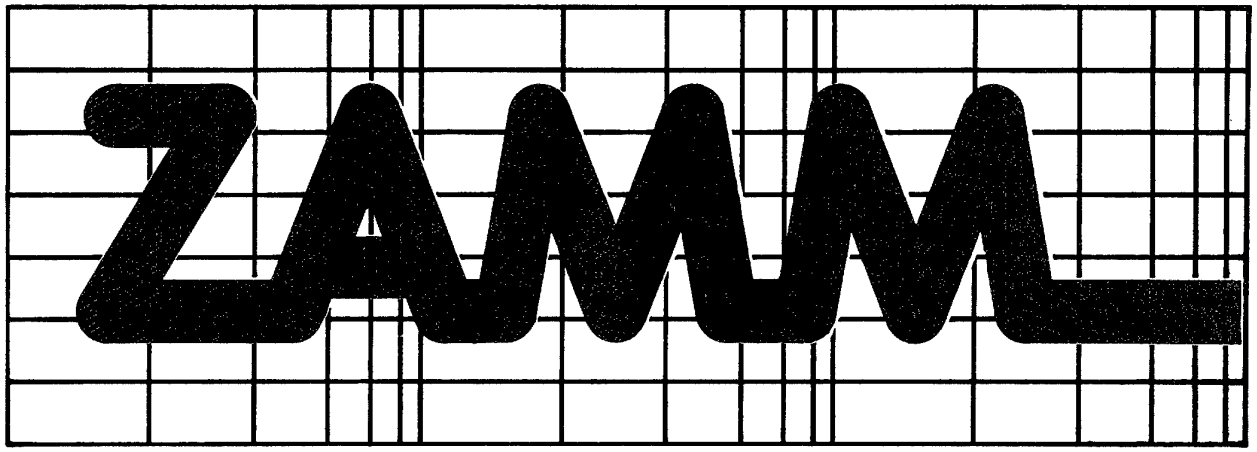
Journal of Applied Mathematics and Mechanics



Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik

Founded by Richard von Mises in 1921

Edited in cooperation with Universität Potsdam
and Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik e. V. (GAMM)

Editors-in-Chief: E. Kreuzer, R. Mennicken, H. Schwetlick

DISTRIBUTION STATEMENT A
Approved for Public Release
Distribution Unlimited

GAMM 2000

Annual Meeting

Short Communications in Mathematics and Mechanics
Section 1–8

University of Göttingen, Germany
April 2–7, 2000

Edited by Gerd E. A. Meier, DLR Göttingen

20010927 021

WILEY-VCH

Volume 81 · 2001
Supplement 2

ISSN 0946-8463 ZAMM · Z. angew. Math. Mech., Berlin **81** (2001) Suppl. 2, S 163–S 434

To our Authors

ZAMM publishes original papers (main articles and short communications), the lectures presented at the annual GAMM conferences, and survey articles (requested by the Editorial Office of ZAMM). Papers in English (preferably) to be submitted for publication should be sent to the address at the bottom of this page (master and one copy), in the case of original papers together with an explicit assurance that they have not been published previously in, or are submitted to, another public journal. Authors are held fully responsible for all information included in their paper and should have one copy available for correction purposes. They get two sets of page proofs, one of them has to be returned within one week. Authors may be charged for extensive corrections in the text; corrections in the figures are not possible.

Manuscripts may be submitted in typewritten form or on disk together with a printout that is identical with the text on the disk. Manuscripts should be one-sided, double-spaced with wide margins at both sides, each sheet numbered, beginning with authors' names and the title of the paper. Extra types (like bold-faced letters etc.) should be marked or printed. Please, distinguish 1, *l*, e; v, *ν*, *w*, *ω*; *o*, *O*, 0 (zero); *k*, *K*, *ϰ*; *i*; *ι*; *x*, × (cross), *χ* etc. **Formulas** must be typed clearly legible (never use pencil). Formulas used in the text have to be numbered at the right margin. Use abbreviations for long terms, "exp" instead of "e" for extensive exponents, bold-faced letters for vectors etc. instead of arrows; avoid hierarchies of indices and exponents if possible. The end of a proof should be marked.
When preparing your ZAMM article with LATEX, please use the special class file **zamm.cls** (for LATEX 2e) or style file **zamm.sty** (for LATEX 2.09), respectively. Please, download these files from the internet site **http://www.wiley-vch.de/berlin/journals/zamm** (or contact the editorial office).

Figures should be submitted on separate sheets, drawn with Indian ink and numbered consecutively. Figure captions, tables, and footnotes (if not avoidable) should be inserted in the final place in the text.

References should be numbered in brackets throughout the text and collected according to these numbers in the appended bibliography (References). Each reference should contain Author(s), title, and complete bibliographical coordinates following the subsequent examples.

Books (Reports, Preprints etc.):
IRONS, B. M.; SHRIVE, N. G.: Numerical methods in engineering and applied science – Numbers are fun. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications. Ellis Horwood Ltd., Chichester 1987.

Articles in periodicals:
KASSEM, S. E.: Wave source potentials for two superposed fluids, each of finite depth. Indian J. Pure Appl. Math. **18** (1987) 2, 186–193.

Articles in Proceedings etc.:
LABISCH, F. K.: Some remarks on the morphology of nonunique solutions in nonlinear elastostatics. In: KÜPPER, T.; SEYDEL, R.; TROGER, H. (eds.): Bifurcation: Analysis, algorithms, applications. Proc. Conf. at the Univ. of Dortmund, August 18–22, 1988. Internat. Ser. of Numer. Mathematics, Vol. 79, Birkhäuser Verlag, Basel–Boston–Stuttgart 1987, pp. 177–184.

To each original paper and review article, a **summary** of 5 to 10 lines in English (for manuscripts of more then 10 pages also in German) and a short list of key-words and corresponding AMS (MOS) classification numbers are needed.

The precise address of each author with full name, academic title etc. is to be added. Information on address changes is appreciated.

Assignment of Rights for Journal Contributions

With the acceptance of the manuscript for publication in ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, WILEY-VCH Verlag GmbH acquires exclusively for three years from the date on which the article is published and thereafter for the full term of copyright, including any future extentions, on a nonexclusive basis all publishing rights including those of pre-publication, reprinting, translating, other forms of reproduction e.g. by photocopy, microform, or other means including machine-readable forms like CD-ROM, CD-I, DVD, diskettes, electronic storage and publishing via Local Area Networks, Intranet and Internet, and other data networks and other forms of distribution e.g. by Document Delivery-Services of this article world-wide. This includes the right of WILEY-VCH Verlag GmbH to transfer to third parties the partial or full rights. Moreover, the provisions of laws of the Federal Republic of Germany apply.

Editorial Office „ZAMM"
University of Potsdam
Institute of Mathematics
POB 60 15 53
D-14415 Potsdam
Germany

REPORT DOCUMENTATION PAGE

Form Approved OMB No. 0704-0188

Public reporting burden for this collection of information is estimated to average 1 hour per response, including the time for reviewing instructions, searching existing data sources, gathering and maintaining the data needed, and completing and reviewing the collection of information. Send comments regarding this burden estimate or any other aspect of this collection of information, including suggestions for reducing this burden to Washington Headquarters Services, Directorate for Information Operations and Reports, 1215 Jefferson Davis Highway, Suite 1204, Arlington, VA 22202-4302, and to the Office of Management and Budget, Paperwork Reduction Project (0704-0188), Washington, DC 20503.

1. AGENCY USE ONLY (Leave blank)	2. REPORT DATE	3. REPORT TYPE AND DATES COVERED
	April 2000	Conference Proceedings

4. TITLE AND SUBTITLE

GAMM 2000 Annual Meeting, Minisymposia, University of Gottingen, Germany, April 2-7, 2000 – Supplement 2

5. FUNDING NUMBERS

F61775-00-WF017

6. AUTHOR(S)

Conference Committee

7. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)

Deutsches Zentrum fur Luft- und Raumfahrt
Bunsenstr, 10
Gottingen D-37073
Germany

8. Performing Organization Report Number

N/A

9. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S) AND ADDRESS(ES

EOARD
PSC 802 Box 14
FPO 09499-0200

10. SPONSORING/MONITORING AGENCY REPORT NUMBER

CSP 00-5017

11. SUPPLEMENTARY NOTES

Conference Proceedings in three volumes. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (ZAMM), Volume 81 – 2001, Supplement 1, 2 and 3, ISSN 0946-8463

12a. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT

Approved for public release; distribution is unlimited.

