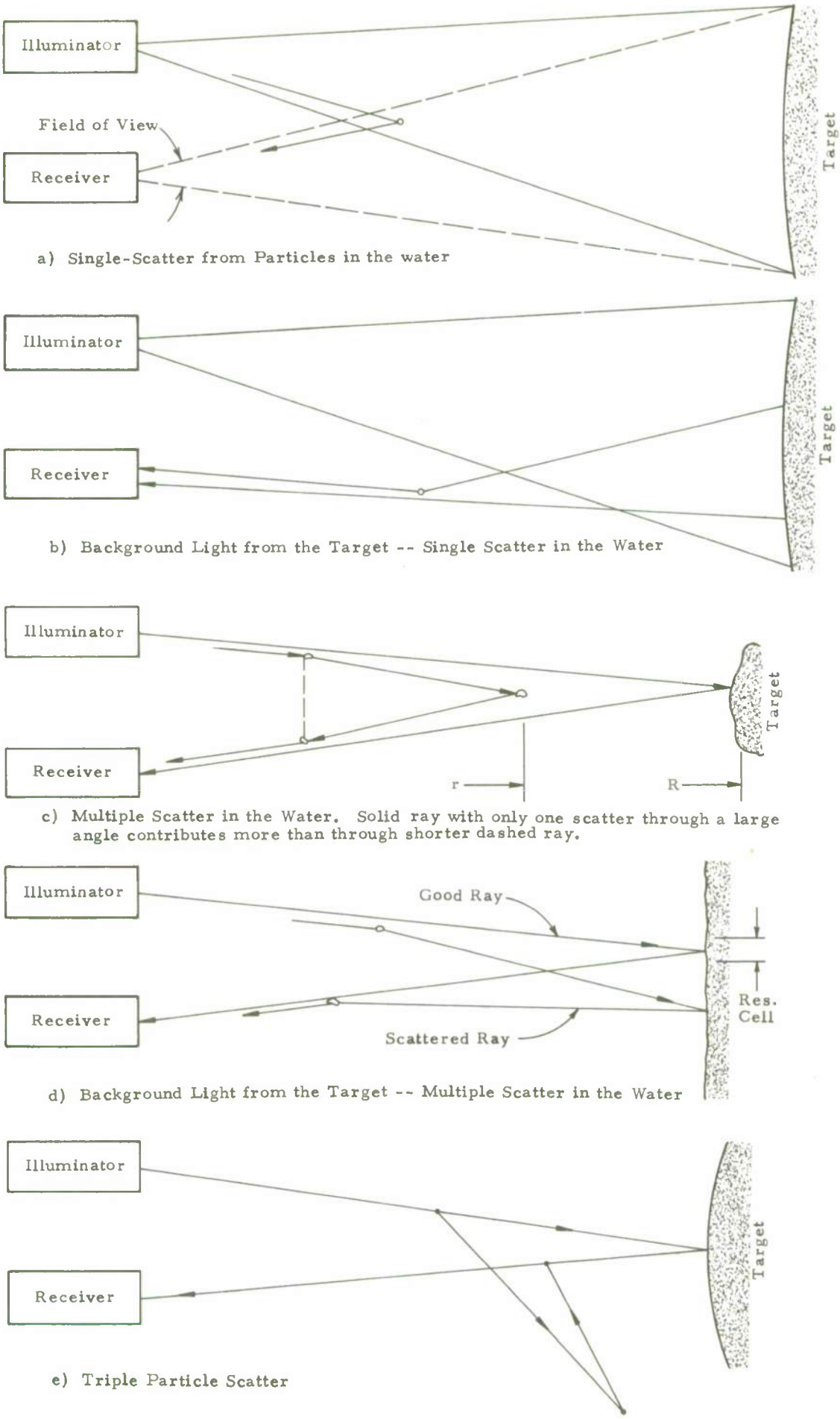


Fig. 1: RAY DIAGRAM FOR VARIOUS SOURCES OF VEILING LUMINANCE. Diagrams are in order of decreasing light intensity.

veiling luminance. The trouble with range-gating is that it requires an elaborate light source, probably a laser, with very low power-conversion efficiency. The method also requires some knowledge of the range to the target. The trouble with the parallax or dual-scan method is that it requires better knowledge of target range. In other words, a system with good backscatter rejection lacks depth-of-field and sees only a narrow range increment. For certain applications this is good enough. For example, in searching a flat sea floor from a vehicle, the target range is always the altitude of the vehicle. For other applications, however, something better is desirable and some rather elaborate schemes do hold some promise for the future. These would have the shallow field for good backscatter rejection, but would also employ adaptive features that warp the field to conform to the position and shape of the target.

1.1 Polarization Rejection of Veiling Luminance

Polarization rejection was discussed in detail in Lect. 4.1. There we showed that it can improve contrast by an order of magnitude, but since contrast is no longer the important criterion, the scheme fails to yield significant improvement. In other words, the large loss of background light does not offset the small loss of signal owing to the square root in the noise equation as mentioned above.

1.2 Range-Gate Rejection of Veiling Luminance

The principle of range-gating is exactly the same as radar. The illuminator transmits a short pulse of light, and the receiver is gated to accept light only after a delay that corresponds to the round-trip distance to the target and back. Heckman and Hodgson (Ref. 1) have demonstrated an experimental system of this type. If you demand the longest possible range at all costs, then the range-gated system is clearly the one to use. No matter what else you may do to reject veiling luminance, gating is required beyond about 7 attenuation lengths as shown in Sec. 2.1.1. Attainable resolution has degraded somewhat at this distance. The one advantage of gating over other rejection schemes is that no scattered ray is accepted unless it has traveled nearly as far in the water as rays from the target, and suffered at least as much attenuation. In other words, there is no shortcut for scattered light to leak into the receiver such as those shown in Figs. 1a and 1c. Of the various ray diagrams, a weakness of range-gating is shown in b, the ray that strikes the target, but scrambles information on the return trip. However, if the function of the system is merely detection of an object and not resolution of detail, then such rays count as signal, and so the range-gate scheme will be especially attractive in such an application. Only the scattered ray in Fig. 1e whose length is the same as the one from the target causes a small background in the latter case, but it can be shown to be completely negligible for lack of significant power.

The range-gated system has one important drawback besides the scatter illustrated in Fig. 1b: the requirement for short light pulses limits power and constrains most aspects of the system design. Range-gating to a distance of 5 meters, about 1 attenuation length in shallow seawater, requires a pulse lasting only 30 nsec (round-trip time). Compare this to ordinary inexpensive flashlamps, which deliver pulses lasting 100 μsec, more or less, too long by a factor of 3000. Only lasers or electro-optic shutters such as Pockels cells can generate sufficiently energetic 30 ns pulses, and then only by sacrificing most of the average power that would be available from a conventional lamp. Useful light energy is reduced 2 orders of magnitude, say from 5% efficiency for an arc lamp inside a wide-aperture reflecting bowl, to 0.05% for a pulsed laser.

Range-gating will be mentioned again in connection with performance prediction curves; see Secs. 2.1.2 and 2.2.3. Basically it is the brute force approach that is costly in terms of power and laser equipment, but otherwise uncomplicated.

1.3 Dual-Scan with Parallax

Like range-gating, this method also discriminates against light backscattered in the water by using knowledge of the target's range. The difference is that range enters the problem through a parallax angle instead of pulse timing. Fig. 2 shows the basic idea. A thin light beam illuminates only a small area on the target, and similarly the receiver looks only at a thin instantaneous field of view (dashed lines) that we call the virtual beam of the detector to distinguish it from the overall field of view. Objects are only visible when they fall within the small volume that is hatched in the figure, the intersection of the light beam with the virtual beam. Since this common volume is smaller than a reasonable field of view for the system, the illuminator and receiver must execute a synchronous scan across the field of view.

Dual-scanning discriminates well against the three most important kinds of veiling luminance shown in Figs. 1a through 1c. The scattered rays shown in those figures are eliminated by shrinking the common volume until they fall outside either the light beam or the detector's virtual beam. However, there remains an important drawback, the shallow depth of field. Fig. 2 shows the two beams intersecting perfectly at a nominal target range. For both longer and shorter distances, the common volume tapers to a tip where objects will not be seen. Vision begins to fail near this tip, and so a practical depth of field is about midway between the nominal range and the tip, as shown in the forward direction in Fig. 2. (The figure does not show the similar distance behind the nominal range.) Next note the scattered ray shown in Fig. 2, a common ray of the type shown in Fig. 1c, which carries a significant amount of background light because its total length is only about half the round-trip to target and back. The virtual beam shown is barely thin enough to reject this ray, and for comparison a range-gate distance that would barely reject the same ray is also shown. The point to note is that the range-gate field is much deeper than the corresponding dual-scan field with respect to this kind of veiling luminance.

The main advantages of synchronous scanning are its effectiveness in rejecting veiling luminance reflected off the target, Fig. 1b, and more important, its use of conventional light sources. The scan of a conventional source is not trivial, however, because a beam from an arc lamp or other source will have to be 10 or even 15 cm in diameter if light is collected efficiently and collimated well. A beam this size is unwieldy to scan through a raster or spiral and at the same time pass through an underwater window, perhaps a high pressure window. A 5-mm laser beam would be much more convenient, but the high price of a laser (initial cost and power) is probably not justified unless range-gating is required.

1.3.1 Fan-Beams Versus Pencil Beams

So far we have disucssed beams that are thin in the plane of Fig. 2 without specifying the width of the beams in the direction perpendicular to the page. Beams that are thin in this third dimension are called pencil beams, and beams that spread in a wide angle are called fan beams. The fan beam is ideal for simple medium-range systems that only reject veiling luminance of the types shown in Figs. 1a and b. Instead of a complex raster scan, the two synchronous fans sweep only once per frame across the field of view. At longer ranges, about 6 attenuation lengths, the fan beam fails for lack of good rejection of multiply scattered rays (Fig. 1c). To see this, think of the fan composed of many pencil beams, and consider the cross-sectional view about midway to the target as shown in Fig. 3. When the many pencil-beam points are scanned sequentially, scattering from the light beam into the detector virtual beam can only occur between the pair exposed as shown in Fig. 3a. However, when all the points comprising a fan beam are exposed simultaneously, then the cross scattering shown in Fig. 3b occurs. We have not performed a complete analysis of the degradation, but an order of magnitude is easy to estimate. Suppose that the pencil detector beam in question is exposed to scatter from 7 pencil light beams comprising a fan beam. This is about the right number, since more pencil beams start to be ineffective near the ends where angular separation is large. Then the veiling luminance is 7 times greater than the pencil beam case, but the noise from this background is only $\sqrt{7} \approx e$ times greater. Since signal-to-noise decays at the rate $\exp(-\alpha R)$, this means that the fan beam costs 1 attenuation length compared to raster-scanned pencil beams with the same energy. In Sec. 2.1.2 we show that synchronous scan without range-gating is limited to about 7 attenuation lengths, which means fan beams are limited to about 6.

We designed and built a synchronous scanning light source sponsored by the Naval Photographic Center. It was synchronized to a panoramic camera built by Photogrammetry, Inc. Results are reported in Ref. 2. Photographs in an artificial medium show a striking improvement with the synchronous scan. Copies are available on request, but are not shown here since they lose fidelity in the reproduction process.

1.3.2 Adaptive Systems

As long as the shallow field is acceptable, synchronous scan is an excellent way to avoid the expense of a laser system as far out as 7 attenuation lengths, but at that long range, the field would be very shallow indeed. The main hope for circumventing the difficulty is an adaptive system. The idea is simple: let the field be shallow but tilt, bend, and even warp it to conform to the shape of the target, whatever that may be.

Video cameras offer the best possibilities for controlling the parallax angle in an adaptive way. The top part of Fig. 4 shows a pencil beam of light illuminating the target in the perspective view that the camera sees. In other words, this is the image of the light beam and one spot on the target as seen on the focal plane. The figure also shows scattered rays and a halo of scattered light surrounding the spot. The illuminator is placed to the left of the camera in keeping with other figures, and remarks to follow about left and right are relative to that arbitrary choice. The idea is to save the image of the spot on the target and eliminate the image of the beam, and much of the scattered light surrounding it. The bottom part of the figure shows a plot of light intensity on the center line. The dashed line in the top view indicates the optimum place to shield the photo-sensitive surface; i.e., light to the right does more good than harm, and light to the left more harm than good. Physically the shield is a reading or erasing electon beam inside the video camera tube. If the light scans to the left, the good light follows the backscatter, and the erasing beam needs to scan in between to prepare the surface. If the light scans to the right, the backscatter follows the good light and the reading beam needs to scan in between to read out the data before it is contaminated.

All this is simple enough. The real problem is to develop an error signal to guide the reading or erasing beam. In other words we do not know where to place the shield. It goes to the left when the target point is closer (greater parallax angle) and to the right when farther away. All the receiver knows is the integrated charge image at the time of readout; the instantaneous illumination profile as plotted in the figure is not normally available. However, it can be made available at selected points by using auxiliary detectors. Various schemes called edge tracking have been proposed. These methods would follow some intensity level or derivative in the charge image, but they are hazardous to implement because the good part of the profile changes shape with the reflectivity of the target. The good part can even disappear in a hole in the target and throw the track onto the backscattered light. No final solution to these problems has yet proven optimum.

2.0 ANALYSIS

Some of the conclusions of our analysis have already been presented in the preceeding section; in particular, the best dual-scan with a pencil beam illuminating a single cell and the virtual detector beam following exactly will perform out to 6 or 7 attenuation lengths depending on the water and the system figure-of-merit. Vision may be extended still further with range-gating, but resolution degrades unavoidably. The exact numbers depend considerably on α and on system figure-of-merit, but a resolution of 4 mrad. at 8 attenuation lengths is typical. Strong illumination, large aperture and efficient components are of considerable benefit in this case. With the benefit of a detector that does not saturate and a medium with homogenously distributed scattering particles, a flood illumination system can function without range-gating out to about 4.5 attenuation lengths. Noise is low and resolution is good until the system fails for inability to subtract off background light so that the target return can be amplified to the dynamic range of the display. Strong illumination, efficient components and large aperture optics help very little in this case.

The analysis in this section does not follow the format of system types as given in the last section. Instead we treat the conceptually simple dual-scan system first, then point out where the added feature of range-gating will be beneficial. Similarly we study the performance of a flood illumination system and point out what range-gating would do for it. The full range of analytical tools developed in Lects. 3.3 and 4.3 were used only to treat the ultimate system that employs both dual scan and range gate

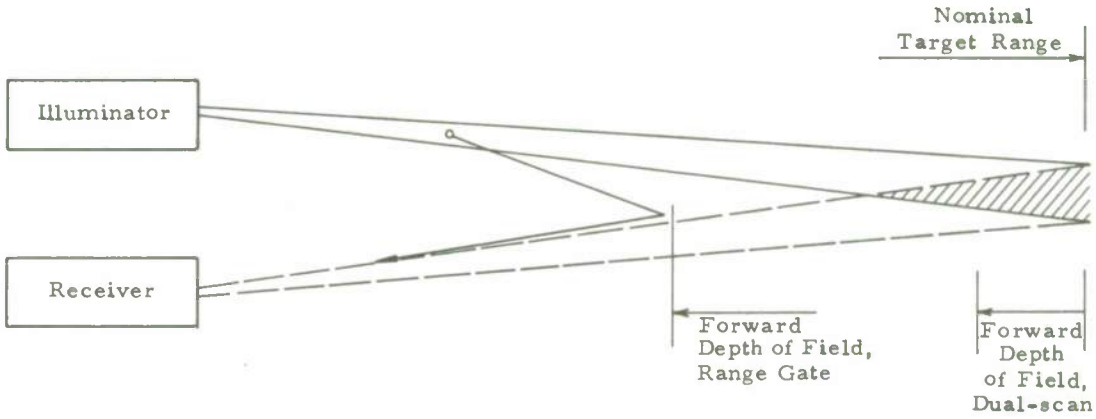


Fig. 2: REJECTION OF SCATTERED RAY BY PARALLAX OR RANGE GATE. Parallax restricts field of view more severely than range gate does.

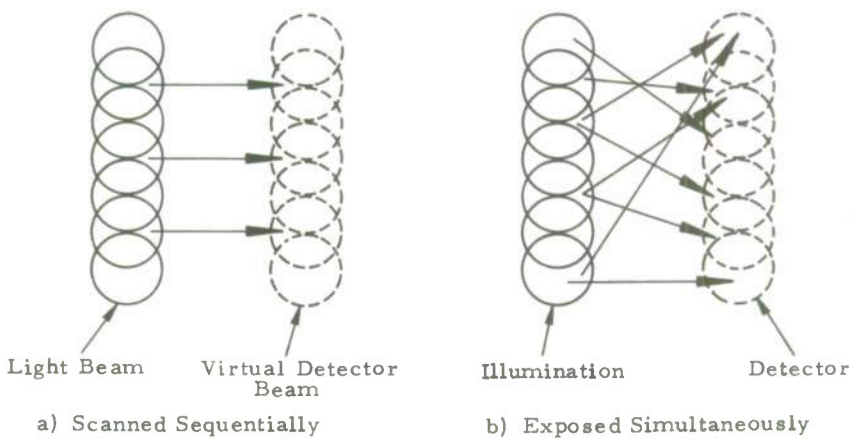


Fig. 3: CROSS SECTION THROUGH FAN BEAMS COMPOSED OF MANY PENCIL BEAMS ABOUT MIDWAY TO THE TARGET. Fan beam leads to cross-scattering between component pencil beams.

to eliminate all background light except that illustrated in Fig. 1d. Only the results are presented here. In time we hope to perform a similarly detailed analysis of other systems as well; meanwhile, they are treated approximately by methods covered briefly in Lect. 4.1.

2.1 Dual-Scan System

The simplest analysis of a dual-scan system assumes that the medium causes losses by absorption only, and the effects of scattering are negligible. This may be the case in certain coastal waters with large amounts of dissolved matter, or small targets in more typical water may approximate this condition when the system rejects scattered light by range-gating. In any event it is a simple starting place for analysis from which we may introduce more realistic limitations later. The simple range equation (inverse square law) for a perfectly white lambertian target in an ideal medium may be written:

$$N_o = (\eta E \omega_t / 4h\nu)(D/R)^2 = M\omega_t / 4R^2 h\nu \qquad (1)$$

where

$$M \equiv \eta E D^2 . \qquad (2)$$

Here N_o is the number of photons detected, $h\nu$ is the photon energy, D is the receiver aperture diameter, R the range to the target, η the product of all optics transparencies and efficiencies including detector quantum efficiency, E is the transmitted light energy per steradian in the field of view and ω_t is the solid angular subtense of a resolution cell as illustrated in Fig. 5. In other words, $\omega_t E$ is the energy budgeted for each resolution cell, but E, not $\omega_t E$, is the quantity usually held constant as the resolution improves or degrades with range or other conditions since available power must be budgeted to cover some required field of view. The combination called M is a form that lumps together the factors that measure effectiveness of the overall transmitter/receiver system. In typical systems under consideration, the figure of merit will fall in the range,

$$.10 \leq M \leq 1.0 \text{ joule m}^2/\text{sterad.}$$

For example, suppose

Available energy = 10 joule per frame, radiated light

Field of view (solid angle) = $12^\circ \times 15^\circ$

Optical efficiency = 0.5

Detector quantum efficiency = 0.2

D = 0.15 m. (note $15^\circ \rightarrow$ 40 mm with f/1 system),

then it follows that

E = energy/solid angle = 182 joules/sr

η = 0.1

M = 0.410 joule - m^2/sr.

When the target has diffuse reflectivity ρ in a lossy medium with attenuation constant α, the number of photons received from a resolution cell is

$$N_t = N_o \rho e^{-2\alpha R}; \tag{3}$$

note 2α for round-trip attenuation. This assumes that the resolution cell is comparable to the measurement aperture that defines α, a good approximation that will have to suffice for this lecture. (We treated this point in detail in Lect. 4.1 where we introduced another decay constant γ.) The number of photons classified as signal does not represent the whole reflectivity ρ but only the difference $\Delta\rho$ between the cell in question and contrasting target features. We usually think of $\Delta\rho$ as the reflection change across an edge or boundary. Hence, signal photons are given by

$$N_s = N_o \Delta\rho e^{-2\alpha R}. \tag{4}$$

Next we require a certain signal-to-noise ratio, and in this case the noise is simply $\sqrt{N_t}$, Poisson statistics of photon arrival, where N_t is given by Eq. 3. Let us put the photon signal-to-noise ratio $N_s/\sqrt{N} = \sqrt{10}$, which squared reads

$$N_s^2/N_t = 10. \tag{5}$$

Eq. 5 is consistant with the general idea of a display signal-to-noise ratio, as discussed in Lect. 4.2. If some other signal-to-noise ratio is desired, note that this ratio N_s^2/N scales in proportion to M, so one may choose a higher or lower value of M to achieve the same effect on the estimates to follow. Combining Eqs. 1, 3, 4 and 5 and solving for the angular resolution as the side of a square resolution cell gives

$$\epsilon_s = \sqrt{\omega_t} = \sqrt{40 h\nu / Q \alpha R e^{\alpha R}} \tag{6}$$

where

$$Q \equiv \alpha^2 M \Delta\rho^2/\rho = C^2 \rho \alpha^2 M \tag{7}$$

and

$$C \equiv \Delta\rho/\rho \quad \text{is the contrast.}$$

Note that the factor Q is the product of quality factors for the medium (α^2) the system (M) and the target ($\Delta\rho^2/\rho = C^2\rho$).*

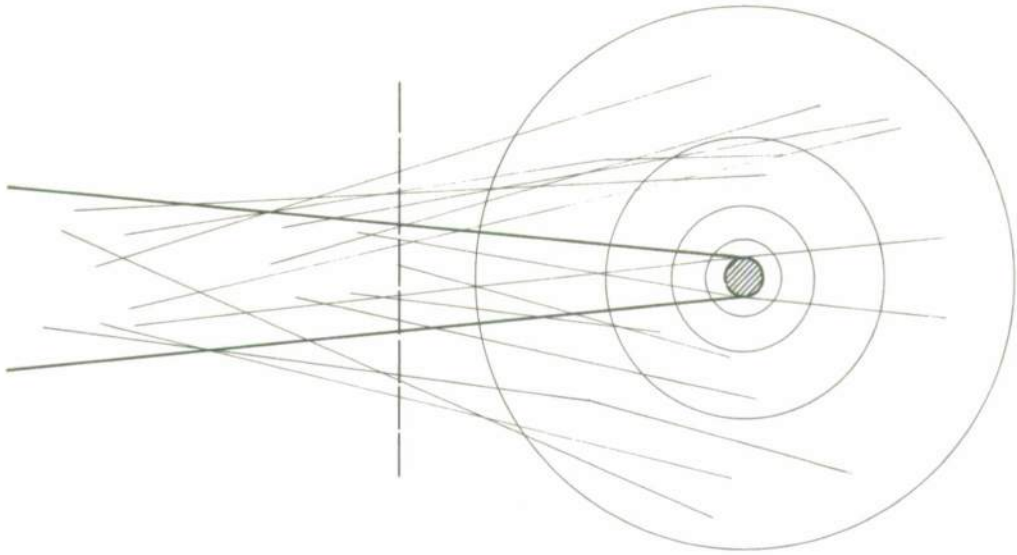
For a typical value of Q, let $\alpha = .2$, $\Delta\rho = .1$, $\rho = .2$, $M = .4$, and we find $Q = 0.8 \times 10^{-3}$. The long straight dashed lines in Fig. 2 are plots of Eq. 6 for log Q = -4, -3 and -2.

