

AD-A192 297

DAJA45-87-M-0296
SECOND INTERIM REPORT

DTIC
ELECTE
MAR 25 1988
S H D

1) RESEARCH

The contractors have continued their efforts on the design of approximate finite dimensional filters in the case of small observation noise. More precisely, we are concerned with the problem :

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dW_t$$

$$dY_t = h(X_t) dt + \epsilon dV_t$$

Where ϵ is a "small parameter", i.e. we want to study the asymptotics $\epsilon \rightarrow 0$.

1- Numerical evaluation of the "Katzur-Picard " filter

Suppose that X and Y are one dimensional, and that h is one to one. Bobrovsky-Katzur-Schuss [1] have suggested an approximate filter for which Picard [4] has established rigorously that the difference between the approximate and the exact filter is of order ϵ , while the difference between the true value and any "reasonable" filter is of the order of $\sqrt{\epsilon}$.

Paula Milheiro de Oliveira has started to transform the proposed algorithm into a practical algorithm running on a computer. The difficulty is that the filter is given by a stiff equation, and the stiffness is of the order of $1/\epsilon$. As a result, the stepsize of the discretization scheme has to go to zero as ϵ tends to zero. And precisely, we want to let ϵ tend to zero, since we want to check numerically an asymptotic result for $\epsilon \rightarrow 0$.

In her "Dea report" [3], P. M. de Oliveira compares, in the limit $\epsilon \rightarrow 0$, both the Katzur-Picard filter and the extended Kalman filter to the simulated $\{X_t\}$ that has produced the given observation. In a current work, she compares the two filters. Another problem is to obtain the discretized version of the Katzur-Picard filter, i.e. to obtain the equivalent of the Picard results for discrete-time systems. In the report, the continuous equation is discretized first by a standard Euler method, and then a modified scheme is given, which gives a more satisfactory result for small ϵ and Δt . No justification is given for this new algorithm. The good approach should be to derive a Katzur - Picard type of filter for the discrete time filtering problem with small observation noise. This approach is presently under research.

DISTRIBUTION STATEMENT A
Approved for public release;
Distribution unlimited

2- The case where h is locally one to one

Let us start with the piecewise linear problem, with $g=1$, f and h being piecewise linear. More specifically, let us suppose that :

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + b, & x \geq 0 \\ a_2x + b, & x < 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} c_1x, & x \geq 0 \\ c_2x, & x < 0 \end{cases}$$

We are specifically interested in the case where $c_1c_2 < 0$. The idea is that, provided the conditional law has a small variance, as in the case where h is one to one, then the conditional law should be during most of the time concentrated either on \mathbb{R}_+ or on \mathbb{R}_- . Consequently, if we compute it with functions h and f which are wrong on the other side of 0, the error should be small. Therefore, if we consider the two Kalman filters associated with

$$f_1(x) = a_1x + b, \quad h_1(x) = c_1x$$

on one side, and

$$f_2(x) = a_2x + b, \quad h_2(x) = c_2x$$

on the other, then one of the two corresponding outputs should be close to the optimal filter. It would just remain to choose between the two filters.

It turns out that provided $|c_1| \neq |c_2|$ (or at least $a_1 \neq a_2$) the above holds, and one can choose between the two filters on the basis of a likelihood ratio which can be computed from the two Kalman filters. Let us mention that the variance of the optimal filter is small only when the process $\{X_t\}$ has been away from zero for some time, and that one needs to detect the times when X_t crosses zero. The case of more than two intervals is treated similarly. The analysis is developed in Fleming, Ji, Pardoux [2]. The nonlinear case with piecewise one-to-one h will be treated later in another publication.

2) TRANSFER TO THE US

Fabien Campillo has given a talk on the E. M. algorithm at the 26 th C. D. C. at Los Angeles in december 1987.



Accession For	
NTIS GRA&I	<input checked="" type="checkbox"/>
DTIC TAB	<input type="checkbox"/>
Unannounced	<input type="checkbox"/>
Justification	
<i>Form 50</i>	
By	<i>see First Interim Rept</i>
Distribution/	
Availability Codes	
Dist	Avail and/or Special
<i>A-1</i>	

Bibliography

- [1] Bobrovsky, Katzur, Schuss *Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one dimensional diffusions measured in a low noise channel*, S.I.A.M. J. Applied Math. 44, 3 (1984) 571 - 604 ,44, 6 (1984) 1176 - 1191
- [2] W. Fleming, Ji, E. Pardoux *Piecewise linear filtering with small observation noise*, INRIA Systems Conf. 1988, to appear. **Enclosed.**
- [3] P. Milheiro de Oliveira *Filtrage non linéaire avec petit bruit d'observation. Comparaison numérique de 2 filtres*, D. E. A. report. **Enclosed.**
- [4] J. Picard *Non linear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio*, S.I.A.M. J. Appl. Math. 46, 6 (1986) 1098 - 1125.

**FILTRAGE NON LINEAIRE
AVEC PETIT BRUIT D'OBSERVATION
COMPARAISON NUMERIQUE DE 2 FILTRES**

Paula M. L. P. Milheiro de Oliveira

**Rapport de stage de D.E.A.
de Mathématiques Appliquées
fait à l'INRIA - centre de Sophia-Antipolis**

Responsables : F. Campillo et F. Le Gland

**INRIA
Sophia-Antipolis
Route des Lucioles, 06565 VALBONNE Cedex**

Je tiens à remercier Fabien Campillo et François Le Gland de m'avoir si bien accueillie dans leur équipe et pour tout ce que j'ai pu apprendre avec eux. Je ne pourrai pas oublier leur entière disponibilité pour diriger mon travail ainsi que leurs efforts pour comprendre mes tentatives de m'exprimer en langue française.

Je tiens également à remercier le Professeur E. Pardoux de m'avoir donné la possibilité de faire mon stage de D.E.A. au sein de son projet et d'avoir surveillé mon travail.

Enfin, j'exprime toute ma gratitude au Professeur F. Calheiros, de l'Ecole d'Ingénieurs de Porto, d'avoir fait "le possible et l'impossible" pour que je puisse poursuivre ma formation universitaire en France. C'est à lui que je dois mon goût pour la Statistique.

Le sujet de ce rapport se situe dans le chapitre plus vaste des problèmes de filtrage non linéaire de diffusions unidimensionnelles dans le cas d'un bruit d'observation de petite covariance, ce qu'on appellera un "petit bruit d'observation".

Notre but est double. D'une part, on se propose de comparer, sur un exemple concret, les résultats obtenus par l'application du filtre de Kalman étendu avec ceux obtenus par le filtre de Katsur-Picard. D'autre part, on veut vérifier numériquement les résultats théoriques de J. PICARD (cf. [Picard]), sur l'ordre de l'écart entre ces filtres approchés et le filtre optimal quand le bruit d'observation deviant de plus en plus petit. En fait, les comparaisons présentées dans ce rapport n'ont pas été établies par rapport au filtre optimal mais par rapport au signal simulé.

On a rencontré deux difficultés : la première est liée au fait de qu'il fallait trouver un schéma de discrétisation "convenable" pour l'équation du filtre de Katsur-Picard ; la deuxième liée à des exigences d'espace de mémoire et de temps de calcul (souvent rencontrée quand il s'agit de simuler des problèmes physiques) est de répéter plusieurs fois ces simulations.

Dans le premier chapitre on introduit les outils mathématiques nécessaires à l'étude de notre problème.

Dans le chapitre 2 on présente le filtre de Katsur-Picard et les résultats asymptotiques de "qualité" des filtres.

Enfin, dans le chapitre 3, on considère un exemple concret et on présente les résultats obtenus.

Table des matières

1	Processus de Diffusion et Filtrage Non Linéaire	1
1.1	Processus de diffusion	1
1.1.1	Processus de Wiener	1
1.1.2	L'intégrale stochastique et la formule de Ito	1
1.1.3	Equations différentielles stochastiques	4
1.2	Filtrage non linéaire	4
1.3	Filtrage non linéaire approché	7
1.4	Discrétisation d'une diffusion	9
1.4.1	Cas unidimensionnel	9
1.4.2	Cas multidimensionnel	11
1.5	Un exemple	12
2	Le filtre de Katsur-Picard	17
2.1	Présentation du filtre	17
2.2	Discretisation de l'équation du filtre de Katsur-Picard	18
2.2.1	Première méthode	18
2.2.2	Deuxième méthode	18
3	Application	20
3.1	Motivation	20
3.2	L'exemple concret	20
3.2.1	Les résultats	22
3.2.2	Remarques	32

1 Processus de Diffusion et Filtrage Non Linéaire

1.1 Processus de diffusion

1.1.1 Processus de Wiener

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et Q une matrice $n \times n$ auto-adjointe et semi-définie positive.

On définit processus de Wiener (n-dimensionnel) de matrice de covariance Q comme étant un processus gaussien $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ qui vérifie :

- i) $W_0 \equiv 0$.
- ii) $EW_t = 0$, $E(W_t W_s') = (s \wedge t)Q$, $\forall s, t \in [0, T]$.
- iii) $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ est continu.

Si $Q = I$, le processus $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$ est appelé processus de Wiener standard.

On peut démontrer que les processus de Wiener sont des processus à accroissements indépendants, i.e.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall (t_1, t_2, \dots, t_k) \in [0, T]^k \quad (t_1 < t_2 < \dots < t_k)$$

les v. a. $W_{t_1} - W_0, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.

Considérons $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré (i.e. $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F}).

On appelle \mathcal{F}_t -P processus de Wiener de matrice de covariance Q un processus $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ adapté (i.e. tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+ W_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable) qui vérifie :

- i) $W_0 \equiv 0$.
- ii) $\forall 0 \leq s < t, W_t - W_s$ est un vec. a. de loi $\mathcal{N}(0, (t - s)Q)$ indépendant de \mathcal{F}_s .
- iii) $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ est continu.

On le note sous forme condensée par $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$.

Si on considère, en particulier, la filtration naturelle $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, où $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s; 0 \leq s < t)^1$, on a alors que $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$, processus de Wiener au sens de la 1.^{ière} définition, peut être considéré comme un \mathcal{F}_t^W -processus de Wiener.

1.1.2 L'intégrale stochastique et la formule de Ito

On considère un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$.

On veut définir une intégrale du type

$$\int_0^t G dW = \int_0^t G(s, \omega) dW(s, \omega),$$

où $\{W_t\}_t$ est un \mathcal{F}_t -processus de Wiener.

On présente la construction de l'intégrale stochastique dans le cas réel.

¹Les tribus considérées sont supposées complétées par les P-négligeables de \mathcal{F} .

On commence par définir l'intégrale d'un processus élémentaire $\{\rho_t\}_{t \leq T}$ (i.e. un processus de la forme $\rho_t(\omega) = \rho(\omega)1_{]0, T]}(t)$, où $\theta \in [0, T]$ et ρ est une v. a. \mathcal{F}_θ -mesurable et bornée) par :

$$\int_0^t \rho_u dW_u \triangleq \rho(W_{t \vee \theta} - W_\theta), t \in [0, T].$$

Maintenant, pour un processus en escalier $\varphi \in \epsilon(2)$, $\varphi_t = \sum_{i=1}^n \rho_i^t$, on définit :

$$\int_0^t \varphi_u dW_u \triangleq \sum_{i=1}^n \int_0^t \rho_i^u dW_u$$

et

$$\int_s^t \varphi_u dW_u = \int_0^t \varphi_u dW_u - \int_0^s \varphi_u dW_u, 0 \leq s \leq t \leq T.$$

On a les propriétés (pour $\varphi, \varphi' \in \epsilon$) :

$$P1) E^{\mathcal{F}_t} \int_s^t \varphi_u dW_u = 0.$$

$$P2) E^{\mathcal{F}_t} \int_s^t \varphi_u dW_u \int_s^t \varphi'_u dW_u = E^{\mathcal{F}_t} \int_s^t \varphi_u \varphi'_u du \quad (0 \leq s < t \leq T).$$

$$P3) E\{\sup_{t \leq T} |\int_0^t \varphi_u dW_u|^2\} \leq 4E \int_0^T \varphi_t^2 dt.$$

Le fait que ϵ est dense dans l'espace de Hilbert $M_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$,⁽³⁾ permet de définir l'intégrale de tout processus φ dans $M_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$:

Soit L le prolongement linéaire (continu) de l'application

$$\begin{aligned} \epsilon &\longrightarrow L^2(\Omega, C[0, 1]) \\ \varphi &\sim \phi = \{\phi_t\}_{t \leq T} \end{aligned}$$

On définit :

$$\int_0^t \varphi_u dW_u \triangleq (L\varphi)_t.$$

Pour les processus dans $L_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$,⁽⁴⁾ il faut considérer une suite croissante de \mathcal{F}_t - temps d'arrêt⁵ :

$$\tau_n(\omega) = \begin{cases} \inf_{t \leq T} \left\{ \int_0^t \varphi_u^2(\omega) du \geq n \right\} & \text{si } \int_0^T \varphi_u^2(\omega) du \geq n \\ T & \text{si } \int_0^T \varphi_u^2(\omega) du < n \end{cases}$$

² ϵ est l'e. v. des processus en escalier de la forme :

$$\varphi_t = \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{k-1} 1_{]t_{k-1}, t_k]}(t) + \varphi_{n-1} 1_{]t_{n-1}, T]}(t), \text{ avec } \varphi_k \mathcal{F}_{t_k}\text{-mesurable et bornée } \forall k \text{ et } 0 = t_0 < \dots < t_n = T.$$

³ $M_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$ est l'espace des (classes de) processus $\{\varphi_t\}_{t \leq T}$ qui vérifient :

- i) $\varphi : (t, \omega) \sim \varphi_t(\omega)$ est mesurable.
- ii) $\forall t \leq T, \varphi_t$ est \mathcal{F}_t -mesurable.
- iii) $E\{\int_0^T \varphi_t^2 dt\} < \infty$.

⁴ $L_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$ est l'espace des processus $\{\varphi_t\}_{t \leq T}$ qui vérifient i), ii) et

$$\text{iii')} \int_0^T \varphi_t^2 dt < \infty \text{ p. s.}$$

⁵On appelle un \mathcal{F}_t - temps d'arrêt une v. a. τ (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) telle que $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

On pose $\varphi^n = \varphi 1_{[0, r_n]}$. Alors $\varphi^n \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$ et on définit l'intégrale stochastique par :

$$\int_0^t \varphi_u dW_u \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t \wedge r_n} \varphi_u^n dW_u \text{ p.s.}$$

Le processus $\{\phi_t\}_{t \leq T}$, où $\phi_t = \int_0^t \varphi_s dW_s$, est un processus continu et \mathcal{F}_t -adapté mais il n'est pas forcément intégrable. Par contre, l'intégrale stochastique d'une fonction $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T)$ est une \mathcal{F}_t -martingale, i. e.

i) $\forall t \in [0, T]$ φ_t est \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable.

ii) $\forall s, t \in [0, T]$, $s < t$, $E[\varphi_t | \mathcal{F}_s] = \varphi_s$ p. s.

Dans ce cas les propriétés P1), P2) et P3) sont vérifiées.

Cette définition d'intégrale stochastique peut être étendue au cas vectoriel. On considère, alors, respectivement les espaces $\mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times n})$ et $L_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times n})$, où :

$\mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times n})$ est l'espace des (classes de) processus $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{m \times n}$ qui vérifient :

i) φ est mesurable et \mathcal{F}_t -adapté.

ii) $E \int_0^T \text{Tr}(\varphi_s \varphi_s') ds < \infty$.

et

$L_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times n})$ est l'espace des processus $\{\varphi_t\}_{t \in [0, T]}$ qui vérifient i) et

ii') $\int_0^T \text{Tr}(\varphi_s \varphi_s') ds < \infty$ p.s.