12b. DISTRIBUTION CODE

A

ABSTRACT (Maximum 200 words)

The Final Proceedings for GAMM 2000, 2-7 April 2000. This is an interdisciplinary conference in Fluid Mechanics and Numerics in general and include topics such as Aspects of Vortex Dynamics; Controlling Chaos; Multi-scale Theory; Flow Control and optimization; Gas Dynamic; Aerothermodynamic; Turbulence; and others.

14. SUBJECT TERMS

EOARD, Fluid mechanics, Boundary layer

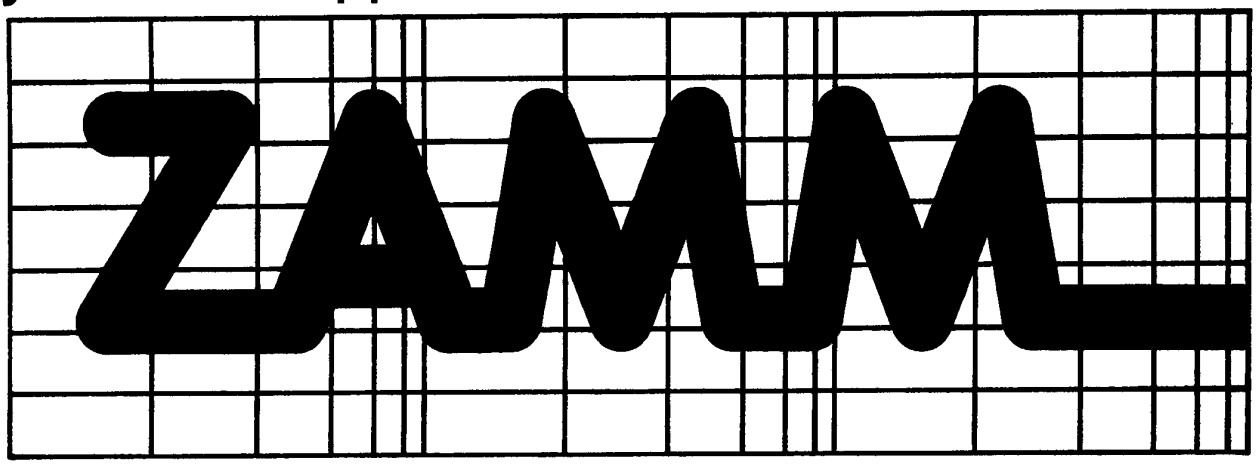
15. NUMBER OF PAGES

3 volumes

16. PRICE CODE

17. SECURITY CLASSIFICATION OF REPORT	18. SECURITY CLASSIFICATION OF THIS PAGE	19. SECURITY CLASSIFICATION OF ABSTRACT	20. LIMITATION OF ABSTRACT
UNCLASSIFIED	UNCLASSIFIED	UNCLASSIFIED	UL

Journal of Applied Mathematics and Mechanics



Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik

Founded by Richard von Mises in 1921

Edited in cooperation with Universität Potsdam
and Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik e. V. (GAMM)

Editors-in-Chief: E. Kreuzer, R. Mennicken, H. Schwetlick

GAMM 2000

Annual Meeting

Short Communications in Mathematics and Mechanics
Section 1–8

University of Göttingen, Germany
April 2–7, 2000

Edited by Gerd E. A. Meier, DLR Göttingen

WILEY-VCH

Volume 81 · 2001
Supplement 2

AQ F01-12-2612

Editorial Office
Dr. Walter Wessel, Dr. Thomas Fischer

The aim and scope of ZAMM is, in agreement with the intentions of its founder Richard von Mises, one of the outstanding scientists of our century in both Mathematics and Mechanics: to publish new results and survey articles, the proceedings of the annual GAMM conferences, book reviews and information on applied mathematics (mainly on numerical mathematics and various parts and applications of analysis, in particular numerical aspects of differential and integral equations), on the whole field of theoretical and applied mechanics (mechanics of particles and systems, solid mechanics, fluid mechanics, thermodynamics) and on mathematical physics.
The journal is of interest for persons working in applied mathematics and mechanics as well as on mathematical or mechanical questions in other sciences, for instance mechanical and civil engineering, electrotechniques, and chemistry.

In Übereinstimmung mit den Zielstellungen des Begründers der ZAMM, Richard von Mises, eines der bedeutendsten Wissenschaftler unseres Jahrhunderts auf dem Gebiet der Mathematik und Mechanik, publiziert die Zeitschrift neue Ergebnisse und Übersichtsartikel, die Vorträge auf den jährlichen GAMM-Tagungen, Buchbesprechungen und Informationen über Angewandte Mathematik (hauptsächlich über numerische Mathematik und verschiedene Teile sowie Anwendungen der Analysis, insbesondere numerische Aspekte bei Differential- und Integralgleichungen), über das gesamte Gebiet der theoretischen und angewandten Mechanik (Mechanik von Mehrkörpersystemen, Festkörpermechanik, Strömungsmechanik, Thermodynamik) und über mathematische Physik.
Die Zeitschrift wendet sich an Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik wie auch an Wissenschaftler und Ingenieure, die sich mit mathematischen oder theoretisch-mechanischen Fragen auf anderen Gebieten, z. B. Maschinenbau und Technik, Elektrotechnik und Chemie, befassen.

Where to order

Please place your order with

WILEY-VCH, P.O. Box 10 11 61, D-69451 Weinheim, telephone: (0 62 01) 60 61 46, telefax: (0 62 01) 60 61 72, telex: 467 155 vchwh d, e-mail: subservice@wiley-vch.de.

Bezugsmöglichkeiten

Bitte richten Sie Ihre Bestellungen an

WILEY-VCH, Postfach 10 11 61, D-69451 Weinheim, Telefon: (0 62 01) 60 61 46, Telefax: (0 62 01) 60 61 72, Telex: 467 155 vchwh d, e-mail: subservice@wiley-vch.de.

For our American customers:
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ISSN 0044-2267) is published twelve times a year (January–December) with three additional issues (ISSN 0946-8463), – 15 issues –, by WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Bühringstr. 10, D-13086 Berlin, Germany and distributed by John Wiley & Sons, Inc., Distribution Centre, 1 Wiley Drive, Somerset, New Jersey 08 875-1272; telephone: (908) 469-4400; fax: (908) 302-2300; telex: 833 434. Annual subscription price 2000 US$ 2048.00 including postage and handling; personal rate US$ 258.00. Periodicals postage paid at Jamaica, NY 11431. Air freight and mailing in the USA by Publications Expediting Services Inc., 200 Meacham Ave., Elmont NY 11003: Send address changes to: ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, c/o Publications Expediting Inc., 200 Meacham Ave., Elmont NY 11003.

Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik

Edited in cooperation with Universität Potsdam, Institut für Mathematik and Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik e.V. (GAMM) by Prof. Dr.-Ing. Edwin Kreuzer, TU Hamburg-Harburg, AB Meerestechnik II, Eißendorfer Str. 42, D-21073 Hamburg, Prof. Dr. Reinhard Mennicken, NWF I-Mathematik, Universität Regensburg, Universitätsstr. 31, D-93053 Regensburg, and Prof. Dr. Hubert Schwetlick, TU Dresden, Institut für Numerische Mathematik, D-01062 Dresden (Editors-in-Chief).
Editorial Office: Redaktion ZAMM, Universität Potsdam, Institut für Mathematik, Postfach 60 15 53, D-14415 Potsdam; telephone: (03 31) 9 77 44 62, fax: (03 31) 9 77 44 06, e-mail: zamm@rz.uni-potsdam.de.
Publishers: WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, Bühringstr. 10, D-13086 Berlin; telephone: (0 30) 47 03 13 25, 47 03 13 27 or 47 03 13 50; telefax: (0 30) 47 03 13 99; URL: http://www.wiley-vch.de/berlin; Bank account: Dresdner Bank Weinheim, account no. 754 624 500: BLZ 670 800 50.
Managing director: Dr. Manfred Antoni.
Advertisement: telephone (0 30) 47 03 13 25, 47 03 13 50.
Production at: Druckhaus „Thomas Müntzer" GmbH, D-99947 Bad Langensalza.
In 2001 the journal is published in one volume per year consisting of fifteen numbers. The subscription price 2001 in Europe is € 1628,–; in the rest of the world $ 2048.00; personal rate € 208,–; $ 268.00. Single copy € 125,–; $ 157.00 incl. postage and handling. Special prices of supplements for members of GAMM and SIAM.
The publisher must be notified of a cancellation of a subscription not later than three months before the end of the calendar year. After that date the subscription is automatically prolonged for another year.