2.1.1 Veiling Luminance from the Target

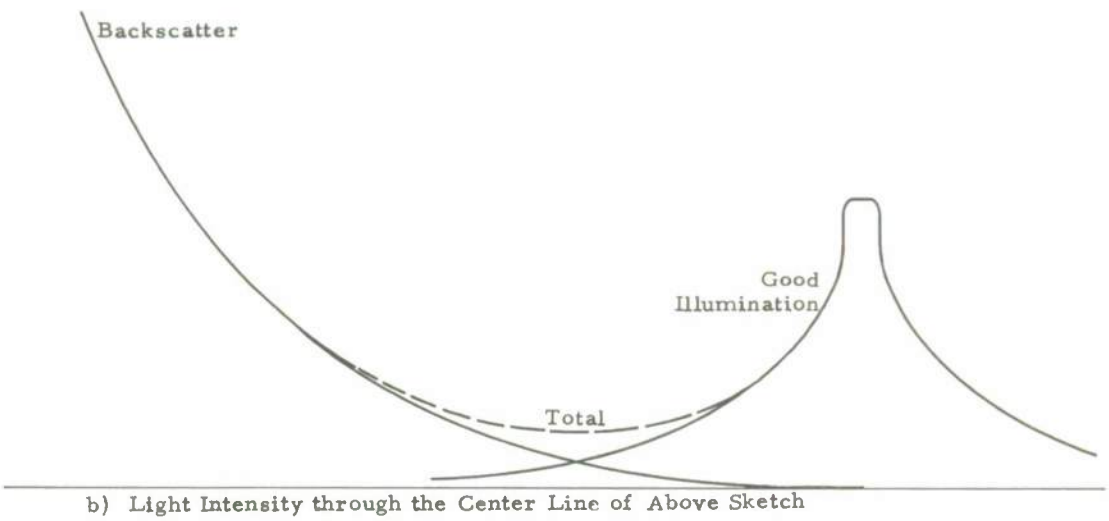
In the absence of an extended target, light that is scattered through small angles does not reach the detector of a dual-scan system, and is therefore indistinguishable from light lost by absorption. However, an extended target in tvpical seawater will intercept a large amount of scattered illumination, and some of this light will reflect from the target, scatter again through small angles, and reach the detector, as shown in Fig. 1d. In other words, this is light which reflects from the target just as the signal does except that it reflects from the wrong part and does not represent the resolution cell under examination.

---

*It may seem strange that Q increases with the quality of the target and the system, but decreases when the quality of the medium is improved. This is because we measure distance in attenuation lengths instead of ordinary distance units. Thus, six attenuation lengths is a shorter distance in bad water and according to the inverse square law, the detector receives more light in proportion to α^2.



a) View of Illuminating Pencil Beam from the Perspective of the Camera



b) Light Intensity through the Center Line of Above Sketch

Fig. 4: GOOD ILLUMINATION AND BACKSCATTER FROM THE WATER NEAR THE TARGET

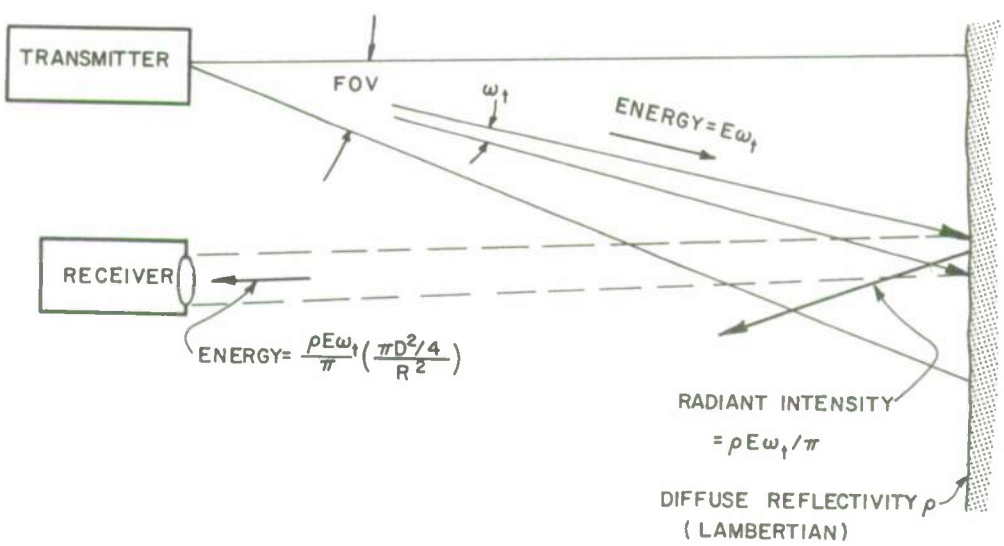


Fig. 5: GEOMETRY FOR THE INVERSE SQUARE LAW

A detailed theory of small-angle multiple scattering is required to treat this case, and this theory has been the main topic of our previous work with seawater and system transfer functions. The solid lines in Fig. 6 show typical results. Note that this source of added noise results in about a half attenuation length of lost range capability in the region of reasonable range and resolution, say 7 attenuation lengths and 1 milliradian resolution. However, note the bend in the solid curves in the top right corner. At very long range and very badly degraded resolution, say 50 mrad, the performance for typical water (solid curve) actually exceeds the performance in the idealized case (dashed lines). This is because the resolution cell has become so large that it encompasses considerable scattered light that would normally be classified as lost; i.e., $\exp(-\alpha R)$ is no longer a measure of the attenuation of light reaching the resolution cell.

2.1.2 Range-Gate Requirements

At close range, a reasonable separation distance b (for baseline) between transmitter and receiver suffices to suppress light that scatters out of the illuminating beam and into the field of view. However, at long range, a range-gated system will be required, otherwise performance would be limited by this background light. The purpose of this section is to derive this limitation.

The most important kind of scattered ray is that shown in Fig. 1c, two or more small angles and only one scatter through a large angle. Replogle has shown that rays that cut across directly (dashed line in the figure) are negligible in comparison because larger angle scatters are so much less probable than small angles. Replogle derived an exact expression that is valid even when the lamp and camera are coaxial as discussed in Lect. 4.3. Mertens derived an approximate expression that gives essentially the same result when a reasonable baseline separates the two; we use the latter expression here. The backscatter power received in a detector per unit power transmitted is

$$B_w = \omega_d A \sigma_b \beta(b, R), \tag{8}$$

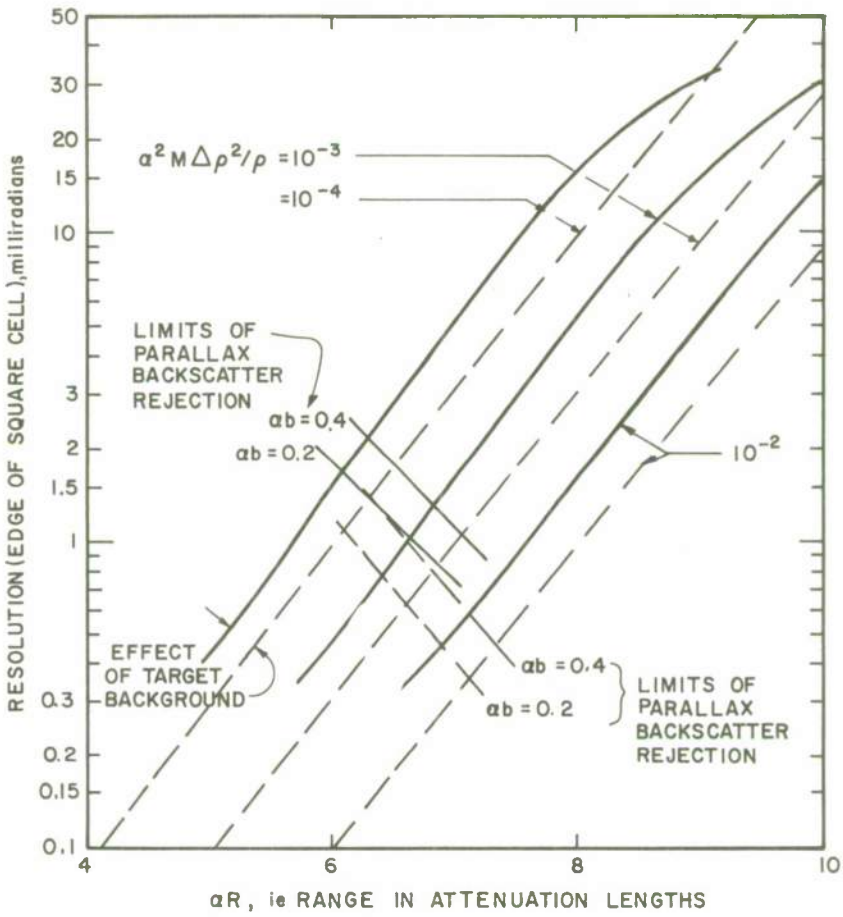


Fig. 6: RESOLUTION AS A FUNCTION OF RANGE FOR DUAL-SCAN VISION IN SEAWATER. All dashed curves represent an ideal limit in which vision is not hampered by light scattered into the detector from the wrong part of the target; i.e., either the target is only one resolution cell in size, or scattering is negligible compared to absorption. The outer two dashed curves are the same as the $\phi = 0$ curves in Fig. 10, Flood Illumination, a convenient reference for comparing the two techniques. Large targets have reduced performance as shown in the solid curves. The short curves crossing the main performance curves show where seeing begins to fail rapidly unless range-gating is used to reject multiply-scattered light. This occurs near 6.0 to 7.5 attenuation lengths. These limit curves are precise only when $\alpha = .145$, $\rho = .2$, $\sigma_B = 3 \times 10^{-4}$. Adjustments for other cases may be derived from the following approximate proportionality: $\alpha M \Delta\rho^2/\rho \sim \sigma_B/[\alpha\rho(ab)^{3/2}]$.

The dashed curves also apply to range-gated flood illumination, see Fig. 10.

where $$\beta_w \equiv \int_b^R p(\theta(r),\ 2r)r^{-2}\,dr, \tag{9}$$

and $$\theta(r) \equiv b/r - b/R. \tag{10}$$

Here ω_d is the acceptance solid angle of the detector, A is the area of the light collecting aperture, σ_b is volume scattering function in the backward direction, $\sigma(\pi)$, and $p(\theta, r)$ is the point spread function at angle θ off axis and range r from the source normalized to unit transmitted power. The geometric significance of θ is shown in Fig. 7. The geometry gives Eq. 10 as an approximation valid for moderately small θ. The approximation fails at short range, and so the integration in Eq. 9 is cut off at the lower limit b instead of zero. Fig. 1c shows that there would be little contribution from the range 0 to b because there is no room for displacement to accumulate from multiple small-angle scatters.

It is easy to understand the above expressions in a heuristic sort of way. It is intuitively obvious that B_w should be proportional to $\omega_d A$ and σ_b, so we concentrate the explaination on Eqs. 9 and 10. The angle θ is the subtense (seen at the detector) of a line segment (Fig. 7) between the thin light beam and the narrow field of view; note that it vanishes at r = R where they come together. Now think of the backscatter at distance r as though it were caused by a thin veil hung across the line-of-sight. The light beam passing through the veil makes a bright spot which is imaged on the detector focal plane. However, this image does not fall directly on the detector since it is at angle θ offcenter. Only a portion of the scattered luminance around the image falls on the detector as given by the spread function $p(\theta, 2r)$; note 2r for round-trip propagation from the lamp out to the veil and back to the detector. Finally the integral in Eq. 9 sums over the contributions from all distances with the factor r^{-2} for the inverse square law. This treatment; i.e., Mertens' approximation to Replogle's theory, ignores the fact that the image of the bright spot at distance r is out of focus when the detector is focussed on the target at range R. Then when the detector is looking at scattered luminance far enough offcenter (angle θ), the little defocus in the central image has very little effect on the intensity at the detector.

The number of detected backscatter photons is easily computed by combining

$$N_b = E\eta\omega_t B_w/h\nu, \qquad \text{and} \qquad A = \pi D^2/4, \tag{11}$$

with Eq. 8. The result (using Eq. 2) is

$$N_b = \pi M\omega_d\omega_t\sigma_b\beta(b, R)/4h\nu. \tag{12}$$

At this point we could write an equation like Eq. 5, $N_s^2/N_t = 10$, except totaling the two noise sources, N_t from the target and N_b as given above; i.e., $N_s^2/(N_t + N_b) = 10$. However, the increment of target ranges over which N_t and N_b are comparable is really quite small, and so considering the approximate nature of this calculation we omit N_t and solve the equation for the situation in which backscatter is the dominant noise source. The result using Eqs. 1, 4, 7 and 12 is

$$Q(\text{required}) = \frac{40h\nu\pi}{\rho}\,(\omega_d/\omega_t)(\sigma_b/\alpha)(\beta/\alpha)(\alpha R)^4 e^{4\alpha R} \tag{13}$$

The parentheses in Eq. 13 combine quantities which belong together for one reason or another. We shall take $\omega_d = \omega_t$, so then the first parenthesis is unity; i.e., the detector acceptance ω_d is the same as the image resolution actually achieved ω_t. Our detailed computations for the ultimate dual-scan system have shown that this adjustment is approximately optimum. The ratio σ_b/α is grouped together, because σ_b and α will both increase in murkier water, so this ratio is more nearly constant than either quantity taken separately. Similarly β/α is more nearly constant than β, and αR is the familiar dimensionless form for distance. Note that β depends only upon b, R and various scattering probabilities that all scale roughly in proportion to α. Therefore, the fact that β/α is dimensionless requires that $\beta/\alpha \approx f(\alpha R, \alpha b)$. We have of course used αR (distance in attenuation lengths) all along, and the new combination αb will also have some measure of constancy because systems designed for long range in deep water will employ a long baseline, while systems for murkey coastal waters will employ a short one.

Typical results given by Eq. 13 are plotted as the short crossing curves in Fig. 6 for two reasonable values of αb, 0.2 and 0.4. Note that the resolution ordinate ϵ_t in Fig. 6 does not appear in Eq. 13, but the parameter labeling the main curves $Q = \alpha^2 M\Delta\rho^2/\rho$ does appear, and so does the abscissa αR. Thus, we located points by their values of αR and Q letting them fall where they will on the resolution scale. Recall also that these curves show only the range at which resolution begins to fail without range-gating. They do not show the actual curves of the failing resolution, which would clutter the figure with unnecessary detail because failure is quite rapid at longer range.

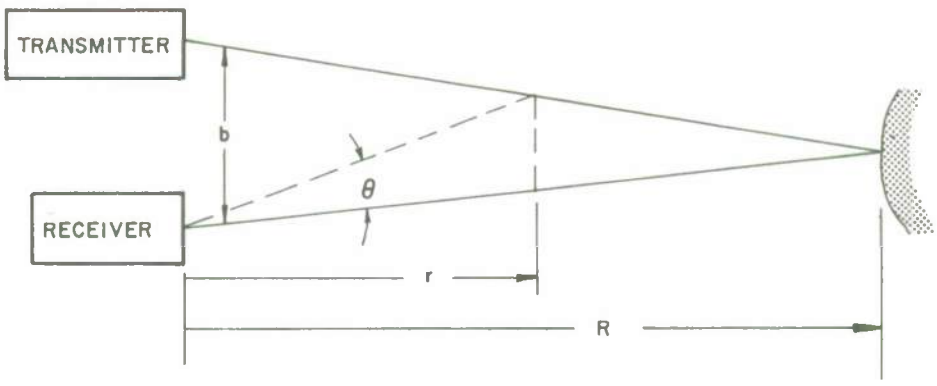


Fig. 7: GEOMETRY FOI COMPUTATION OF CROSS-OVER LIGHT SCATTERING

Values of parameters actually used were

$$a = .145 m^{-1}, \quad \sigma_b = 3 \times 10^{-4} m^{-1} sr^{-1},$$

hence b = 1.38 and 2.76 meters. However, the scaling laws discussed above allow for some validity over a variety of water conditions. In general, note that a system without range-gating begins to fail between 6 and 7 attenuation lengths, the longer distances corresponding to greater system figure of merit.

2.2 Flood Illumination System

When we attempt long-range vision in seawater using flood illumination, the obvious limitation is the very large amount of backscattered light that results from looking through ones own light beam. When the illumination comes from a single source situated to one side of the receiver, then the field of view has a bad edge with much backscatter on the lamp side and a good edge on the opposite side as illustrated in Fig. 8. A large volume of seawater, the so-called common volume, (hatched edges), lies in both the light beam and the field of view. This volume generates most of the backscatter because within it a single scattering event suffices to direct light out of the beam and into the detector. On the bad edge the line-of-sight passes through a maximum amount of common volume, and on the good edge none at all.

At first thought the analysis of this case seems perfectly straightforward: calculate the signal from a resolution cell as before; calculate the backscattered light in the same cell and calculate the noise as the photon-statistical fluctuations in this backscatter power; demand a certain signal-to-noise ratio as before and calculate the resolution analogous to Eq. 6. This is an instructive exercise that is followed in Sec. 2.2.3, and the result is useful to some degree. However, it does not lead to a practical estimate of the useful range of flood illumination because another factor limits range more severely. The static power level of backscatter is very high, but the statistical fluctuation associated therewith is not large enough to degrade the signal-to-noise ratio very much because the signal as well as the noise is stronger with flood illumination. In fact, estimates in Lect. 4.1 showed that in principle the signal-to-noise ratio decays as $\exp(-\alpha R)$ just as it does in the dual-scan pencil-beam case. The more severe limitation on the system is the problem of subtracting a large backscatter component from the received signal with sufficient accuracy to leave a suitable video signal. For example, suppose that 99% of the received signal is backscatter and 1% is reflected from the target; i.e., the signal-to-background contrast C is only 1%. If the backscatter is always precisely 99% it readily may be subtracted off (electrical bias or high-pass filter), and the 1% then may be expanded into the full dynamic range of the display subsystem. However, if the density of scatterers in the water fluctuates too much in time or in space, then the fluctuating component is indistinguishable from signal and the background removal process breaks down. From a theoretic viewpoint, it is unfortunate that the system performance hinges on a stability criterion that depends so much on the vagaries of sea conditions as opposed to hard physical constraints such as receiving enough photons. Nevertheless, we can assume some reasonable range of signal-subtraction capability and show that flood illumination in a reasonable field, say 10°, fails at ranges near 4.5 attenuation lengths.

Another matter of some concern in the presence of strong background is the possibility of saturating the detector. However, examination of the performance curves of a number of appropriate video camera tubes shows that their response is linear over the required two or even three orders-of-magnitude. The initial photocathode cannot possibly saturate whether it is the read-out tube or an optically-coupled image intensifier. The final electrical target (for readout) is the element inside the tube that can saturate. Let us call the output current G(B + S) = GB + GS; G for gain, B for background and S for signal from the target. Then G may be selected over a very wide range by proper choice of the number (maybe zero) of intensifier stages and the gain. Assuming proper design (choice of G) the question that remains is whether GB saturates the tube when GS is large enough to overpower noise in the receiver circuit. The published sensitivity curves are linear over a dynamic range that exceeds reasonable values of B/S, say 100 or less, and this indicates that saturation will not be a severe problem.

In the following we assume plausible values of the signal-to-backscatter contrast $C \geq 1\%$ and find the corresponding vision limits as the usable flood angle φ (measured from the good edge of the field-of-view) versus range to the target.