On considère :

- X_0 un vec. a. (n-dimensionnel), \mathcal{F}_0 -mesurable.
- b une fonction de \mathbb{R}^n , mesurable, \mathcal{F}_t -adapté, telle que $\int_0^T \|b_t\| dt < \infty$.
- $\sigma \in L_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^{m \times n})$
- $\{W_t\}_t$ un \mathcal{F}_t -processus de Wiener.

Soit X le processus (continu et adapté) donné par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s.$$

On a la formule de Ito :

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) b_s ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \sigma_s dW_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \text{Tr}[\Phi''_{xx}(s, X_s) \sigma_s \sigma_s^T] ds, \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ et $\Phi \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$, ⁽⁶⁾

i.e., sous forme différentielle,

$$d\Phi(t, X_t) = \Phi'_t(t, X_t) dt + \Phi'_x(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi''_{xx}(t, X_t) \sigma_t \sigma_t^T) dt$$

où

⁽⁶⁾ $C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $\Phi(t, x)$ qui admettent des dérivées jusqu'à l'ordre 1 en t et jusqu'à l'ordre 2 en x , continues en (t, x) .

- Φ'_x est le vecteur gradient .
- Φ''_x est la matrice de dérivées secondes .

1.1.3 Equations différentielles stochastiques

Soient :

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, W_t)$ un processus de Wiener standard à valeurs dans \mathbb{R}^n .
- X^0 un vec. a. à valeurs dans \mathbb{R}^n , de carré intégrable, \mathcal{F}_0 - mesurable et indépendant de $\{W_t\}_{t \in [0, T]}$.
- les applications mesurables

$$b : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$(t, x) \quad \rightsquigarrow \quad b(t, x) \quad \quad \quad (t, x) \quad \rightsquigarrow \quad \sigma(t, x)$$

vérifiant:

$\exists k$ tel que

$$\forall t \in [0, T] \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2)$$

et

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq k|x - y|$$

où on note $|b| = (\sum_{i=1}^n b_i^2)^{\frac{1}{2}}$ et $|\sigma| = (\text{Tr} \sigma \sigma^T)^{\frac{1}{2}}$.

Considérons l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = X^0 \end{cases} \quad (1)$$

c'est à dire ,

$$X_t = X^0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)ds ,$$

où l'intégrale stochastique est prise au sens de Ito (si $\sigma(\cdot, x) \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^n), \forall T > 0$, l'intégrale est bien définie).

Sous les hypothèses précédentes il existe un unique processus $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$, à trajectoires continues, avec $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{F}_t}^2(0, T; \mathbb{R}^n), \forall T > 0$, qui est solution de l'EDS (1)

Un tel processus est appelé un *processus de diffusion*. Il s'agit d'un processus de Markov à trajectoires continues dont les probabilités de transition vérifient certaines propriétés (cf. [Arnold]).

1.2 Filtrage non linéaire

Sous les hypothèses du paragraphe précédent, soit X le processus, à valeurs dans \mathbb{R}^n , solution de l'EDS :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t ,$$

où W est un processus de Wiener standard à valeurs dans \mathbb{R}^m .

En pratique, le problème de filtrage non linéaire se présente de la manière suivante :

On dispose d'une observation $\{y_t\}_{t \geq 0}$ telle que :

$$y_t = h(t, X_t) + v_t ,$$

où v_t est un "bruit blanc" et on veut estimer le processus X_t , non observé, à partir de l'information donnée par $\{y_s\}_{0 \leq s \leq t}$.

Bien que cette formulation soit largement utilisée on préférera énoncer le problème de filtrage en tenant compte du fait que l'information contenue dans $\{y_s; 0 \leq s < t\}$ est équivalente à celle contenue dans $\{Y_s; 0 \leq s < t\}$, où $Y_t = \int_0^t y_s ds$. Le "bruit blanc" v_t peut être vu comme la "dérivée d'un processus de Wiener". L'équation d'observation peut alors s'écrire :

$$dY_t = h(t, X_t)dt + d\bar{W}_t, Y_0 \equiv 0,$$

où \bar{W}_t est un processus de Wiener.

Supposons que :

- Y_t et \bar{W}_t sont des processus à valeurs dans \mathbb{R}^m .
- la fonction $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $(t, x) \rightsquigarrow h(t, x)$
 est mesurable et bornée.
- $\bar{W}_t = g\bar{W}_t$, où \bar{W}_t est un processus de Wiener standard et gg^T une matrice $m \times n$ définie positive

On supposera que les processus de Wiener W_t et \bar{W}_t sont indépendants. (Le problème peut aussi être formulé sans cette restriction, cf. [Pardoux]).

On introduit un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{G}_t, P)$ tel que $\left(\frac{W}{\bar{W}}\right)$ soit un $P - \mathcal{G}_t$ processus de Wiener standard.

Les équations d'état et d'observation s'écrivent donc :

$$\begin{cases} dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, & X_0 = X^0 \\ dY_t = h(t, X_t)dt + g d\bar{W}_t, & Y_0 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Soit \mathcal{F}_t la tribu des observations jusqu'à l'instant t , $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s; s \leq t)$. Le problème de filtrage consiste à calculer la loi conditionnelle de X_t sachant \mathcal{F}_t .

Cette loi conditionnelle permet de calculer \hat{X}_t , l'espérance conditionnelle de X_t sachant \mathcal{F}_t . \hat{X}_t est, en fait, le meilleur estimateur de X_t sachant l'information \mathcal{F}_t , au sens du risque quadratique (i.e. $E(|X_t - \hat{X}_t|^2) \leq E(|X_t - \xi|^2), \forall \xi$ v. a. \mathcal{F}_t -mesurable.).

Aux hypothèses précédentes ajoutons maintenant les suivantes :

$$\forall T > 0,$$

- b et σ sont bornées sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.
- σ est uniformément continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.
- h est mesurable et bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.
- g est mesurable.
- $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^n) \forall i, j$
 où $a = \sigma\sigma^T$ et les dérivées partielles sont prises au sens des distributions.
- $\exists \alpha > 0 : \forall(t, x) \quad a(t, x) \geq \alpha I$.

Soit

$$Z_t = \exp \left\{ \int_0^t h(s, X_s) dY_s - \frac{1}{2} \int_0^t |h(s, X_s)|^2 ds \right\}, \forall t \in [0, T].$$

Soit $\Omega = C([0, T]; \mathbb{R}^{n \times m})$ et $\mathcal{G}_t = \sigma(\omega(\theta); 0 \leq \theta \leq t)$, où $\omega(t) = \begin{pmatrix} X_t(\omega) \\ Y_t(\omega) \end{pmatrix}$.

$\{Z_t\}_t$ est une \mathcal{G}_t -martingale d'espérance 1.

On peut définir une mesure de probabilité \dot{P} (appelée probabilité de référence) par :

$$\frac{d\dot{P}}{dP} = Z_T^{-1} \quad (T \text{ fixé})$$

où P est la probabilité sur (Ω, \mathcal{G}_T) associée au problème (2) telle que la densité de la loi de X_0 est $p_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Sous cette probabilité \dot{P} , \mathcal{F}_t est la filtration d'un processus de Wiener. De plus on a la formule suivante :

$$E[\varphi(X_t) | \mathcal{F}_t] = \frac{\dot{E}[\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t]}{\dot{E}[Z_t | \mathcal{F}_t]},$$

pour tout φ mesurable et bornée.

Cette formule permet de ramener les calculs sur la probabilité P aux calculs des mêmes expressions sur la probabilité \dot{P} , laquelle a les "bonnes propriétés".

Considérons l'opérateur aux dérivées partielles L :

$$L_t = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

L est appelé le générateur infinitésimal associé à l'EDS (1). Soit L^* son opérateur adjoint. L'équation aux dérivées partielles stochastique (Equation de Zakai),

$$d_t p(t, x) = (L^* p)(t, x) dt + h(t, x) p(t, x) dY_t \quad (3)$$

admet une solution \mathcal{F}_t -adaptée

$$p \in L^2((\Omega, \mathcal{G}_T, \dot{P}); H^1) \cap L^2((\Omega, \mathcal{G}_T, \dot{P}); C([0, T]; L^2(\mathbb{R}^n))),$$

qui n'est autre que la densité de la loi conditionnelle, non normalisée, de X_t sachant \mathcal{F}_t (cf. [Pardoux]) :

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(t, x) \varphi(x) dx = \dot{E}[\varphi(X_t) Z_t | \mathcal{F}_t].$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} E[\varphi(X_t) | \mathcal{F}_t] &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} p(t, x) \varphi(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} p(t, x) dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} q(t, x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

où $q(t, x) = \frac{p(t, x)}{\int_{\mathbb{R}^n} p(t, x) dx}$ est la densité conditionnelle (normalisée) de X_t sachant \mathcal{F}_t .

1.3 Filtrage non linéaire approché

On a vu que la densité conditionnelle $q(t, x)$ est la solution complète du problème de filtrage, i.e. dans la plus part des cas, on ne peut pas calculer $\hat{X}_t = E[X_t | \mathcal{F}_t]$ sans calculer toute la loi conditionnelle.

Dans le cas linéaire, les processus qui interviennent dans le SDS (2) sont des processus gaussiens, les lois conditionnelles $q(t, x)$ le sont aussi et elles sont donc caractérisées par la moyenne et la covariance. La situation est différente dans le cas non linéaire : Les processus ne sont pas nécessairement gaussiens et, en général, il n'existe pas un ensemble fini de paramètres qui caractérisent ces densités. L'évolution de la loi conditionnelle dépend alors de l'évolution d'un nombre infini de paramètres, ce qui représente une difficulté au niveau de la résolution numérique.

Soit $\hat{X}_t = E[X_t | \mathcal{F}_t]$

et

$P_t = E[(X_t - \hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t) | \mathcal{F}_t]$, "matrice de covariance de l'erreur d'estimation".

Les équations d'évolution pour \hat{X}_t et P_t sont :

$$d\hat{X}_t = \hat{b}(t, X_t)dt + (X_t \hat{h}(t, X_t)^T - \hat{X}_t \hat{h}(t, X_t)^T) \quad (4)$$

$$[g(t)g(t)^T]^{-1} (dY_t - \hat{h}(t, X_t)dt)$$

$$d(P_t)_{i,j} = [(\widehat{X}_i \widehat{b}_i) - \hat{X}_i \hat{b}_j] + [\widehat{b}_i \widehat{X}_j - \hat{b}_i \hat{X}_j] + (\widehat{\sigma\sigma^T})_{i,j} \quad (5)$$

$$- (\widehat{X}_i \widehat{h} - \hat{X}_i \hat{h})^T (gg^T)^{-1} (\widehat{hX}_j - \hat{h}\hat{X}_j) dt$$

$$+ (X_i \widehat{X}_j \widehat{h} - \widehat{X}_i \widehat{X}_j \widehat{h} - \hat{X}_i \widehat{X}_j \widehat{h} + 2\hat{X}_i \hat{X}_j \hat{h})^T (gg^T)^{-1} (dY_t - \hat{h}dt) ,$$

où $\widehat{\psi}$ désigne l'opérateur "espérance conditionnelle" ($\widehat{\psi(X_t)} \triangleq E[\psi(X_t) | \mathcal{F}_t]$).

A la place de ces équations on peut utiliser des équations approchées, par exemple celles du filtre de Kalman étendu.

Le filtre de Kalman étendu :

On fait l'hypothèse que l'estimée \hat{X}_t est connue et peut donc être exploitée pour construire des développements en série de Taylor autour de $X_t = \hat{X}_t$. On obtient ainsi un système linéaire en X_t :

$$\begin{cases} dX_t = \left[b(t, X_t) + \frac{\partial b}{\partial X_t}(t, X_t) (X_t - \hat{X}_t) \right] dt + \sigma(t, \hat{X}_t) dW_t \\ dY_t = \left[h(t, X_t) + \frac{\partial h}{\partial X_t}(t, X_t) (X_t - \hat{X}_t) \right] dt + g(t, \hat{X}_t) d\bar{W}_t \end{cases} \quad (6)$$

Il suffit maintenant d'appliquer le filtre de Kalman classique.

On obtient les équations :

$$d\hat{X}_t = b(t, \hat{X}_t)dt + K(t) [y_t - h(t, \hat{X}_t)] dt \quad (\text{équation d'estimation de l'état})$$

$$\frac{dP_t}{dt} = F(t, \hat{X}_t)P_t + P_t F^T(t, \hat{X}_t) - P_t H^T(t, \hat{X}_t) R^{-1}(t) H(t, \hat{X}_t) P_t + Q(t) \quad (7)$$

(équation de covariance de l'erreur)

$$K(t) = P_t H^T(t, \hat{X}_t) R^{-1}(t) \quad (\text{expression du gain})$$

où

$$Q(t) = \sigma(t, \hat{X}_t) \sigma^T(t, \hat{X}_t)$$

$$R(t) = g(t, \hat{X}_t) g^T(t, \hat{X}_t)$$

$$F(t, \hat{X}_t) = \left. \frac{\partial b}{\partial X_t}(t, X_t) \right|_{X_t = \hat{X}_t}$$

$$H(t, \hat{X}_t) = \left. \frac{\partial h}{\partial X_t}(t, X_t) \right|_{X_t = \hat{X}_t}$$

Plaçons-nous dans la situation où les observations sont prises en temps discret .

Entre les observations, \hat{X}_t et P_t vérifient les équations d'évolution (4) et (5) avec $R^{-1} \equiv 0$,

$$\begin{aligned} d\hat{X}_t &= b(t, \hat{X}_t) dt, & \hat{X}_{t_{k-1}} &= \hat{X}_+^{k-1} \\ \frac{dP_t}{dt} &= F(t, \hat{X}_t)P_t + P_t F^T(t, \hat{X}_t) + Q(t), & P_{t_{k-1}} &= P_+^{k-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

Au moment où on fait une observation on obtient les équations d'actualisation :

$$\hat{X}_+^k = \hat{X}_-^k + K_k [y_k - h_k(\hat{X}_-^k)] \quad (\text{mise à jour de l'estimation de l'erreur})$$

$$P_+^k = [I - K_k H_k] P_-^k \quad (\text{mise à jour de la covariance de l'erreur}) \quad (9)$$

$$K_k = P_-^k H^T [H_k P_-^k H_k^T + R_k]^{-1} \quad (\text{matrice de gain})$$

où

$$H_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial X_t}(t, X_t) \right|_{X_t = \hat{X}_-^k}$$

$$R_k = \frac{R(t_k)}{(t_k - t_{k-1})}$$

\hat{X}_-^k et P_-^k sont les solutions de (8) présent en $t = t_k$.

Les équations (8) et (9) constituent les "équations du filtre de Kalman étendu continu-discret".

1.4 Discrétisation d'une diffusion

Soit X un processus Markovien de diffusion, solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = X^0. \quad (10)$$

On veut simuler, à l'aide d'un ordinateur, le processus X .

On approche donc l'équation (10) par l'équation discrète :

$$X_{t_{i+1}} = f(X_{t_i}; W_i) \quad t_i = i \frac{T}{N} \quad (i = 0, 1, \dots, N) \quad (11)$$

selon une partition de l'intervalle $[0, T]$.

Discrétisation et simulation de l'EDS (10) :

Supposons qu'on connait une réalisation du processus de Wiener, $\{W_t(\omega); t \geq 0\}$, et qu'on veut calculer une approximation de la trajectoire du signal $\{X_t(\omega); t \geq 0\}$, correspondante à cette réalisation.

Dans ce qui suit \bar{X} designera le processus simulé qui approche le processus X .

On a déjà vu que, sous certaines hypothèses (voir paragraphe 1.1.3 ; Théorème d'existence et unicité) la solution de (10) existe et est unique. Il nous faut maintenant voir comment construire une approximation \bar{X} d'une telle solution.

On aimerait avoir un schéma pour ce calcul tel que :

$$E(\|X_t - X_t^N\|^2)_{N \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

où X_t^N est le processus défini par $X_t^N = \bar{X}_{\lfloor Nt \rfloor}^N$.