Authorization to photocopy items for internal or personal use, or the internal or personal use of specific clients, is granted by WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH, provided that the base fee of US$ 17.50 per copy, plus US$ .50 per page is paid directly to Copyright Clearance Center, 27 Congress Street, SALEM, MA 01970. USA. For those organizations that have been granted a photocopy license by CCC, a separate system of payment has been arranged. The fee code for users of the Transcational Reporting Service is: 0044-2267/2000 US$ 17.50 + .50.

All rights reserved (including those of translations into foreign languages). No part of this issue may be reproduced in any form, by photoprint, microfilm, or any other means, nor transmitted into a machine language, without written permission from the publishers.

© 2001 by WILEY-VCH Verlag Berlin GmbH. Printed in the Federal Republic of Germany.

Printed on chlorine- and acid-free paper.

Preface

The annual scientific conference of the Society for Applied Mathematics and Mechanics (GAMM) was held at the University of Göttingen, Germany, April 2–7, 2000. These meetings provide a forum for the exchange of ideas between the different mechanical engineering disciplines and mathematics.

In total 949 scientists from 33 countries attended the conference. There were 16 plenary lectures, 95 papers were presented in minisymposia and 624 contributions were presented in a large number of parallel sessions divided into 25 sections. The themes of the minisymposia and sections can be found in the tables of contents of each volume. More detailed information about the meeting is given in the GAMM Letter Nr. 2, 2000.

The following list gives the titles of the plenary lectures. These are not contained in the present proceedings, but are expected to be published in the regular volumes of ZAMM.

- R. J. Adrian, University of Illinois: Velocity Field Measurement
- L. D. Brown, University of Pennsylvania: Asymptotic Equivalence for Infinite Dimensional Statistical Problems
- R. E. Caflisch, University of California: Prandtl's Boundary Layer Equation
- U. Christensen, University of Göttingen: Fluidmechanik des Erdinneren
- D. L. Colton, University of Delaware: Inverse Scattering Techniques for Detecting Burned Objects
- P. Deuflhard, Konrad-Zuse-Center Berlin: From Molecular Dynamics to Conformational Dynamics in Drug Design
- U. Helmke, University of Würzburg: Computation and Control: A Dynamical Systems Perspective
- A. Hübler, University of Illinois: Controlling Chaos
- W. Jüptner, BIAS Bremen: Theoretische Grundlagen interferometrischer Meßverfahren zur Auswertung interferometrischer Medaten in der experimentellen Festkörpermechanik
- M. Karpel, Technion Haifa: Procedures and Models for Aeroservoelastic Analysis and Design
- R. V. Kohn, New York University: Energy Minimization, Microstructure, and Pattern Formation in Grain Boundaries and Ferromagnets
- C. Miehe, University of Stuttgart: Computational Plasticity at Finite Strains
- H. Pottmann, TU Wien: Computational Geometry
- A. Quarteroni, EPFL Lausanne: Multimodels in Fluid Dynamics
- W. Schneider, TU Wien: Continuous Solidification Processes
- P. D. Spanos, Rice University Houston: Stochastic Processes in Mechanics

Ludwig Prandtl Laudatio

- J. Zierep, Technical University of Karlsruhe:

Ludwig Prandtl Memorial Lecture

- P. Saffman, F.R.S., California Institute of Technology, Pasadena: Aspects of Vortex Dynamics

Public Lecture

- W. Send, DLR Göttingen: Vom Vogelflug zum Düsenklipper

The three volumes of the proceedings comprise most of the contributions to the minisymposia and sections. The manuscripts were submitted in camera-ready form, were reviewed by two external referees and examined by a member of the Editorial Team. The contributions to the minisymposia and the invited contributions to the sections were restricted to four pages and the short communications to two pages. A manuscript which was judged not to be acceptable in its present form (although it may contain publishable material) had to be rejected since time constraints did not allow for a revision process. We take this opportunity to express our appreciation to all the authors who submitted their manuscripts.

The proceedings are organized as follows:

Volume I contains the papers presented in the minisymposia.
Volume II contains the contributions to Sections 1–8.
Volume III contains the contributions to Sections 9–25.

The conference was supported by grants of the

– Deutsche Forschungsgemeinschaft
– Niedersächsisches Ministerium für Wissenschaft und Kultur
– Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt

and

- European Office of Aerospace Research & Development (EOARD)
- DaimlerChrysler Aerospace Airbus GmbH
- EAM Göttingen
- Sparkasse Göttingen
- Druckerei Kinzel, Göttingen
- Walter de Gruyter & Co.
- B.G. Teubner GmbH Stuttgart
- Wiley-VCH Verlag
- Springer Verlag
- Editions Elsevier

We greatly appreciate the generous support given by these institutions.

A conference of this size is the result of a collaborative effort. We would like to thank the plenary speakers, the organizers of the minisymposia and sections, the local organizers and all the authors for their contributions to the annual meeting and to these proceedings. We also thank the GAMM presidency and Mr. Trinkl from WILEY-VCH for their cooperation in the editorial process.

Special thanks are due to the external referees without whose help and expert advice a fair evaluation of the submitted manuscripts would not have been possible.

Finally we thank Elisabeth Winkels for her continuous assistance in preparing the three volumes of these proceedings.

Göttingen, March 2001

The Editor
Prof. Dr. Gerd E. A. Meier

Table of Contents

Preface S165

Section 1 Linear and Nonlinear Oscillations
Chaired by: P. Hagedorn, K. Popp

Adam, C., Heuer, R.
Eine Analogie zwischen dem zweischichtigen Balken mit nachgiebigem Verbund und dem Sandwichbalken mit dicken Deckschichten S173
Bammer, F., Troger, H.
On the Stability of Highly Symmetric Rotating Systems S175
Barkow, B., Troger, H.
A Simple Strategy for the Deployment of a Tethered Satellite System S177
Belyaev, A. K.
Suppressing Parametric Resonances by a Tuned Vibration Absorber S179
Blekhman, I. I., Dresig, H.
Anwendungen der Vibrationsmechanik in der Mechanismentheorie S181
Bryja, D.
Coupled Lateral-Torsional Vibrations of Suspension Bridge Excited by Random Wind Load S183
Dziedzic, K., Kurnik, W.
Bifurcation of a Shaft under Magnetic Load S185
Engleder, T., Vielsack, P.
The Influence of Regularization Methods on the Integration of Stick-Slip Motion S187
Gausmann, R., Seemann, W.
A Model for a Piezoelectric Transformer S189
Hochrainer, M. J.
Dynamisches Verhalten von Bauwerken mit Flüssigkeitstilgern S191
Hortel, M., Skuderova, A.
Die Greensche Funktion in der Analyse von nichtlinearen parametererregten Systemen S193
Insperger, T., Stepan, G.
Stability of Retarded Systems with Parametric Excitation S195
Kreuzer, E., Wendt, M.
Kentern als Verzweigungsproblem S197
Labrenz, H., Brommundt, E.
Bewegungsgleichungen eines Walzenpaares mit Gummiüberzug S199
Mikota, J.
Frequency Tuning of Chain Structure Oscilllators to Place the Natural Frequencies at Ω_1 and $N-1$ Integer Multiples $\Omega_2 \ldots \Omega_N$ S201
Mittermayr, P.
Analytische und numerische Untersuchungen zum Rad-Schiene Kontakt S203
Osinski, Z., Starczewski, Z.
Resonant Vibration of a Rotor Supported on Journal Bearings with Non-Circular Contours S205
Panning, L., Sextro, W., Popp, K.
Vibrational Behaviour of Turbine Blade Assemblies with Friction Dampers S207
Pietrzakowski, M.
Control of Laminated Plate Vibrations by Piezoelectric Devices S209
Poterasu, V. F., Filipescu, C., Salomeia, L.
Solving Nonlinear Differential Equations of Mechanics Using Wavelets S211
Prytula, M., Hentosh, O.
The Hamiltonian Nonlocal Invariant Reduction of a Burgers Equation and its Lie-Algebraic Structure S213
Przybylowicz, P. M.
Active Damping of Transverse Vibration in Pipes Conveying Fluid Subjected to Kinematic Excitation S215
Raue, A.
Zur Wärmeschockbelastung von Verbundbalken S217
Ryczek, B., Bogacz, R.
Dynamics of Mechanical System with Dry Friction Described by the Model with Several Parameters S219
Schmalfuss, C., Wedig, W., Ams, A.
Bremsenmodell mit nichtlinearer stochastischer Oberfläche S221