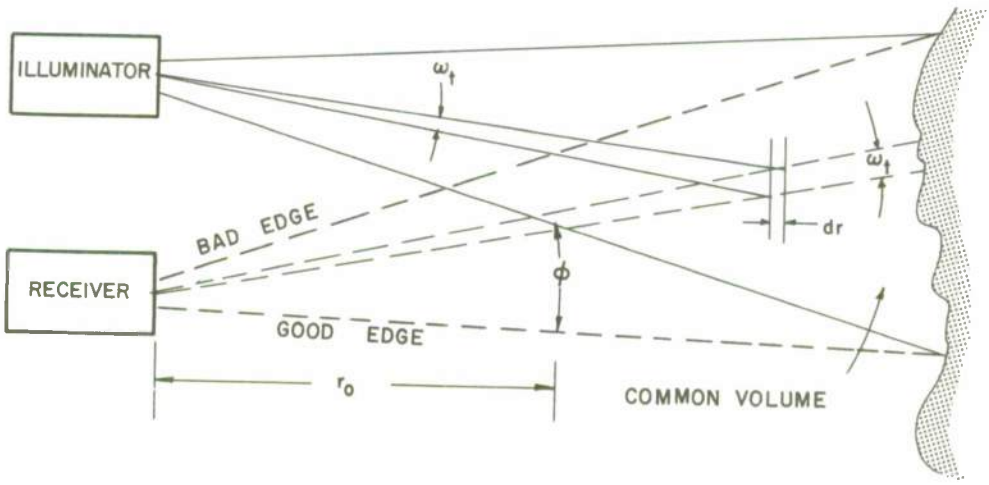


Fig. 8: THE BAD EDGE OF A FLOOD-ILLUMINATED FIELD IS SEEN THROUGH THE MAXIMUM AMOUNT OF LIGHTED WATER

2.2.1 Backscatter Formula

The amount of light contained in a very narrow light beam decays with distance as $\exp(-\alpha r)$. Of course, the exact value of α depends upon just how narrow the aperture intercepting the beam is, but for rough estimates one usually ignores this question because the values are not very sensitive to aperture as long as the beam is small on a scale of a milliradian. In particular we have been using $\exp(-\alpha r)$ for the decay of signal in a resolution cell without regard for any dependence of α upon the size of that cell. Now however, we are concerned with the decay of light in a broad cone. This decay does not rigorously follow an exponential law, but one intuitively expects it to be approximately exponential, and in fact Funk has shown this to be the case (Ref 3). The larger the cone, the less light scatters out of it, and so naturally the conical attenuation coefficient decreases with increasing cone angle. However, if the cone represents a significant field of flood illumination, say 20°, then almost all of the scattered light stays within it, and like α the decay constant is again insensitive to the cone's exact size. We therefore use for the conical decay constant a number called γ which is simply absorption a plus large angle scattering

$$\gamma \approx a + 2\pi \int_{.2}^{\pi} \sigma(\theta) \sin\theta \, d\theta$$

a sum which represents all the events that scatter light out of a cone of half-angle 0.2 radian. The same constant may also be expressed as α minus the small angle scattering constant s_s:

$$\gamma \approx \alpha - s_s = \alpha - \int_{0}^{.2} \sigma \, d\omega .$$

The justification for the above assertions concerning α and γ and their weak dependence on cone angle is discussed in detail in Lect. 4.1.

As typical values we usually use $\alpha = .145 m^{-1}$, and $\gamma = .033 m^{-1}$ from some shallow-water measurements by Mertens and Phillips, but whenever possible we try to express results in ratios such as σ_b/α, or now γ/α, that will remain more or less constant as α varies with water conditions. The ratio γ/α for the case mentioned is 0.228. Consider a detector exposed to the small solid angle ω_t as shown in Fig. 8. The amount of scattered energy it receives from the small range increment dr per unit energy transmitted into ω_t is given by

$$dB = e^{-2\gamma r} \sigma_b dr A/r^2 .$$

The first factor is merely the round-trip attenuation and the rest follows from the definition of $\sigma(\theta)$; i.e., the scattered fraction is σ times an increment along the ray (dr) times an acceptance solid angle (A/r^2). Integrating all such contributions gives

$$B = \sigma_b A \beta \tag{14}$$

where

$$\beta \equiv \int_{r_o}^{R} \frac{e^{-2\gamma r}}{r^2} dr \tag{15}$$

(The notation B and β used here is similar to the previous usage although the formulas are now different for a different kind of scattering event.) The lower limit of this integral is shown in Fig. 8. By simple geometry (similar triangles) one can readily derive a formula for r_o:

$$1/r_o = \varphi/b + 1/R \tag{16}$$

where φ is angle off the good edge (see Fig. 8) and R is the distance at which the good edge meets the light beam (presumably the range to the target). The integral in Eq. 15 readily converts to a tabulated function usually called E_2 (Ref. 4):

$$\beta = \beta'(r_o^{-1}) - \beta'(R^{-1}) = \beta'(\varphi/b + 1/R) - \beta'(1/R) \tag{17}$$

where

$$\beta'(r^{-1}) = r^{-1} E_2(2\gamma r). \tag{18}$$

For cases of interest the second term in Eq. 17 is usually a small correction, and R^{-1} in the first argument is often negligible also.

2.2.2 The Signal-Subtraction Limit

To find the number of backscatter photons detected (without range-gating to suppress them), B is multiplied by the efficiency η and the number of transmitted photons in the solid angle ω_t subtended by a resolution cell, i.e., $E\omega_t/h\nu$. Then (using 14 and 2), the number of backscattered photons per resolution element is

$$N_b = \eta E \omega_t B/h\nu = \pi M \omega_t \sigma_b \beta/4h\nu \tag{19}$$

This will be compared to the number received from the resolution cell on the target:

$$N_c = \rho e^{-(\alpha + \gamma)R} N_o \tag{20}$$

Note the attenuation $\exp(-\gamma R)$ for outgoing light (you don't care if illumination light scatters within the cone) and $\exp(-\alpha R)$ for the return image (you do care if the image is scrambled). Let us set the ratio N_c/N_b equal to C, the target return-to-background ratio, i.e.

$$1/C = N_b/N_c \tag{21}$$

is the maximum factor by which background can exceed the received image, and still allow the latter to be discernable. Substituting Eqs. 20 and 19 in 21 and using 2 gives

$$C = (\rho\alpha/\pi\sigma_b)\ \frac{e^{-(\gamma+\alpha)R}}{(\alpha R)^2}\ \frac{\alpha}{\beta} \tag{22}$$

Eq. 22 is plotted in Fig. 9 for the values of parameters used before, namely

$$a = .145\text{m}^{-1}, \quad \gamma = .033, \quad \sigma_b = 3 \times 10^{-4}\text{m}^{-1}\text{sr}^{-1}, \quad \rho = 0.2.$$

The graphs may be scaled approximately for other values of the parameters by noting that over the range of interest the following approximate proportionalities hold:

$$\beta^{-1} \sim \gamma r_o^2, \quad r_o \sim b/\varphi.$$

(The second of these follows from Eq. 16 and the first from Eqs. 17 and 18 and the general shape of the E_2 function in the region of primary interest.) From these it follows that

$$C \sim (\gamma/\sigma_b)(\alpha b/\varphi)^2\ \rho\,(e^{-(\gamma+\alpha)R})/(\alpha R)^2$$

Hence, the given values of C will scale directly with ρ or inversely with σ_b. If we take as reasonable values, C = 1 to 10%, $\alpha b = 1/3$, φ(bad edge) = 10°, then it follows that vision fails at distances near 4.5 attenuation lengths.

2.2.3 Noise-Limited Resolution

The vision limitation derived in the last section and presented in Fig. 9 turned out to be independent of the size of the resolution cell. It is of some interest to derive the curves of noise-limited resolution analogous to Fig. 6 for the flood-illumination case; although, it turns out that the resolution is quite good over the full range of vision. Two kinds of noise are included, the backscatter from the water as discussed in the last section, and the light reflected from the whole target (mostly from the wrong part as illustrated in Fig. 1b). The latter is given by an equation like Eq. 3 except that γ replaces α because of the wide illumination cone (going out) and wide detector acceptance angle (returning):

$$N_t = N_o \Delta\rho e^{-(\alpha+\gamma)R} \tag{24}$$

The backscatter photon count N_b is given by Eq. 19 as before, and finally N_t, N_s and N_b go into a signal-

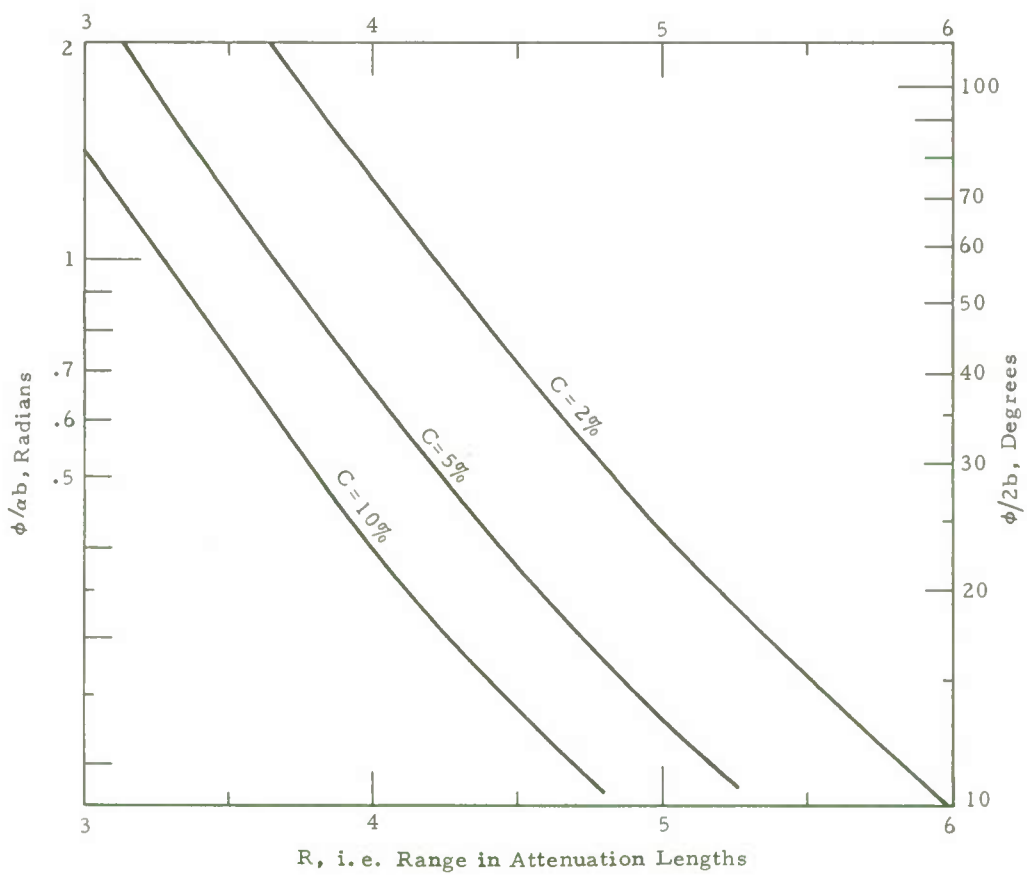


Fig. 9: LIMITATION OF VISION WITH FLOOD ILLUMINATION BUT NO RANGE GATING, USABLE FIELD ϕ VERSUS RANGE WITH DEPENDENCE ON BASELINE b AND MINIMUM CONTRAST C.

to-noise ratio requirement analogous to Eq. 5: $N_s^2/(N_t + N_b) = 10$. The result is readily solved for the size of a square resolution cell, $\varepsilon_s = \sqrt{\omega_t}$, with the result

$$\varepsilon_s = \sqrt{40h\nu/Q}\ \alpha R e^{\alpha R} \sqrt{1 + \pi \sigma_b R^2 \beta e^{2\gamma R}/\rho} \tag{25}$$

This equation is plotted in Fig. 10 for two rather extreme values of Q, 10^{-4} and 10^{-2}. Note that the resolution does not begin to fail until around 5.5 attenuation lengths where the system has already failed owing to the static background criterion (reasonable C). Incidentally, this means that an energetic flood system with a high-power lamp and large receiver aperture (large figure of merit M) does not buy any significant advantage.

A curious feature of Eq. 25 is that in the limit of no backscatter from the water, either near the good edge, exceptional water or range-gated, the second term in the second square root vanishes and the result is identical with Eq. 6 for the ideal dual-scan system. Thus the $\varphi = 0$ dashed curves (good edge) in Fig. 10 are the same as the dashed curves in Fig. 6. This gives an interesting comparison: the flood system has more noise and more signal than the dual-scan in just the proportion to hold signal to noise constant. There is more noise because a larger target area is illuminated at once giving more background light reflected off the target and then scattered. When the transmitted illumination is held constant in the comparison, there is more signal also because illumination decays as $\exp(-\alpha R)$ in the dual-scan case, but only as $\exp(-\gamma R)$ in the flood case. We also found this in Lect. 4.1, where the table of S/N decay rates shows α for both dual-scan and flood with a large resolved target. Some final remarks on the $\varphi = 0$ curves in Fig. 10 are appropriate. They probably represent the range-gated case rather well, but for the ungated case on the good edge they should be interpreted loosely because the illumination drops to half precisely at the edge where $\varphi = 0$. However, a few degrees away from the edge there may be a point where this curve applies if illumination is essentially full but backscatter from the water is still insignificant.

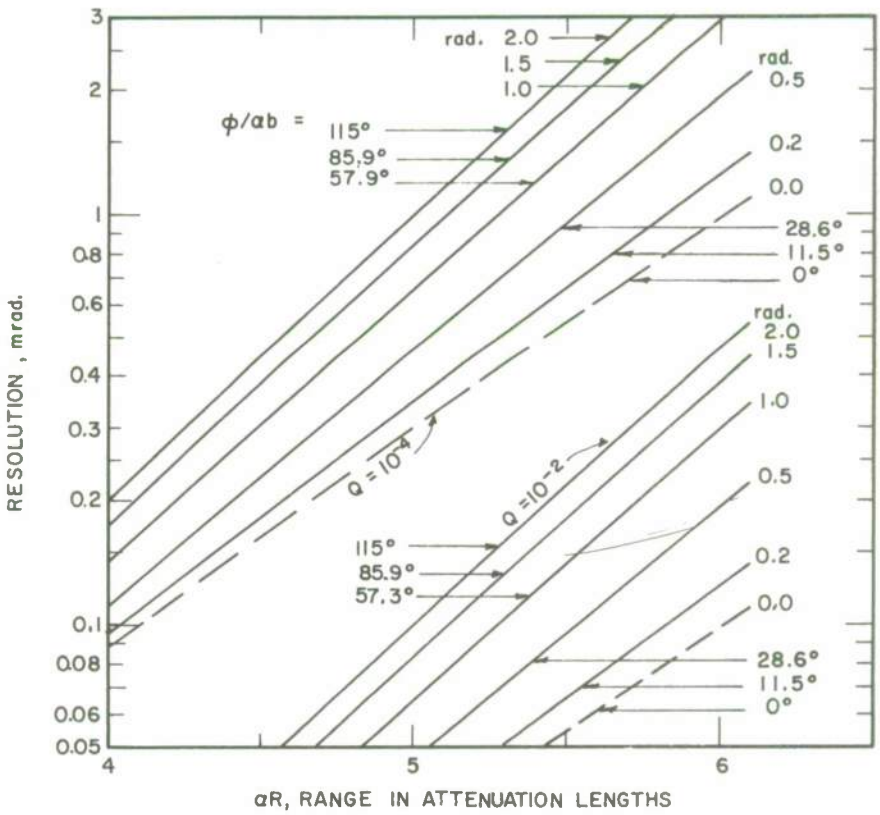


Fig. 10: PHOTON-NOISE-LIMITED RESOLUTION FOR FLOOD ILLUMINATION. The ideal curve, dashed and labeled "0°", applies with sufficient range-gate rejection of backscatter. See the continuation of these curves in Fig. 6.

References

Ref. 1 - Paul Heckman and R. T. Hodgson, IEEE, J. of Quantum Electronics 3, p. 445, Nov., 67.

Ref. 2 - H. Hodara and W. Wells, AGARD Conference Proceedings #77, paper 45, 1970.

Ref. 3 - C. J. Funk, "Multiple Scattering Calculations of Light Propagation in Ocean Water", Applied Optics 2, p. 301, Feb., 73.

Ref. 4 - M. Abramowitz and L. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, N. Y., 1965 or National Bureau of Standards, 1964.

SPATIAL FILTERING AND IMAGE RESTORATION

Henri Hodara
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemead Boulevard, Pasadena, California 91107

ABSTRACT

The exponential dependence of the ocean transfer function on range opens the door to image restoration, since no reference source is required to measure this function along the viewing path. In this lecture, we derive an inverse filter to restore photographs of floodlit targets blurred by turbulence, and discuss its practical limitations. We look into the effects of filter cut-off and show that in order to restore a lineal resolution of width a the filter must have a spatial cut-off frequency equal to 2/a. We also calculate the resolution degradation caused by mismatch between filter and medium transfer functions. Finally, we determine the signal-to-noise ratio needed to achieve various restorations. The trade-off is rather stiff, 20 db additional signal to increase the resolving spatial frequency by 25%. At resolutions larger than 1 mrad, blurring is caused by particle scattering, not by turbulence. Since the scattering function is highly peaked in the forward direction, restoration of resolution can be achieved with a much less increase in signal-to-noise ratio.

The basic technique for restoring and enhancing images degraded by the atmosphere are well known. They all rely on measuring the transfer function of the atmospheric path between target and receiver. This transfer function is highly variable with time and target position, and in practice one monitors it using a reference point source such as a star along an adjacent path. There are no stars in the water !! and this lack of reference has been an obstacle to underwater image processing. Fortunately, recent developments in the scattering theory of light in the ocean allow us to circumvent this stumbling block. Wells' expression for the seawater transfer function (see Lecture 3.3)

$$F(\psi, R) = e^{-D(\psi)R} \tag{1}$$

eliminates the need of a reference source. Measurements of $F(\psi,r)$ at short distance, as described in Lecture 3.3, yield the spatial frequency decay function,

$$D(\psi) = -r^{-1} \ln F(\psi, r) \tag{2}$$

independent of range, from which the transfer function at any arbitrary range R to the target can be determined. The resulting values of F over range of interest provide the necessary base to construct inverse filters to restore resolution by processing.

Image Restoration

The principle of image restoration is simple. Various sources of image degradation are present in the "optical link", i.e., the viewing system and the medium. Each of these sources is characterized by a blur distribution. Image restoration is achieved by inserting filters that deblur the image, essentially a deconvolving operation. The problem is greatly simplified by performing the operation in the Fourier domain where all convolutions are reduced to multiplication of transfer functions and all deconvolutions amount to division by the same function.

In this lecture, we first rederive the overall transfer function, $T(\psi)$ called H*G in Lecture 4.3, in a form that is more suited to image restoration. Recall that ψ, the spatial angular frequency whose conjugate angle variable is θ, only applies to situations exhibiting cylindrical symmetry, such as seawater and circular apertures. In general object and image to not have this symmetry and we must deal with the two-dimensional rectangular Fourier spectrum, of frequencies ψ_x and ψ_y. These frequencies correspond to conjugate space variables x and y properly scaled by target range or focal distance, depending on the choice of transforms on the target (object space) or in the detector focal plane (image space). This is illustrated in Fig. 1. The corresponding transformations are

Rectangular Coordinates

Space Domain		Fourier Domain
x, y		ψ, φ
Object Space	$x = R\theta\cos\varphi'$	$\psi = (\psi/R)\cos\varphi$
	$y = R\theta\sin\varphi'$	$\psi = (\psi/R)\sin\varphi$
Image Space	$x = F\theta\cos\varphi'$	$\psi = (\psi/F)\cos\varphi$
	$y = F\theta\sin\varphi'$	$\psi = (\psi/F)\sin\varphi$

$$\text{Kernel} = e^{i2\pi(x\psi_x + y\psi_y)}$$

Cylindrical Coordinates

Space Domain	Fourier Domain
θ	ψ

$$\text{Kernel} = J_o(2\pi\theta\psi)$$

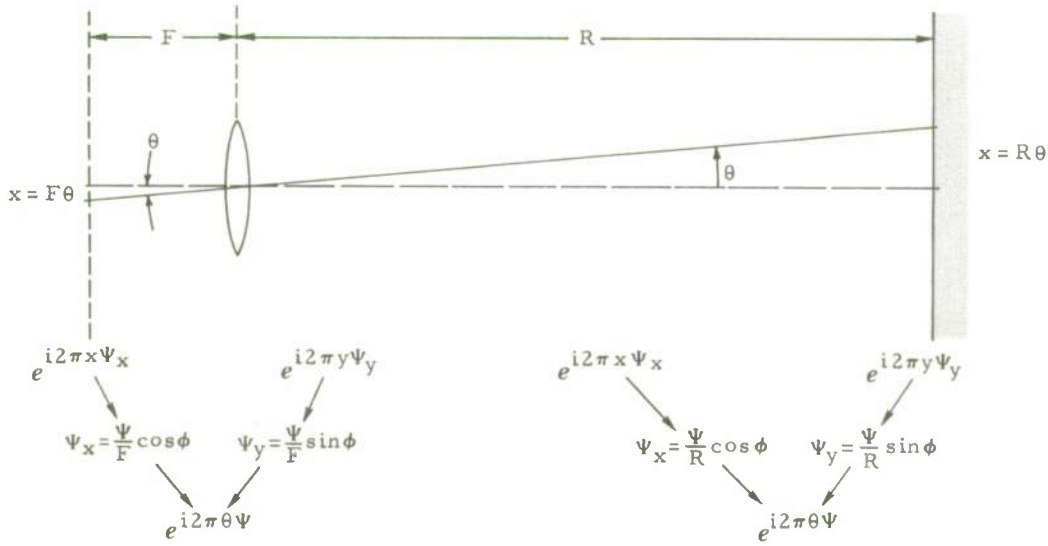


Fig. 1 Geometry for Rectangular and Cylindrical Transforms

In the following we describe our object by a reflectivity $\rho(x, y)$ on an equivalent target plane perpendicular to the line-of-sight and refer all blurring and deblurring operations to the target. The optical link or overall transfer function $T(\psi_x, \psi_y)$ has a Fourier transform given by the blur function

$$t(x, y) = \int T(\psi_x, \psi_y)\, e^{i2\pi(x\psi_x + y\psi_y)}\, dx\, dy \tag{3a}$$

In vector notation,

$$t(x) = \int T(\psi)\, e^{i2\,\bar{x}\cdot\bar{\psi}}\, d^2x \tag{3b}$$

The image of the object $i(x, y)$ referred to the target is the convolution of that blurring function with the target reflectivity.

$$i(\bar{x}) = \int \rho(\bar{x}')\, t(\bar{x} - \bar{x}')\, d^2x' \tag{4}$$

The Fourier transforms of image, reflectivity (object) and blur functions are

$$\begin{pmatrix} I(\bar{\psi}) \\ P(\bar{\psi}) \\ T(\bar{\psi}) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} i(\bar{x}) \\ \rho(\bar{x}) \\ t(\bar{x}) \end{pmatrix} e^{i2\pi(\bar{\psi}\cdot\bar{x})}\, d^2x \tag{5}$$

The image transform follows from (4) and (5):

$$I(\bar{\psi}) = P(\bar{\psi})\, T(\bar{\psi}) \tag{6}$$

To restore the image, we must know $T(\psi)$. Then the problem is almost trivial; the restoring filter is T^{-1} and the transform of the restored image I_r returns the object,

$$I_r(\bar{\psi}) = P(\bar{\psi})\, T(\bar{\psi})\, T^{-1}(\bar{\psi}) = P(\bar{\psi}) \tag{7}$$

The preceding equation contains a basic limitation of all image restorations. The general shape of $T(\psi)$ is a function that decays with increasing frequency, i. e., the high frequency patterns on a resolution bar chart are blurred by scattering more severely than the low frequencies. Hence T^{-1} the reciprocal, is a function that increases with frequency to restore the loss by amplifying the high frequency end of the spatial spectrum. Unfortunately TP at some ψ_{max} decays below the receiver noise level, and T^{-1} then merely amplifies the high frequency noise. No restoring filter T^{-1} can indefinitely amplify high frequencies that have been attenuated by T. Such a filter is not realizable and must be cut-off by a smoothing function; the higher the cut-off, the better the resolution improvement, if noise is absent. Unfortunately, noise is always present; as the cut-off frequency is raised, the noise is eventually introduced at such a rate that a point of diminishing return is reached: resolution improvement is obliterated and even degraded. We shall see later how to calculate the optimum cut-off frequency.