Le plus intéressant, "a priori", serait celui qui rend $E(\|X_t - X_t^N\|^2)$ le plus petit possible, i.e. tel que $E(\|X_t - X_t^N\|^2) = O(\frac{1}{N^p})$, avec p le plus petit possible.

Pour le cas particulier où $\sigma(X_t) = 0$, l'équation (10) est une équation différentielle ordinaire et les schémas de calcul d'une approximation de la solution à chaque instant t_i sont bien connus.

Dans le cas général, les schémas pour $p = 1$ et $p = 2$ qui suivent sont les plus utilisés. (Les schémas d'ordre 3 sont trop complexes pour être utilisés en pratique.)

1.4.1 Cas unidimensionnel

a . Le schéma de Euler :

D'après (10),

$$X_t = X_{t_k^N} + \int_{t_k^N}^t b(X_s)ds + \int_{t_k^N}^t \sigma(X_s)dW_s.$$

En supposant $\sigma(X_s) \simeq \sigma(X_{t_k^N}^N)$ on obtient :

$$\begin{cases} \bar{X}_{k+1}^N &= \bar{X}_k^N + \frac{T}{N} b(\bar{X}_k^N) + \sigma(\bar{X}_k^N) \Delta^N W_{k+1} \\ \bar{X}_0^N &= X^0 \end{cases}$$

où $\Delta^N W_{k+1} = W_{t_{k+1}^N} - W_{t_k^N}$ est un bruit blanc gaussien discret de variance $\frac{T}{N}$.

Ce schéma permet la construction d'une suite $(\bar{X}_t^N)_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge en moyenne quadratique vers X_t , $\forall t > 0$ et, étant b et σ uniformément continues lipschitziennes, on a :

$$E(|X_t^N - X_t|^2) = O\left(\frac{1}{N^p}\right)$$

ce qui correspond à un erreur d'ordre $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ dans l'intégrale de Ito.

b . Le schéma de *Milshtein* :

Ce schéma est obtenu en utilisant la formule de Ito sous forme intégrale :

$$\sigma(X_s) = \sigma(X_{t_k^N}) + \int_{t_k^N}^s b(X_r) \sigma'(X_r) dr + \int_{t_k^N}^s \sigma(X_r) \sigma'(X_r) dW_r + \frac{1}{2} \int_{t_k^N}^s \sigma^2(X_r) \sigma''(X_r) dr.$$

Si dans cette expression on néglige la 1.^{ière} et la 3.^{ième} intégrales on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t_k^N}^t \sigma(X_s) dW_s &\simeq \Delta^N W_{k+1} \sigma(\bar{X}_k^N) + \int_{t_k^N}^t \int_{t_k^N}^s \sigma(X_r) \sigma'(X_r) dW_r dW_s \\ &\simeq \Delta^N W_{k+1} \sigma(\bar{X}_k^N) + \sigma \sigma'(\bar{X}_k^N) \int_{t_k^N}^t (W_s - W_k^N) dW_s, \end{aligned}$$

ce qui correspond à approximer $\sigma(X_s)$ par :

$$\sigma(X_k^N) + \sigma'(X_k^N) \sigma(X_k^N) (W_s - W_k^N)$$

L'intégrale $I = \int_{t_k^N}^t (W_s - W_k^N) dW_s$ peut être calculée explicitement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} d(W_t^2) &= 2W_t dW_t + dt \quad (\text{Formule de Ito}) \\ \int_{t_k^N}^t W_s dW_s &= \frac{1}{2} [W_t^2 - W_k^{N2}] - (t - t_k^N) \\ I &= \frac{1}{2} [W_t^2 - W_t^{N2}] - (t - t_k^N) - W_k^N [W_t - W_k^N] \\ &= \frac{1}{2} [W_t - W_k^N]^2 - (t - t_k^N) \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{k+1}^N &= \bar{X}_k^N + \frac{T}{N} b(\bar{X}_k^N) + \Delta^N W_{k+1} \sigma(\bar{X}_k^N) + \frac{1}{2} \left[\Delta^N W_{k+1}^2 - \frac{T}{N} \right] \sigma(\bar{X}_k^N) \sigma'(\bar{X}_k^N) \\ \text{i.e. } \begin{cases} \bar{X}_{k+1}^N &= \bar{X}_k^N + \frac{T}{N} \bar{b}(\bar{X}_k^N) + \sigma(\bar{X}_k^N) \Delta^N W_{k+1} + \frac{1}{2} \sigma'(\bar{X}_k^N) \sigma(\bar{X}_k^N) (\Delta^N W_{k+1})^2 \\ \bar{X}_0^N &= X^0 \quad , \text{ où } \bar{b} = b - \frac{1}{2} \sigma' \sigma. \end{cases} \end{aligned}$$

On a le résultat suivant (cf. [Pardoux - Talay]) :

si

- i) $E(X_0^4) < \infty$
- ii) b et σ sont de classe C^2
- iii) b, b', σ et σ' sont uniformément lipschitziennes

alors

la suite $(\bar{X}_k^N)_k$, définie par le schéma précédent, vérifie :

$$E(|\bar{X}_k^N - X_k^N|^2) = O\left(\frac{1}{N^2}\right), \forall t \in \text{IN}(T),$$

où $\{X_t^N, t \geq 0\}$ est définie par $X_t^N = X_{\lfloor \frac{t}{\Delta^N} \rfloor}^N$ et $\text{IN}(T) = \{pT; p \in \text{IN}\}$.

On a donc un erreur d'ordre $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

1.4.2 Cas multidimensionnel

On considère l'équation :

$$dX_t = b(X_t)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_j(X_t)dW_t^j, \quad X_0 = X^0$$

avec les mêmes hypothèses pour X_0, b et σ et où $\{W_t^1, \dots, W_t^n; t \geq 0\}$ sont des \mathcal{F}_t - processus de Wiener standard mutuellement indépendants.

On a le schéma de Euler :

$$\begin{cases} \bar{X}_{k+1}^N &= \bar{X}_k^N + \frac{T}{N} b(\bar{X}_k^N) + \sum_{j=1}^n \sigma_j(\bar{X}_k^N) \Delta^N(W_{k+1}^j) \\ \bar{X}_0^N &= X^0 \end{cases}$$

et le schéma de Milshhtein :

$$\begin{cases} \bar{X}_{k+1}^N &= \bar{X}_k^N + \frac{T}{N} \bar{b}(\bar{X}_k^N) + \sum_{j=1}^n \sigma_j(\bar{X}_k^N) \Delta^N(W_{k+1}^j) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \sigma'_i(\bar{X}_k^N) \sigma_j(\bar{X}_k^N) \Delta^N(W_{k+1}^i) \Delta^N(W_{k+1}^j) \\ \bar{X}_0^N &= X^0 \end{cases}$$

où $\bar{b} = b - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sigma'_j \sigma_j$ et $\sigma'_j = \left(\frac{\partial \sigma_j^i}{\partial x_k} \right)_{i,k}$.

Sous les mêmes hypothèses de régularité on a encore :

$$E(\|X_t - \bar{X}_t^N\|^2) = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

pour les deux schémas.

Si on impose certaines conditions de comutativité on peut établir un résultat équivalent à celui du paragraphe 1.4.1, pour le cas multidimensionnel.

Dans le cas linéaire,

$$\begin{cases} dX_t &= FX_t dt + GdW_t \\ X_0 &= X^0 \end{cases} \quad (12)$$

on connaît la solution explicite :

$$X_t = \exp\{Ft\}X_0 + \int_0^t \exp\{F(t-s)\}GdW_s$$

Pour obtenir la solution de l'équation discrétisée il suffit de remarquer que :

$$X_{k+1}^N = \exp \{ F(t_{k+1}^N - t_k^N) \} X_k^N + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \{ F(t_{k+1}^N - s) \} X_k^N G dW_s ,$$

i.e. on peut construire l'approximation :

$$\bar{X}_{k+1}^N = \Phi_k \bar{X}_k^N + \xi_k ,$$

où

$$\phi_k \triangleq \exp \{ F(t_{k+1}^N - t_k^N) \}$$

et

$$\xi_k \triangleq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \{ F(t_{k+1}^N - s) \} G dW_s \text{ est un bruit blanc de variance } Q_k^N ,$$

$$Q_k^N \triangleq E(\xi_k \xi_k^*) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \exp \{ F(t_{k+1}^N - s) \} G G^* \exp \{ F^*(t_{k+1}^N - s) \} ds .$$

En particulier, en dimension 1, on a :

$$Q_k^N = Q \frac{\exp \{ 2F(t_{k+1}^N - t_k^N) \} - 1}{2F} \simeq Q(t_{k+1}^N - t_k^N),$$

pour $\Delta^N t_k = t_{k+1}^N - t_k^N$ "petit".

et

$$\bar{X}_{k+1}^N = \Phi_k \bar{X}_k^N + \xi_k \simeq \bar{X}_k^N + F \Delta^N t_{k+1} \bar{X}_k^N + G \Delta^N W_{k+1} ,$$

où $\Delta^N W_{k+1}$ est un bruit blanc gaussien de variance Q_k^N .

Pour simuler un problème de filtrage non linéaire il suffit de simuler le signal $\{\bar{X}_k^N\}_k$ comme ci-dessus. Les observations sont obtenues en posant :

$$\bar{y}_k^N = h(t_k^N, \bar{X}_k^N) + g(\bar{X}_k^N) v_k$$

où v_k est un bruit blanc, $v_k \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{N})$.

1.5 Un exemple

On considère l'exemple très simple d'un problème de ballistique où seulement l'équation d'observation est bruitée. On veut suivre le mouvement d'un objet en chute libre à travers l'atmosphère et on dispose d'un radar dont la position est illustrée par les figures a et b.

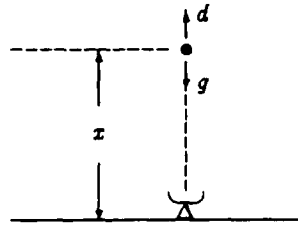


Fig. a

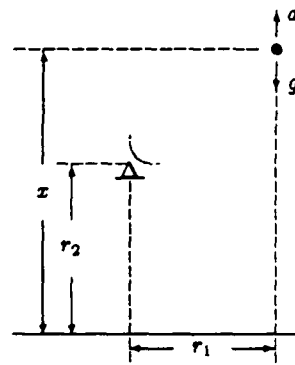


Fig. b

On considère ce mouvement modélisé en dimension 2, en supposant que l'objet tombe en ligne droite à une distance $\sqrt{r_1^2 + (x - r_2)^2}$ du radar, x étant la hauteur de l'objet au dessus de la surface terrestre, à chaque instant. (La figure a est un cas particulier où $r_1 = r_2 = 0$.)

Les variables d'état sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \quad (\text{vitesse}) \\ x_3 &= \beta \quad (\beta \text{ est le coefficient ballistique de l'objet}) \end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ d - g \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ où } d = \rho \frac{x_2^2}{2x_3} \text{ et } \rho = \rho_0 \exp -\frac{x_1}{k_\rho}$$

et l'équation d'observation est :

$$y_k = \sqrt{r_1^2 + (x_k^1 - r_2)^2} + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, r)$$

On a comme conditions initiales :

$$\begin{aligned} \underline{X}(0) &= \underline{\mu} \\ p_0 &= \begin{bmatrix} p_{11}^0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{33}^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les matrices de dérivées qui interviennent dans les équations du filtre de Kalman étendu sont :

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{d}{k_\rho} & \rho \frac{x_2}{x_3} & -\frac{d}{x_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } H = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - r_2}{\sqrt{r_1^2 + (x_k^1 - r_2)^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats suivants ont été obtenus pour :

$$\rho_0 = 3.4 \times 10^{-3} \text{ lbsec}^2/\text{ft}^4, \quad g = 32.2 \text{ ft/sec}^2, \quad k_p = 22000 \text{ ft}$$

$$r = 100 \text{ ft}^2/\text{Hz}$$

$$X(0) \sim \mathcal{N}(10^6 \text{ ft}, 500 \text{ ft}^2)$$

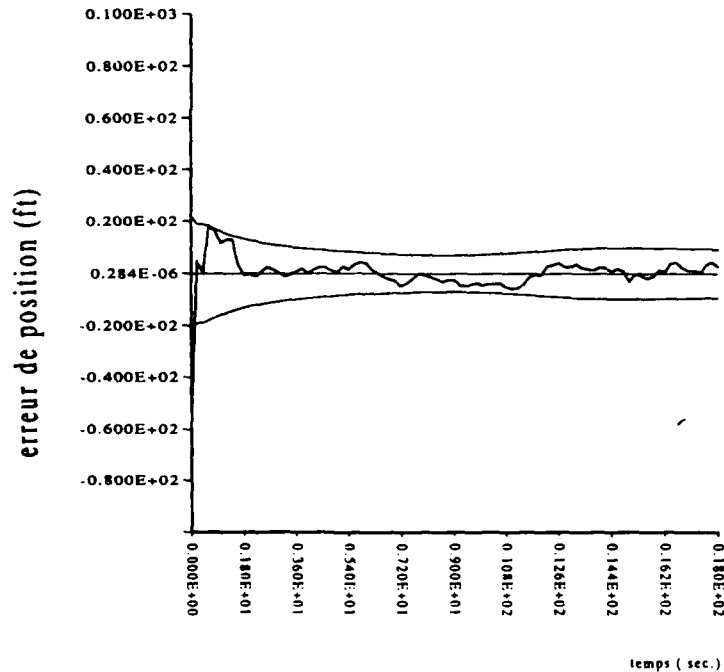
$$\dot{X}(0) \sim \mathcal{N}(-6000 \text{ ft/sec}, 2 \times 10^4 \text{ ft}^2/\text{sec}^2)$$

$$\beta \sim \mathcal{N}(2000 \text{ lb/ft}^2, 2.5 \times 10^5 \text{ lb}^2/\text{ft}^4)$$

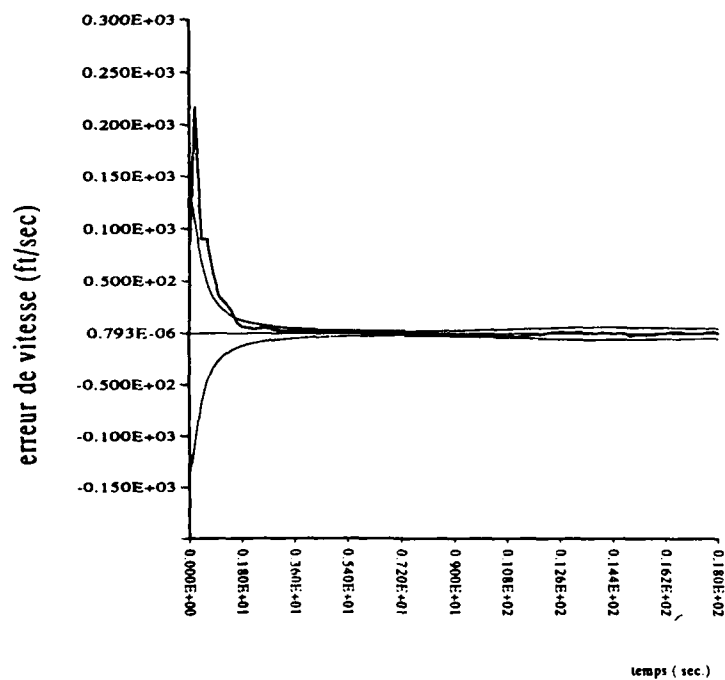
$$p_{11}^0 = 500 \text{ ft}^2, \quad p_{22}^0 = 2 \times 10^4 \text{ ft}^2/\text{sec}^2, \quad p_{33}^0 = 2.5 \times 10^5 \text{ lb}^2/\text{ft}^4.$$

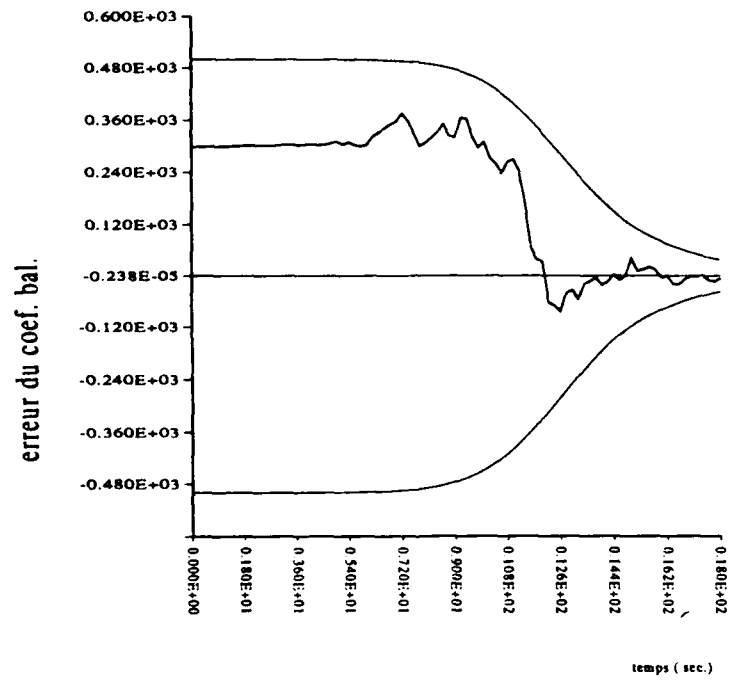
Les courbes représentent respectivement l'erreur de position, vitesse et coefficient ballistique, ainsi que les racines carrées des éléments sur la diagonale de P , lesquelles estiment l'écart type de l'erreur.