Schmidt, B., Sperling, L., Duckstein, H.
Zum Einfluß der Verformbarkeit des Tragkörpers auf die Selbstsynchronisation von Unwuchtrotoren S223
Sextro, W.
Heat and Wear Generation for Rolling Contacts S225
Simha, H., Klein, H. W.
Added Mass Finite Element Formulation of a Beam Vibrating in a Fluid S227
Söffker, D., Müller, P. C., Sampaio, R., Weber, H. I.
Ermittlung von Kontaktkräften stoßbehafteter elastischer Systeme: Simulation und Experiment S229
Stoffel, M., Schmidt, R., Weichert, D.
Experiment und Simulation stoßwellenbeanspruchter Platten S231
Tylikowski, A.
A Study on Segmentation of Distributed Piezoelectric Sectorial Actuators in Annular Plates S233
von Wagner, U., Wedig, W. V.
Nonlinear Stochastic Car Vibrations S235
Wojcicki, Z.
Transient Process' Sensitivity for Turbo-generator Supporting Structure with Regard to Parametric Excitation S237

Section 2 Control Theory, Stability and Control
Chaired by: H.-J. Pesch, U. Konigorski

Baldinger, M., Blaimschein, P., Bremer, H.
Design and Control of a Natural Gait for a Biped without Impacts S239
Blaimschein, P., Bremer, H.
Nichtlineares Regelungssystem für mobile Robotersysteme S241
Büskens, Ch.
A Mixed Open-Loop-Closed-Loop Strategy for Real-Time Optimization of Perturbed Optimal Control Problems with Constraints S243
Chudej, K.
Minimalkoordinaten zur effizienten Lösung singulärer optimaler Steuerungsaufgaben S245
Eppler, K., Tröltzsch, F.
Discrete and Continuous Optimal Control Strategies in the Selective Cooling of Steel S247
Gerdts, M., Büskens, Ch.
Computation of Consistent Initial Values for Optimal Control Problems with DAE Systems of Higher Index S249
Griesse, R.
Some Aspects for Instantaneous Boundary Control of Backward-Facing Step Flow S251
Hametner, G.
Stabilisierung eines hydrostatischen Antriebs mit Selbsterregung S253
Mikhailov, S. A., Müller, P. C.
Three Singularities in Control Problems S255
Mitterhuber, R., Bremer, H.
Kraft/Positionsregelung kooperierender, teils elastischer Knickarmroboter S257
Paulke, S., Heinen, A. H.
Dynamische Stabilitätsanalyse für Platten unter Berücksichtigung thermomechanischer Kopplungseffekte S259
Steindl, A., Barkow, B.
Optimal Control for the Deployment of a Satellite S261
Winderl, S., Büskens, Ch.
Real-Time Optimization of Perturbed Control Systems with Linear Control S263

Section 3 Multibody Systems and Kinematics
Chaired by: R. Schwertassek, Ch. Woernle

Blajer, W.
An Improvement Formulation for Constrained Multibody Systems with Singularities S265
Buschmann, A.
Adaptive Schrittweiten bei der globalen Bahnplanung S267
Eberhard, P.
Übergänge in der hybriden Mehrkörpersystem/FE Kontaktsimulation S269

Heinzl, Ph., Plöchl, M., Lugner, P.
Regelung eines Gliederzuges unter Verwendung einer 3-gliedrigen kinematisch geschlossenen Schleife S271
Hörsken, C., Hiller, M., Schultheiss, R., Hinze, U.
Effiziente Simulation von Mehrkörpersystemen im Konfigurationsraum S273
Markus, B., Frik, M.
Globale Bahnplanung zur Erhöhung der Fehlertoleranz bei Gelenkausfall S275
Pisla, D., Pisla, A.
Effiziente dynamische Rechnersimulation für Parallelroboter S277

Section 4 Elastic and Viscoelastic Materials and Systems
Chaired by: N. Aksel

Berg, C. P., Dreyer, M., Rath, H. J.
Pointed-Droplets in Uniaxial Extensional Flow S279
Brockmann, T., Lammering, R.
An Analytic Approach to Piezoelectric Fiber Composites – From Micromechanics Modeling to Beam Behavior S281
Eckert, S., Gross, D., Müller, R.
3D Periodic Arrangements of Misfitting Precipitates in Anisotropic Materials S283
Ehlers, W., Markert, B.
Modelling of Open and Closed Cellular Foams S285
Gampert, B., Brämer, T., Eich, T.
Experimentelle Untersuchungen zur Orientierung von Makromolekülen in turbulenten Kanalströmungen viskoelastischer Fluide S287
Gampert, B., Wilkes, C., Eich, T.
Dehnströmungen hochverdünnter viskoelastischer Fluide S289
Gawinecki, J. A., Kacprzyk, P.
The Initial-Boundary Value Problem in Nonlinear System of Equations of Microelasticity Theory S291
Gerlach, S., Matzenmiller, A., Sippel, W.
Identification of Retardation Spectra by Approximation Theory S293
Herrmann, K. P., Müller, W. H., Neumann, S.
The Discrete Fouriertransformation with Applications to Composites – An Alternative to Finite Elements? S295
Heuer, R.
Zum thermischen Durchschlagen kompositer flacher Schalen S297
Hohe, J., Becker, W.
Homogenization of Cellular Sandwich Cores Considering Core Face Sheet Constraints S299
Itskov, M.
On the Elastic Constants and their Admissible Values for Incompressible and Slightly Compressible Anisotropic Materials S301
Itskov, M., Basar, Y.
A New Orthotropic Hyperelastic Constitutive Model with Application to Incompressible Shells S303
Janski, L., Ulbricht, V.
FE-Modellierung des freien Faltens von Textilien S305
Kienzler, R.
On Consistent Higher-Order Plate and Shell Theories S307
Koenemann, F. H.
Cauchy Stress in Mass Distributions S309
Kolling, S., Gross, D.
Rafting Behaviour of Nickel-based Superalloys S311
Kuselj, B., Kosel, F.
The Growth of Debonded Area in a Bonded Two-Layer Plate-Strip S313
Mishuris, G., Kuhn, G.
Special Modelling of the Interface Crack (Mode I and II) S315
Müller, R., Gross, D.
A Constitutive Model for Materials with Microstructure Evolution S317
Petrisic, J., Kosel F.
Dynamic Model of a Free-Falling Folded String S319
Ryssel, E., Brunn, P. O.
Strömung eines quasi-Newtonschen Fluids durch eine plötzliche Verengung S321

Sadiki, A., Hutter, K.
Electro-Thermomechanical Balance Equations for a Non-Material Interface in a Deformable Body with Electric Quadrupole S323
Srpcic, S., Srpcic, J., Turk, G.
Deflections of Glulam Beams in Changing Humidity S325
Wagner, N.
Ein direktes Verfahren zur numerischen Lösung von Schwingungssystemen mit nachlassendem Gedächtnis S327

Section 5 Plasticity: Constitutive Equations and Applications
Chaired by: D. Besdo

Andrä, H., Hesebeck, O., Juhasz, L., Schnack, E.
Simulation des thermomechanischen Verhaltens von Formgedächtnislegierungen unter mehrachsiger nichtproportionaler Belastung S329
Berger, S., Brunig, M., Obrecht, H.
Numerische Simulation großer elastisch-plastischer Deformationen druckabhängiger Metalle S331
Böhlke, T., Bertram, A.
Bounds for the Geometric Mean of 4th-Order Elasticity Tensors with Cubic Symmetry S333
Ehlers, W., Diebels, S., Michelitsch, T.
Microscopic Investigation of Cosserat Continua S335
Gerstmayr, J., Irschik, H.
The Elasto-Plastic Pendulum with Geometric Stiffening S337
Helm, D., Haupt, P.
Geometrisch nichtlineare Modellierung und numerische Simulation von Formgedächtnislegierungen S339
Hohn, B., Rothert, H.
Modellierung des nichtlinearen Verhaltens der Fugen von Verbundbauteilen S341
Kersten, Th., Haupt, P.
Zur Modellierung von anisotropem Materialverhalten in der Viskoplastizität S343
Kröger, M.
Biegung eines rechteckigen Querträgers beim mittigen Pfahlaufprall eines Fahrzeuges S345
Lambrecht, M., Miehe, C.
Aspects of the Pre- and Postcritical Localization Analysis of Solids S347
Litvinov, W. G., Kröplin, B., Schöck, J., Hessenberger, K.
Problem on Plastic Flow at Great Deformations in the Presence of Ultrasonic Vibrations S349
Mack, W., Plöchl, M., Gamer, U.
Auswirkungen eines Temperaturzyklus auf einen rotierenden elastisch-plastischen Querpreßverband mit vollem Einschluß S351
Mahrenholtz, O., Bontcheva, N., Iankov, R.
Nonlocal Friction During Metal Forming Processes S353
Pethö, A.
Constitutive Modeling of Shape Memory Alloys at Finite Strain S355
Ricci, S., Brünig, M., Obrecht, H.
Simulation des lokalisierten Deformationsverhaltens von Metallen mit Hilfe gradientenabhängiger Materialmodelle S357
Schmidt-Baldassari, M., Hackl, K.
Aspekte der numerischen Behandlung idealer Kristallplastizität S359
Schotte, J., Miehe, C., Schröder, J.
Texturbildung in Schalenstrukturen aus polykristallinen Metallen S361
Schwabe, F., Hachemi, A., Weichert, D.
Optimierung von Verbundwerkstoffen mit Hilfe der Einspielanalyse S363
Zhuk, Y.
Generalization of Thermodynamically Consistent Isothermal Bodner-Partom's Model S365