In the following we derive $T(\bar{\psi})$ in rectangular x coordinates and relate it to $T(\psi)$ obtained in Lecture 4. 3. We then address ourselves to the problem of restoring images of flood-lit target taking into account the practical limitations introduced by filter cut-off, filter mismatch and noise.

Derivation of the Overall Transfer Function $T(\psi)$

The overall transfer function $T(\psi)$ for the general case of dual-scan geometry is derived in Lecture 4. 3. This configuration is particularly convenient since it reduces to many others, in par-

ticular flood-lit photographs, by broadening the illuminating beams and reducing the detector aperture to a point. In general, images to be restored do not have the circular symmetry. We must then express $T(\psi)$ in rectangular coordinates. For completeness we present again its derivation in this lecture, directly in the coordinate system of interest.

Fig. 2 shows the geometry of the dual-scan and the projections on the target plane of all the blur functions. As mentioned in the previous section, referring everything to the target plane makes the resultant expression much simpler. We carry out the derivation in two dimensions but illustrate it in one dimension in Figs. 2b through 2e. The extension to two dimensions is trivial: change all variables from scalar x to vector $\bar{x} = (x, y)$.

Refer to Fig. 2a; Transmitter and receiver are focused on a point of coordinates $\bar{x}$ on the target. Fig. 2b shows the unscattered source beam irradiance distribution $h(\bar{\xi})$ in watts/m^2 centered at $\bar{x}$ on the target. Fig. 2c shows each element of the distribution $h(\bar{\xi})$ scattered by the water spread function, $f(\bar{\xi})$ and giving rise to an irradiance at $\bar{u}$,

$$dh(\bar{u}) = h_o(\bar{\xi})\, f(\bar{u} - \bar{\xi})\, d^2\xi \tag{8}$$

The total irradiance is $h(\bar{u})$, the sum (convolution) of all the contributions from the unscattered source distribution:

$$h(\bar{u}) = \int_{-\infty}^{\infty} h_o(\bar{\xi})\, f(\bar{u} - \bar{\xi})\, d^2\xi \tag{9}$$

The source beam irradiance after scattering through the water is spread on the target about $\bar{x}$ (see Fig. 2d) according to

$$h(\bar{u} - \bar{x}) = \int h_o(\bar{\xi})\, f[(\bar{u} - \bar{x}) - \bar{\xi}]\, d^2\xi \tag{10}$$

Each element of irradiance $h(\bar{u} - \bar{x})\, du$ located at u on the target is reduced by the reflectivity $\rho(u)$ at that point and is scattered by the water on its way back towards the receiver (Fig. 2e). Thus the radiance element is broadened by the water spread function, f, at some arbitrary point $(\bar{\eta})$ referred to the target (Fig. 1f) it has a flux distribution

$$d\Phi(\bar{\eta} - x) = \rho(\bar{u})\, h(\bar{u} - \bar{x})\, f(\bar{u} - \bar{\eta}) d^2u \tag{11}$$

The total flux (watts) in the image of the target at $\bar{x}$ gathered by a detector focused on that point and having sensitivity $g_d(\bar{y} - \bar{x})$ [in units of m^{-2}] is from Fig. 1g

$$i(\bar{x}) = \iint \rho(u)\, h(\bar{u} - x)\, f(\bar{u} - \bar{\eta}) g_d(\bar{\eta} - \bar{x})\, d^2u\, d^2\eta \tag{12}$$

Define the receiver sensitivity profile through the medium as

$$g(u) = \int g_d(\bar{\eta}) f(\bar{u} - \bar{\eta})\, d^2\eta \tag{13}$$

Eq. (12) for the image reduces to

$$i(\bar{x}) = \int \rho(\bar{u})\, h(\bar{u} - \bar{x})\, g(\bar{u} - \bar{x})\, d^2u \tag{14}$$

As pointed out in Lecture 4.3, $i(x)$ can be interpreted as follows: $g(\bar{u})$ is the fractional intensity in the blur distribution per unit area on the target from a luminous source filling up the detector aperture with sensitivity normalized

$$\int g_d(\bar{u})\, d^2u = 1 \qquad [g_o(\text{Lecture 4.3}) = g_d \omega_d R^2] \tag{15}$$

$h(\bar{u})$ is the power irradiance distribution per unit area on the target from a one watt source. As discussed in that lecture, hg is the differential target return taking into account the effects of scattering on transmitter beam and detector apparent beam widths convolved with the target reflectivity.

We now take the transform of both sides of Eq. (12) after recalling that the transform of a product is the convolution of the transforms and denoting convolution by the $\star$ symbol, we find the results of Lecture 4.3

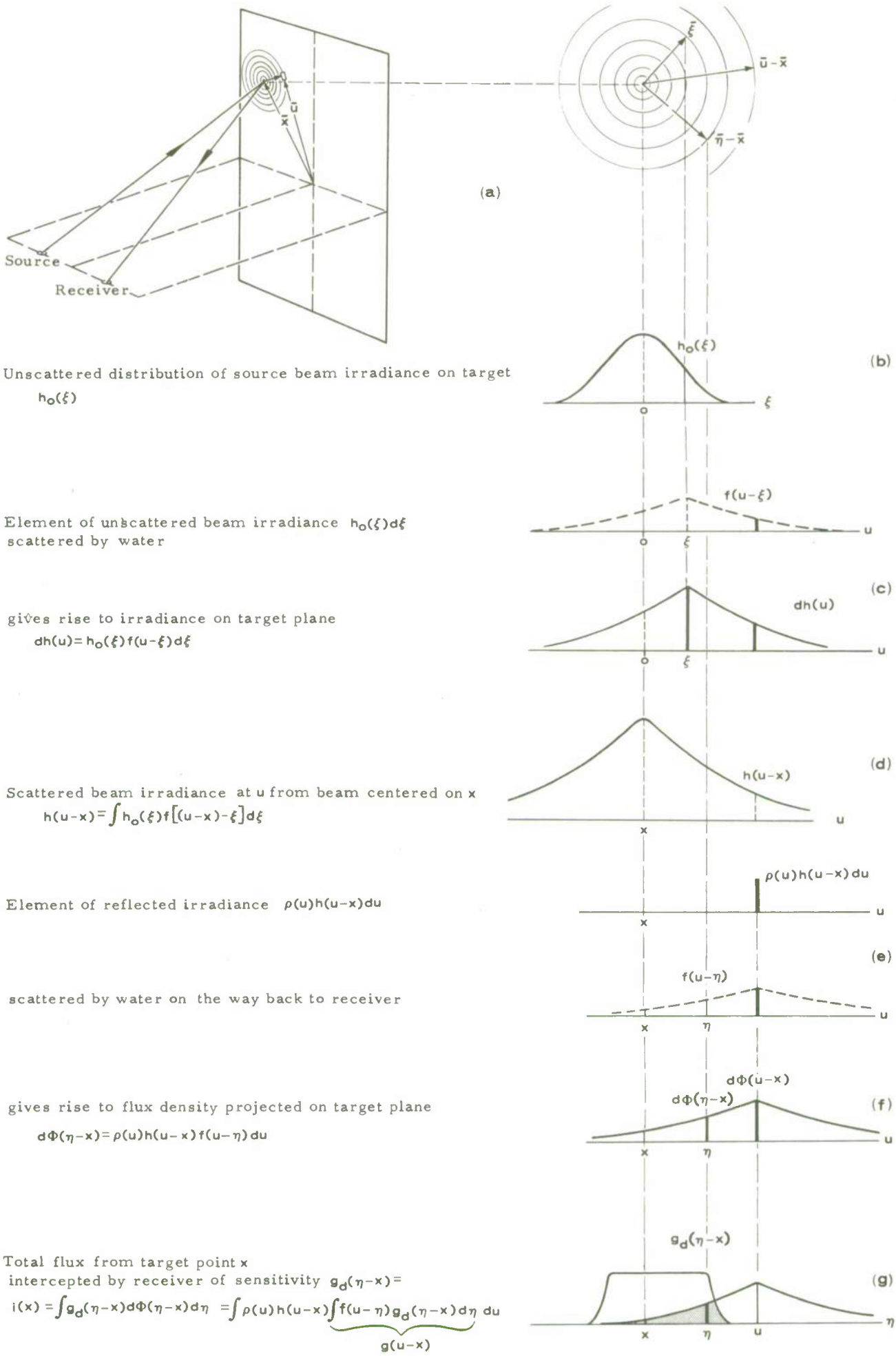
$$I = P \cdot G \star H \tag{16}$$

The round trip transfer function is

$$T(\bar{\psi}) = G \star H \qquad (\psi = \psi_x, \psi_y) \tag{17}$$

so that the transform of the image is

$$I = P \cdot T \tag{18}$$



Unscattered distribution of source beam irradiance on target
$h_o(\xi)$

Element of unscattered beam irradiance $h_o(\xi)d\xi$
scattered by water

gives rise to irradiance on target plane
$dh(u) = h_o(\xi)f(u-\xi)d\xi$

Scattered beam irradiance at u from beam centered on x
$h(u-x) = \int h_o(\xi)f[(u-x)-\xi]d\xi$

Element of reflected irradiance $\rho(u)h(u-x)du$

scattered by water on the way back to receiver

gives rise to flux density projected on target plane
$d\Phi(\eta-x) = \rho(u)h(u-x)f(u-\eta)du$

Total flux from target point x
intercepted by receiver of sensitivity $g_d(\eta-x) =$

$$i(x) = \int g_d(\eta-x)d\Phi(\eta-x)d\eta = \int \rho(u)h(u-x)\underbrace{\int f(u-\eta)g_d(\eta-x)d\eta}_{g(u-x)}\,du$$

Fig. 2: Derivation of Round Trip Transfer Functions

The image flux distribution is the inverse transform of the above equation

$$i(x) = \int P(\bar{x}')\, t(\bar{x} - \bar{x}')\, d^2x' \tag{19}$$

namely the convolution of the round trip blur function with the target reflectivity.

Application to Image Restoration

We shall investigate for the remainder of this lecture how to restore an image blurred by ocean turbulence. We must now express $T(\bar{\psi})$ in terms of rectangular coordinates. The seawater transfer function is usually expressed in cylindrical coordinates because of the inherent circular symmetry of scattering at small angles. The transformation between cylindrical and rectangular spatial frequencies, referred to the target plane is from Fig. 1:

$$\psi_x = \psi \cos \varphi / R \tag{20}$$

$$\psi_y = \psi \sin \varphi / R \tag{21}$$

We must now choose a specific imaging system. We take a conventional photographic system with flood illuminated target, a case of practical interest. If the target is large enough to be considered infinite in extent, then the scattered irradiance falling on it is uniform and $h(\bar{u}) = 1$, in Eq. (12), it follows that,

$$H(\bar{\psi}) = \int 1 e^{i2\pi\bar{\psi}_x \cdot \bar{u}}\, d^2u = \delta_2(\bar{\psi}) \tag{22}$$

$\delta_2(\bar{\psi}) = \delta(\psi_x)\delta(\psi_y)$ is the two-dimensional delta function in rectangular coordinates. The photographic grain of the film acts as a point detector with sensitivity profile $g_o(\bar{u}) = \delta_2(\bar{u})$ resulting in a receiver sensitivity profile through the medium,

$$g(\bar{u}) = \int \delta_2(\bar{\eta})\, f(\bar{u} - \bar{\eta})\, d^2\bar{\eta} = f(\bar{u}) \tag{23}$$

the corresponding receiver transfer function through the medium

$$G(\bar{\psi}) = F(\bar{\psi})\ ; \tag{24}$$

reduces to the water transfer function. The round trip transfer function given by Eq. (19),

$$T = F(\bar{\psi}) * \delta_2(\bar{\psi}) = F \tag{25}$$

is now identical with the water transfer function, the simplest case.

For a turbulent ocean, (see Lecture 3.3)

$$F(\psi) = \exp(-(\pi\theta_o\psi)^2) \tag{26}$$

Recall that ψ, the cylindrical transform variable is related to $\bar{\psi} = (\psi_x, \psi_y)$ by Eq. (22). Furthermore, using the approach in Lecture 2.2 it is readily shown that

$$\theta_o^2 = \langle \Delta n^2 \rangle \frac{R}{L_c} \tag{27}$$

where $\langle \Delta n^2 \rangle$ is the mean square refractive index fluctuation, R the path length and L_c the scale size of the turbulent inhomogeneities. Using the transformation (25), we now have a simple expression $T(\psi)$ in rectangular coordinates

$$T(\psi) \equiv F(\psi) = \exp[-\pi^2 \langle \Delta n^2 \rangle (R/L_c)(\psi^2)] \tag{28}$$

We define the medium characteristic frequency ψ_o by

$$(2\psi_o)^{-2} = \pi^2 \langle \Delta n^2 \rangle R/L_c = (\pi\theta_o)^2 \tag{29}$$

thus reducing the transfer function to

$$T(\psi) = \exp[-(\psi_x^2 + \psi_y^2)/2\psi_o^2] \tag{30}$$

From Eqs. (20) and (30) the image transfer function is

$$I(\psi_x, \psi_y) = P(\psi_x, \psi_y) \exp[-(\psi_x^2 + \psi_y^2)/2\psi_o^2] \tag{31}$$

The preceding equation has a nice simplifying feature. It is separable in ψ_x and ψ_y which means that to restore images blurred by ocean turbulence we can carry out the inverse filtering in one dimension on a narrow bar of width a. That such turbulences exist in the ocean is convincingly shown in Fig. 3, photographs of a bar chart taken by L. Mertens under quiet and turbulent conditions.

Inverse Filter Cut-Off Limitations

The restoring filter response, the reciprocal of Eq. (30), grows exponentially with spatial frequency. Obviously such a filter is not realizable digitally or otherwise, and must be cut-off. A sharp cut-off introduces undesirable oscillations or ghosts in the image of the edge of the bar, and to avoid them the filter response is terminated with a smoothing Gaussian cut-off function. What the cut-off filter does to the image is the subject of this section. As mentioned in the preceding section, it is sufficient to carry out the analysis in one-dimension.

The transform of the reflectivity function is $P(\psi_x)$; turbulence in the water blurs the image and gives rise to the medium transfer function

$$F(\psi_x) = e^{-\psi_x^2/2\psi_o^2} \tag{32}$$

The restoring filter is the inverse of Eq. (32) multiplied by the Gaussian cut off filter F_c:

$$F_c(\psi_x) = e^{-\psi_x^2/2\psi_c^2} \tag{33}$$

Note that ψ_c in (33) and ψ_o in (32) are respectively the cut-off frequency of the terminating filter and the characteristic frequency of the medium. The restored image is

$$\rho_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\psi_x) \underbrace{e^{-\psi_x^2/2\psi_o^2}}_{F} \underbrace{e^{+\psi_x^2/2\psi_o^2}}_{F^{-1}} \underbrace{e^{-\psi_x^2/2\psi_c^2}}_{F_c} e^{i2\pi x\psi_x} d\psi_x \tag{34}$$

which reduces to

$$\rho_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\psi_x)\, e^{-\psi_x^2/2\psi_c^2}\, e^{i2\pi x\psi_x} d\psi_x \tag{35}$$

The one-dimensional transform of a white bar (unit reflectivity) of width a in the narrow dimension and surrounded by a black background is

$$P(\psi_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, e^{i2\pi\psi_x x}\, dx = \int_{-a/2}^{a/2} e^{i2\pi\psi_x x}\, dx = a \operatorname{sinc}(\pi\psi_x a) \tag{36}$$

Substituting (36) into (35) yields the restored image after recalling that the transform of a product is the convolution of their respective transform

$$\rho_r(x) = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{erf}\left[\pi\sqrt{2}(\psi_c a/2)(1 + \frac{x}{a/2})\right] + \operatorname{erf}\left[\pi\sqrt{2}(\psi_c a/2)(1 - \frac{x}{a/2})\right]\right\} \tag{37}$$

The quantity $(\psi_c a)$ is recognized as a space-bandwidth product. Plots of $\rho_r(x)$ for space bandwidth products of 1/2 and 2 are illustrated in Fig. 4. They clearly show that in order to restore the image with sufficient resolution, the cut-off filter frequency must be approximately 4 times the sampling frequency, 1/2a.

Mismatch Between Medium and Restoring Filter Transfer Functions

Restoration of an image blurred by turbulence requires a filter whose transfer function is a perfect match to the inverse transfer function of turbulent seawater, $F(\psi_x) = \exp[-\psi_x^2/2\psi_o^2]$. The inherent variability of ocean optical parameters introduces uncertainty in the determination of the proper inverse filter function, that is in the exact value of ψ_o. A mismatched value may result in further image blurring of the very image we are trying to restore. To calculate the effect of the mismatch, we assume a restoring filter, F_r not quite equal to the inverse seawater transfer function.

$$F_r(\psi_x) = \exp\left[+\psi_x^2/2(\psi_o \pm \Delta\psi_o)^2\right] \tag{38}$$

The overall filter transfer function operating on $P(\psi_x)$ is approximately

$$FF_r = \exp[\pm(\psi_x/\psi_o)^2 \Delta\psi_o/\psi_o] \tag{39}$$

The approximation is based on the assumption that we know how to select a filter for a particular water, close enough to its true value so that

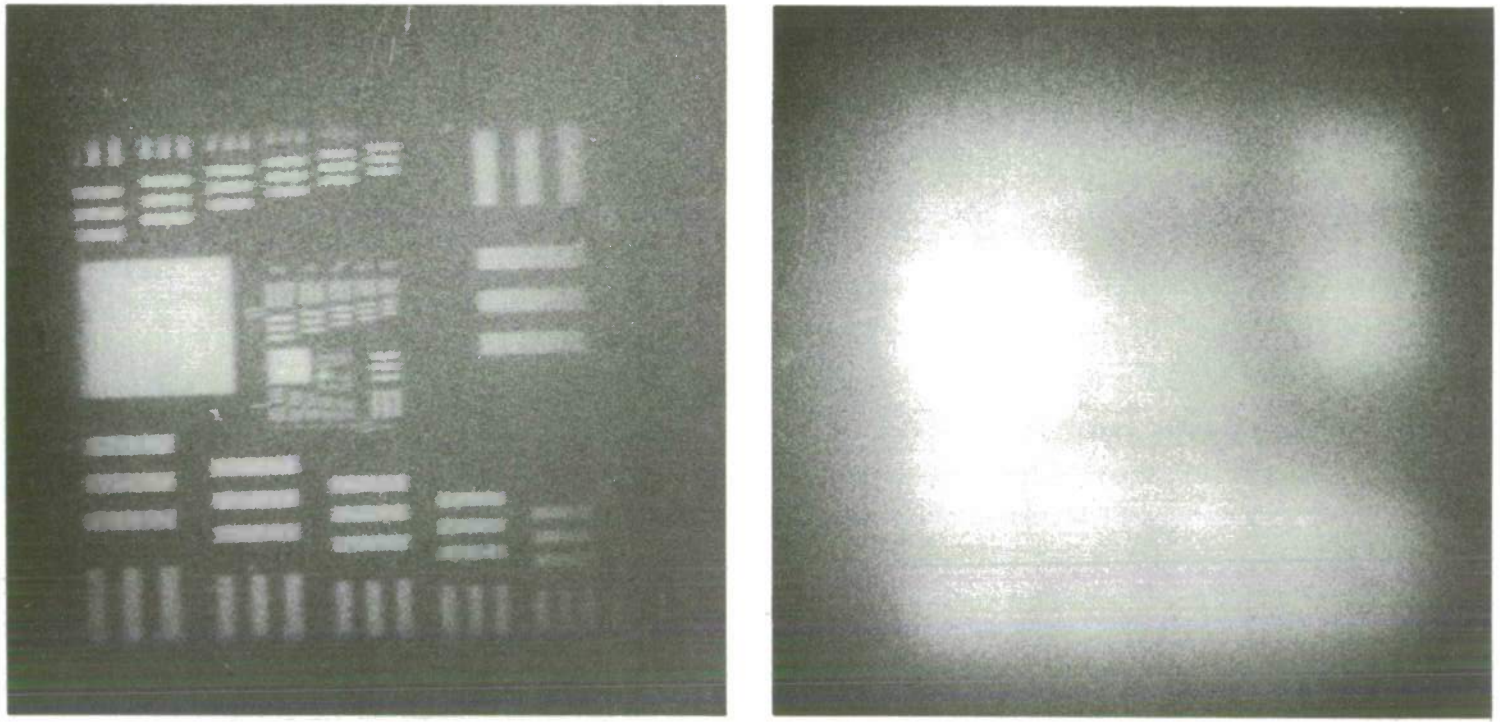


Fig. 3: Image Blurring Caused by Underwater Thermal Turbulence at 5 Meter Depth ($\alpha = .213\ m^{-1}$)

[The Bar-chart is back-lit at a range of 47 meters)