La simulation de l'observation a été faite sur 90 points et un programme général, capable de résoudre le problème de filtrage associé à des équations d'état et d'observation de dimension n et m (respectiv.), a été élaboré. Pour chaque exemple il suffira de donner en sous-programme les fonctions et les matrices intervenantes.



On constate que l'erreur associée au coefficient ballistique reste "assez grande" au début. Ce comportement est du au fait que, pour des raisons physiques, les mesures obtenues pendant que l'objet traverse, à grande altitude, une atmosphère de basse densité, contiennent peu d'information sur β .





2 Le filtre de Katur-Picard

2.1 Présentation du filtre

Considérons le problème de filtrage non linéaire unidimensionnel décrit par les équations d'état et d'observation :

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ dY_t &= h(X_t)dt + \varepsilon d\bar{W}_t \end{aligned}$$

avec les hypothèses du chapitre précédent.

On s'intéresse à l'estimation du signal pour les petites valeurs de la covariance du bruit d'observation.

Soit \hat{X}_t le filtre optimal (donné par l'équation de Zakai).

Selon un résultat de Picard (cf. [Picard]), si σ et h' sont uniformément positives, sous certaines hypothèses,

$$\hat{X}_t = X_t + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (13)$$

au sens où le processus $e_t = \hat{X}_t - X_t$ (dépendant de ε) vérifie :

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall t_0 > 0 \text{ et } 1 \leq q < \infty \quad \exists c : \sup_{t_n \leq t < \infty} \|e_t\|_q \leq c\sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_0.$$

On peut estimer X_t à l'aide du filtre de Kalman étendu \hat{X}_t^{KE} (voir 1.3, équations (4) et (5)) et on a :

$$\hat{X}_t^{KE} = \hat{X}_t + O(\varepsilon). \quad (14)$$

J. Picard, à qui on doit aussi le résultat précédent, a proposé un filtre approché plus simple que le filtre de Kalman étendu. Son équation est :

$$dM_t = b(M_t)dt + \frac{\sigma(M_t)}{\varepsilon} (dY_t - h(M_t)dt). \quad (15)$$

Ce filtre approche le filtre optimal avec une erreur du même ordre que le filtre de Kalman étendu, i.e.

$$M_t = \hat{X}_t + O(\varepsilon). \quad (16)$$

En ce qui concerne l'estimation du signal on a alors, dans les deux cas,

$$\hat{X}_t^{KE} = X_t + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (17)$$

et

$$M_t = X_t + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (18)$$

Ce sont ces deux résultats qu'on a essayé de vérifier numériquement.

Dans les équations du filtre de Kalman (voir 1.3, équations (4) et (5)), et dans l'équation du filtre de Katur-Picard, le terme en facteur de $\frac{1}{\varepsilon}$ est lui-même d'ordre ε :

On se place dans le cas particulier où $\sigma = C^t$.

D'après (15),

$$M_{t_{k+1}}^N = M_{t_k}^N + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(M_s)ds + \frac{\sigma}{\varepsilon} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (dY_s - h(M_s)ds). \quad (19)$$

Or,

$$dY_t = \hat{h}_t dt + d\nu_t, \text{ où } \nu_t \text{ est l'innovation}$$

et

$$\hat{h}_t \triangleq E[h(X_t)|\mathcal{F}] = h(\hat{X}_t) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

puisque $h(X_t) = h(\hat{X}_t) + h'(X_t)(X_t - \hat{X}_t) + \frac{1}{2}h''(\hat{X}_t)(X_t - \hat{X}_t)^2 + \dots$ et d'après (13).

Donc,

$$dY_t - h(M_t)dt = d\nu_t + (\hat{h}_t - h(M_t)) dt,$$

où $\hat{h}_t - h(M_t) = h(\hat{X}_t) - h(M_t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, car h est supposée lipschitzienne et $\hat{X}_t - M_t = \mathcal{O}(\varepsilon)$ d'après (16). Alors l'intégrale $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (dY_s - h(M_s)ds)$ est d'ordre ε et quand $\varepsilon \rightarrow 0$ le facteur $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ dans l'expression (19) est "compensé" par cette intégrale.

On peut s'attendre à ce que la discrétisation des équations détruise cette "compensation" et que, pour les petites valeurs de ε , il soit nécessaire d'utiliser des petits pas de temps $\Delta^N t$.

2.2 Discretisation de l'équation du filtre de Katzur-Picard

2.2.1 Première méthode

Un schéma de discrétisation possible pour l'équation (15) est obtenu de la façon suivante :

$$M_{t_{k+1}}^N = M_{t_k}^N + \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(M_s)ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sigma(M_s) (dY_s - h(M_s)ds).$$

Si on suppose que $b(M_t) \simeq b(\bar{M}_k^N)$, $h(M_t) \simeq h(\bar{M}_k^N)$ et $\sigma(M_t) \simeq \sigma(\bar{M}_k^N)$ on a :

$$\bar{M}_{k+1}^N = \bar{M}_k^N + b(\bar{M}_k^N)\Delta^N t_{k+1} + \frac{\sigma(\bar{M}_k^N)}{\varepsilon} (\Delta^N \bar{Y}_{k+1} - h(\bar{M}_k^N)\Delta^N t_{k+1})$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$

i.e.

$$\bar{M}_{k+1}^N = \bar{M}_k^N + b(\bar{M}_k^N)\Delta^N t_{k+1} + \frac{\sigma(\bar{M}_k^N)}{\varepsilon} (\bar{y}_{k+1}^N - h(\bar{M}_k^N))$$

$k = 0, 1, \dots, N-1$

(20)

Il s'agit d'un schéma d'Euler.

2.2.2 Deuxième méthode

On propose une modification de la discrétisation considéré dans le paragraphe précédent (équation (20)).

On rappelle (voir 2.1) que $\int_{t_k}^{t_{k+1}} (dY_s - h(M_s)ds)$ est d'ordre ε mais, en discrétisant, on calcule une valeur approchée de cette intégrale avec une erreur qui n'est pas d'ordre ε .

Pour éviter un accroissement abrupt dans l'équation (20) quand $\varepsilon \ll \Delta^N t$ on peut penser à remplacer le facteur $\frac{1}{\varepsilon}$ dans cette équation par le facteur $\frac{1}{\varepsilon + c\Delta^N t}$, i.e. on aurait le schéma :

$$\bar{M}_{k+1}^N = \bar{M}_k^N + b(\bar{M}_k^N)\Delta^N t + \frac{\sigma(\bar{M}_k^N)}{\varepsilon + c\Delta^N t} (\Delta^N \bar{Y}_{k+1} - h(\bar{M}_k^N)\Delta^N t) \quad (21)$$

pour $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

On espère alors que quand $\varepsilon \ll \Delta^N t$ la quantité $\varepsilon + c\Delta^N t \simeq c\Delta^N t$ ne sera plus "trop petite" et quand $\varepsilon \gg \Delta^N t$ on aura $\varepsilon + c\Delta^N t \simeq \varepsilon$, c'est à dire, on retrouvera le schéma précédent (équation (20)).

C'est d'ailleurs le même type de raisonnement qui a été utilisé pour discrétiser les équations du filtre de Kalman étendu.

3 Application

3.1 Motivation

Considérons le système non linéaire décrit par :

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ dY_t = h(X_t)dt + \varepsilon d\bar{W}_t \end{cases} \quad (22)$$

où W_t et \bar{W}_t sont des processus de Wiener standard.

On fait les hypothèses du chapitre 1.

Supposons que la fonction h est bijective "suffisamment régulière" et que $\varepsilon = 0$. Alors, on peut poser $h(X_t) = Z_t$ et, d'après la formule de Ito, on a :

$$dZ_t = \frac{\partial h}{\partial X_t}(X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial X_t^2}(X_t)\sigma\sigma' dt \quad (23)$$

et, puisque $X_t = h^{-1}(Z_t)$, on a une équation en $Z_t = \dot{Y}_t$ (les trajectoires de Y sont différentiables). En plus X_t peut être connu exactement : $X_t = h^{-1}(Z_t)$.

On considère donc l'exemple suivant, unidimensionnel, où b est une fonction linéaire de X_t et h une fonction injective, dépendant d'un paramètre λ , tels que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h_\lambda = h_\infty, \text{ avec } h_\infty : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, X_t) \rightsquigarrow X_t$$

On aura donc pour λ "assez grand" un système "presque linéaire" et pour ε "assez petit" les observations seront peu bruitées, de façon à s'approcher du système :

$$\begin{cases} dX_t = -\beta X_t dt + \sigma dW_t \\ dY_t = X_t dt \end{cases}$$

dont on connaît la solution $X_t = \dot{Y}$.

On prend $\sigma = C^t$.

3.2 L'exemple concret

Les équations d'état et d'observation sont respectivement :

$$\begin{aligned} dX_t &= -\beta X_t dt + q^{\frac{1}{2}} dW_t, & X_0 &\sim \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_{X_0}^2) \\ dY_t &= \lambda \arctan\left(\frac{X_t}{\lambda}\right) dt + \varepsilon d\bar{W}_t, & Y_0 &\equiv 0 \end{aligned}$$

où μ_0 et $\sigma_{X_0}^2$ sont donnés.

a. La simulation de la trajectoire $(X_t(\omega))_{0 \leq t \leq T}$ conduit (voir chapitre 1) à la formule récursive :

$$\bar{X}_{k+1}^N = \exp\{-2\beta\Delta^N t\} \bar{X}_k^N + \xi_k, \quad \Delta^N t = \frac{T}{N}$$

où $(\xi_k)_k$ est un bruit blanc de variance

$$q_k = q \frac{1 - \exp\{-2\beta\Delta^N t\}}{2\beta}$$

Pour la simulation de l'observation $(y_k)_{k=0,1,\dots,N}$ on peut procéder de deux manières différentes :

1. Pour chaque pas de temps $\Delta^N t$, \bar{y}_k^N est donné par :

$$\bar{y}_k^N = h_k(t_k^N, \bar{X}_k^N) + \varepsilon v_k$$

où v_k est un bruit blanc gaussien de variance $\Delta^N t$.

2. On simule d'abord l'observation pour un pas de temps très petit $\Delta^M t$ et on utilise cette information pour obtenir l'observation pour un pas de temps $\Delta^N t$ (M multiple de N), i.e.

$$\bar{y}_{k+1}^N = \frac{\Delta^N \bar{Y}_{k+1}^N}{\Delta^N t}, \text{ avec } \Delta^N \bar{Y}_{k+1}^N = \bar{Y}_{k+1}^N - \bar{Y}_k^N$$

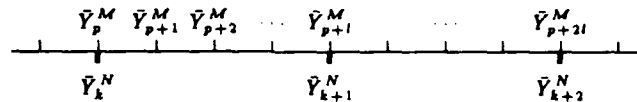
où \bar{Y}_{k+1}^N est donné par :

$$\bar{Y}_{p+1}^M = \bar{Y}_p^M + I_p^M + \varepsilon \Delta^M w_{p+1}, \quad N = M/l, \quad k = p/l \in \mathbb{N}.$$

et $(w_p)_p$ est un bruit blanc gaussien standard, I_p^M est une approximation de l'intégrale

$$\int_{t_p^M}^{t_{p+1}^M} h(X_s) ds,$$

par exemple, $I_p^M = h(\bar{X}_{p+1}^M) \Delta^M t$.



- b. L'application des équations du filtre de Kalman étendu continu-décret suppose d'abord une étape de prédiction, selon laquelle on a à résoudre deux équations différentielles ordinaires (voir chapitre 1). Pour cet exemple on connaît leur solution explicite :

$$\begin{aligned} \hat{X}_+^{k+1} &= \hat{X}_+^k + \exp\{-2\beta \Delta^N t_{k+1}\} \\ P_-^{k+1} &= (P_+ - \sigma^2) \exp\{-2\beta \Delta^N t_{k+1}\} + \sigma^2 \quad (\text{où } \sigma^2 = \frac{q}{2\beta}). \end{aligned}$$

Les équations d'actualisation sont :

$$\begin{aligned} \hat{X}_+^k &= \hat{X}_-^k + K_k [y_k - h(\hat{X}_-^k)], \quad \text{où } h(x) = \lambda \arctan \frac{x}{\lambda} \\ P_+^k &= [1 - K_k H(\hat{X}_-^k)] P_-^k, \quad \text{où } H(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{\lambda})^2} \\ K_k &= P_-^k \frac{H(\hat{X}_-^k)}{H^2(\hat{X}_-^k) P_-^k + R_k}, \quad \text{où } R_k = \frac{\varepsilon^2}{\Delta^N t_{k+1}}. \end{aligned}$$

L'application de l'équation du filtre de Karzur-Picard conduit, selon la discrétisation 2.2.1, à l'équation :

$$\bar{M}_{k+1}^N = \bar{M}_k^N + (-\beta \bar{M}_k^N) \Delta^N t + \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon} [\bar{y}_k^N - h(\bar{M}_k^N)] \Delta^N t$$

et, selon la discrétisation 2.2.2, à l'équation :

$$\bar{M}_{k+1}^N = \bar{M}_k^N + (-\beta \bar{M}_k^N) \Delta^N t + \frac{\sqrt{q}}{\varepsilon + c \Delta^N t} [\bar{y}_k^N - h(\bar{M}_k^N)] \Delta^N t.$$

Pour chaque de ces trois schémas on calcule la moyenne empirique de l'erreur sur N_S simulations indépendantes :

$$\eta_k(\varepsilon, \Delta^N t) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} (\bar{X}_k^i - \hat{X}_k^i), \quad k = 0, 1, \dots, N$$

et l'erreur quadratique moyenne :

$$s_k(\varepsilon, \Delta^N t) = \frac{1}{N_S} \sum_{i=1}^{N_S} (\bar{X}_k^i - \hat{X}_k^i)^2, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

On calcule aussi la moyenne suivante (sur les $[N/2] + 1$ derniers instants) :

$$r(\varepsilon, \Delta^N t) = \frac{1}{[N/2] + 1} \sum_{j=[N/2]}^N \sqrt{s_j(\varepsilon, \Delta^N t)}$$

et on fait des représentations graphiques des valeurs de r pour les différentes valeurs de $\Delta^N t$ et de ε .