Section 6 Damage and Fracture
Chaired by: D. Gross, W. Brocks

Apel, N., Lambrecht, M., Miehe, C.
Ein Mehrskalenmodell zur Beschreibung des Bruchversagens von Betonstrukturen S367

Drescher, J., Kessler, H., Balke, H.
Numerical Simulation of Repolarization in Ferroelectrics S369
Kashtalyan, M., Soutis, C.
Stress Analysis of Angle-Ply Laminates with Matrix Cracks S371
Loboda, V. V., Herrmann, K. P.
A Contact Zone Approach for a Crack between Anisotropic Materials under Three-Axial Remote Loading S373
Mecking, K., Ballmann, J.
Numerical Investigation of Dynamic Crack Propagation along a Bi-Material Interface S375
Quent, T., Bruhns, O. T.
Contribution to Anisotropic Modeling of Damaged Ductile Materials S377
Schütte, H., Bruhns, O. T.
An Anisotropic Damage Evolution Model Based on the Maximum Energy Release Rate S379
Wang, Y. S., Gross, D.
Resonance of a Layered Half-Space with Periodic Cracks Subjected to SH Waves S381
Zhuk, Y., Guz, I., Soutis, C.
Failure Analysis of a Stiffened Composite Plate with a Hole under Compression S383

Section 7 Computational Mechanics
Chaired by: E. Stein, P. Wriggers

Bayreuther, C., Miehe, C., Schröder, J.
Alternative Mehrgitter-Transferoperatoren für heterogene Strukturen S385
Ehlers, W., Diebels, S., Ammann, M.
Gemischt-hybride Finite Elemente für mikropolare Kontinua S387
Gee, M., Wall, W. A. Ramm, E.
Parallel Iterative Solvers in Nonlinear Shell Analysis S389
Grasberger, S., Meschke, G.
A Coupled Thermo-Hygro-Mechanical Material Model for Concrete S391
Harnau, M., Schweizerhof, K.
'Solid-Shell' Elemente mit quadratischen Ansätzen für große Deformationen S393
Koch, A., Miehe, C.
Aspekte Adaptiver Berechnungsverfahren bei Elastoplastizität inhomogener Materialien und kleiner Verzerrungen S395
Krstulovic-Opera, L., Wriggers, P., Korelc, J.
Rolling Contact Simulations with Frictional Contact Elements Using Lagrangian Description S397
Lapusta, Y., Samborska, A.
On Mathematical Modeling of Stability Loss of a Fibre Series in a Inkompressible Matrix S399
Nackenhorst, U., Zastrau, B. W.
On the Finite Element Analysis of Steady State Wheel-Rail Rolling Contact S401
Rong, Q., Lenz, J., Freischläger, C., Schweizerhof, K., Schindler, H. J., Riediger, D.
Knochenmodellation um ein Unterkiefer-Implantat unter Berücksichtigung der Revaskularisation und Resorption S403
Schieck, B.
Shakedown Analysis of Shells with Large Strains and Deformations S405
Stiegelmeyr, A., Pfeiffer, F.
Simulation of Rigid, Multibody Systems with Unilateral Constraints S407
Weinberg, K., Carstensen, C.
Experimental Comparison of Some Recent Finite Element Methods for the Reissner-Mindlin Plate Model ... S409
Zeman, V., Jedlicka, Z.
Seismic Vibration of Nonconservative Mechanical Systems with Viscodampers S411

Section 8 Experimental Methods and Identification
Chaired by: H. Eckelmann, K.-H. Laermann

Bader, V., Grosche, F.-R.
Experimentelle Untersuchungen zur aktiven Beeinflussung des Wirbelsystems über angestellten Deltaflügeln S413
Brehmer, F., Laermann, K.-H.
Ein hybrides Verfahren zur Berechnung zweidimensionaler Spannungszustände unter Berücksichtigung unterschiedlicher und zeitabhängiger Werkstoffe S415

da Silva, A. R., Schäfer, B., de Souza, L. C. G., Fonseca, R. A.
Online Identification for Space Manipulator Dynamics Parameters S417
Jaschke, P., Waller, H.
Hybride Identifikationsverfahren für hydrodynamische Kupplungen S419
Jonas, P., Mazur, O.
Contribution to Hot-Wire Measurement in Gas Mixtures Flow S421
Rütten, M., Dallmann, U. Ch.
Numerische Simulation des Wirbelplatzens über einem Deltaflügel zur Identifikation von Beeinflussungsmaßnahmen S423
Scheday, G., Miehe, C.
Parameteridentifikation finiter Elastizität bei inhomogenen Deformationen S425
Schmelzer, M.
Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen viskoelastischer Werkstoffe S427
Seidler, M., Markert, R.
Non-stationary Balancing of Flexible Rotors S429
Wagner N.
Parameteridentifikation bei viskos gedämpften Fachwerkstrukturen S431

Author Index S433

ADAM, C., HEUER, R.

Eine Analogie zwischen dem zweischichtigen Balken mit nachgiebigem Verbund und dem Sandwichbalken mit dicken Deckschichten

In der vorliegenden Arbeit wird eine Analogie zwischen einem Träger aus zwei miteinander schubelastisch verbundenen Schichten und einem Sandwichbalken mit dicken Deckschichten vorgestellt. Durch Koeffizientenvergleich gelingt es, die beiden Randwertprobleme ineinander überzuführen. Beide Trägertypen der Länge l werden auf ein kartesisches Koordinatensystem x, y, z bezogen, deren x-Achsen mit der Verbindungsgerade der elastischen Schwerpunkte und deren z-Achsen mit der Symmetrieachse zusammenfallen. Diese werden durch eine entlang der x-Achse angreifende Querbelastung $q(x,t)$ in Richtung der z-Achse und ein in z-Richtung eingeprägtes Temperaturfeld dynamisch beansprucht.

1. Zweischichtige Träger mit nachgiebigem Verbund

Wir beschränken uns auf Biegeschwingungen eines aus zwei homogenen Balken zusammengesetzten, geraden Verbundträgers mit einfach symmetrischem, konstantem Querschnitt, dessen Schichten miteinander schubelastisch verbunden sind. Für die Einzelschichten soll die Bernoulli-Euler Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte weiterhin gültig sein. Wie zum Beispiel Girhammar [1] zeigt, wird der zeitliche Verlauf der Durchbiegung $w(x,t)$ in z-Richtung durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$w_{,xxxxx} - \lambda^2 w_{,xxx} + \frac{\mu}{EJ_0}\ddot{w}_{,xx} - \lambda^2 \frac{\mu}{EJ_\infty}\ddot{w} = -\frac{\lambda^2}{EJ_\infty} q + \frac{1}{EJ_0} q_{,xx} + \lambda^2 \bar{\kappa}_{\Theta,xx} - \bar{\kappa}^{(0)}_{\Theta,xxx} \ . \tag{1}$$

Hierbei sind EJ_0, EJ_∞ die Biegesteifigkeit des Verbundquerschnitts um die y-Achse ohne Verbund bzw. mit starrem Verbund, μ entspricht der Masse pro Längeneinheit, und der Koeffizient λ^2 enthält unter anderem die Steifigkeit k der elastischen Schubfuge, die Elastizitätsmoduli E_1, E_2 und die Querschnittsflächen A_1, A_2 der beiden Schichten und den Vertikalabstand d der Schwerpunkte der Einzelquerschnitte:

$$\lambda^2 = k\left(\frac{E_1A_1 + E_2A_2}{E_1A_1\,E_2A_2} + \frac{d^2}{EJ_0}\right) . \tag{2}$$