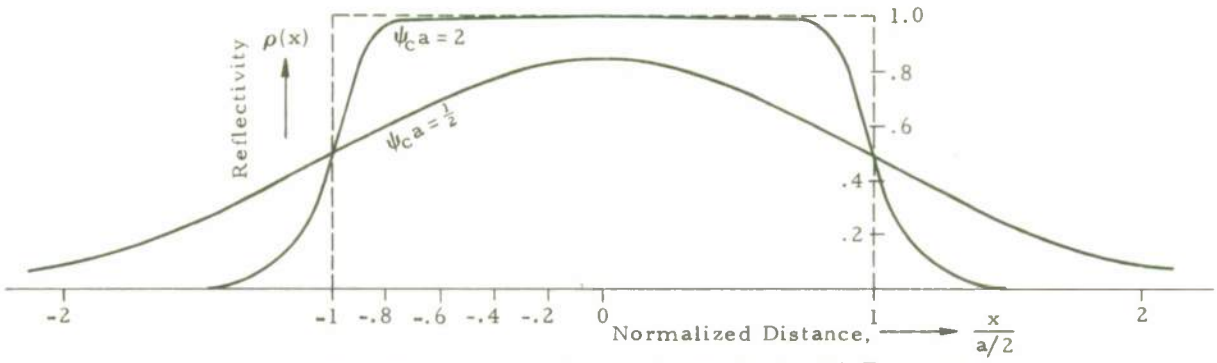


Fig. 4: Edge Response for Different Space-bandwidth Products

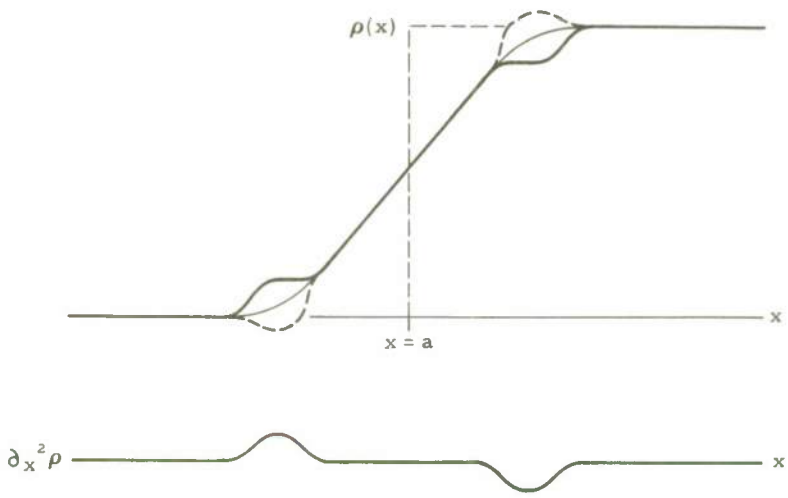


Fig. 5: Greatly Exagerated Edge Response Due to Smoothing Filter and Mismatched Inverse Filter

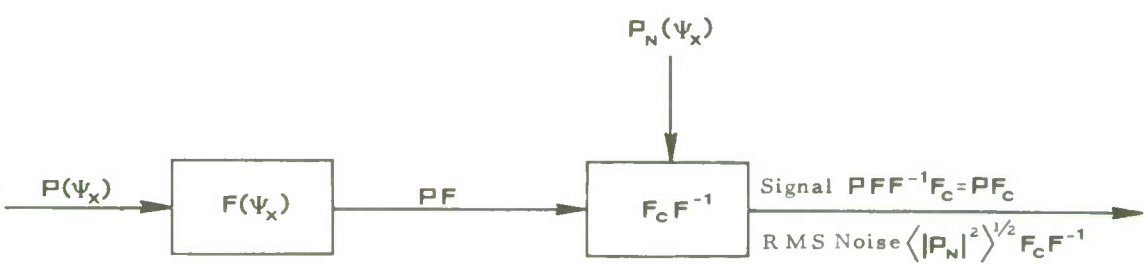


Fig. 6: Block Diagram Showing Effect of Noise on Image Transform

$$(\Delta\psi_o/\psi_o)^2 << 1$$

If we can't fulfill that inequality, we have no business attempting image restoration. The choice of the $\pm$ sign in Eq. (38) is obvious. We cannot err by choosing a filter $F_r = \exp[\psi^2/2(\psi_o - \Delta\psi_o)^2]$, otherwise our restoration blows up; the restored image is the transform of $P(x)\,FF_r$ and is given by the integral

$$\rho_r(x) = \int P(\psi_x)\, e^{-(\psi_x^2/\psi_o^2)(\Delta\psi_o/\psi_o)} e^{i2\pi x\psi_x}\, d\psi_x$$

which is unbounded.

The restored image is characterized by white bar response

$$\rho_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} a\,\mathrm{sinc}(\pi\psi_x a) e^{-(\psi_x^2/\psi_o^2)(\Delta\psi_o/\psi_o)} e^{i2\pi x\psi_x}\, d\psi_x \tag{40}$$

The integration is easily carried out by remembering that the transform of a product of two functions is the convolution of their transforms. However, it is much more enlightening to expand the restoring filter function to second order in ψ_x

$$F_r(\psi_x) = 1 - \frac{\psi_x^2}{\psi_o^2}\,\frac{\Delta\psi_o}{\psi_o} \tag{41}$$

Substituting (41) into (40) after recalling that $P(\psi_x) = a\,\mathrm{sinc}\,(\pi\psi_x a)$, we obtain

$$\rho_r(x) = a\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(\pi\psi_x a)\, e^{i2\pi x\psi_x} d\psi_x - \frac{\Delta\psi_o}{\psi_o}\int_{-\infty}^{\infty} P(\psi_x)\,\frac{\psi_x^2}{\psi_o^2}\, e^{i2\pi x\psi_x} d\psi_x \tag{42}$$

The first integral is obviously the initial object reflectivity function $\rho(x)$. To evaluate the second integral we note that

$$\partial_x^2\rho(x) = P(\psi_x)(i2\pi\psi_x)^2 e^{i2\pi x\psi_x} d\psi_x \tag{43}$$

which leads to

$$\rho_r(x) = \rho(x) + \frac{\Delta\psi_o}{\psi_o}\,\frac{1}{(2\pi\psi_o)^2}\,\partial_x^2\,\rho(x) \tag{44}$$

In practice, the first term of (44) is never identical to the object reflectivity since the restoring filter always incorporates a smoothing function. The restored image then lacks sharp edges; it is further degraded by the second term of (44) which blurs the edge with the wiggles shown in Fig. 5 and occurring in the portion of the edge response exhibiting curvature. Note that the choice of the + sign in $(\psi_o + \Delta\psi_o)$ of Eq. (38) is consistent with the algebraic value of wiggles. The opposite sign would have yielded the dotted wiggles in the figures and lead to a resolution improvement, an obvious impossibility.

Image Restoration and Noise

The inverse or deblurring filter $\exp[+\psi_x^2/2\psi_o^2]$ has a spectral response that increases monotonically with spatial frequency. As we tend to increase resolution with a higher filter cut off, eventually a frequency is reached where the spectral noise density exceeds that of the signal, and any further increase degrades the image. To calculate where that frequency occurs, refer to the block diagram of Fig. 6 where additive noise is represented by an equivalent reflectivity $P_n(\psi_x)$. The mean square output is (using * for complex conjugate and Rc for "real part of")

$$\left\langle (PF_c + P_n F^{-1} F_c)(P F_c + P_n F^{-1} F_c)^* \right\rangle = |P|^2 F_c^2 + \left\langle |P_n|^2 \right\rangle (F^{-1} F_c)^2 + 2F_c F^{-1}\mathrm{Re}(P P_n^*) \tag{45}$$

The last term in the expansion of Eq. (45) is zero since noise and signal are uncorrelated. The second term in the preceding equation is the spectral power density† of the noise that contaminates the restored image.

The ratio of the signal-to-noise spectral powers is from (45)

$$\frac{|P|^2 F_c^2}{\left\langle |P_n|^2 \right\rangle (F^{-1} F_c)^2} = \frac{|P|^2 F^2}{\left\langle |P_n|^2 \right\rangle} \tag{46}$$

We want this ratio to exceed unity at all frequencies where image restoration takes place, otherwise the deblurring gained through the inverse filter is swamped out by noise. Restoring frequencies beyond the cut off where the signal-to-noise ratio of Eq. (46) is less than unity only makes things worse. Recall

†- Actually the term "power spectrum" comes from the concept of temporal frequency since energy/time is power. By analogy a spatial frequency should give rise to an "intensity spectrum" since energy/area or distance, is intensity; however, the term "power spectrum" is so ingrained in the vernacular that we use it here.

that the inverse filter increases monotonically with frequency, enhancing both noise and signal spectral components by the same amount, thus introducing more noise than signal beyond that cut off. Before we go on to calculate that frequency refer to the plots of Fig. 7 in order to get some feeling for the relative magnitude of the effects we are talking about. In this figure we show a plot of the signal power spectrum for a white bar [see Eq. (36)]

$$|P|^2 = a^2 \operatorname{sinc}^2(\pi a \psi_x) \tag{47}$$

and its spectral power output normalized to unit total power

$$a^{-2}|P\,F|^2 = \operatorname{sinc}^2[\pi a \psi_o (\psi_x/\psi_o)] e^{-\psi_x^2/\psi_o^2} \tag{48}$$

after it is blurred by the ocean transfer function (first block in Fig. 6)

$$F^2 = e^{-\psi_x^2/\psi_o^2} \tag{49}$$

The blurred image spectral intensity is the heavy solid line in the figure. We have chosen for this example a space bandwidth product $\psi_o a = 1/2$. Note that in spite of the fact that medium and target have approximately the same spectrum, the image is the product of both spectra which results in significant resolution degradation.

The maximum frequency for which restoration pays off is that frequency where noise and image intensity spectra cross over. It is reasonable to assume white noise, e.g.,

$$\left\langle |P_n(\psi)|^2 \right\rangle = \text{constant} \tag{50}$$

since random reflectivity fluctuations on the target are swamped out by photon fluctuations and the latter have a flat spectrum. As a first example we choose a flat noise spectral intensity, 20 db below the peak image spectrum. The cross-over between noise and image spectral intensity is easily calculated by setting $a^{-2}\,|P\,F|^2$ in Eq. (48) equal to 10^{-2}. The cross-over occurs at

$$\psi_c = 1.5\,\psi_o$$

Since the ordinate of Fig. 7 is linear, the -20 db spectral noise intensity cannot be shown accurately; it practically coincides with the horizontal axis of the figure, its intersection with the blurred image spectrum being approximately at the first null of the latter. The restored image is plotted in Fig. 8 using Eq. (37) repeated below with the space bandwidth product $\psi_o a = 1/2$:

$$\rho_r(x) = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\psi_c}{\psi_o}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\frac{\psi_c}{\psi_o}\right)\right\} \tag{51}$$

We have also calculated how far the filter cut-off frequency can extend in order to get additional resolution improvement if the noise level is down -40 db. The answer is $\psi_c = 1.88\,\psi_c$ and the restored image is also plotted in Fig. 8. Plotted on the same figure are the original target reflectivity (white bar or square pulse of unit amplitude) and the unrestored image which corresponds obviously to a cut off filter with $\psi_c = \psi_o$. The significant result of Fig. 8 is the high price one has to pay in increased signal-to-noise ratio (from 20 to 40 db) for a small resolution improvement ($\psi_c = 1.5\,\psi_o$ to $\psi_c = 1.88\,\psi_o$). This costly trade-off comes about from the fact that Gaussian blurring functions are rounded. In most cases, the resolution of ocean imaging systems is of the order of 1 milliradian, a resolution too coarse to be limited by ocean turbulence. It is however limited by particle scattering, but in this case image restoration can be achieved at a much lower cost in signal-to-noise ratio since the ocean particle scattering function is highly peaked in the forward direction.

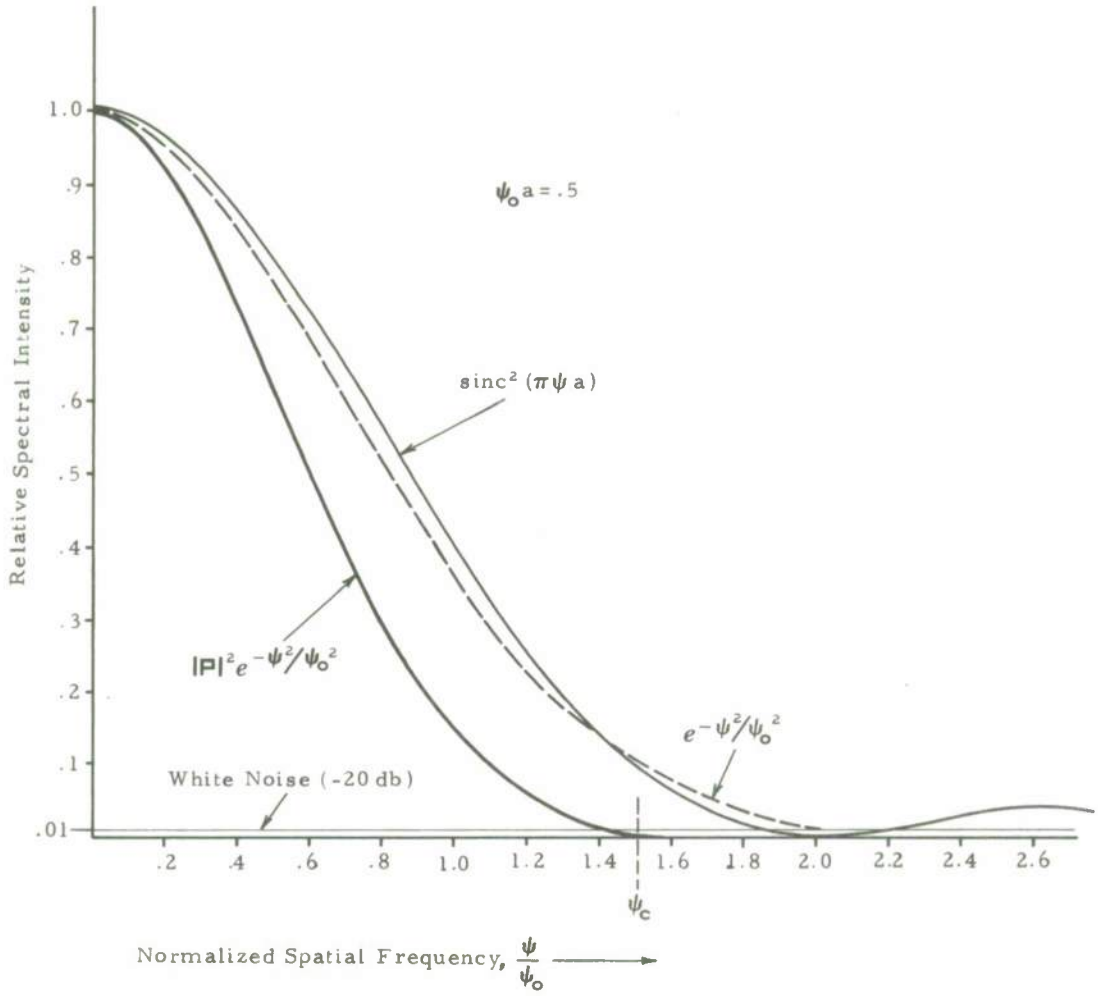


Fig. 7: Spectral Intensity of Noise, Blurred and Unblurred Images and Spectral Turbulence Transfer Function

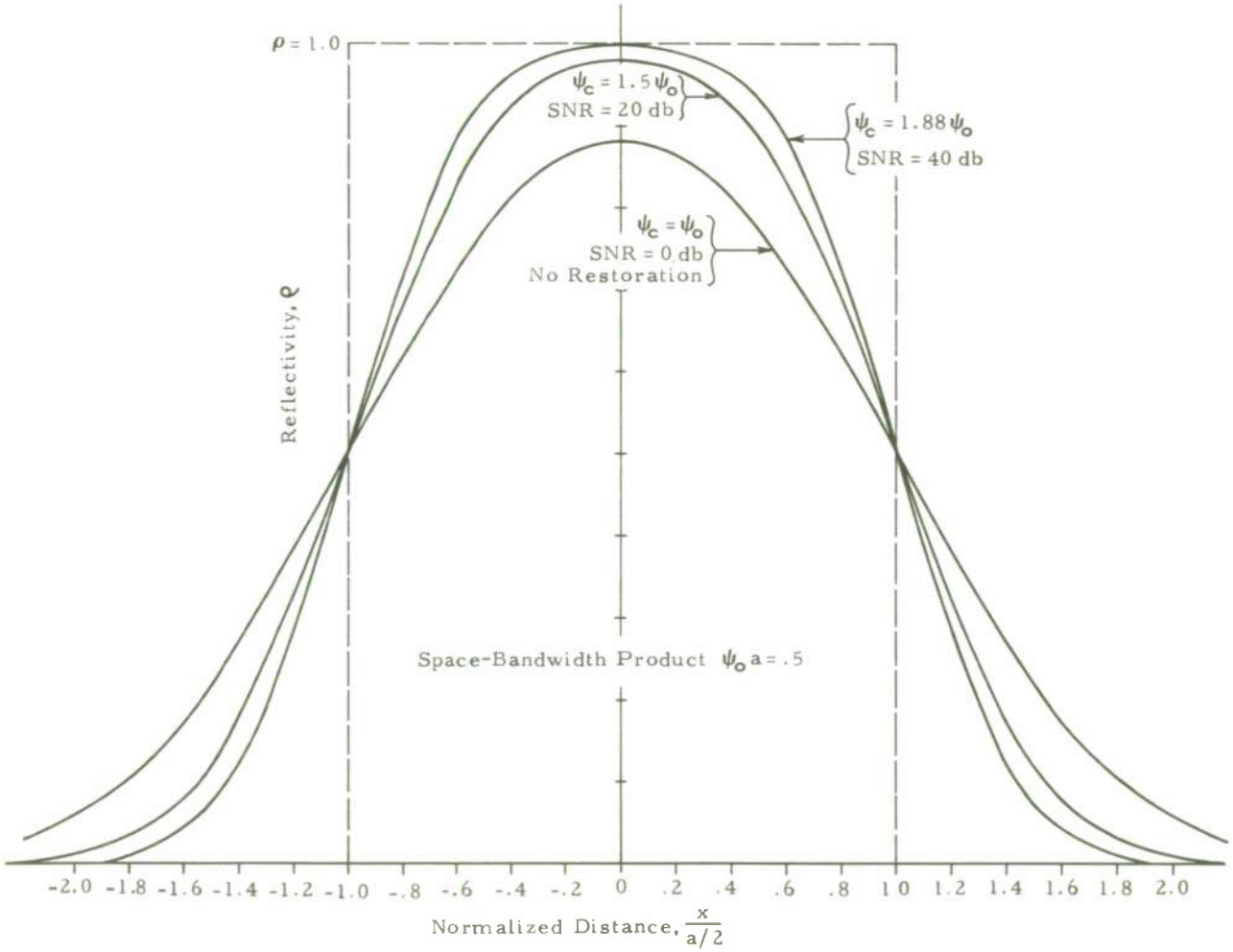


Fig. 8: Restored White Bar for Different Filter Cut-Off Frequencies, ψ_o

FORTRAN ALGORITHMS FOR UNDERWATER OPTICS

Willard H. Wells
Tetra Tech, Inc., 630 North Rosemeand Boulevard, Pasadena, California 91107

Abstract

This lecture consists of two parts. The first describes Fortran subroutines having gereral utility in a variety of computer programs. Subroutine BESJ0 computes the Bessel function J_0 needed for the Fourier-Bessel transform, and BESJ1 computes J_1 needed for the Fourier transform of a circle function. The transform of a product of transfer functions has particularly annoying properties for numerical integration. Subroutine INTPROD has solved these and made the programming relatively easy. It operates on a set of functions $F_n(t)$ defined by tables of F_n and t and computes

$$G(a_1, a_2, \cdots a_N) = \int F_1(a_1 x) F_2(a_2 x) \cdots F_N(a_N x) dx$$

without the programmer having to concern himself with suitable increments for integration and interpolation in the function tables. Subroutine CONVLV is an example of the above equation. It computes a distribution of scattered irradiance by transforming the product of the seawater MTF times the transform of the unscattered light distribution. Simple subroutines FIT4 and PLOTFAM are particularly suited for interpolating and plotting scattering data. Finally POISSON provides realistic photon statistics for computing simulated images to predict system performance.

The second part gives an example of a complete program. We selected one having utility for fundamental studies of water properties. It accepts a number of point spread functions measured at different distances and computes $D(\psi)$, the spatial frequency decay function from each of them. The resulting functions are nearly identical if the input data are self consistant.

Our analytical treatment of light scattered by particles and turbulence in the sea has emphasized the ease of computing in the frequency domain. Therefore, you might expect that the Fast Fourier Transform would be the central feature of the computer algorithms, but this is not the case for the ones described here. There are two reasons for this. First, the volume scattering function $\sigma(\theta)$, the point spread function $f(\theta)$, and their counterparts $D(\psi)$ and $F(\psi)$ in the frequency domain are not naturally defined on a linear scale as the FFT would require. For example, suppose σ or f is needed from 10^{-4} radians to 0.2 radians, small angles for resolution, and larger angles for background light (scattered after reflection from the target). Over this range, $0.2/10^{-4} = 2000$ points would be required to describe the function on a linear scale. Only 133 points are needed on a logarithmic scale with 40 points per order of magnitude, which corresponds to 6% change in θ per point. The same argument holds in the frequency domain where the corresponding spacial frequencies are $\psi = 1/2\theta$ cycles per radian, or $2.5 \leq \psi \leq 5000$. The second reason for not using the Fast Fourier Transform is that the scattering occurs in the two-dimensional space perpendicular to the line of sight, and so the FFT would have to operate on two-dimensional arrays, an even larger amount of storage. We prefer to take advantage of symmetry, integrate over the angle around the beam and express all transforms in the radial variable only. In this case Bessel functions are involved, and it is no longer possible to use the FFT algorithm. Ultimately the two-dimensional FFT will be needed to take the transform of underwater images. This application will arise either in image enhancement, where the inverse filter has been derived from the symmetrical Fourier-Bessel theory (Lect. 5.5) or in the inverse problem of simulating image degredation as a step in performance prediction for underwater vision systems.