3.2.1 Les résultats

a. Les résultats obtenus par le filtre de Kalman étendu

a.1. Si on considère la simulation de l'observation décrite en premier dans paragraphe 3.2 on constate le phénomène suivant : Bien que le pas de temps n'ait pas beaucoup d'influence sur l'ordre de grandeur de l'erreur quadratique moyenne pour ε "assez grand" ($\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = .1$) il n'est pas de même pour ε "petit". Dans ce dernier cas l'erreur augmente, presque toujours, quand le pas de temps $\Delta^N t$ diminue. Bien qu'on ne sache pas expliquer cette augmentation, il n'y a pas de raison pour que le contraire se produise : puisqu'il s'agit de simulations distinctes on ne peut pas parler de gain d'information quand le pas de temps diminue. (voir la figure 1)

a.2. On considère maintenant la 2^{ème} simulation décrite dans le même paragraphe.

Pour cette nouvelle façon de simuler l'observation, on peut dire qu'on gagne de l'information si on diminue le pas de temps et on s'attend donc à ce que l'erreur quadratique moyenne diminue (ou reste constante) avec le pas de temps. (voir la figure 2)

Comme dans le cas précédent on a, pour les "grandes" valeurs de ε , une erreur quadratique moyenne qui ne dépend pratiquement pas du pas de temps mais, par contre, pour les "petites" valeurs de ε , cette erreur diminue avec le pas de temps Δt pour se stabiliser dès que Δt est "assez petit" ($\Delta t \simeq \varepsilon$). Pour les 2 dernières valeurs de ε ($\varepsilon = 10^{-4}$ et $\varepsilon = 10^{-5}$) l'erreur

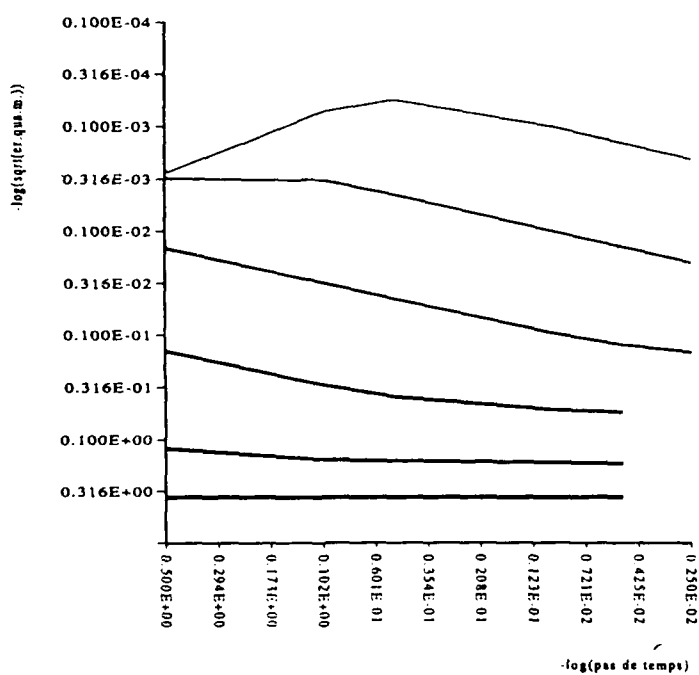


Figure 1: l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps, pour le filtre de Kalman étendu (selon la première façon de simuler).

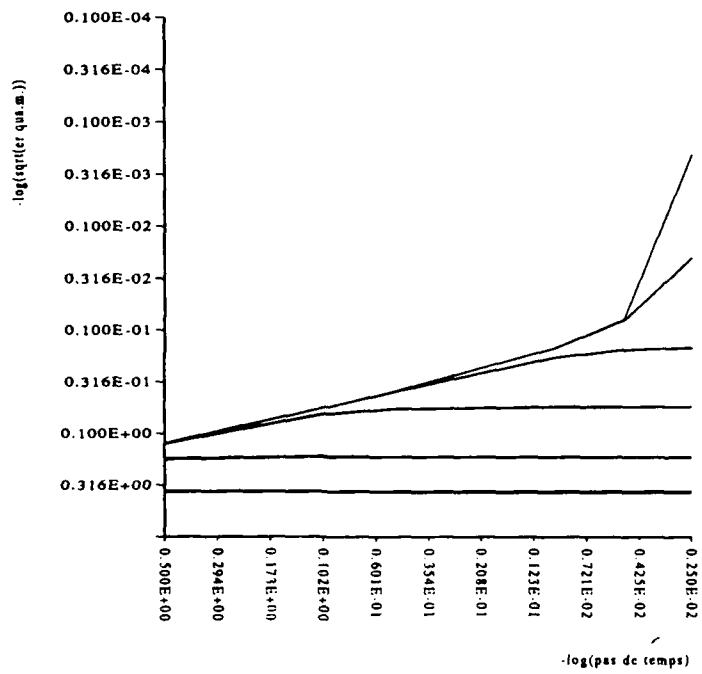


Figure 2: l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps, pour le filtre de Kalman étendu (selon la deuxième façon de simuler).

quadratique moyenne n'a pas encore atteint une valeur qu'on puisse considérer constante. En outre, l'examen de la figure 1 montre que, dans ces 2 derniers cas, la valeur stabilisée de l'erreur serait, en fait, plus grande que ce que laisse penser la figure 2.

On étudie en suite le comportement de $r_{\Delta t}(\varepsilon)$ en fonction de ε , en utilisant des échelles logarithmiques - uniquement pour les 4 premières valeurs de ε , puisque pour les 2 dernières on n'a pas atteint une situation "stable" -. On obtient des courbes polyédriques qui convergent, quand $\Delta t \rightarrow 0$, vers une droite, i.e.

$$-\log r_{\Delta t}(\varepsilon) \simeq \gamma + p \left(-\frac{1}{2} \log \varepsilon \right).$$

(voir la figure 3)

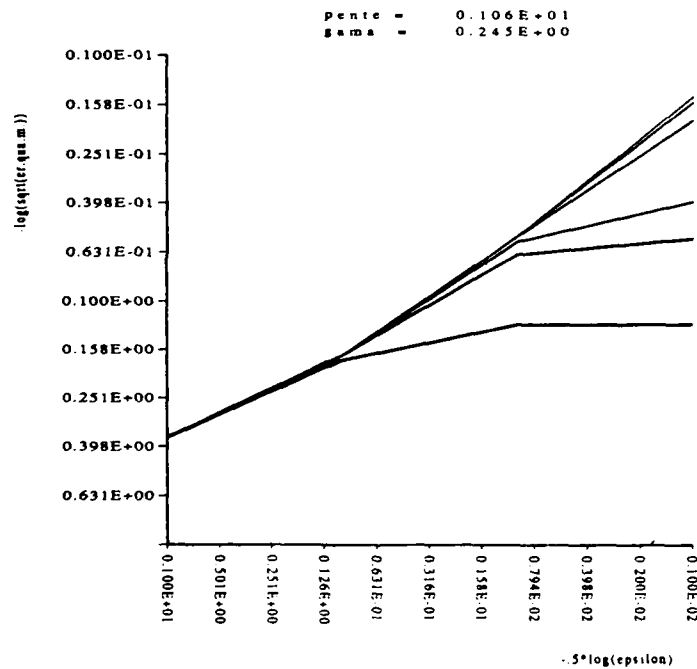


Figure 3: l'erreur quadratique moyenne en fonction de ε , pour le filtre de Kalman étendu.

Les valeurs trouvées pour p et γ conduisent à l'approximation :

$$r_{\Delta t}(\varepsilon) \simeq 10^{-0.245} \varepsilon^{0.53}.$$

On a donc, effectivement, une erreur quadratique moyenne d'ordre proche de $\sqrt{\varepsilon}$,

$$X_t - M_t \simeq O(\sqrt{\varepsilon}).$$

b. Les résultats obtenus pour le filtre de Katsur-Picard. On utilise la façon de simuler l'observation décrite en 2^{ième} au paragraphe 3.2.

b.1. Pour le schéma de discrétisation de l'équation du filtre décrit au paragraphe 2.2.1, les courbes $r_\epsilon(\Delta t)$ et $r_{\Delta t}(\epsilon)$ sont représentées (respectiv.) dans les figures 4 et 6.

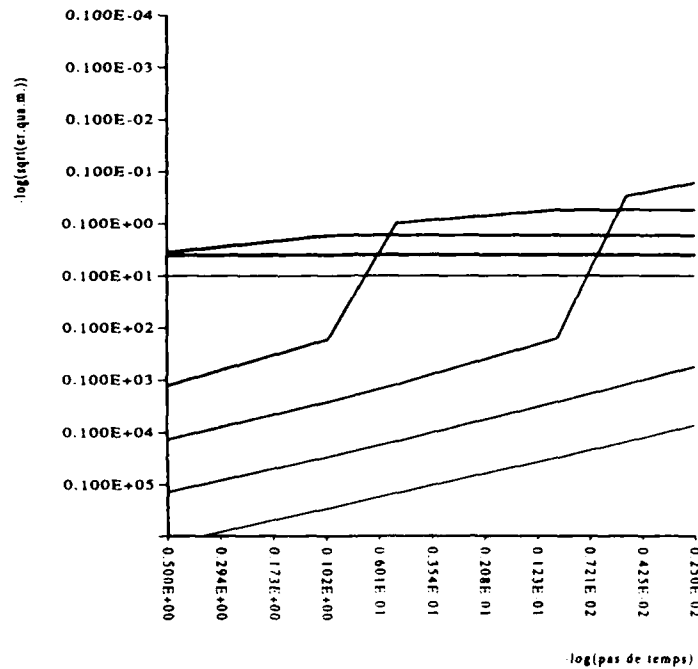


Figure 4: l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps, pour le filtre de Katsur-Picard.

On obtient, pour les "grandes" valeurs de ϵ ($\epsilon = 1$ ou $\epsilon = 0.1$) des courbes $r_\epsilon(\Delta t)$ qui ressemblent à celles de la figure 2. Par contre, pour les "petites" valeurs de ϵ , on commence par avoir une erreur quadratique moyenne "énorme" pour les "grandes" valeurs de Δt et on attend un point "stable" pour les "petites" valeurs de Δt , sauf pour $\epsilon = 10^{-4}$ et $\epsilon = 10^{-5}$ (voir la figure 4).

On a donc utilisé seulement les résultats obtenus pour les 4 premières valeurs de ϵ pour tracer les courbes $r_{\Delta t}(\epsilon)$, représentés dans la figure 6 (comparer avec les figures 3 et 7).

On peut trouver une explication de ce comportement dans le fait que (voir chapitre 2), quand ϵ est "trop petit devant Δt " ($\epsilon \ll \Delta t$), on risque d'avoir des accroissements abrupts dans l'équation récurrente du filtre. On obtient des courbes très différentes de celles de la figure 3.

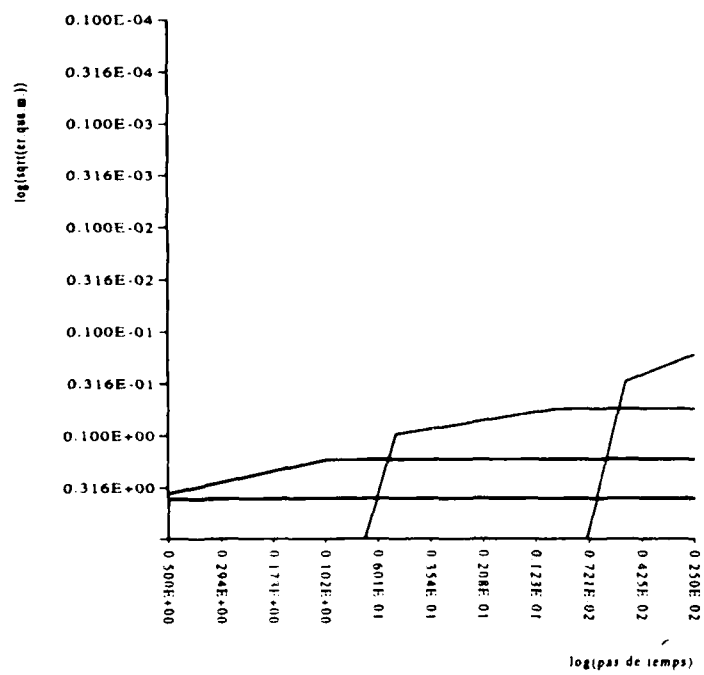


Figure 5: l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps, pour le filtre de Katzur-Picard.

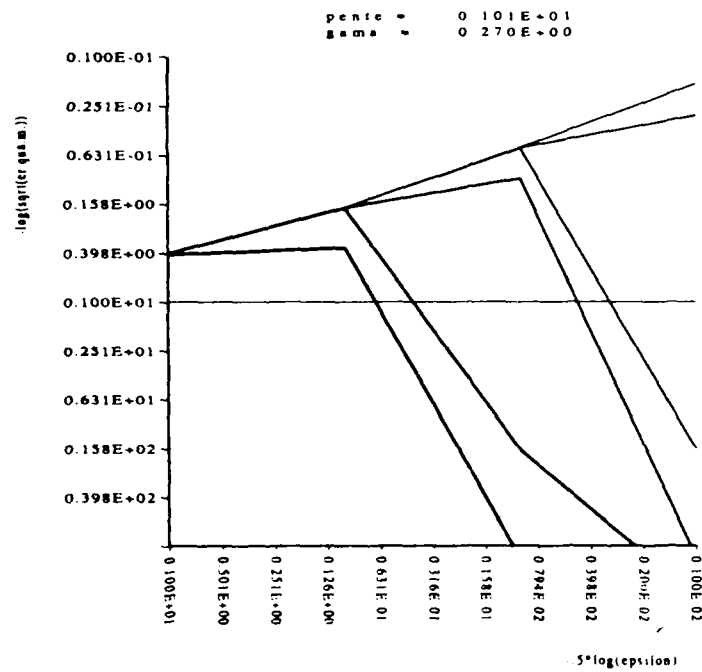


Figure 6: l'erreur quadratique moyenne en fonction de ϵ , pour le filtre de Katzur-Picard.

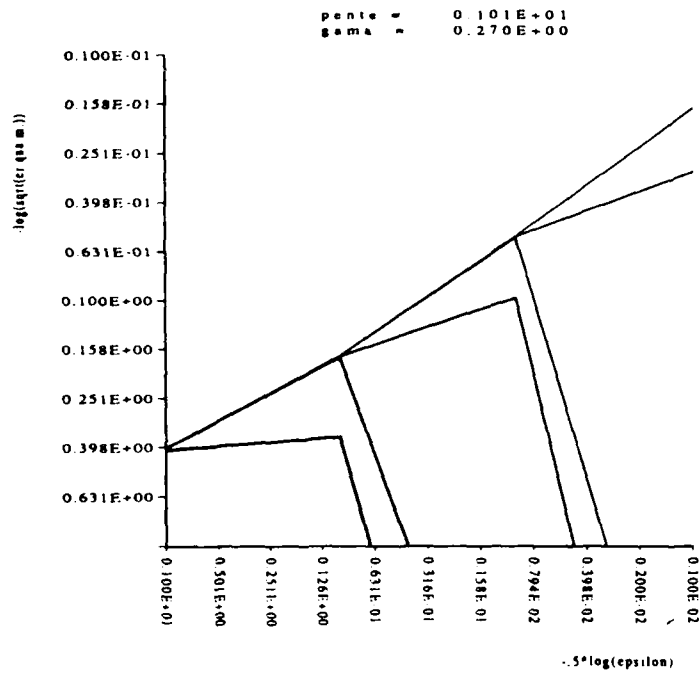


Figure 7: l'erreur quadratique moyenne en fonction de ϵ , pour le filtre de Katzur-Picard.

On observe néanmoins que ces courbes tendent, quand $\Delta t \rightarrow 0$, vers une droite d'équation

$$-\log r = \gamma - \frac{p}{2} \log \varepsilon,$$

avec $\gamma = 0.270$ et $p = 1.01$, i.e.

$$r \simeq 10^{-0.270} \varepsilon^{0.505}$$

et donc, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on a encore une erreur quadratique moyenne proche de $O(\sqrt{\varepsilon})$.

b.2. On considère dans la suite les résultats obtenus quand on utilise la modification du schéma de discrétisation du filtre décrite au paragraphe 2.2.2.