Die gegenüber dem isothermen Zustand eingeprägten Temperaturdehnungen Θ werden zu eingeprägten Krümmungen zusammengefaßt,

$$\bar{\kappa}^{(0)}_\Theta = \frac{1}{EJ_0}\left(E_1J_1\,\bar{\kappa}_{\Theta 1} + E_2J_2\,\bar{\kappa}_{\Theta 2}\right) \ , \ \bar{\kappa}_{\Theta i} = \frac{\alpha_i}{J_i}\int_{A_i} \Theta\, z_i\, dA \ (i=1,2) \ , \ \bar{\kappa}_\Theta = \frac{1}{EJ_\infty}\int_A \alpha\,\Theta\, z\, dA \ , \tag{3}$$

wobei α_1, α_2 die Temperaturausdehnungskoeffizienten der oberen und unteren Schicht bezeichnen. z_i sind die vertikalen Achsen kartesischer Koordinatensysteme, deren Ursprünge in den Schwerpunkten der Einzelquerschnitte liegen, und J_1, J_2 entsprechen den Flächenträgheitsmomente der Teilquerschnitte um die y-Achsen dieser lokalen Koordinatensysteme. Gleichung (1) ist unter Berücksichtigung der aktuellen Anfangs- und Randbedingungen (siehe z.B. [1], [2]) zu lösen.

2. Sandwichbalken mit dicken Deckschichten

Im weiteren wird ein Sandwichbalken mit zueinander parallelen dicken Deckschichten aus linear elastischen Werkstoffen betrachtet. Im Gegensatz zur klassischen Sandwichtheorie sind die Eigenbiegesteifigkeiten der Deckschichten zu berücksichtigen. In der homogenen - und im Vergleich zu den Deckschichten weichen - Kernschicht können die Normalspannungen und damit auch deren Biegesteifigkeit vernachlässigt werden. Trotzdem soll der Sandwichbalken nicht zusammendrückbar sein. Während angenommen wird, daß sich die Deckschichten schubstarr verformen, tritt in der Kernschicht bei Belastung eine über die Höhe konstante Gleitung auf. Das Randwertproblem solcher Balken wird zum Beispiel in Stamm und Witte [3] hergeleitet. Die Bewegungsgleichung, ausgedrückt durch die Durchbiegung $w(x,t)$, lautet:

$$\frac{EJ_0}{S} w_{,xxxxx} - \frac{EJ}{EJ_S} w_{,xxx} + \frac{\mu}{S} \ddot{w}_{,xx} - \frac{\mu}{EJ_S} \ddot{w} = -\frac{1}{EJ_S} q + \frac{1}{S} q_{,xx} + \frac{EJ}{EJ_S} \bar{\kappa}_{\Theta,xx} - \frac{EJ_0}{S} \bar{\kappa}^{(0)}_{\Theta,xxx} \ . \tag{4}$$

Die Biegesteifigkeiten EJ, EJ_0, EJ_S und die Schubsteifigkeit S sind wie folgt definiert:

$$EJ = E_1 J_1 + E_2 J_2 + EJ_S \ , \quad EJ_0 = E_1 J_1 + E_2 J_2 \ , \quad EJ_S = \frac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2} d^2 \ , \quad S = G \frac{b\, d^2}{h_k} \ , \tag{5}$$

wobei Größen mit dem Index 1 der oberen und mit dem Index 2 der unteren Deckschicht zuzuordnen sind. J_i, E_i, A_i $(i = 1, 2)$ sind die Eigenflächenträgheitsmomente, E-Moduli und Querschnittsflächen der Deckschichten und mit d wird der Abstand zwischen den lokalen Schwerpunkten der Deckschichten bezeichnet. h_k entspricht der Höhe, b der Breite und G dem Schubmodul der Kernschicht. Die eingeprägten Krümmungen zufolge Temperatur sind wie folgt definiert

$$\bar{\kappa}^{(0)}_{\Theta} = \frac{1}{EJ_0} \left(E_1 J_1 \bar{\kappa}_{\Theta 1} + E_2 J_2 \bar{\kappa}_{\Theta 2} \right) \ , \quad \bar{\kappa}_{\Theta i} = \frac{\alpha_i}{J_i} \int_{A_i} \Theta z_i \, dA \ \ (i = 1,2) \ , \quad \bar{\kappa}_{\Theta} = \frac{1}{EJ} \int_{A_1 + A_2} \alpha \Theta z \, dA \ , \tag{6}$$

wobei α_i die Temperaturausdehungskoeffizienten der Deckschichten und z_i die vertikalen Achsen kartesischer Koordinatensysteme mit den Schwerpunkten der Deckschichten als Ursprung bezeichnen.

3. Analogiebetrachtung

Vergleicht man die Differentialgleichungen (1) und (4), so erkennt man, daß diese gleich aufgebaut sind. Im weiteren wird Gleichung (4) mit dem Faktor S / EJ_0 multipliziert; damit muß der Koeffizient λ^2 von Gleichung (1) in die folgenden Größen der Sandwichtheorie übergeführt werden können:

$$\lambda^2 \cong \frac{EJ}{EJ_S} \frac{S}{EJ_0} \ . \tag{7}$$

Durch Koeffizientenvergleich zwischen diesen Größen kann die Kernschicht eines Sandwichbalkens mit dicken Deckschichten in eine äquivalente Schubsteifigkeit eines zweischichtigen Verbundträgers mit nachgiebigem Verbund bzw. die Schubsteifigkeit in der schubelastischen Fuge in einen äquivalenten Schubmodul umgerechnet werden:

$$k \cong \frac{G\, b}{h_k} \ \text{bzw.} \ G \cong \frac{k\, h_k}{b} \ , \tag{8}$$

wenn die Deckschichten des Sandwichbalkens aus den gleichen Materialien und Abmessungen bestehen wie die beiden Schichten des Verbundbalkens. Die Biegesteifigkeiten können dann wie folgt umgerechnet werden:

$$EJ \cong EJ_\infty \ , \quad EJ_1 + EJ_2 \cong EJ_0 \ . \tag{9}$$

Genauso sind auch die Randbedingungen ineinander überführbar. Somit können die selben Methoden verwendet werden, die voneinander unabhängig für die Lösung der Randwertprobleme (1) und (4) entwickelt wurden, siehe zum Beispiel [1], [2], [4], [5].

4. Literatur

1. GIRHAMMAR, U.A.; PAN, D.: Dynamic analysis of composite members with interlayer slip. International Journal of Solids Structures 30 (1993), 797-823.
2. ADAM, C.; HEUER, R.; RAUE, A.; ZIEGLER, F.: Thermally induced vibrations of composite beams with interlayer slip. In press: Journal of Thermal Stresses.
3. STAMM, K.; WITTE, H.: Sandwichkonstruktionen (1974). Springer, Wien.
4. ADAM, C.; HEUER, R.; JESCHKO, A.: Flexural vibrations of elastic composite beams with interlayer slip. Acta Mechanica 125 (1997), 17-30.
5. HEUER, R.; ADAM, C.: Piezoelectric vibrations of composite beams with interlayer slip. Acta Mechanica 140 (2000), 247-263.

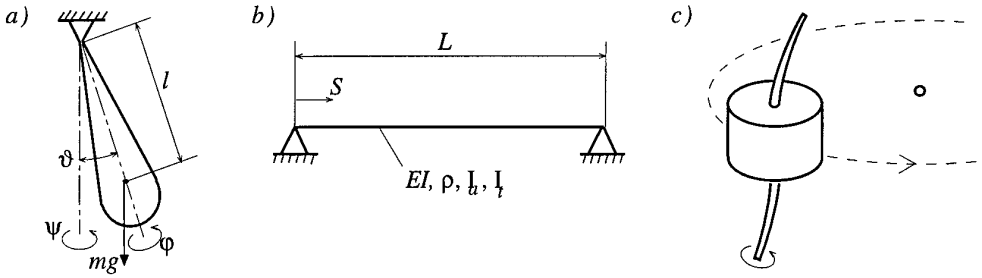
Anschrift: C. ADAM, R. HEUER, Institut für Allgemeine Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/E201, A-1040 Wien, Austria

BAMMER FERDINAND, TROGER HANS

On the stability of highly symmetric rotating systems

Formal stability, i.e. the definitness of the amended potential at the relative equilibrium of the downhanging rotating symmetric pendulum, the rotating elastic rod with circular cross-section and a satellite on a circular orbit is examined with the Reduced Energy Momentum Method (REMM), yielding partly unsatisfactory results.