Recall that the basic equations for the Fourier-Bessel transform and its inverse are

$$F(\psi) = 2\pi\int_0^{\theta_{max}} J_0(2\pi\theta\psi) f(\theta)\theta\, d\theta, \quad \text{(a)} \quad \text{and} \quad f(\theta) = 2\pi\int_0^{\infty} J_0(2\pi\theta\psi) F(\psi)\psi\, d\psi \quad \text{(b)}. \qquad (1)$$

Before going into detail, let us review the functions that are transforms of one another as given in Table 1 on the following page. In the usual operational situation when the optics are all at one end of the propagation path, f, F, D on the second line of the table stand for f^f, F^f, D^f, and D^f is related to D^c in the top line by

$$D^f = \int_0^1 D^c(\psi t)\, dt, \qquad D^c = \psi\, dD^f/d\psi$$

From here on, the lecture is divided into two parts. Part 1 gives Fortran subroutines that are generally useful in various programs we have written, and Part 2 gives an example of a complete program. The latter is a program that takes point spread functions measured at different ranges and solves for $D(\psi)$, which should be independent of range, but in fact slight discrepancies arise and give a family of $D(\psi)$ curves that must be averaged for a best estimate of the true frequency decay function.

1.0 GENERALLY USEFUL SUBROUTINES

This part gives subroutines for Bessel functions, integral transforms, convolution, interpolation, plotting and Poisson statistics (photons). The real key to all our programs is Subroutine INTPROD for computing the integral of a product of functions, in particular the Fourier-Bessel transform of a product of transfer functions. This routine, (Sec. 1.2), has made everything else relatively straightforward.

Spatial Function	Frequency Function
$\sigma(\theta)$ -- volume scattering function at scattering angle θ	$\alpha - D^c(\psi)$ -- $D^c(\psi)$ is spatial frequency decay function in a collimated test cell
$f(\theta, R)$ -- point spread function of angle at range R, blur distribution of focussed illumination or the image of a point source	$F(\psi, R) = \exp(-D(\psi)R)$ -- the MTF, or contrast decay in the image of a sinusoidal resolution bar chart
$h(\theta) = h_o * f$ -- irradiance on target, the illumination distribution h_o for no scattering convolvolved with the point spread function for the scattering medium	$H(\psi) = H_o F$ -- convolution reduced to simple multiplication
$g(\theta) = g_o * f$ -- detector sensitivity profile, a similar convolution	$G(\psi) = G_o F$ -- again simple multiplication of transfer functions
$g(\theta)h(\theta)$ -- differential target return is the product of detector sensitivity (per unit light intensity) times irradiance (light intensity)	$G * H$ -- overall system transfer function, useful in deconvolving images taken by a dual-scan system

Table 1: FOURIER-BESSEL TRANSFORM PAIRS

1.1 Bessel Functions

The function J_o is needed for the transform and its inverse, Eqs. 1. The function J_1 is needed for the "circle function" defined as

$$\mathrm{Cir}(x) = 2J_1(2\pi x)/(2\pi x)$$

because $\mathrm{Cir}(\theta_o\psi)$ is the Fourier transform of a circular aperture of radius θ_o. This function is used to find the blurred image of a circular object, i.e., the point spread function convolved with a circle:

$$\left.\begin{matrix}\text{blurred}\\ \text{circle}\end{matrix}\right\} = 2\pi\int_o^\infty J_o(2\pi\theta\psi)\,\mathrm{Cir}(\theta_o\psi)\,F(\psi, R)\,\psi\,d\psi \qquad (2)$$

The algorithms for J_o and J_1 are direct translations of formulas in standard texts on Bessel functions. The subroutine arguments are X and FJ; X is the input argument of the Bessel function, and FJ the output value of the function. For J_o use BESJ0, and for J_1 use BESJ1:

```
      SUBROUTINE BESJ0(X,FJ)
C     BESJ0 COMPUTES THE BESSEL FUNCTION J0 OF POSITIVE X
      IF (X-3.0) 1,1,2
    1 U=(X/3.0)**2
      FJ=(((((0.00021*U-0.0039444)*U+0.0444479)*U
     1-0.3163866)*U+1.2656208)*U-2.2499997)*U+1.0
      RETURN
    2 U=3.0/X
      F=(((((0.00010476*U-0.00072805)*U+0.00137237)*U
     1-0.00009512)*U-0.0055274)*U-0.00000077)*U+0.79788456
      G=(((((-0.00013558*U+0.00029333)*U+0.00054125)*U
     1-0.00262573)*U+0.00003954)*U+0.04166397)*U+0.78539816
      V=F/SQRT(X)
      FJ=V*COS(X-G)
    3 RETURN
      END

      SUBROUTINE BESJ1(X,FJ)
      IF (X-3.0) 1,1,2
    1 U=(X/3.0)**2
      FJ=X*(((((((0.00001109*U-0.00031761)*U+0.00443319)*U
     1-0.03954289)*U+0.21093573)*U-0.56249985)*U+0.5)
      RETURN
    2 U=3.0/X
      F=(((((-0.00020033*U+0.00113653)*U-0.00249511)*U
     1+0.00017105)*U+0.01659667)*U+0.00000156)*U+0.79788456
      G=(((((0.00029166*U-0.00079824)*U-0.00074348)*U
     1+0.00637879)*U-0.0000565)*U-0.12499612)*U+0.78539816
      V=F/SQRT(X)
      FJ=V*SIN(X-G)
    3 RETURN
      END
```

Another little routine computes a table of values of Cir, Fortran name "DET", argument "XD", and stores the results starting at the position 601 in the long arrays F and T (see equivalence statement). The reason for the long arrays will be apparent in the next subsection.

```
      SUBROUTINE CIRCLEN
      DIMENSION DET(100),XD(100)
      COMMON/INT/F(1500),T(1500),FI,A(5),MIN(5),MAX(5),N23
      EQUIVALENCE(DET(1),F(601)),(XD(1),T(601))
      I=1 $XI=0. $DXI=0.05
      DET(1)=1. $ XD(1)=0.
    5 I=I+1 $ XI=XI+DXI $XD(I)=XI
      ARG=XI*6.2831853
      CALL BESJ1(ARG,BES)
*     DET(I)=EXP(-(.05*ARG)**2)*2.*BES/ARG    *
      IF(I.LT.100) GO TO 5
      RETURN $END
```

Note that the Cir function is modified by multiplying by a slowly decaying Gaussian (see statement marked *). In the space domain this gives the circular edge a very slight blur, while in the frequency domain it decays the function so that it can be represented by fewer points.

1.2 Integral of a Product

Subroutine INTPROD described in this section represents a breakthrough in the expeditious computation of integrals that occur in the theory of small-angle scattering of light. The problem it solves is well illustrated by the integral on ψ in Eq. 2 , where the integrand is a product of three functions

$$J_0(2\theta\psi), \quad \mathrm{Cir}(\theta_0\psi), \quad \text{and} \quad F(\psi, R),$$

and the integral is to be performed for many values of θ, and possibly many values of θ and R. The problem is what integration increment $\Delta\psi$ to use. The first two functions oscillate with periods θ^{-1} and θ_0^{-1} respectively, which suggests using about 10 points to a cycle:

$$\Delta\psi \approx \begin{cases} (10\,\theta_0)^{-1}, & \theta \le \theta_0 \\ (10\,\theta)^{-1}, & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

If these were the only two functions, control of the integration increment would not be too difficult, but the problem is compounded by $F(\psi)$. It is natural to tabulate F with a more or less logarithmic spacing, very close for small ψ, e.g., $\Delta\psi = 1$, and very sparce for large ψ, e.g., $\Delta\psi = 100$. Now the suitable interval not only depends on whether $\theta > \theta_0$, but changes somewhere along the range of integration from an interval controlled by F (small ψ) to one controlled by J_0 or Cir (large ψ). Subroutine INTPROD solves the problem by automatically finding the most rapidly varying function and using its tabular increment for integration. Other functions are evaluated by interpolation. Whenever a different function starts varying more rapidly, the subroutine switches automatically to its tabular spacing.

INTPROD performs integrals of the general form

$$G(a_1, a_2, \cdots a_N) = \int F_1(a_1 x) \cdots F_N(a_N x)\, dx. \tag{3}$$

It is especially designed for the case in which the functions $F_i(t)$ are defined by stored tables, but no one increment in one of these tables is suitable as the integration increment in all cases. The subroutine operates on long arrays called F and T. The first function $F_1(t)$ may be evaluated at 81 values of t stored in positions 1 through 81 of the T array, and the corresponding values of F are stored in F(1) through F(81). Then the bounds of this function are indicated by setting MIN(1) = 1, MAX(1) = 81. Similarly, the next function $F_2(t)$ and its evaluation points may be stored in F(101) to F(290) and T(101) to T(290), which fact is indicated by setting MIN(2) = 101, MAX(2) = 290, and so on for as many as five functions. INTPROD accepts NN functions $F_n(t_{ni})$, evaluated at the points t_{ni}, which may be a <u>different</u> list of points for each function. The values t_{ni} need <u>not</u> be equally spaced; the only requirements are that they be monotonically increasing and spaced close enough to represent the function accurately by linear interpolation.

To use the subroutine, one needs only the definitions of the argument NN and the quantities in COMMON/INT. These are as follows:

NN -- the number of functions in the integrand.

F -- the lists of values of the functions; functions need not fill the space alloted to them; function F_{n+1} need not follow F_n.

T -- the lists of arguments at which functions were evaluated, each group monotonically increasing, indices corresponding with F.

FI -- the answer, i.e., value of the integral.

MIN -- the index that marks the starting point of each function; e.g., if MIN(3) = 301, this means that $F_3(t_1)$ is stored at F(301) and t_1 is stored at T(301). T(MIN) sets the lower limit of the integral.

MAX -- the index that marks the end of each function. The first T(MAX (I)) encountered in integration sets the

upper limit of the integral.

AA -- the coefficients a_n in Eq. 3 .

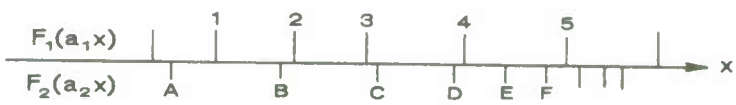
The NN values of each array MAX, MIN, and AA must be set anew in the calling program for each integration because their values may be swapped during the integration process.

Listings follow. The first is an old version that accepts as many as five functions in the integrand. It works but needs some minor improvements. The second is a new improved version for 2 or 3 functions. It is longer but runs significantly faster since the limit to three functions eliminated considerable indexing. (Most of our programs spend most of their time in this subroutine.)

```
      SUBROUTINE INTPROD(NN)
      COMMON/INT/F(1500),T(1500),FI,AA(5),MIN(5),MAXI(5)
      DIMENSION J(5),A(5),MAX(5)
      EQUIVALENCE (J(1),J1)
      SUM=0.
      XSAVE=0.
      PSAVE=0.
       PSAVE=1.
       DO 1916 KL=1,NN
       KLL=MIN(KL)
 1916  PSAVE=PSAVE*F(KLL)
      N3=NN
      DO 5 N=1,N3
      A(N)=AA(N)
      J(N)=MIN(N)
    5 MAX(N)=MAXI(N)
C
C     MAIN LOOP FOLLOWS
  200 J1=J1+1
      IF(J1.GT.MAX(1)) GO TO 300
  201 X=T(J1)/A(1)
      P=F(J1)
            DO 210 N=2,N3
            TT=X*A(N)
            JJ=J(N)
            WTI=T(JJ)-TT
#           IF(WTI.GT.0.0) GO TO 205                #
                  JJ=JJ+1
                  IF(JJ.GT.MAX(N)) GO TO 300
                  J(N)=JJ
                  WTI=T(JJ)-TT
¢                 IF(WTI.LE.0.0) GO TO 215          ¢
  205       II=JJ-1
            WTJ=TT-T(II)
            WT=WTI+WTJ
*  210      P=P*(WTI*F(II)+WTJ*F(JJ))/WT            *
      SUM=SUM+(P+PSAVE)*(X-XSAVE)
      XSAVE=X
      PSAVE=P
      GO TO 200
C
C     FUNCTION SWAP FOLLOWS
  215 KSV=J1
      J1=J(N)
      J(N)=KSV
      KSV=MAX(1)
      MAX(1)=MAX(N)
      MAX(N)=KSV
      ASV=A(1)
      A(1)=A(N)
      A(N)=ASV
      GO TO 201
C
  300 FI=SUM*.5
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE INTPROD
      COMMON/INT/F(1500),T(1500),FI,A(5),MIN(5),MAX(5),N
      EQUIVALENCE (J1,MIN(1)), (J2,MIN(2)), (J3,MIN(3)),
     1(M1,MAX(1)), (M2, MAX(2)), (M3,MAX(3)),
     2(A1, A(1)), (A2, A(2)), (A3, A(3))
      DATA PSAVE/0./
      SUM=0. $ XSAVE=T(J1)/A1
      FI2=F(J2)$ TI2=T(J2) $ J2=J2+1
      FJ2=F(J2) $ TJ2= T(J2)
      IF (N.EQ.2)  GO TO 60
      FI3=F(J3) $ TI3=T(J3) $ J3=J3+1
      FJ3=F(J3) $ TJ3=T(J3)
C
C     MAIN LOOP FOLLOWS
   60 X=T(J1)/A1
      T2=X*A2
      WI2=TJ2-T2
#     IF(WI2.GE.0.) GO TO 205                    #
            J2=J2+1
            IF(J2.GT.M2) GO TO 500
            TI2=TJ2$TJ2=T(J2)
            WI2=TJ2-T2
¢           IF(WI2.LE.0.) GO TO 215            ¢
            FI2=FJ2$FJ2=F(J2)
  205 WJ2=T2-TI2
      WI2=WI2+WJ2
*     P=F(J1)*(WI2*FI2+WJ2*FJ2)/WI2                          *
      IF(N.EQ.2) GO TO 100
C
#  C  THIRD FUNCTION STUFF FOLLOWS...                                #
      T3=X*A3$WI3=TJ3-T3$IF(WI3.GE.0.) GO TO 305
      J3=J3+1$IF(J3.GT.M3) GO TO 500$TI3=TJ3$TJ3=T(J3)
¢     WI3=TJ3-T3$IF(WI3.LE.0.) GO TO 315$FI3=FJ3$FJ3=F(J3)    ¢
  305 WJ3=T3-TI3$WI3=WI3+WJ3
*     P=P*(WI3*FI3+WJ3*FJ3)/WI3                      *
  100 SUM=SUM+(P+PSAVE)*(X-XSAVE)
      XSAVE=X $ PSAVE=P
      J1=J1+1
      IF (J1.LE.M1)  GO TO 60
  500 FI=SUM*0.5
      RETURN
C
C
C     FUNCTION SWAPS FOLLOW---
  215 KSV=J1$J1=J2$J2=KSV
      KSV=M1$M1=M2$M2=KSV
      FSV=A1$A1=A2$A2=FSV
      T2=J2-1
      FI2=F(T2)$FJ2=F(J2)
      TI2=T(T2)$TJ2=T(J2)
      GO TO 60
C
  315 KSV=J1$J1=J3$J3=KSV$KSV=M1$M1=M3$M3=KSV
      FSV=A1$A1=A3$A3=FSV$T3=J3-1$FI3=F(T3)$FJ3=F(J3)
      TI3=T(T3)$TJ3=T(J3)$GO TO 60$END
```

This paragraph is only for the reader who wants to understand how INTPROD works. The integration intervals are determined by whichever function has the closest spacing in x, i. e., $\Delta x_n = \Delta t_n/a_n$. For illustration, consider the simple case of two functions, F_1 and F_2 as illustrated below, where the function evaluation points are marked on the x-axis. For small x, F_1 determines Δx, but its increments increase for large x, and F_2 because the guiding function at point D where two values of F_2, namely C and D, fall for the first time within the same interval of F_1, namely 3 to 4. F_2 is evaluated at point 1 by interpolation between points A and B (statements marked * in the listings). At point 2 the program tries



to interpolate between points A and B again, but finds negative weight (WTI) for point A since 2 falls outside the A and B interval. This signals (IF statement marked #) moving to interval BC for interpolation. Similarly point 3 is evaluated on BC. Now point 4 is the critical point for switching the mode of integration. Interpolation fails on the interval BC (# as before), and fails again on CD (IF statement marked ¢). This is the signal that F_2 should guide the integration, and control passes to statement 215 or 315 where the definitions of functions 1 and 2 are swapped by exchanging values of the controlling indices J and MAX and the parameters A, so that the function called 1 is again the one controlling the integration increment.

1.3 Convolution

This subsection gives one of the most important examples of the use of Fourier transforms in analysis of small angle scattering underwater. It also serves as an example of a program that calls INTPROD. Eq. 8 in Lect. 4.3 reads

$$h(\theta, R, \epsilon) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi\theta\psi) H_0(\epsilon\psi) F(\psi, R)\psi d\psi, \tag{4}$$

except that we have inserted ϵ for a reason to be explained. This expression gives the blurred irradiance h that results from convolving the unscattered irradiance $h_0(\theta/\epsilon)$ with the seawater spread function f. Here ϵ gives the scale of the unscattered irradiance relative to some standard shape, say a circle of radian ϵ. Transforms H_0 and F have been prepared in advance so that the only step remaining is the integral in Eq. 4. Eq. 2 is a special case in which the unblurred distribution is a circular spot.

The case $\theta = 0$ must be treated separately; after dropping R the integral reads

$$h(0, \epsilon) = \int_0^\infty F_1(\psi) F_2(\psi) F_3(\epsilon\psi) d\psi$$

where $F_1 \equiv F, \quad F_2 = 2\pi\psi, \quad$ and $\quad F_3 \equiv H_0.$

Here we have expressed Eq. 4 in the form of Eq. 3, so that the inputs to INTPROD are immediately apparent. The coefficients are $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, and $a_3 = \epsilon$. In the listing below, these values are set in statements * as well as the locations where the three functions are stored, MIN and MAX. Note that only two values need be stored for the linear function F_2 and these are $F_2(0) = 0$, $F_2(10,000) = 20,000\pi$. "CALL INTPROD" does the rest and the answer FI is stored in the H array in the statement marked #.

```
      SUBROUTINE CONVLV (H)
      DIMENSION H (1), TH(1)
      COMMON/INT/F(1500), T(1500), FI, A(5), MIN(5), MAX(5), N23
      COMMON/MISC/ MXPS, MXTH, EPS, K6701, K100
      MX1=300+MXPS
*     A(1)=1. $ MIN(1)=301 $ MAX(1)=MX1          *
*     A(2)=1. $ MIN(2)=1499 $ MAX(2)=1500        *
*     A(3)=EPS $ MIN(3)=K6701 $ MAX(3)=K100      *
      CALL INTPROD
#     H(1)=FI      #
      I=1
    5 I=I+1
    6 HSV=FI $ THSV=TH(I-1)
@     POWR=3.14159265*THSV*THSV*FI        @
   10 THETA=TH(I)
¢     A(1)=1. $ MIN(1)=301 $ MAX(1)=MX1          ¢
¢     A(2)=THETA $ MIN(2)=1 $ MAX(2) = 300       ¢
¢     A(3)=EPS $ MIN(3)=K6701 $ MAX(3)=K100      ¢
      CALL INTPROD
$     XF=FI/THETA $ H(I)=XF                                        $
@     POWR=POWR+3.14159265*THSV*(THETA-THSV)*(XF+HSV)              @
      THSV=THETA $ HSV=XF
      I=I+1
      IF(I.LE.MXTH) GO TO 10
@     RATIO=F(301)/POWR                  @
@     PRINT 20, F(301), POWR, RATIO      @
   20 FORMAT(//2E20.6, F15.5)
      RETURN $ END
```

For other values of θ we rewrite Eq. 4 as

$$h(\theta, \epsilon) = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty F_1(\psi) F_2(\theta\psi) F_3(\epsilon\psi) d\psi$$

where as before $F_1 \equiv F$, $F_3 \equiv H_0$, but now

$$F_2(\xi) = (2\pi\xi) J_0(2\pi\xi), \quad \xi \to \theta\psi.$$

Again INTPROD performs when MIN and MAX are set to the storage locations of these functions, and the coefficients are set to $a_1 = 1$, $a_2 = \theta$, $a_3 = \epsilon$; see statements ¢. Statements $, put in the factor $1/\theta$ and store the results in the H array.

We use h_0 normalized to unit power, and so $H_0(0) = 1$ and, therefore

$$2\pi \int_0^{\theta_{max}} h(\theta, \epsilon)\theta d\theta = F(0) \tag{5}$$

We use this fact as a check on the numerical performance. A running integration of Eq. 5 is called POWR, and its final value is compared to F(0), called F(301) in Fortran. See the statements marked @. Both POWR and F(0) and their ratio are printed out. We often find 5% error, and sometimes 10% when $h_0(\theta)$ is very broad. Most of this error represents large scattering angles. In other words we do not take θ_{max} far enough to find all the power when it is irrelevent anyhow having scattered beyond the validity of the small angle approximation.

1.4 Interpolation

Input data for underwater optics are smooth functions, e.g., $f(\theta, R)$ or $D(\psi)$ in different programs, and so it is convenient to punch only a few cards with input data and fill the arrays for com-

puting by interpolation. Here we describe the four-point interpolation subroutine FIT4. The input data are two arrays XX and YY, and each pair (XX(n), YY(n)) gives one point on the function Y(X). A third input array X gives the points for interpolation, and the interpolated output is the array Y. The integer IN gives the length of X and Y. Neither XX nor X need be equally spaced, but both must be monotonically increasing. For values of X from XX(1) to XX(3) the routine gives a quadratic (parabolic) fit on the first three points:

$$y = A + Bx + Cx^2 \text{ (see statement marked with @).}$$

From then on it gives a four-point fit, the average of the parabola to the left and the one to the right, until X reaches the interval XX(MXX-1) to XX(MXX). From then on including extrapolation to X > XX(MXX), the routine uses the quadratic fit to the last 3 values of XX.