On a pris la constante c égale à 1. Les figures 8 et 9 représentent (respectivement) l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps et l'erreur quadratique moyenne en fonction de ε .

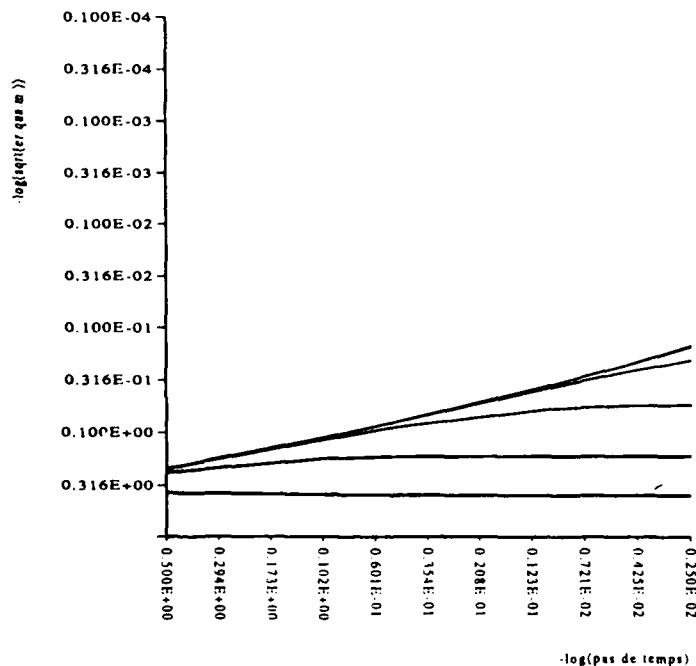


Figure 8: l'erreur quadratique moyenne en fonction du pas de temps, pour le filtre de Katzur-Picard (selon la modification 2.2.2).

On constate qu'on n'a plus le phénomène désagréable d'explosion de l'erreur pour les grandes valeurs de Δt et les petites valeurs de ε et on obtient des valeurs stabilisées de r de la même ordre de grandeur de celles obtenues dans 3.2.1 (comparer les figures 8 et 5).

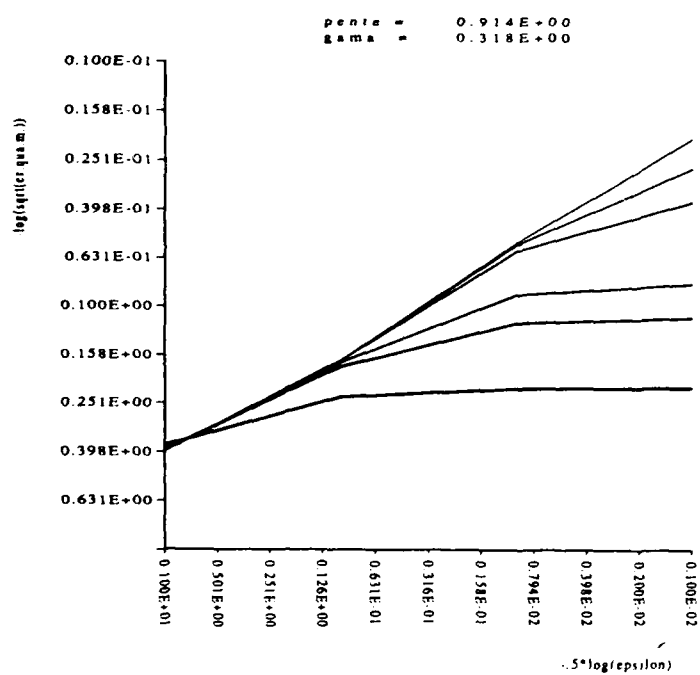


Figure 9: l'erreur quadratique moyenne en fonction de ϵ , pour le filtre de Katzur-Picard (selon la modification 2.2.2).

Pour les courbes $r_{\Delta t}(\varepsilon)$ de l'erreur quadratique moyenne en fonction de ε (voir la figure 9) on a trouvé comme "droite limite", quand $\Delta t \rightarrow 0$, la droite d'équation :

$$-\log r_{\Delta t}(\varepsilon) = 0.318 + 0.914\left(-\frac{1}{2} \log \varepsilon\right),$$

i.e.

$$r_{\Delta t}(\varepsilon) \simeq 10^{-0.314} \varepsilon^{0.457}.$$

On est maintenant un peu au dessous de l'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$ mais, par contre, on a une constante plus petite que celle de la figure 5.

3.2.2 Remarques

On a vérifié numériquement les résultats (17) et (18) du chapitre 2. Effectivement, on a obtenu pour ces deux filtres, le filtre de Kalman étendu et le filtre de Katur-Picard, la même ordre d'erreur. Il faut tout de même remarquer la simplicité du deuxième filtre par rapport au premier.

Il serait intéressant de résoudre l'équation de Zakaï pour obtenir la densité conditionnelle $q(t, x)$ et ainsi calculer le filtre optimal \hat{X}_t . Au lieu d'étudier l'erreur quadratique moyenne par rapport au signal simulé \tilde{X}_t on pourrait alors faire la même étude par rapport à \hat{X}_t et essayer de vérifier numériquement le résultat théorique (16) (voir chapitre 2, paragraphe 2.1) qui prédit un écart d'ordre ε .

On pourrait aussi étudier numériquement l'écart entre le filtre de Kalman étendu et le filtre de Katur-Picard qui, théoriquement est d'ordre ε .

Références

- [Arnold] Arnold, L. : Stochastic differential Equations. Theory and Applications. *Jonh Willey & sons (1974)*.
- [Gelb] Gelb, A. : Applied Optimal Estimation, by The Technical Staff, The Analytic Sciences Corporation. *M.I.T. Press (1974)*.
- [Jazwinski 1] Jazwinski, A. : Filtering for nonlinear dynamic systems. *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, 1966, Tome 11*.
- [Jazwinski 2] Jazwinski, A. : Mathematics in Science and Engineering, vol. 64, Stochastic Processes and Filtering Theory. *Academic Press (1970)*.
- [Lipster - Shiriyayev] Lipster - Shiriyayev : Statistics of Random Processes II, Applications. *Springer-Verlag*.
- [Pardoux] Pardoux, E. : Equations du filtrage non linéaire, de la prédiction et du lissage. *Stochastics 1982, vol.6*.
- [Pardoux - Talay] Pardoux, E. - Talay, D. : Discretization and simulation of stochastic differential equations. 1985 - *Acta Applicandae Mathematicae (9),1,29-47*.
- [Picard] Picard, J. : Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio. 1986 - *SIAM J. Appl. Math. (46),6,1098-1125*.
- [Talay] Talay, D. : Analyse numérique des équations différentielles stochastiques, thèse de doctorat de troisième cycle en Mathématiques Appliquées, soutenu le 25 Juin 1982.

Piecewise linear filtering with small observation noise.

W.H. Fleming*, D. Ji* and E. Pardoux**

Abstract : We consider a piecewise linear filtering problem with small observation noise. It is shown that one can construct an approximate finite dimensional filter which uses a bunch of Kalman filters, together with a test procedure to decide which Kalman filter to follow.

* Division of Applied Mathematics, Brown University, Providence, R I USA

** Mathématiques -case H, Univ. de Provence, F- 13331 Marseille Cédex 3, and INRIA.

1. Introduction.

The aim of this paper is to propose an approximate optimal filter for the filtering problem :

$$\begin{aligned} dx_t &= f(x_t)dt + dw_t \\ dy_t &= h(x_t)dt + \epsilon dv_t \end{aligned}$$

where $\{x_t\}$ is a scalar unobserved process, $\{y_t\}$ is a scalar observed process, ϵ is a "small" parameter, $\{w_t\}$ and $\{v_t\}$ are mutually independent standard Wiener processes. We assume that $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\ell} I_i$, where I_1, \dots, I_{ℓ} are disjoint intervals, f and h are continuous mappings from \mathbb{R} into \mathbb{R} , whose restrictions to each K_i are affine.

Roughly speaking, our result is as follows. Provided a certain "detectability hypothesis" is satisfied, an approximate optimal filter is given by one of a set of ℓ Kalman filters, the decision about which Kalman filter to follow for a given period of time being taken in view of the outputs of the ℓ Kalman filters.

Let us sketch the general ideas on a simple example. Suppose that $\ell = 2$, $I_1 = \mathbb{R}_-$ and $I_2 = \mathbb{R}_+$. Suppose that :

$$f(x) = \begin{cases} F_+ x & , x \geq 0 , \\ F_- x & , x \leq 0 . \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} H_+ x & , x \geq 0 , \\ H_- x & , x \leq 0 . \end{cases}$$

We now consider the two linear filtering problems :

$$(1+) \begin{cases} dx_t = F_+ x_t dt + dw_t \\ dy_t = H_+ x_t dt + \epsilon dv_t \end{cases}$$

$$(1-) \begin{cases} dx_t = F_- x_t dt + dw_t \\ dy_t = H_- x_t dt + \varepsilon dv_t \end{cases}$$

to which one associates two Kalman filters (KF₊) and (KF₋), with outputs

$$(x_t^+, R_t^+) \text{ and } (x_t^-, R_t^-).$$

If $H_+ H_- > 0$, then h is one to one, and since ε is small, we can almost deduce from $\{y_s, s \leq t\}$ the current value of $h(x_t)$, hence of x_t . More precisely, from the results of Picard [8],[9],[10] (see also Katzur - Bobrovsky - Schuss [6], Bensoussan [1], Ji [5], we know that the conditional law of x_t , given $\mathcal{Y}_t = \sigma \{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ has a small variance .

If for instance $x_s^+ > 0$ and is significantly different from zero for any $s \in [t - \alpha, t]$ (in which the same is true for x_s^-), the conditional law of x_t given \mathcal{Y}_t is almost completely concentrated on \mathbb{R}_+ (at least with probability almost one) and consequently the output of (KF₊) is very close to the conditional law of x_t , given \mathcal{Y}_t (as we will see below, the way in which (KF₊) is initialized does not play a significant role), at least with probability almost one.

Suppose now that $H_+ H_- < 0$. Then we need some " detectability hypothesis ". Indeed, if $f(x) \equiv 0$ and $h(x) = |x|$, then clearly the conditional law of X_t given \mathcal{Y}_t is symmetric with respect to 0, and cannot be reasonably approximated by the output of a Kalman filter.

Suppose now that $|H_+| \neq |H_-|$. Then , for $\varepsilon = 0$, the quadratic variation of $\frac{dy_t}{dt} = h(x_t)$ tells us whether $x_t < 0$ or $x_t > 0$.

One may then expect that for $\varepsilon > 0$ but small, the conditional law of X_t given \mathcal{Y}_t has again a small variance, and that a decision about which of (KF₊) or (KF₋) to follow might be reached by comparing the outputs of these two filters. The proof these facts is the crucial step in our argumentation.

Our result are illustrated by the numerical results in Fleming et all [3] . Let us insist upon the fact that the hypothesis of a high signal - to - noise ratio is crucial for the validity of the algorithm which we propose . Without that hypothesis, the conditional law would spread out over the whole real line, and probably none of the Kalman filters would give an acceptable approximation of the

conditional law. A totally different algorithm is proposed for that situation in Pardoux - Savona [7].

Generalisations to higher dimensional situations, as well as to the case where f and h are nonlinear and h piecewise one to one, will be considered elsewhere.

The paper is organised as follows. In section 2, we formulate precisely the problem and the assumptions, as well as some technical results which will be needed in the sequel. Sections 3,4 and 5 study in detail the case where $\ell=2$, $I_1 = \mathbb{R}_-$, $I_2 = \mathbb{R}_+$, and h is not globally one - to - one and satisfies a "detectability hypothesis". In section 6, we summarize an approximate filtering procedure for the case studied in the previous sections, and indicate the procedure in the general case.

2. Formulation of the problem and preliminary lemmas.

We consider the two-dimensional process $\{(x_t, y_t), t \geq 0\}$ which solves the following stochastic differential system :

$$(2.1) \quad x_t = x_0 + \int_0^t f(x_s) ds + w_t$$

$$(2.2) \quad y_t = \int_0^t h(x_s) ds + \varepsilon v_t$$

Here $\{w_t\}$ and $\{v_t\}$ are two mutually independent standard Wiener processes, x_0 is a random variable independent of $\{w_t, v_t; t \geq 0\}$ with $E[\exp(cx_0^2)] < \infty$ for some $c > 0$, defined on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) ; f and h are continuous mappings from \mathbb{R} into \mathbb{R} , which have the following special form. We assume that $\mathbb{R} = \bigcup_{1 \leq i \leq \ell} I_i$, where I_1, \dots, I_ℓ are closed intervals with disjoint interiors, and the restrictions of f and h to each I_i are affine functions, i. e.

$$f(x) = F_i x + f_i, \quad x \in I_i; \quad 1 \leq i \leq \ell$$

$$h(x) = H_i x + h_i, \quad x \in I_i; \quad 1 \leq i \leq \ell$$

where $F_1, \dots, F_\ell, f_1, \dots, f_\ell, G_1, \dots, G_\ell, g_1, \dots, g_\ell \in \mathbb{R}$.

$\{x_t\}$ is an unobserved process, while $\{y_t\}$ is observed. We define :

$$\mathcal{Y}_t = \sigma \{ y_s; 0 \leq s \leq t \}$$

and seek to compute at each time t the conditional law of x_t given \mathcal{Y}_t . Our aim is in fact to obtain an asymptotic result, as $\varepsilon \rightarrow 0$, concerning a finite dimensional filter to be described later.

We will assume throughout the paper that :

$$(H_i) \quad H_i \neq 0; \quad 1 \leq i \leq \ell$$

let us now formulate a "detectability hypothesis" which will be assumed to hold throughout the paper :

$$(H_2) \quad \begin{cases} \text{For any point } (i,j) \in \{1, \dots, \ell\}^2 \text{ s.t.} \\ i \neq j \text{ and } h(I_i) \cap h(I_j) \text{ has a non void interior,} \\ H_i^2 \neq H_j^2 \end{cases}$$

For $i = 1, \dots, \ell$, we can consider a Kalman filter $(K F_i)$, which is the optimal filter for the case where :

$$f(x) = F_i x + f_i, \quad h(x) = H_i x + h_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

The Riccati equation for the conditional covariance in $(K F_i)$ reads :

$$\frac{dR_t^i}{dt} = 2F_i R_t^i + 1 - \frac{(H_i R_t^i)^2}{\varepsilon}.$$

This equation has for small ε a unique stable positive invariant solution, equal to :

$$\frac{\varepsilon}{|H_i|} \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 F_i^2}{H_i^2}} + \varepsilon \frac{F_i}{|H_i|} \right).$$

Let us define $K_i = \left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 F_i^2}{H_i^2}} + \varepsilon \frac{F_i}{|H_i|} \right) \text{sign}(H_i)$.

The optimal Kalman filter associated to the initial law $N(E(x_0), \varepsilon K_i / H_i)$ is given by :

$$(KF_i) \begin{cases} dx_t^i = (F_i x_t^i + f_i) dt + \frac{K_i}{\varepsilon} (dy_t - H_i x_t^i dt) \\ x_0^i = E(x_0) \end{cases}$$

In most of the paper, we will concentrate on the case $\ell = 2$, in the which we will assume, without loss of generality, that :

$$f_1 = f_2 = h_1 = h_2 = 0,$$

$$I_1 = \mathbb{R}_-, I_2 = \mathbb{R}_+$$

We will then use the notations :

$$I_- = I_1, F_- = F_1, H_- = H_1$$

$$I_+ = I_2, F_+ = F_2, H_+ = H_2$$

Let us close this section with three lemmas.