Introduction. We consider two systems (pendulum, Fig. a, and elastic rod, Fig. b) that have the same symmetry group if we perform a global rotation of a deformed configuration and a local rotation about the symmetry-axis of the body leaving the deformed configuration invariant. For both problems the trivial configurations are formally stable independent of the value of angular velocity. For the rotating pendulum the application of the REMM ([2]) is possible only in a certain limit ([1]) whereas for the rotating beam the REMM fails, because the necessary Frechet-differentiability is not given. However a direct calculation of the second Gateaux-derivative allows to assess definitness. If the axial symmetry is perturbed the REMM is applicable and provides the well known stability results, whereas if the global symmetry is lost, the system remains formally stable. The last result is important for the examination of the stability of the rotation of a deformable symmetric satellite around its symmetry axis moving on a circular orbit (Fig. c). Due to the global potential an arbitrary rotation of the satellite around its center of mass is not a canonical transformation, and hence the REMM does not yield a critical value for the angular velocity of the satellite's rotation ([1]).



The Reduced Energy Momentum Method. The REMM ([2]) has been developed for the stability analysis of relative equilibria (RE) of simple symmetric Hamiltonian systems. The idea of the REMM is to construct the amended potential V_{μ_e}. A RE is a stationary point of V_{μ_e}. The RE is formally stable if the second variation of V_{μ_e} is positive definite at the RE. In many cases this implies also dynamic stability. The REMM provides further some formulas for the calculation of $D^2V_{\mu_e}$. However these are only applicable if V_{μ_e} is Frechet-differentiable at the RE. It is important to note that formal stability is necessary if the system is dissipative. For a conservative system this is not necessary because still gyroscopic stabilization is possible ([1]).

Downhanging rotating pendulum. We consider an axially symmetric rotating pendulum with mass m and axial and transversal moments of inertia I_a, I_t (Fig. a) . The variables ψ, φ, corresponding to the global and to the local symmetry, are cyclic. We examine the stability of the RE $\vartheta = 0$, $\dot{\psi} = w = const$, $\dot{\varphi} = v = const$, depending on the angular velocity $v + w$. The non-trivial application of the REMM yields

$$V_{\mu_e,\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = mgl + I_a^2(v+w)^2/(4I_t) \,,$$

which is positive and hence the RE is formally stable for all angular velocities $v + w$, a result that is also found in [3].

Now we assume two symmetry perturbations (e.g. caused by an imperfect support). First, that the potential depends slightly on φ (perturbation of the local rotational symmetry). The REMM assumes now automatically that φ is an essential variable and therefore $\dot{\varphi} = 0$ in the RE. We obtain

$$V_{\mu_e,\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = mgl - w^2(I_t - I_a) < 0 \qquad \text{for} \qquad w^2 > mgl/(I_t - I_a) \,,$$

and herewith a critical angular velocity. Hence the result for the perfect system is of no practical relevance, because an imperfect one has a completely different behaviour, i.e. the perfect system is not robust. Second, we perturbe the global symmetry, i.e.

in ψ and obtain: $V_{\mu_e,\vartheta\vartheta}\big|_{\vartheta=0} = mgl > 0$. Again we get formal stability independent of the angular velocity. The fact that global symmetry is lost prevents the REMM from finding the critical angular velocity.

Simply supported rotating elastic rod. We consider a straight elastic rod (Fig. b) with circular cross-section, length L, bending stiffness EI, mass per unit-length ρ, transversal and axial moment of inertia per unit-length I_t and I_a and the total axial moment of inertia $I_A := \int_0^L I_a \, dS$. The influence of gravitation is neglected (e.g. a vertical rod). Again two rotational symmetries are present. First, the global rotation of the deformed configuration and second the local rotation, where the rod is kept fixed in a deformed position and is rotated around the rod axis. We examine the stability of the RE which is the straight rod configuration, rotating with the angular velocity $v + w$, where w corresponds to the global symmetry and v to the local one. In [1] it is shown that V_{μ_e} is not Frechet-differentiable at the RE and the formulas of the REMM do not apply. One has to calculate the second Gateaux-derivative, which takes the form

$$D^2V_{\mu_e} = \int EI(x''^2 + y''^2)dS + (v+w)^2 \frac{\left(\int I_t(x'^2 + y'^2)dS\right)^2}{\int \left(I_t(x'^2 + y'^2) + \rho\,(x^2 + y^2)\right)dS} \quad , \qquad \int := \int_0^L \, ,$$

and obviously is positive definite, hence the straight rod configuration is always formally stable.

We assume now a slightly modified system which is only globally symmetric (e.g. the cross-section of the rod is not perfectly circular). The REMM is now applicable and yields

$$D^2V_{\mu_e} = \int \left(EI(x''^2 + y''^2) - w^2\rho\,(x^2 + y^2)\right)dS \, ,$$

which is positive definite only if w is smaller than the lowest natural frequency.

Alternatively we assume that the rod with perfect circular cross-section is in a horizontal position. Hence the gravitation term $\int \rho g y \, dS$ will appear in the potential, yielding a deformed configuration for the RE. Now only local symmetry (rotation about the deformed rod axis) is present, and we obtain

$$D^2V_{\mu_e} = \int EI(x''^2 + y''^2)dS \, ,$$

which is clearly positive definite. This configuration becomes never formally unstable. As in the previous section we have again dynamic stability. The additional term in the potential eliminates the global symmetry and therefore the REMM fails to find the stability boundary. A similar situation will arise in the example of the rotating satellite.

Symmetric rotating satellite with elastic antennas on a circular orbit. We consider an axially symmetric satellite consisting of a rigid body and two flexible elastic antennas (Fig. c). The stability of the socalled Thomson equilibrium, where the satellite moves on a circular orbit and rotates around its symmetry axis, which is parallel to the vertical to the orbital plane, is examined. By means of the REMM it is shown in [1] that the bending stiffness of the antennas must not be too weak, and that the angular velocity of the satellite's rotation must exceed a certain minimal value. Similar as in the cases of the pendulum or the rod with perturbed global symmetry no upper limit for the angular velocity is found. To obtain such a limit one has to examine the freely rotating satellite ignoring the local symmetry. Now not only a critical angular velocity is obtained but also the practically much more important result that the axial moment of inertia has to be larger than the transversal one. This is in general valid for freely rotating elastic bodies ([4]).

Conclusions. (1) The stability analysis of RE of highly symmetric systems can cause severe mathematical difficulties. (2) The results are not robust since a perturbed configuration has to fulfill additional stability conditions. (3) For a perturbation of the global symmetry the REMM fails to find relevant stability conditions.

Acknowledgement. Supported by the Austrian Science Foundation (FWF) under project P13131-MAT.

References

1 BAMMER, F.: Stability analysis of relative equilibria by the Reduced Energy Momentum Method; Thesis TU-Wien (2000)
2 SIMO, J.C, LEWIS, D., MARSDEN, J.E.: Stability of Relative Equilibria I: The Reduced Energy Momentum Method; Arch. Rat. Mech. Anal. **115** (1991), 15-59
3 ISCHLINSKY, A.J, STOROSCHENKO, V.A, TEMTSCHENKO, M.E.: Rotation of rigid bodies on a thread and similar problems; Nauka, Moskau, (1991), (in russian)
4 SIMO, J.C., POSHBERG, T.A., MARSDEN, J.E.: Stability of Coupled Rigid Body and Geometrically Exact Rods: Block diagonalization and the Energy Momentum Method; Phys. Rep. **193** (1990), 280-360.

Addresses: DIPL.-ING. F. BAMMER, PROF. H. TROGER, Vienna University of Technology, A-1040 Wien, Austria

BARKOW BERNHARD, TROGER HANS

A simple strategy for the deployment of a tethered satellite system

Deployment of a tethered satellite system is one of the most delicate processes during a tethered satellite system mission. Simulations and the experience of space flights show that even chaotic motions can occur. We propose a simple way of tether storage and deployment by gravity gradient making use of the chaotic nature of the process. By targeting and linear control we reach the desired stable radial relative equilibrium very fast, if the system moves on a circular orbit.

1. Introduction. If a system of two satellites connected by a tether of constant length moves on a circular Keplerian orbit it has a stable radial relative equilibrium. However, the dynamical process between the separation of the two satellites and reaching the final state is complicated and may take a long time if it is not controlled externally. Basically the separation of the two satellites is done by the gravity gradient. Conventional methods of deployment rely on tether storage on a drum or a spool from which the tether is spooled off during the deployment process. During the length change of the tether, the local vertical configuration becomes unstable (Fig. 2(a)). Consequently, after the deployment process is finished, large amplitude oscillations of the whole system set in. These will last for a long time if they are not eliminated by active control, since only very weak damping is present in the system. Active control usually is performed by acting on the tension in the tether ([1]).