A few remarks follow for the reader who wishes to understand the inner workings. For any of the three coefficients A, B and C, say A, there are three values, A(1) for one parabola, A(3) for the other, and A(2) is the average. The parabola being updated alternates between indices 1 and 3 by the statements starting A(2 + L) = ···, where L is alternately ± 1; see statement L = -L marked #. The notes on the following listing should suffice to complete the explanation.

```
      SUBROUTINE FIT4(IN,MXX,XX,YY,X,Y)
      DIMENSION A(3),B(3),C(3),XX(1),YY(1),X(1),Y(1)
C YY(1-IN) ARE GIVEN VALUES OF Y(X) AT POINTS XX(1-IN).
C POINTS X(1-MXX)  ARE GIVEN, AND SUBROUTINE INTERPOLATES TO EVALUATE
C Y(1-MXX)  AT THESE.
      L=1 $ I=1 $ KPAR=2 $ HAF=1.0
      A(1)=0. $ B(1)=0. $ C(1)=0.
      X2=XX(1) $ X2SQ=X2*X2 $ Y2=YY(1)
      X3=XX(2) $ X3SQ=X3*X3 $ Y3=YY(2)
    5 KPAR=KPAR+1
      IF(KPAR.GT.IN) GO TO 15                          <------ Prepare for extrapolation
      X1=X2 $ X2=X3 $ Y1=Y2 $ Y2=Y3 $ X1SQ=X2SQ $ X2SQ=X3SQ
      X3=XX(KPAR) $ Y3=YY(KPAR) $ X3SQ=X3*X3
      DEN =X2*(X3SQ-X1SQ)+X1*(X2SQ-X3SQ)+X3*(X1SQ-X2SQ)   <------ "DEN" for "denominator"
      IF(DEN.EQ.0.) GO TO 20                           <------ Cannot ÷ 0
      A(2+L)=(Y1*(X2*X3SQ-X3*X2SQ)+Y2*(X3*X1SQ-X1*X3SQ)+
     *Y3*(X1*X2SQ-X2*X1SQ))/DEN
      B(2+L)=(Y1*(X2SQ-X3SQ)+Y2*(X3SQ-X1SQ)+Y3*(X1SQ-X2SQ))/DEN   } quadratic co-efficients
      C(2+L)=(Y1*(X3-X2)+Y2*(X1-X3)+Y3*(X2-X1))/DEN               } evaluated
#     L=-L                                             <------ Alternate parabolas #
      A(2)=(A(1)+A(3))*HAF $ B(2)=(B(1)+B(3))*HAF $ C(2)=(C(1)+C(3))*HAF
      HAF=0.5
C PARABOLA DEFINED, EVALUATE POINTS THEREON
   10 EX=X(I)
      IF(EX.GT.X2) GO TO 5                             <------ Need new parabola?
@     Y(I)=A(2)+(B(2)+C(2)*EX)*EX                      <------ One interpolation evaluated @
      I=I+1
      IF(I.LE.MXX)  GO TO 10                           <------ Next point
      RETURN
   15 X2=9.E99
      A(2)=A(2-L) $ B(2)=B(2-L) $C(2)=C(2-L)           } Extrapolation beyond data
      GO TO 10
   20 PRINT 21,I,KPAR
   21 FORMAT(42HINDETERMINATE FIT,END JOB WITH INDICES     ,2I4)   } Can't be fit
      CALL EXIT
      END
```

1.5 Plotting

The functions we compute are smooth and accuracy need not be great since the seawater medium is not one of precise properties. Therefore, it suffices to plot results with alphabetic symbols on the line printer. In our facility this is much more convenient and less expensive than using a plotter. Many routines exist for this purpose, but we give ours here for convenience and compatability with the calling program.

A whole family of functions is strung end to end in the array W. There are NMBR functions, each with LONG points. The graph runs sideways from the usual orientation on the paper; i. e., the independent variable (abscissa) runs down the computer paper, and the dependent variable (ordinate) runs across. The ordinate grid spacing is arbitrarily set at 12 columns, and each column corresponds to the increment DINC in the value of the ordinate. The subroutine finds the maximum value of the ordinate and puts it near the right edge. Values that are too small to fit simply do not plot; i. e., they "run off" the left edge. This method of fixed increment and no minimum is ideal for logarithmic plots since the points off the page have decayed to negligible values. Log plots are natural to most or all of the quantities we deal with. The routine simply plots the Nth value of the ordinate on one line, the N + 1st on the next, and so on; i. e., no provision is made for the abscissa which is assumed to increase in equal increments per grid spacing down the page. The first function in the family is printed with "A", the next with "B", and so on. Coincident points print the letter farthest along the alphabet. That is, if C is missing, look for D, then E, etc., to see where the point lies. Two such plots appear in Sec. 2,

Figs. 1 and 2.

```
      SUBROUTINE PLOTFAM(W,LONG,NMBR,DINC,IHOR)
C     W STORES ALL POINTS OF FIRST FUNCTION(LONG OF THEM),
C     THEN NEXT, AND SO ON FOR NMBR FUNCTIONS
      DIMENSION W(1),Z(121),CHAR(7),ISAVE(7)
      DATA CHAR/1HA,1HB,1HC,1HD,1HE,1HF,1HG/
      DATA BLNK/1H /,Z/121*1H /
  900 FORMAT (1H1)
  901 FORMAT (1H+,9X,1H+,10(11X,1H+))
  902 FORMAT(10X,121A1)
      LIM=LONG*NMBR
      DELTA=DINC*12.
      YMAX=W(1)
      YMIN=YMAX
          DO 10 I=2,LIM
            WW=W(I)
            YMIN=AMIN1(WW,YMIN)
   10       YMAX=AMAX1(WW,YMAX)
      WRITE(6,900)
      IF(YMAX) 11,14,12
   11 MXY = YMAX/DELTA
      GO TO 13
   12 MXY = YMAX/DELTA+0.9999
   13 YMAX = MXY*DELTA
   14 CONTINUE
        DO 300 J=1,LONG
        K=0
          DO 110 I=1,NMBR
         IJ=121.5-(YMAX-W(J+K))/DINC
          IF(IJ.LE.0)     GO TO 100
          Z(IJ)=CHAR(I)
          ISAVE(I)=IJ
          GO TO 110
  100     ISAVE(I)=1
  110     K=K+LONG
        WRITE(6,902) Z
        JJ=MOD(J,IHOR)
        IF(JJ.EQ.1) WRITE(6,901)
          DO 300 I=1,NMBR
          IJ=ISAVE(I)
  300   Z(IJ)=BLNK
      WRITE(6,246) YMIN,YMAX,DELTA
  246 FORMAT(/,19H VALUES RANGE FROM ,E13.6,4H TO ,E13.6,
     *        5X,8HDELTA = ,E13.6)
      RETURN
      END
vv
```

1.6 Poisson Statistics

The subroutine listed below takes as input a single number A and returns 66 random numbers N having Poisson distribution with mean A. These represent the random number of detection events in single resolution cells, i. e., photon statistical noise. This subroutine is useful only when simulating the performance of an imaging system using long bars or circles so that many cells in a row have the same average A. Other standard routines are more useful when every cell has a different average, so that each call returns only one random number.

```
      SUBROUTINE POISSON
      DIMENSION NSMBL(50)
      COMMON/POI/LONG,    A,N(66)
       IF(A.LT.9.)GOTO 10
C
C     LARGE A SECTION FOLLOWS
      SIG2=SQRT(A)*2.
      APLS=A+.5
           DO 5 I=1,LONG
           TA=RANF(0.)
           TB=RANF(0.)
           TC=RANF(0.)
           X=TA+TB+TC
    5      N(I)=(X-1.5)*SIG2+APLS
      RETURN
C
C     SMALL A SECTION FOLLOWS
      DATA ASV/-13./
   10 IF(((A-ASV)**2).LT.(.02*A)) GO TO 30
      ASV=A $ E=EXP(-A)
      NPH=-1 $ Q=1. $ FAC=1. $ EN=1. $ T=0  $ CUM=0.
   15 CUM=CUM+E*Q/FAC $ NPH=NPH+1
      Q=Q*A $ FAC=FAC*EN $ EN=EN+1.
      KUM=CUM*50.   + .5*(.5+RANF(0.))
```

(Continued next page)

```
20        IF (I.GE.KUM) GO TO 25
          I=I+1
          NSMBL(I)=NPH
          GO TO 20
25 IF (KUM.LT.50)   GO TO 15
30        DO 40 I=1, LONG
          J=50.*RANF(0.)+1.
40        N(I)=NSMBL(J)
   RETURN $ END
```

2.0 COMPUTATION OF SPATIAL FREQUENCY DECAY FUNCTION

The inputs to the program described here are point spread functions measured at different ranges in the same experiment. The outputs are graphs (and tables) of D(ψ), the spacial frequency decay function, that should be independent of range. The values of D(ψ) computed from different spread functions are plotted as a family of curves which should cluster into a single curve. However, in practice one finds differences in the values that represent experimental error or else changes in the water properties during the experiment, or variations in the water properties along the experimental range.

2.1 Input/Output

Table 2 below shows how input data were keypunched and stacked. Each row represents one card except that blank rows separate groups for explanation only. Each datum occupies 10 columns, and the ones that are integers must be right-justified. The significance of each datum is defined as follows:

1. The first number in column 10, 3 in the example shown, is the number of spread functions in the same experiment (same water) to be processed as a group.
2. The next, .0001, is the smallest scattering angle of interest measured in radian.
3. The last number on the first card, .02 in the example, is the increment in D(ψ) that will occupy one grid spacing in the final graph.

3	.0001	.02					
15	20.	4.3436					
1	.000635						
.00010	11000.	.00026	9800.	.00040	6900.	.00057	3800.
.00060	3200.	.00077	1000.	.0012	320.	.0030	84.
.0097	20.	.020	7.9	.074	1.0	.096	.60
.24	.10	.44	.030	1.0	.0055		
15	40.	9.868					
1	.00055						
.00010	330.	.00012	329.	.000235	300.	.00040	205.
.00061	100.	.00080	52.	.0012	22.5	.0020	9.2
.0030	5.68	.0044	4.0	.0086	2.0	.020	.825
.069	.20	.40	.0093	.80	.0020		
18	60.	19.909					
1	.00055						
.00010	9.0	.00012	8.98	.00020	8.45	.00030	6.6
.00042	4.0	.00060	1.85	.00080	1.0	.00118	.54
.0022	.30	.0030	.247	.0044	.20	.010	.13
.020	.085	.058	.040	.121	.020	.21	.010
	.0042	.56	.0010				

Table 2: INPUT DATA DECK

The remainder of the cards apply to the individual scattering curves, not to the experiment as a whole. These data are defined as follows:

4. The integer in columns 9 and 10, 15 in the example, is the number of points at which the input data are given.
5. The next number, 20.0 is the range over which the scattering function has been measured, meters in this case, or any other consistant distant unit.
6. The final number on the second card, 4.3436, is the normalization factor which multiplies all the data.
7. The integer 1 on the next card indicates that a circular aperture is to be deconvolved from the data. A zero here would bypass this step.

8. The final number on this card, .000635, is the angular (radian) radius of the aperture (if any) to be deconvolved.
9. The first number on the fourth card, .00010, is θ , the angle (radian) at which the first value of the scattering function is given, and
10. the second number is that value, $f(\theta)$.

The remainder of this group of cards is pairs of values of θ and $f(\theta)$, and the remaining groups of cards correspond to definitions 4 thru 10 above for the longer range cases, 40 meters and 60 meters in the example shown.

Table 3 shows the first page of computer output, which is merely the input data described above. Following this the computer prints a graph of the scattering functions interpolated from the input, Fig. 1. Following this plot, the same data are tabulated; a sample is given in Table 4. So far only input and interpolated input data have been printed. The remainder of the output is the result of transformation to the spatial frequency decay function. The next output is the first 30 values of $D(\psi)$ on the linear range from 0 to 30 cycles per radian, see Table 5. Following that, the same data are plotted. Finally the logarithmic range of $D(\psi)$ is tabulated and plotted in the same manner. The two plotted ranges, linear and logarithmic, are combined in Fig. 2. The A curve for 20 meters is clearly displaced from where it should be. Calculating a new normalization constant by a different technique brought A into line with B and C, as has been shown in other lectures.

```
KASFS = 3  THETAMIN =  .000100  FINC=  .0200000


LONG = 15,  RANGE =  20.00,  NORM FACTOR=   .23506E+01
LDECONVOLVE= 1,  APERTURE RADIUS=  .00063500

INPUT DATA FOLLOW

 .100E-03  .185E+05  .260E-03  .130E+05  .400E-03  .815E+04  .570E-03  .400E+04
 .600E-03  .320E+04  .770E-03  .100E+04  .120E-02  .320E+03  .300E-02  .840E+02
 .970E-02  .200E+02  .200E-01  .790E+01  .740E-01  .100E+01  .960E-01  .600E+00
 .240E+00  .100E+00  .440E+00  .300E-01  .100E+01  .550E-02


LONG = 15,  RANGE =  40.00,  NORM FACTOR=   .93939E+01
LDECONVOLVE= 1,  APERTURE RADIUS=  .00055000

INPUT DATA FOLLOW

 .100E-03  .330E+03  .120E-03  .329E+03  .235E-03  .300E+03  .400E-03  .205E+03
 .610E-03  .100E+03  .800E-03  .520E+02  .120E-02  .225E+02  .200E-02  .920E+01
 .300E-02  .568E+01  .440E-02  .400E+01  .860E-02  .200E+01  .200E-01  .825E+00
 .690E-01  .200E+00  .400E+00  .930E-02  .800E+00  .200E-02


LONG = 18,  RANGE =  60.00,  NORM FACTOR=   .21136E+02
LDECONVOLVE= 1,  APERTURE RADIUS=  .00055000

INPUT DATA FOLLOW

 .100E-03  .900E+01  .120E-03  .898E+01  .200E-03  .845E+01  .300E-03  .660E+01
 .420E-03  .400E+01  .600E-03  .185E+01  .800E-03  .100E+01  .118E-02  .540E+00
 .220E-02  .300E+00  .300E-02  .247E+00  .440E-02  .200E+00  .100E-01  .130E+00
 .200E-01  .850E-01  .580E-01  .400E-01  .121E+00  .200E-01  .210E+00  .100E-01
 .300E+00  .490E-02  .560E+00  .100E-02
```

Table 3: FIRST PAGE OF OUTPUT REPEATS INPUT DATA

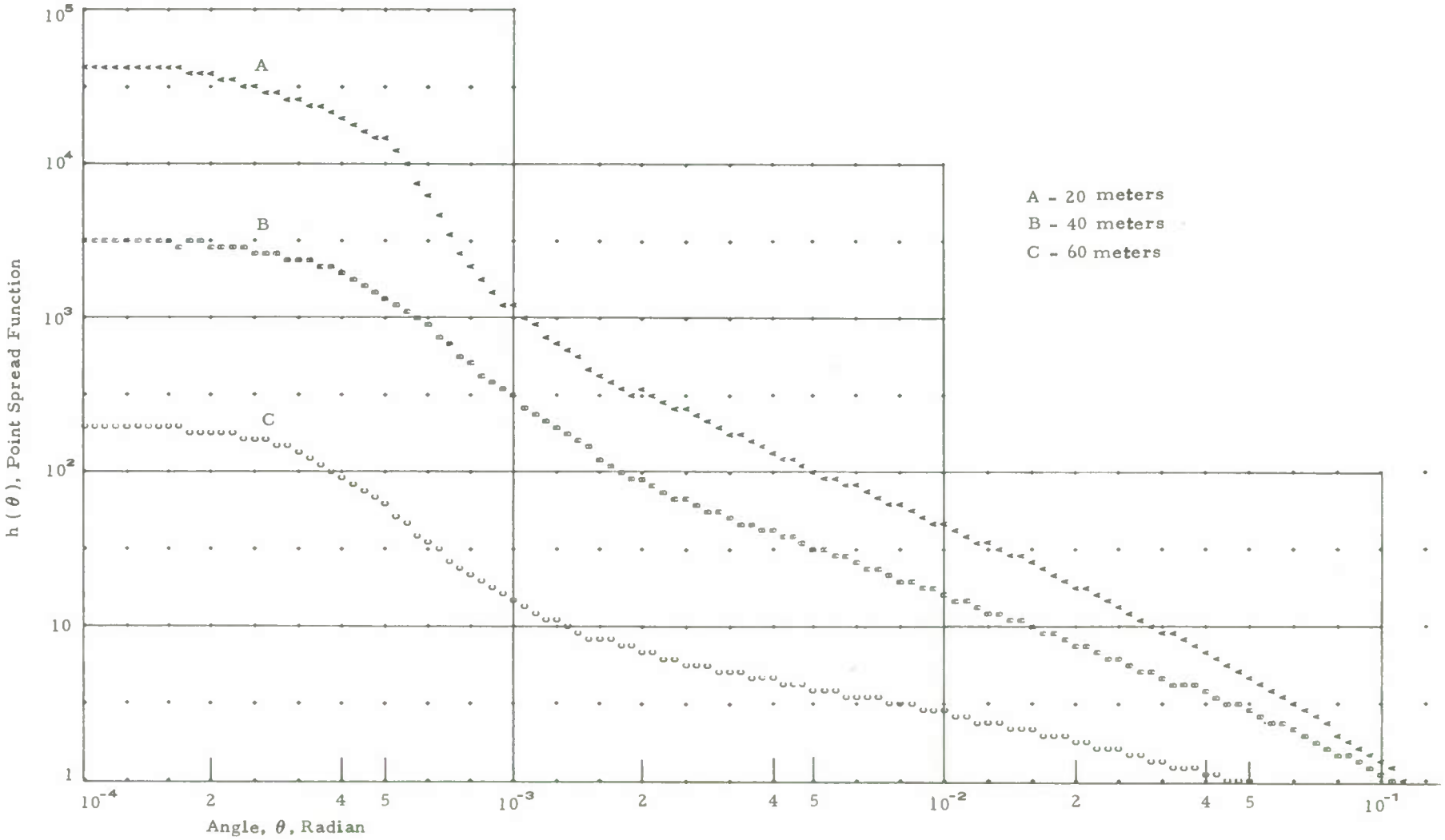


Figure 1: Data of 18 Mar 71 at High Cay taken with Spectra-Pritchard Photometer, Point Spread Function Normalized to $e^{-\gamma R}$ Total Energy using Calculated Forward Intensity, Curve A at 20 meters, B at 40 meters, and C at 60 meters.

	θ	$f(\theta, R_1)$	$f(\theta, R_2)$	$f(\theta, R_3)$
1	.100000E-03	.434861E+05	.309999E+04	.190224E+03
2	.105925E-03	.437212E+05	.310016E+04	.190301E+03
3	.112202E-03	.438076E+05	.309743E+04	.190184E+03
4	.118850E-03	.437445E+05	.309181E+04	.189872E+03
5	.125893E-03	.435325E+05	.308332E+04	.189368E+03
6	.133352E-03	.431738E+05	.307197E+04	.188672E+03
7	.141254E-03	.426720E+05	.305780E+04	.187786E+03
8	.149624E-03	.420322E+05	.304085E+04	.186714E+03
9	.158489E-03	.412607E+05	.302116E+04	.190086E+03
10	.167880E-03	.403653E+05	.299880E+04	.188189E+03
11	.177828E-03	.393546E+05	.308655E+04	.185651E+03
12	.188365E-03	.382383E+05	.304771E+04	.182499E+03
13	.199526E-03	.370270E+05	.299978E+04	.178765E+03
14	.211349E-03	.357318E+05	.294322E+04	.174488E+03
15	.223872E-03	.343643E+05	.287855E+04	.169710E+03
16	.237137E-03	.329364E+05	.280634E+04	.164478E+03
17	.251189E-03	.314601E+05	.272724E+04	.163074E+03
18	.266073E-03	.299476E+05	.264195E+04	.156298E+03
19	.281838E-03	.284105E+05	.255118E+04	.148633E+03
20	.298538E-03	.268604E+05	.245570E+04	.140238E+03
21	.316228E-03	.253082E+05	.244883E+04	.131283E+03
22	.334965E-03	.244841E+05	.233333E+04	.121938E+03
23	.354813E-03	.227956E+05	.220812E+04	.112373E+03
24	.375837E-03	.210584E+05	.207537E+04	.102202E+03
25	.398107E-03	.193021E+05	.193730E+04	.929133E+02
26	.421697E-03	.175545E+05	.179607E+04	.839263E+02
27	.446684E-03	.158409E+05	.165379E+04	.753218E+02
28	.473151E-03	.141833E+05	.151238E+04	.671655E+02
29	.501187E-03	.143968E+05	.137317E+04	.595079E+02
30	.530884E-03	.121826E+05	.123874E+04	.508920E+02
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Table 4: PART OF THE TABULATED POINT SPREAD FUNCTION INTERPOLATED FROM INPUT DATA. R_1 = 20m, R_2 = 40m, R_3 = 60m.

	ψ	$-D_1(\psi)$	$-D_2(\psi)$	$-D_3(\psi)$
1	0.	-.476924E-01	-.323117E-01	-.338417E-01
2	.100000E+01	-.721465E-01	-.506906E-01	-.482463E-01
3	.200000E+01	-.849550E-01	-.627018E-01	-.633508E-01
4	.300000E+01	-.940235E-01	-.712427E-01	-.744146E-01
5	.400000E+01	-.101220E+00	-.778010E-01	-.812537E-01
6	.500000E+01	-.107309E+00	-.831654E-01	-.859060E-01
7	.600000E+01	-.112575E+00	-.876254E-01	-.902024E-01
8	.700000E+01	-.117048E+00	-.912582E-01	-.943019E-01
9	.800000E+01	-.121138E+00	-.945048E-01	-.981850E-01
10	.900000E+01	-.124659E+00	-.973044E-01	-.101011E+00
11	.100000E+02	-.127723E+00	-.997111E-01	-.102951E+00
12	.110000E+02	-.130430E+00	-.101843E+00	-.104854E+00
13	.120000E+02	-.132864E+00	-.103758E+00	-.107127E+00
14	.130000E+02	-.135062E+00	-.105499E+00	-.109800E+00
15	.140000E+02	-.136930E+00	-.106802E+00	-.111398E+00
16	.150000E+02	-.138724E+00	-.108180E+00	-.113371E+00
17	.160000E+02	-.140356E+00	-.109419E+00	-.114669E+00
18	.170000E+02	-.141855E+00	-.110553E+00	-.115612E+00
19	.180000E+02	-.143237E+00	-.111574E+00	-.116631E+00
20	.190000E+02	-.144520E+00	-.112501E+00	-.117860E+00
21	.200000E+02	-.145725E+00	-.113373E+00	-.119046E+00
22	.210000E+02	-.146851E+00	-.114204E+00	-.119817E+00
23	.220000E+02	-.147931E+00	-.115048E+00	-.120411E+00
24	.230000E+02	-.149017E+00	-.115999E+00	-.121547E+00
25	.240000E+02	-.149953E+00	-.116720E+00	-.122099E+00
26	.250000E+02	-.150827E+00	-.117402E+00	-.122886E+00
27	.260000E+02	-.151800E+00	-.118323E+00	-.124769E+00
28	.270000E+02	-.152587E+00	-.118948E+00	-.125390E+00
29	.280000E+02	-.153331E+00	-.119559E+00	-.125682E+00
30	.290000E+02	-.154171E+00	-.120403E+00	-.126797E+00
31	.300000E+02	-.154837E+00	-.120956E+00	-.126920E+00

Table 5: TABLE OF $D(\psi)$ ON THE LINEAR RANGE $0 \leq \psi \leq 30$. $D_n(\psi)$ DERIVES FROM $h(\theta, R_n)$.