Lemma 2-1

Let U_1, \dots, U_M be i.i.d. random variables, with joint law $N(0, \delta)$. Then for any $a > 0$,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq M} |U_k| \geq a\right) \leq 1 - \left(1 - e^{-a^2/2\delta}\right)^M$$

Consequently, when $\delta \rightarrow 0$ and $M \rightarrow +\infty$ in such a way that $M\delta = C$,

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq M} |U_k| \geq a\right) \leq M e^{-a^2/2\delta}$$

Proof :

If θ is a r. v. with law $N(0, 1)$,

$$P(|\theta| > \alpha) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz \leq e^{-\alpha^2/2}$$

Consequently,

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq k \leq M} |U_k| < a\right) &= \left[P\left(\frac{|U_k|}{\sqrt{\delta}} < \frac{a}{\sqrt{\delta}}\right) \right]^M \\ &\geq \left(1 - e^{-a^2/2\delta}\right)^M \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2

Let $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ be a sequence of i. i. d. random variables. Let $\Phi(u) = E[\exp(u \xi_1)]$.

Suppose that Φ is finite on a neighbourhood of the origin, and that $\{u; \Phi(u) \leq k\}$ is closed for any $k \in \mathbb{R}_+$. Call μ the common mean of the ξ_n 's. For any $\theta > 0$, there exist $C > 0$ such that for any $n \in \mathbb{N}$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \mu\right| > \theta\right) \leq C e^{-nC} ..$$

Proof:

this is a large deviation estimate, which can be found e. g. in Ellis [2].

□

Lemma 2.3

Let $\{x_t, t \geq 0\}$ denote the solution of (2.1). Then for any $t > 0$, there exists $c > 0$ such that $E \exp \left[c \left(\sup_{0 \leq s \leq t} x_s^2 \right) \right] < +\infty$.

Proof:

This is Theorem 5.7.2 in Kallianpur [5].

□

3.- The case of two intervals with $H_+ H_- < 0$. First step.

We shall treat the case $H_+ > 0, H_- < 0$ (i. e. $h(x) \geq 0, \forall x$) and use the notations $|H| = \sup(H_+, -H_-)$, $|F| = \sup(|F_+|, |F_-|)$. Recall that assumption (H_2) is in force.

Since we want to decide on which side of 0 x_t is, we first need to find intervals of time on which no zero crossing takes place, at least with conditional probability almost one.

let $0 \leq a < b$, $M = \left\lceil \frac{b-a}{\varepsilon} \right\rceil$, and for $\ell = 0, 1, \dots, M-1$, define :

$$Y_\ell = \frac{1}{\varepsilon} (y_{a+(\ell+1)\varepsilon} - y_{a+\ell\varepsilon})$$

$$S_\ell = \frac{1}{\varepsilon} \int_{a+\ell\varepsilon}^{a+(\ell+1)\varepsilon} h(x_s) ds$$

$$V_\ell = (v_{a+(\ell+1)\varepsilon} - v_{a+\ell\varepsilon})$$

Note that

$$Y_\ell = S_\ell + V_\ell$$

Define moreover the events :

$$B_+(a, b) = \{ x_t > 0; a \leq t \leq b \}$$

$$B_-(a, b) = \{ x_t < 0; a \leq t \leq b \}.$$

In case when there is no ambiguity, we shall simply write B_+ and B_- .

Choose $c > 0$, and define :

$$C = \{ |Y_\ell| \geq c; 0 \leq \ell \leq M-1 \}$$

Proposition 3.1

For any $\varepsilon_0 > 0$, there exists k s.t. for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$P((B_+ \cup B_-)^c / C) \leq k e^{-k/\varepsilon}.$$

Proof :

If $|Y_\ell| \geq c$ and $|V_\ell| \leq \frac{c}{2}$, then $|S_\ell| \geq \frac{c}{2}$, which implies that there exists $t_\ell \in [a + \ell\varepsilon, a + (\ell + 1)\varepsilon]$ s. t. :

$$|h(x_{t_\ell})| \geq \frac{c}{2}$$

and

$$|x_{t_\ell}| \geq c_1 = c/2 |H|.$$

It follows that on $(B_+ \cup B_-)^c \cap C$, we must have either :

$$\sup_{0 \leq k \leq M-1} |V_k| \geq \frac{c}{2}$$

or else

$$\sup_{0 \leq \ell \leq M-1} \sup_{a+\ell\epsilon \leq s < t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |x_t - x_s| \geq c_1$$

From lemma 2.1, $\forall \epsilon_0 > 0, \exists c_0 > 0$ s. t. , $\forall \epsilon \in (0, \epsilon_0)$,

$$P\left(\sup_{0 \leq \ell \leq M-1} |V_\ell| \geq \frac{c}{2}\right) \leq c_0 e^{-c_0/\epsilon}$$

Now, for $a + \ell \epsilon \leq s < t \leq a + (\ell+1)\epsilon$,

$$|x_t - x_s| \leq \epsilon |F| \left(\sup_{a \leq t \leq b} |x_t| \right) + |w_t - w_s|$$

Consequently,

$$\left\{ \sup_{\ell \leq M-1} \sup_{a+\ell\epsilon \leq s < t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |x_t - x_s| \geq c_1 \right\} \subset$$

$$\subset \left\{ \sup_{a \leq t \leq b} |x_t| \geq \frac{c_1}{2\epsilon/F} \right\} \cup \left\{ \sup_{\ell \leq M-1} \sup_{a+\ell\epsilon \leq s < t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |w_t - w_{a+\ell\epsilon}| \geq \frac{c_1}{4} \right\}.$$

It follows readily from lemma 2.3 that there exists c_2 s. t. :

$$P\left(\sup_{a \leq t \leq b} |x_t| \geq \frac{c_1}{2\epsilon|F|}\right) \leq c_2 e^{-c_2/\epsilon^2}$$

Noting that the sequence

$$\left\{ \sup_{a+\ell\epsilon \leq t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |w_t - w_{a+\ell\epsilon}| ; a \leq \ell \leq M-1 \right\} \text{ is i.i.d. ,}$$

and that :

$$P\left(\sup_{a+\ell\epsilon \leq t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |w_t - w_{a+\ell\epsilon}| \geq \frac{c_1}{4}\right) = 2 P\left(|w_\epsilon| \geq \frac{c_1}{4}\right)$$

It follows from the proof of lemma 2.1 that

$$\forall \epsilon > 0, \exists c_3 \text{ s.t. } \forall \epsilon \leq \epsilon_0,$$

$$P\left(\sup_{\ell \leq M-1} \sup_{a+\ell\epsilon \leq t \leq a+(\ell+1)\epsilon} |w_t - w_{a+\ell\epsilon}| \geq \frac{c_1}{4}\right) \leq c_3 e^{-c_3/\epsilon}$$

Finally, it easily follows from the above that $P(C)$ is of the order of one, $\forall \epsilon > 0$.

□

4. The case of two intervals with $H_+ H_- < 0$. Second step.

We now want to show that, once we know that no zero crossing has occurred on $[a,b]$ with probability almost one, then we know whether $\{x_b > 0\}$ or $\{x_b < 0\}$, with a very small probability of error.

For that sake, let us define, with the notations introduced in the last section :

$$Z_\varepsilon^o = \frac{1}{b-a} \sum_{0 \leq \ell \leq M-1; \ell \text{ odd}} (Y_{\ell+1} - Y_\ell)^2$$

$$Z_\varepsilon^e = \frac{1}{b-a} \sum_{0 \leq \ell \leq M-1; \ell \text{ even}} (Y_{\ell+1} - Y_\ell)^2$$

On B_+ ,

$$Y_{\ell+1} - Y_\ell = S_{\ell+1} - S_\ell + V_{\ell+1} - V_\ell$$

$$= \frac{H_+}{\varepsilon} \int_{a+\ell\varepsilon}^{a+(\ell+1)\varepsilon} (w_{s+\varepsilon} - w_s) ds + V_{\ell+1} - V_\ell + \frac{H_+ F_+}{\varepsilon} \int_{a+\ell\varepsilon}^{a+(\ell+1)\varepsilon} \int_s^{s+\varepsilon} x_u du ds$$

$$Z_\varepsilon^o = \frac{1}{b-a} \sum_{\ell \text{ odd}} \alpha_\ell^2 + \frac{1}{b-a} \sum_{\ell \text{ odd}} (\beta_\ell^2 + 2 \alpha_\ell \beta_\ell)$$

$$Z_\varepsilon^e = \frac{1}{b-a} \sum_{\ell \text{ even}} \alpha_\ell^2 + \frac{1}{b-a} \sum_{\ell \text{ even}} (\beta_\ell^2 + 2 \alpha_\ell \beta_\ell)$$

where :

$$\alpha_\ell = \frac{H_+}{\varepsilon} \int_{a+\ell\varepsilon}^{a+(l+1)\varepsilon} (w_{s+\varepsilon} - w_s) ds + V_{\ell+1} - V_\ell$$

$$\beta_\ell = \frac{H_+ F_+}{\varepsilon} \int_{\alpha+\ell\varepsilon}^{a+(l+1)\varepsilon} \int_s^{s+\varepsilon} x_u du ds$$

Note that $\alpha_\ell \sim N(0, 2\varepsilon(1 + H_+^2/3))$, and both sequences $\{\alpha_\ell; \ell \text{ odd}\}$ and $\{\alpha_\ell; \ell \text{ even}\}$ are i. i. d. . Call M_o the number of odd integers in the interval $[0, M-1]$, and M_e the number of even integers on the same interval, and define $\rho_o = \frac{\varepsilon M_o}{b-a}$, $\rho_e = \frac{\varepsilon M_e}{b-a}$. Note that ρ_o and ρ_e are both close to $1/2$.

We are going to show that :

Lemma 4.1

For any θ and $\varepsilon_0 > 0$, there exists $c > 0$ s.t for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$P\left(\left\{ \left| Z_\varepsilon^o - 2\rho_o \left(1 + \frac{H_+^2}{3}\right) \right| \geq \theta \right\} \cap B_+ \right) \leq c e^{-c/\sqrt{\varepsilon}}$$

$$P\left(\left\{ \left| Z_\varepsilon^e - 2\rho_e \left(1 + \frac{H_-^2}{3}\right) \right| \geq \theta \right\} \cap B_- \right) \leq c e^{-c/\sqrt{\varepsilon}}$$

and similar estimates hold with Z_ε^o replaced by Z_ε^e , ρ_o by ρ_e .

Let us first see the conclusion which can be drawn from lemma 4.1. Suppose to fix the ideas that $H_+^2 > H_-^2$.

Define :

$$C_+ = C \cap \left\{ Z_\varepsilon^0 \geq \rho_0 \left(2 + \frac{H_+^2 + H_-^2}{3} \right) \right\}$$

$$C_- = C \cap \left\{ Z_\varepsilon^0 < \rho_0 \left(2 + \frac{H_+^2 + H_-^2}{3} \right) \right\}$$

Note that $C_+ \cup C_- = C$, and $C_+ \cap C_- = \emptyset$

Proposition 4.2

For any $\varepsilon_0 > 0$, there exists k s.t.

$$P(B_+^c / C_+) \leq k e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}$$

and

$$P(B_-^c / C_-) \leq k e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}$$

for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Proof :

Let us prove the first assertion. It suffices to estimate the quantity :

$$P(B_+^c \cap C_+).$$

$$P(B_+^c \cap C_+) \leq P((B_+ \cup B_-)^c \cap C) + P\left(B_- \cap \left\{ |Z_\varepsilon^0 - 2\rho_0 \left(1 + \frac{H_-^2}{3}\right)| \geq \theta \right\}\right)$$

where $\theta = \frac{\rho_0}{3} (H_+^2 - H_-^2)$. The desired estimate then follows from Proposition 3.1 and

Lemma 4.1. \square

Proof of lemma 4.1

Let us prove the first estimate. We need to estimate the following three events :

$$G = \left\{ \left| \sum_{\ell \text{ odd}} (\alpha_{\ell}^2 - E \alpha_{\ell}^2) \right| > \frac{b-a}{3} \theta \right\},$$

$$H = \left\{ \left| \sum_{\ell \text{ odd}} \beta_{\ell}^2 \right| > \frac{b-a}{3} \theta \right\},$$

$$J = \left\{ \left| \sum_{\ell \text{ odd}} \alpha_{\ell} \beta_{\ell} \right| > \frac{b-a}{6} \theta \right\}.$$

The existence of $c > 0$ s.t.

$$P(G) \leq c e^{-c/\varepsilon}$$

follows from Lemma 2.2. Note moreover that

$$\frac{1}{b-a} \sum_{\ell \text{ odd}} \beta_{\ell}^2 \leq \varepsilon (H_+ F_+)^2 \left(\sup_{\tau \in [t_1, t_2]} x_{\tau}^2 \right).$$

Using Lemma 2.3 and the Markov inequality, we then deduce the existence of $c > 0$ s.t.

$$P(H) \leq c e^{-c/\varepsilon}$$

Note that :

$$\begin{aligned} J &\subset \left\{ \left(\sup_{\{\ell \text{ odd}\}} |\alpha_{\ell}| \right) \times \left(\sup_{\tau \in [t_1, t_2]} |x_{\tau}| \right) > \frac{\theta}{6 |H_+ F_+|} \right\} \\ &\subset \left\{ \sup_{\{\ell \text{ odd}\}} |\alpha_{\ell}| > \frac{\theta \varepsilon^{1/4}}{6 |H_+ F_+|} \right\} \cup \left\{ \sup_{\tau \in [t_1, t_2]} |x_{\tau}| > \varepsilon^{-1/4} \right\}. \end{aligned}$$

Using Lemma 2.1 and Lemma 2.3, we deduce :

$$P(H) \leq \frac{c}{\varepsilon} e^{-c/\sqrt{\varepsilon}} + c e^{-c/\sqrt{\varepsilon}}.$$

The result now follows from the three above estimates . \square

5. The case of two intervals with $H_+ H_- < 0$. Third step.

We want now to show how the decision between $\{x_b > 0\}$ and $\{x_b < 0\}$ can be made from the outputs of the two Kalman filters (KF_+) and (KF_-) . For $a < e < b$, let us define the test statistics :

$$L_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) dy_s - \frac{1}{2\varepsilon} \int_e^b (|H_+ x_s^+|^2 - |H_- x_s^-|^2) ds .$$

Using the representation :

$$dy_s = \hat{h}_s ds + \varepsilon dv_s$$

where $\hat{h}_s = E(h(x_s)/y_s)$ and $\{v_t\}$ - the innovation - is a standard Wiener process. L_ε can be rewritten in two ways :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon = & \frac{1}{2\varepsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds + \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) dv_s + \\ & + \frac{1}{\varepsilon} \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-)(\hat{h}_s - H_+ x_s^+) ds \end{aligned}$$

and also :

$$(5.2) \quad L_\varepsilon = -\frac{1}{2\varepsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds + \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) dv_s +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) (\hat{h}_s - H_- x_s^-) ds .$$

Define $C_+(a, \varepsilon)$ and $C_-(a, \varepsilon)$ as in § 4, but with the interval $[a, b]$ replaced by $[a, e]$.
Define moreover :

$$\tau = \inf \left\{ t; t = a + \ell \varepsilon, \ell \leq M - 1; t \geq e; \left| \frac{y_{t+\varepsilon} - y_t}{\varepsilon} \right| < c \right\}$$

where c is the constant which is used for the definition of the event C .

We want to estimate :

$$E \left(\int_e^\tau |\hat{h}_s - H_+ x_s^+|^2 ds; C_+(a, \varepsilon) \right)$$

as well as the same quantity with $+$ replaced by $-$.

We decompose :

$$\hat{h}_s - H_+ x_s^+ = \hat{h}_s - H_+ \tilde{x}_s^+ + H_+ (\tilde{x}_s^+ - x_s^+)$$

where \tilde{x}_s^+ is the conditional mean of x_s , given \mathcal{Y}_s , in the following filtering problem :

$$(5.3) \begin{cases} dx_t = (f(x_t) 1_{\{t \leq a\}} + F_+ x_t 1_{\{t > a\}}) dt + dw_t^+ \\ dy_t = (h(x_t) 1_{\{t \leq a\}} + H_+ x_t 1_{\{t > a\}}) dt + \varepsilon dv_t^+ . \end{cases}$$

Define $\lambda_t = F_+ x_t - f(x_t)$, $\gamma_t = H_+ x_t - h(x_t)$,

$$Z_t = \exp \left(\int_a^t \lambda_s dw_s - \frac{1}{2} \int_a^t \lambda_s^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_a^t \gamma_s dv_s - \frac{1}{2\varepsilon} \int_a^t \gamma_s^2 ds \right), \quad a \leq t \leq b .$$

Then $Z_t = \frac{dP^+}{dP} |_{\mathcal{F}_t}$, where P is the initial law on (Ω, \mathcal{F}) , and $\{w_t^+\}$, $\{v_t^+\}$ are mutually independent standard Wiener process under P^+ .

$$dZ_t = \lambda_t Z_t dw_t + \frac{1}{\varepsilon} \gamma_t Z_t dv_t, t \geq a; Z_a = 1$$

$$dy_t = h(x_t) dt + \varepsilon dv_t$$

It follows from the theory of filtering that :

$$d\hat{Z}_t = \frac{1}{\varepsilon} \hat{Z}_t (h_t^+ - \hat{h}_t + \gamma_t^+) dv_t^+$$

where $\hat{Z}_t = E(Z_t / \mathcal{Y}_t)$, $h_t^+ = E^+(h(x_t) / \mathcal{Y}_t)$, $\gamma_t^+ = E^+(\gamma_t / \mathcal{Y}_t)$ and $\{v_t^+\}$ is the P_+ innovation, i. e. :

$$dy_t = H_+ \tilde{x}_t^+ dt + \varepsilon dv_t^+, t \geq a$$

Clearly,

$$d\hat{Z}_t = \frac{1}{\varepsilon} \hat{Z}_t (H_+ \tilde{x}_t^+ - \hat{h}_t) dv_t^+$$

$$\hat{Z}_t = \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_a^t (H_+ \tilde{x}_s^+ - \hat{h}_s) dv_s^+ - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_a^t |H_+ \tilde{x}_s^+ - \hat{h}_s|^2 ds \right)$$

But $\frac{\hat{Z}_\tau}{\hat{Z}_e} = E \left(\frac{Z_\tau}{Z_e} / \mathcal{Y}_\tau \right)$. It then follows from Jensen inequality and the fact that

$$C_+(a, e) \in \mathcal{Y}_\tau :$$

$$E \left(\int_e^\tau |H_+ \tilde{x}_s^+ - \hat{h}_s|^2 ds ; C_+(a,e) \right) \leq \varepsilon^2 E \left(\int_e^\tau |F_+ x_s - f(x_s)|^2 ds ; C_+(a,e) \right) +$$

$$+ E \left(\int_a^\tau |H_+ x_s - h(x_s)|^2 ds ; C_+(a,e) \right)$$

It now follows readily from Proposition 4.2 :

Lemma 5.1 For any $\varepsilon_0 > 0$, there exists k s.t. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$E \left(\int_e^\tau |H_+ \tilde{x}_s^+ - \hat{h}_s|^2 ds ; C_+(a,e) \right) \leq k e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}$$

and the same result holds with $+$ replaced by $-$. \square

Note that the same bound holds for the quantity :

$$E \left(\int_e^b |H_+ \tilde{x}_s^+ - \hat{h}_s|^2 ds ; C_+(a,e) \cap C(a,b) \right)$$

We need now to estimate the difference $|\tilde{x}_s^+ - x_s^+|$, $e \leq s \leq b$. Note that $\{x_t^+, t \geq a\}$ and $\{\tilde{x}_t^+, t \leq a\}$ are solutions of the same linear filtering problem with different initial laws, the second one being non gaussian. Let $\mathcal{Y}_t^a = \sigma\{y_s - y_a ; a \leq s \leq t\}$, $t \geq a$, Since \mathcal{Y}_a and $\sigma(x_a) \vee \mathcal{Y}_t^a$ are conditionally independent given $\sigma(x_a)$, for $t \geq a$,

$$(5.4) \quad \tilde{x}_s^+ = E^+ [E^+(x_t / x_a, \mathcal{Y}_t^a) / \mathcal{Y}_t] .$$

Define $x_{a,t}^+ := E^+(x_t / x_a, \mathcal{Y}_t^a)$. $x_{a,t}^+$ is the output of a Kalman filter. More precisely, we

have :

$$d x_{a,t}^+ = F_+ x_{a,t}^+ dt + \frac{R_{a,t} H_+}{\varepsilon} (dy_t - H_+ x_{a,t}^+ dt), \quad t \geq a; \quad x_{a,a}^+ = x_a$$

$$\frac{d}{dt} R_{a,t} = 2 F_+ R_{a,t} + 1 - \frac{(H_+ R_{a,t})^2}{\varepsilon}, \quad t \geq a; \quad R_{a,a} = 0.$$

Define $K_+(t) = \frac{R_{a,t}^2 H_+}{\varepsilon}$. It is easily seen that $\forall \rho > 0, \exists k$ s.t. $\forall t \geq a + \rho$,

$$(5.5) \quad |K_+ - K_+(t)| \leq k e^{-k/\varepsilon}.$$

Moreover,

$$(5.6) \quad \begin{cases} d(x_t^+ - x_{a,t}^+) = \left(F_+ - \frac{K_+ H_+}{\varepsilon} \right) (x_t^+ - x_{a,t}^+) dt + \\ \quad + (K_+ - K_+(t)) \frac{H_+}{\varepsilon} x_{a,t}^+ dt + \frac{K_+ - K_+(t)}{\varepsilon} dy_t; \quad t \geq a \\ x_a^+ - x_{a,a}^+ = x_a^+ - x_a. \end{cases}$$

Since $K_+ H_+ > 0$, it follows from (5.5), (5.6) that there exists k s.t. $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in [e, b]$,

$$|x_a^+ - x_{a,t}^+| \leq k(1 + |x_a|) e^{-k/\varepsilon}.$$

Finally, using (5.4), we obtain :

Lemma 5.2 The exists k s.t. $\forall \varepsilon > 0$

$$E \int_e^b |x_t^+ - \tilde{x}_t^+|^2 dt \leq k e^{-k/\varepsilon}.$$

From Lemmas 5.1 and 5.2, and the analogues with + replaced by -, we deduce :

Lemma 5.3

For any $\varepsilon_0 > 0$, there exists k s.t. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$E \left[\int_e^b |\hat{h}_s - H_+ x_s^+|^2 ds ; C_+(a,b) \right] \leq k e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}$$

and

$$E \left[\int_e^b |\hat{h}_s - H_- x_s^-|^2 ds ; C_-(a,b) \right] \leq k e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}.$$

□

Theorem 5.4

$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists k > 0$ s.t. for any $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$P(\{L_\varepsilon < 0\} \cap C_+(a,b)) \leq e^{-k/\sqrt{\varepsilon}},$$

and

$$P(\{L_\varepsilon > 0\} \cap C_-(a,b)) \leq e^{-k/\sqrt{\varepsilon}}$$

The proof of the theorem relies on the following Lemma:

Lemma 5.5

Let $z_t = H_+ x_t^+ - H_- x_t^-$; $\exists \alpha > 0$ s.t. $\forall \varepsilon_0 > 0, \exists k$ s.t. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$P\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_e^b z_s^2 ds < \alpha\right) \leq e^{-k/\varepsilon}$$

Proof of the Lemma (outline)

We have:

$$dz_t = \left(F_+ - \frac{H_- K_-}{\varepsilon} \right) z_t dt + (F_+ - F_-) H_- x_t^- dt + \\ + (H_+ K_+ - H_- K_-) \left[\frac{\hat{h}_t - H_+ x_t^+}{\varepsilon} dt + dv_t \right]$$

$$dz_t = \left(F_+ - \frac{H_+ K_+}{\varepsilon} \right) z_t dt + (F_+ - F_-) H_- x_t^- dt + \\ + (H_+ K_+ - H_- K_-) \left[\frac{\hat{h}_t - H_- x_t^-}{\varepsilon} dt + dv_t \right]$$

It follows from the variation of constants formula that both on $C_+(a,b)$ and on $C_-(a,b)$, z_t is the sum of three terms $z_t = z_t^{(1)} + z_t^{(2)} + z_t^{(3)}$, where $z_t^{(1)}$ is of order $\sqrt{\varepsilon}$, $z_t^{(2)}$ is of order ε and the third one is exponentially small. The first term is the crucial one, which solves:

$$dz_t^{(1)} = (F_+ - \varepsilon^{-1} H_- K_-) z_t^{(1)} dt + (H_+ K_+ - H_- K_-) dv_t$$

with initial data $z_e^{(1)}$ having the invariant distribution. By introducing a new time τ such that $\varepsilon \tau = t - e$, the required estimate reduces to a large deviations estimate for the ergodic process in the time scale τ . •

Proof of the Theorem

Let us prove the first estimate only. We now rewrite L_ε for the case $\omega \in C_+(a,b)$ as :

$$L_\varepsilon = \frac{1}{4\varepsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds + \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) d\mathcal{V}_s + \\ + \frac{1}{4\varepsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_e^b (H_+ x_s^+ - H_- x_s^-) (\hat{h}_s - H_+ x_s^+) ds$$

We first show that the sum of the last two terms is nonnegative with very high probability. Indeed,

it is bounded below by :

$$X = \frac{1}{8\epsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds - \frac{2}{\epsilon} \int_e^b |\hat{h}_s - H_+ x_s^+|^2 ds .$$

For any $\theta > 0$,

$$P(\{X < 0\} \cap C_{+(a,b)}) \leq P\left(\left\{\frac{2}{\epsilon} \int_e^b |\hat{h}_s - H_+ x_s^+|^2 ds \geq \theta\right\} \cap C_{+(a,b)}\right) + \\ + P\left(\frac{1}{8\epsilon} \int_e^b |H_+ x_s^+ - H_- x_s^-|^2 ds \leq \theta\right)$$

It then follows from Lemma 5.3 and 5.5, provided θ is chosen adequately that:

$$P(\{X < 0\} \cap C_+) \leq e^{-k/\sqrt{\epsilon}}, \text{ for some } k \text{ and } \epsilon \text{ small enough.}$$

Let us now consider the first part of L_ϵ . Let us define $M_t = \epsilon^{-1/2} \int_e^t z_s dv_s$. We need to estimate the quantity $P(M_t < -\epsilon^{-1/2} \langle M \rangle_t)$. From Lemma 5.5, it suffices to estimate $P(A)$, where

$$A = \{M_t < -\epsilon^{-1/2} \langle M \rangle_t\} \cap \{\langle M \rangle_t \geq \alpha\}$$

Using the facts that $E[\exp(\lambda M_t - (\lambda^2/2) \langle M \rangle_t)] = 1$ and on A , if $\lambda < 0$:

$$\lambda M_t - (\lambda^2/2) \langle M \rangle_t \geq [-\lambda/\sqrt{\epsilon} - \lambda^2/2] \langle M \rangle_t \geq [-\lambda/\sqrt{\epsilon} - \lambda^2/2] \alpha$$

Now choosing λ adequately we have that for any $k > 0$ and ϵ small enough,

$$P(A) \leq e^{-k/\sqrt{\epsilon}}$$

The proof is complete. •

Therefore, knowing that we are on C , L_ϵ is a good test statistics to decide whether we are on $C_{+(a,b)}$ or on $C_-(a,b)$, i.e. essentially whether $\{x_t > 0, a \leq t \leq b\}$ or $\{x_t < 0; a \leq t \leq b\}$.

Note that Lemma 5.1 proves that x_t^+ (resp x_t^-) is then a good estimate for x_t , $e \leq t \leq b$.

It follows moreover from the above that the variance of the conditional law is of order of ϵ .

6. Summary of the procedure in the first case, and the general case.

Let us first summarize the procedure in the case studied so far of two intervals with $H_+ H_- < 0$.

1- At each time $k \in \mathbb{N}$, we compute $y_{(k+1)\epsilon} - y_{k\epsilon}$, and check whether or not its absolute value exceeds a given quantity c .

2- As soon as the first test is positive over a certain time-interval, we start running the L_ϵ -test, possibly in a sequential way.

3- As soon as we have an answer from the L_ϵ -test, we follow the corresponding Kalman filter (one might continue to run the L_ϵ -test, in order to correct a possible wrong decision).

Note that before we get any answer from the tests, the estimate of x_t is zero. During a given time interval, this is not a very good estimate. But that situation seems to be inevitable. Indeed, numerical results [3] indicate that, just after x_t has crossed zero, the conditionnal density has two peaks on both sides of zero, and it takes some time before one of the peaks disappears.

The reason why we do not suggest to use the results of §4 to build a test for the choice between $\{x_t > 0\}$ and $\{x_t < 0\}$ is that a test based on the approximation of the quadratic variation of an approximate derivative of y_t would not be very robust. Similarly one might wish to replace the test based on the values of $y_{(k+1)\epsilon} - y_{k\epsilon}$ for several consecutive k 's by a test using the outputs of the two Kalman filters. Indeed, one can show that the difference $h(x_t) - H_+ x_t^+$ is always at most of the order of $\sqrt{\epsilon}$. Unfortunately, due to the presence of the local time term in the expression for $h(x_t)$, we were not able to get a good enough estimate for the probability of error associated to such a test.

Let us now discuss briefly the case where $H_+ H_- > 0$, and the general situation. In the case of two intervals, \mathbb{R}_- and \mathbb{R}_+ , with $H_+ H_- > 0$, $h(x)$ is one to one, and clearly no test is needed to decide where is x_t . That decision is in that case obvious from the values of x_t^+ and

x_t^- . One might also in this case invoke the result of Picard [8] .

Finally, in the general situation, we have to detect each crossing by x_t of local maxima or minima of the function h , and choose among the several Kalman filters which to follow. One can either construct L_ϵ -type tests only between adjacent intervals, or else between any pair of two distinct intervals, depending on the confidence one has in the decisions previously taken. The latter obviously depends on the lengths of the various intervals, as well as the difference between the values of adjacent $|H_i|$'s .

Let us finally remark that for the case of two intervals \mathbb{R}_- and \mathbb{R}_+ , the problem can still be solved if $H_+ = -H_-$, provided $F_+ \neq F_-$. However the technique is different, and we do not develop it here.

Bibliography

- [1] A. Bensoussan On some approximation techniques in non linear filtering, Proc. IMA Workshop, W. Fleming and P.L. Lions eds., in IMA series in Math. and its Applications, vol. 10, Springer (1987).
- [2] R.S. Ellis Entropy, large deviations, and statistical mechanics, Springer (1985).
- [3] W. Fleming, D. Ji, P. Salame Brown University report, to appear.
- [4] Ji PhD Asymptotic analysis of nonlinear filtering problems, Phd Thesis, Brown University (1987).
- [5] G. Kalliaupur Stochastic Filtering, Springer Verlag .

- [6] Katzur, Bobrovsky, Schuss Asymptotic analysis of the optimal filtering problem for one-dimensional diffusions measured in a low noise channel, *Siam Appl. Math.* 44 (1984)

- [7] E. Pardoux, C. Savona Piecewise linear filtering, *Proc. IMA Workshop*, W. Fleming and P.L. Lions eds., in *IMA series in Math. and its Applications*, vol. 10, Springer (1987).

- [8] J. Picard Nonlinear filtering of one-dimensional diffusions in the case of a high signal-to-noise ratio, *Siam Appl. Math.* 46 (1986)

- [9] J. Picard Filtrage de diffusions vectorielles faiblement bruitées, in *Analysis and Optimization of Systems, Lecture Notes in Control and Info. Scie.* 83, Springer Verlag (1986)

- [10] J. Picard Nonlinear filtering and smoothing with high signal-to-noise ratio, in *Stochastic Processes in Physics and Engineering*, D. Reidel, to appear.

END

DATE

FILMED

6-1988

DTIC