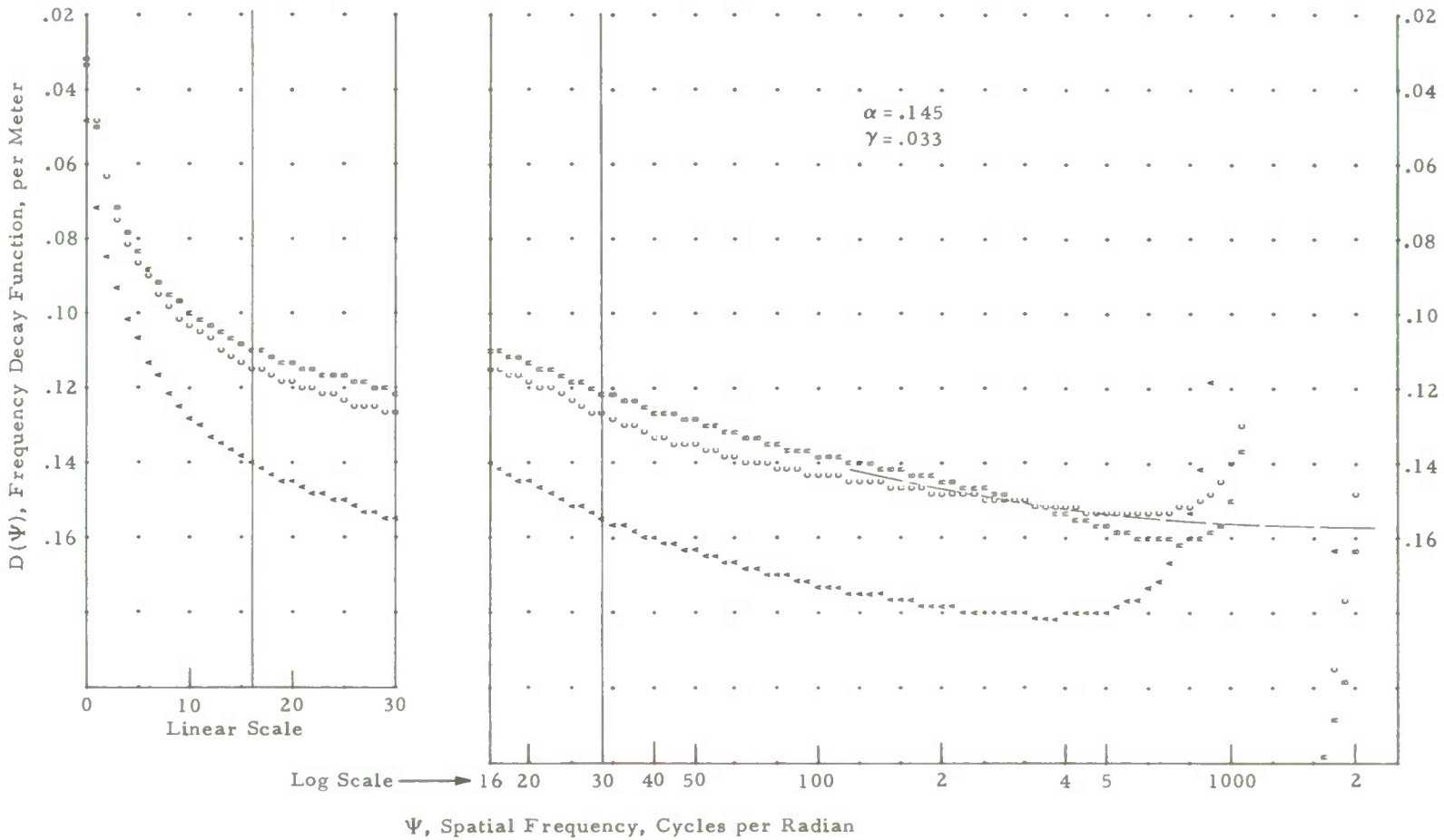


Figure 2: SPATIAL FREQUENCY DECAY FUNCTION, D(ψ), FOR DATA OF FIGURE 1.

2.2 Program Description

An annotated listing of the Fortran algorithm is divided into sections and explained one at a time below. Fortran symbols are defined in narrative fashion as they appear since this eases the reader's task of remembering the definitions. The first 19 lines of the program are data preparation that the reader will not understand until the symbols are defined, except for the print statement that gives a new page. Nevertheless, this section is presented here to keep the program in proper sequence.

```
        PROGRAM DEEPLOK (INPUT,OUTPUT,TAPE5=INPUT,TAPE6=OUTPUT)
C       DEP LOOK ONE.  PSF(THETA) TO D(PSI)
        DIMENSION ANORM(6)
        COMMON/TNT/F(1500),T(1500),FI,A(5),MIN(5),MAX(5)
        DIMENSION THIN(20),HIN(20),TH(300),H(300)
       COMMON/DEE/KASES,MXTH,LDECON(6),APRAD(6),POWR(6),RR(6),PI2,PSI,W(
      1600)
        DATA PI,PI2/3.14159265, 6.2831853/
        PRINT 5000  <------New page
$       SS=10.**.025                    $
       DINC=1./24.
 5000 FORMAT(1H1)
  902 FORMAT(T10,7F10.7)
  903   FORMAT(* KASES =*,I2,*  THETAMIN =*,F9.6,*  FINC=*,F10.7)
  904   FORMAT(///* LONG =*,I3,*,  RANGE =*,F7.2,*,  NORM FACTOR=*,F13.5)
  905  FORMAT(* LDECONVOLVE=*,I2,*,  APERTURE RADIUS=*,F11.8)
  911 FORMAT(8F10.3)
  912 FORMAT(//* INPUT DATA FOLLOW*/)
  913 FORMAT(T10,6F16.6)
```

The next section prepares a table of logarithms of the scattering angle θ, values at which the spread function will be tabulated. Some Fortran names have the following meanings:

KASES - the number of input spread functions,

THMIN - the minimum angle of interest, radian,

FINK - the increment in D(ψ) that will correspond to one grid spacing (12 character spaces on computer paper) in the final plot,

MXTH - number of values of θ in the table from THMIN to 1.0 radian.

Other names such as THLOG and index I are obvious. The first read statement (line *) is the only one that reads quantities that pertain to the whole experiment; later read statements apply to individual spread functions.

```
C       LOAD TH(300) WITH LOG THETA
 *      READ 902,KASES,THMIN,FINC
        PRINT903,KASES,THMIN,FINC   read and print
         FINC=FINC/12.
        THLOGO = ALOG10(THMIN)
        THLOG = THLOGO
        I = 0
    5       I = I+1
            TH(I) = THLOG
            THLOG = THLOG+.025
            IF(THLOG.LE.0.) GO TO 5
        MXTH = I
```

The next section reads the spread functions at a relatively small number of points (statement marked *) and fills in the remainder of the spread function table by interpolation (#). Two other statements (¢) read the other parameters that define the case in question. Fortran names have the following definitions:

LONG - number of points at which input spread function is defined (maximum of 20),

RR (KASE) - the optical path length through the water for case in question,

ANORM (KASE) - normalization factor by which the spread function is multiplied,

LDECON (KASE) - a logic flag, 1 deconvolves the spread function from a circular aperture function, 0 does not,

APRAD (KASE) = ε - radius of the aperture to be deconvolved (if any),

THIN (I), HIN (I) - the input values of the spread function, θ and f(θ). (At the time this program was written, we were calling spread functions h instead of f because they were usually used as an irradiance.)

```
C
C       READ AND PLOT INPUT PSF'S
        K = 0
        DO 315  KASE = 1, KASES
¢       READ 902, LONG,RR(KASE),ANORM(KASE)          ¢
        PRINT 904, LONG,RR(KASE),ANORM(KASE)
¢       READ 902, LDECON(KASE),APRAD(KASE)           ¢        read
        PRINT 905, LDECON(KASE),APRAD(KASE)                    &
        PRINT 912                                              print
*       READ 911, (THIN(I),HIN(I),I=1,LONG)          *
        PRINT 911, (THIN(I),HIN(I),I=1,LONG)
             DO 301  I = 1, LONG
             THIN(I) = ALOG10(THIN(I))
  301        HIN(I) = ALOG10(HIN(I)*ANORM(KASE))
#       CALL FIT4( LONG, MXTH, THIN, HIN, TH, H)  <------ parabolic fit #
             DO 305 I = 1, MXTH
             W(K+I) = H(I)
  305        F(400+K+I) = 10.**H(I)
  315 K = K+MXTH
        CALL PLOTFAM(W,MXTH,KASES,DINC,4)  <------------ plot
```

Subroutine FIT4 performs the interpolation and fills the long array H(300) from the short ones, THIN(20) and HIN(20) as described in Sec. 1.4. Note that the interpolation is performed with the logarithms of the quantities; this improves the accuracy since these functions are known to appear rather linear when plotted on log-log paper.

The index K is used to store the various $f(\theta, R)$ in end-to-end arrays, each MXTH long, for further use, $f(\theta)$ in F(400 + K + I) for transformation to the frequency domain, and log $f(\theta)$ in W(K + I) for plotting the family of curves. The final statement in this section calls subroutine PLOTFAM which plots the family of spread functions, i.e., $f(\theta, R)$ for various R, on the line printer as described in Sec. 1.5. This is a log-log plot in which the values of DINC and IHOR in the call statement put 2 grid lines to an order of magnitude on the f scale (ordinate) and 10 to an order of magnitude on the θ scale (abscissa).

The next section of the program loops through the values of θ and prints the spread function $f(\theta)$ (stored in array F(K)) in columns, one column for each value of range in the experiment. The argument θ is also stored in the array TH(I), and is incremented by multiplying by SS (see line $ here and $ back at the beginning of the program) to generate the logarithmic spacing in the θ array.

```
        THETA = THMIN
        PRINT 5000
        LIM=KASES*MXTH+400
             DO 320 I=1,MXTH
             I399=I+400
             PRINT 913,I,THETA,(F(K),K=I399,LIM,MXTH)  <------ print
             TH(I) = THETA
$ 320        THETA = THETA*SS      $
        TH(1) = 0.
*       CALL LOADBES (MXX,PI2)                        <------ call *
        PRINT 902,MXX                                 <------ print
```

The statement * in this group calls subroutine LOADBES, which stores the transforming function needed for the Fourier-Bessel transform, the square bracket in the following expression for the transform, a variation of Eq. 1a

$$F(\psi, R) = \psi^{-1}\int_0^\infty f(\theta, R)[J_0(2\pi\theta\psi)(2\pi\psi\theta)]\,d\theta \tag{6}$$

The final result then follows from this transform, namely

$$D(\psi) = -R^{-1}\log_e F(\psi, R) \tag{7}$$

The transforming function actually stored uses the dummy argument $\xi = \theta\psi$ (XI in Fortran); explicitly it is: $J_0(2\pi\xi)2\pi\xi$. The values of this function and its argument ξ are stored in arrays F (*) and T (#) as shown in the following listing:

```
        SUBROUTINE LOADBES(MXX,PI2)
        COMMON/INT/F(1500),T(1500),FI,A(5),MIN(5),MAX(5)
        I=1
        DXT=0.05
        XI=0.
        F(1)=0.
        T(1)=0.
   20   I=I+1
        XI=XI+DXI
        ARG=XI*PI2
        CALL BESJ0(ARG,BES)  <------ returns BES = J0 ( ARG )
$ *     F(I)=BES*EXP(-.5*(ARG*0.02)**2)*ARG      *$
  #     T(I)=XI                #
        DXI=DXI+0.0016
        IF(DXI.LT.0.08) GOTO 20
   25   I=I+1
        XI=XI+DXI
        ARG=XI*PI2
```

```
          CALL BESJ0(ARG,BES)
$         FAC=EXP(-.5*(ARG*0.02)**2)   $
*         F(I)=BES*FAC*ARG             *
#         T(I)=XT                      #
          IF(FAC.GT.0.001) GOTO 25
          MXX=I
          RETURN
          END
```

The slowly decaying Gaussian function (See lines $) inserted in the integrand helps the integral converge while effecting its value very little. It corresponds to convolution with a very thin Gaussian blur. MXX (a subroutine argument which returns a number to the main program) is the number of points in the transform function that has been stored.

The next sections of the main program begin performing the transform integral of Eq. 6. The $\psi = 0$ point must be treated separately, and this is the first integration performed, namely

$$F(0,R) = \int_0^{\theta_{max}} h(\theta,R)2\pi\theta d\theta \tag{8}$$

The following correspondences identify this equation with the INTPROD formula Eq. 3:

$$x \rightarrow \theta; \quad F_1 \rightarrow f(\theta,R); \quad F_2 \rightarrow 2\pi\theta; \quad a_1, a_2 = 1.$$

Since F_2 is linear, and INTPROD uses linear interpolation, this function may be defined at only 2 points, which is the purpose of the first two statements in the program section below. They put F_2 and its argument in positions 1499 and 1500 of arrays F and T respectively. The loop in the last half of this section performs the integration of Eq. 8 for each case, and the answer F1 is stored as POWR(KASE) (line *) for later use. As this name implies, the integral gives the normalized total power in the blur circle. Statement # next calculates -D(ψ) (see Eq. 7), and stores the result in array W for plotting.

```
          DATA F(1499),T(1499),T(1500)/0.,0.,1./
          F(1500) = PI2
C         READY TO TRANSFORM PSF STORED AS F(401-1498).
C         STORE RESULTING D(PSI) AS W.
C         FUNCTION 1 IS PSF.  FUNCTION 2 IS TRANSFORM STUFF.
C         FIRST LINEAR RANGE OF PSI
          K = 0$KPS = 0
          PRINT 5000
          A(1)=1.
          A(2)=1.
          MIN(2)=1499
          MAX(2)=1500
C         PSI = 0.
           PSI=0.
          DO 330  KASE = 1, KASES
          MIN(1)=401+K
          MAX(1)=400+K+MXTH
          DO 325 J=1,MXTH
      325 T(400+K+J)=TH(J)
          CALL INTPROD(2)  <------------ integration call
*         POWR(KASE)=F1            *
#         W(1+KPS)= ALOG(F1)/RR(KASE)     #
          KPS=KPS+31
      330 K=K+MXTH
          I=1
          L=(KASES-1)*31+1
          PRINT 913,1,PSI,(W(J),J=1,L,31)
```

To plot and tabulate D(ψ), we use both a linear ψ scale from $\psi = 0$ to 30.0 and a logarithmic scale from $\psi = 10^{1.2} = 15.85$ to the maximum value PSMX = 1.0/THMIN. Neither type of scale is appropriate for the full range. The final section of the main program increments ψ through these two ranges, the linear range in the first DO loop, and the logarithmic range in the second. It performs the actual transform integration, Eq. 6, by calling the subroutine DOFPSI (read "D of ψ") which is common to each of the 2 loops.

```
          MIN(2)=1
          MAX(2)=MXX
           MQ=KASES*31
          DO 345  I=2,31
          PSI = PSI+1.0
          CALL DOFPSI(31,I)                <------------ call
      345 PRINT 913,I,PSI,(W(J),J=I,MQ,31)
          CALL PLOTFAM(W,31,KASES,FINC,5)  <------------ plot
          PRINT 5000
          PSI = 10.**1.2
          PSMX=1./THMIN
          NPS = ALOG10(PSMX/PSI)*40
           MQ=KASES*NPS
          DO 360  I=1,NPS
          CALL DOFPSI(NPS,I)               <------------ call
```

```
      PRINT 913,I,PSI,(W(J),J=I,MQ,NPS)
  360 PSI=PSI*SS
      CALL PLOTFAM(W,NPS,KASES,FINC,4)  <------------ plot
      CALL EXIT
      END
```

The PLOTFAM call at the end of each loop plots the family of D(ψ) functions.

The subroutine DOFPSI is listed below. It sets the proper values of arrays A, MAX and MIN as required for INTPROD just as before. INTPROD returns the value of the integral as FI, which is divided by ψ (Eq. 6) to give the transform HH, line *. At this point the deconvolution may be performed (depending on LDECON, line #) by dividing the transform of the measured point spread function by the Fourier Transform of the circular aperture, line ¢, $Cir(\varepsilon\psi) = 2J_1(2\pi\varepsilon\psi)/(2\pi\varepsilon\psi)$.

```
      SUBROUTINE DOFPSI(NPS,I)
       COMMON/INT/F(1500),T(1500),FI,A(5),MIN(5),MAX(5)
      COMMON/DFF/KASES,MXTH,LDECON(6),APRAD(6),POWR(6),RR(6),PI2,PSI,
     1       W(600)
      A(2)=PSI
      K=0$KPS=0
      DO 10  KASE=1,KASES
      MIN(1)=401+K
      MAX(1)=400+K+MXTH
      CALL INTPROD(2)  <------------ integration call
*     HH=FI/PSI                      *
#     IF(LDECON(KASE).EQ.0)  GO TO 5 #
            ARG=PI2*PSI*APRAD(KASE)
¢           CALL BESJ1(ARG,BES)<------ BES = J_o (ARG)  ¢
            HH=HH*ARG/(2.*BES)
    5 HH=AMIN1 (POWR(KASE),HH)
$     W(I+KPS)= ALOG(AMAX1(HH,1.E-99))/RR(KASE)        $
      K=K+MXTH
   10 KPS=KPS+NPS
      RETURN
      END
```

The correspondences between the INTPROD form, Eq. 3, and the integral transform, Eq. 6 are the following:

$x \rightarrow \theta$	$\xi = a_2\theta,\ a_2 = \psi$
$F_1 \rightarrow f(\theta, R)$	$F(\psi, R) = \psi^{-1}G = \psi^{-1} \times$ integral.
$F_2 \rightarrow J_o(2\pi\xi)2\pi\xi$	

As before, the logarithm in line $ gives -D(ψ) which is stored in the array W for plotting the final result.

U156181

NATIONAL DISTRIBUTION CENTRES FOR UNCLASSIFIED AGARD PUBLICATIONS

Unclassified AGARD publications are distributed to NATO Member Nations through the unclassified National Distribution Centres listed below

BELGIUM
Coordonnateur AGARD – VSL
Etat-Major de la Force Aérienne
Caserne Prince Baudouin
Place Dailly, 1030 Bruxelles

CANADA
Director of Scientific Information Services
Defence Research Board
Department of National Defence – 'A' Building
Ottawa, Ontario

DENMARK
Danish Defence Research Board
Østerbrogades Kas
Copenhagen Ø

FRANCE
O.N.E.R.A. (Direc
29, Avenue de la
92, Châtillon-sous

GERMANY
Zentralstelle für I
und Information
Maria-Theresia St
8 München 27

GREECE
Hellenic Armed F
D Branch, Athens

ICELAND
Director of Aviat
c/o Flugrad
Reykjavik

ITALY
Aeronautica Militare
Ufficio del Delegato Nazionale all'AGARD
3, Piazzale Adenauer
Roma/EUR

LUXEMBOURG
Obtainable through BELGIUM

NETHERLANDS
Netherlands Delegation to AGARD
National Aerospace Laboratory, NLR
P.O. Box 126
Delft

National Aeronautics and Space Administration
WASHINGTON, D. C. 20546

OFFICIAL BUSINESS
Penalty For Private Use, $300.00
Special Fourth Class Mail

POSTAGE AND FEES PAID
NATIONAL AERONAUTICS AND
SPACE ADMINISTRATION

021 001 C4 B 09 731012 S02276DS
DEPT OF THE NAVY
NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL
ATTN: LIBRARY CODE 2124
MONTEREY CA 93940

UNITED STATES
National Aeronautics and Space Administration (NASA)
Langley Field, Virginia 23365
Attn: Report Distribution and Storage Unit

* * *

If copies of the original publication are not available at these centres, the following may be purchased from:

Microfiche or Photocopy
National Technical
Information Service (NTIS)
5285 Port Royal Road
Springfield
Virginia 22151, USA

Microfiche
ESRO/ELDO Space
Documentation Service
European Space
Research Organization
114, Avenue Charles de Gaulle
92200, Neuilly sur Seine, France

Microfiche
Technology Reports
Centre (DTI)
Station Square House
St. Mary Cray
Orpington, Kent BR5 3RE
England

The request for microfiche or photocopy of an AGARD document should include the AGARD serial number, title, author or editor, and publication date. Requests to NTIS should include the NASA accession report number.

Full bibliographical references and abstracts of the newly issued AGARD publications are given in the following bi-monthly abstract journals with indexes:

Scientific and Technical Aerospace Reports (STAR)
published by NASA,
Scientific and Technical Information Facility,
P.O. Box 33, College Park,
Maryland 20740, USA

United States Government Research and Development
Report Index (USGDRI), published by the
Clearinghouse for Federal Scientific and Technical
Information, Springfield, Virginia 22151, USA

Printed by Technical Editing and Reproduction Ltd
Harford House, 7-9 Charlotte St, London. W1P 1HD