2. Alternative Deployment Approach. We propose an alternative strategy where the tether is stored in a folded state during the system's transport to the orbit. For deployment of the system, the two satellites are pushed apart such that the gravity gradient becomes effective and at the same time the tether is completely unfolded, similar to a mountain climber's rope which is thrown down from a wall of rock before roping down.

3. Mechanical Model. The system model is a visco-elastic extension of the space billiard presented in ([2], [3], [5]). The satellites are modelled as point masses which are connected by a massless, perfectly flexible visco-elastic string. The system's center of mass moves on a circular orbit around a planet. Only motion in the orbital plane is considered. The gravitational forces are derived from a quadratic potential. The system's motion consists of a sequence of free motions and visco-elastic impacts whenever the tether is stretched. The main advantage of this simple model is that fast simulations of control actions are possible. Neglecting the tether mass seems reasonable considering the fact that the mass of a typical high performance tether of 20 km length is 0.7 kg/km, carrying a subsatellite of several hundred kilograms. Hence, the ratio (tether mass)/(subsatellite mass) is about 10^{-1} to 10^{-2}.

4. Equations of Motion. Since the visco-elastic space billiard model is two-dimensional, we denote the position vector in the orbital frame by $\mathbf{R} = (X, Y)^T$ according to Fig. 1. During the free motion, the equations of motion are

$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\omega_c \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - 3\omega_c^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R} + \text{h.o.t.} = 0\,. \tag{1}$$

The $\dot{\mathbf{R}}$ term follows from the Coriolis acceleration. Nonlinear gravitational terms are incicated by h.o.t.. Hence the linearized equations obey a reflectional symmetry about the tangent to the orbit. If an impact occurs, i.e. when the tether is stretched, the tether's visco-elastic properties are modelled using Kelvin-Voigt's linear law of visco-elasticity

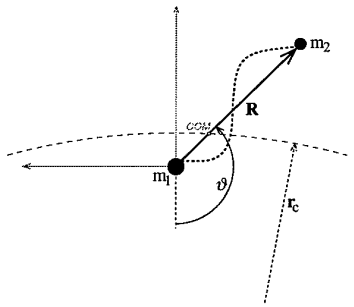


Figure 1: Tethered satellite system in the local orbital frame

$$N = -EA\left(\varepsilon + \alpha\frac{d\varepsilon}{dt}\right) \qquad \text{with} \qquad \varepsilon = \frac{\hat{\ell} - \ell}{\ell} = \frac{R - \ell}{\ell}\,. \tag{2}$$

Thus, the radial motion during an impact is described by

$$\ddot{R}(t) + \Lambda\dot{R}(t) + \Omega_0^2\,(R(t) - \ell) = 0 \qquad \text{with} \qquad \Omega_0^2 = \frac{EA}{m\ell}, \qquad \Lambda = \Omega_0^2\alpha\,. \tag{3}$$

Introducing normalized quantities $R \to R/\ell, t \to \omega_c t$ from which $\omega_c = \sqrt{\frac{G\,m_P}{r_c^3}}, \omega_0^2 = \left(\frac{\Omega_0}{\omega_c}\right)^2, \lambda = \frac{\Lambda}{\omega_c}$ follow and combining the radial movement with the equations of the free motion yields the following equations of motion during an impact

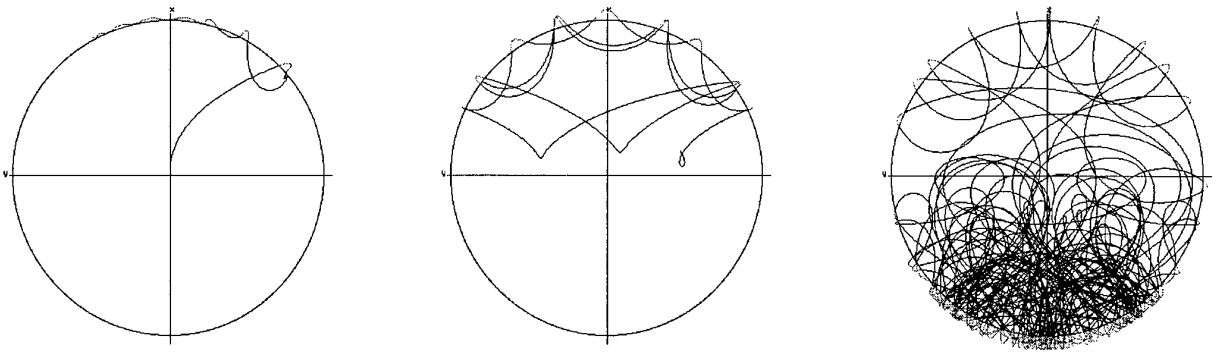
$$\ddot{\mathbf{R}} + 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{R}} - \left[3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \omega_0^2\,(1 - \frac{1}{R(t)})\right]\mathbf{R} + \text{h.o.t.} = 0\,. \tag{4}$$

Coriolis, linear gravitational, dissipative and elastic terms are present. An additional very useful quantity is the energy integral:

$$H = \frac{1}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - 3X^2\right) + \text{h.o.t.}$$

From a simulation shown in Fig. 2(c) all the problems of uncontrolled free deployment are visible: a strong deviation from the local vertical, high relative velocities near the radial position and a long time before the radial equilibrium is reached.

5. Chaos Control. To solve the problems in a simple way we make use of the transient chaotic dynamics of the deployment process as is obvious from Fig. 2(c). Especially at higher energy levels the process is characterized by a high sensitivity with respect to initial conditions and perturbations which can be used for targeting the system to a desired state by means of small actions. However, we have to obey the constraint that possible control actions are restricted to acting on the



(a) $t \approx 3400$s, $\dot{X} = 0.8$ (b) $t \approx 90000$s, $\dot{X} = 0.6$ (c) $t \approx 180000$s, $\dot{X} = 0.8$

Figure 2: Deployment using the targeting algorithm (a) versus uncontrolled deployment (b, c) (System parameters: $m_M = 100000$kg, $m_S = 6000$kg, $EA = 100000$N, $\alpha = 0.05$s, $l_0 = 25000$m)

tension only, either by extending or reducing the tether length during the phase of free motion or by increasing or reducing the tension in the tether during an impact. The latter we call *relaxation control*. This method offers the most effective reduction of the energy. When the satellites are at relative rest, the tether tension can be reduced by feeding additional tether from a drum, for example, such that the new unstrained length becomes the old strained length, $l_{new} = \hat{l}_{old}$ with the result that the part of the kinetic energy connected to the radial motion can be eliminated almost completely. The remaining pendulum-like angular motion can be stabilized by linear control. As can be seen from the energy integral H, the maximum amplitude of the pendulum-like motion depends on the energy level. Hence, the relaxation has the maximum effect if it is applied near $\dot{\vartheta} \approx 0$ and $\vartheta \approx 0$ or $\vartheta \approx \pi$ (depending on the desired radial equilibrium state), where the kinetic energy from the radial motion is at its maximum. In Fig. 2(a) by relaxation control and targeting, the otherwise very irregular motion is strongly damped and transformed to a pendulum-like motion about the desired radial state. By linear control ([1] and [6]) this pendulum-like motion can be quickly transformed into the radial relative equilibrium.

Acknowledgements

This work has been supported by the Austrian Science Foundation (FWF) under project P-13131-MAT.

6. References

1 P. M. BAINUM, V. K. KUMAR: Optimal Control of the Shuttle-Tethered-Subsatellite System. *Acta Astronautica*, 7:1333–1348, 1980.

2 V. V. BELETSKII, G. V. KASATKIN, E. L. STAROSTIN: The Pendulum as a Dynamical Billard. *Chaos, Solitons & Fractals*, 7(8):1145–1178, 1996.

3 V. V. BELETSKII, D. V. PANKOVA: Connected Bodies on the Orbit as Dynamical Billard. *ZAMM*, 76, 1996.

4 A. STEINDL, W. STEINER, H. TROGER: Numerical Calculation of Relative Equilibria of Tethered Satellite Systems. Proceedings of XXVIII Summer School St.Petersburg 2000..

5 W. STEINER: Transient Chaotic Oscillations of a Tethered Satellite System. *Acta Mechanica*, 127:155–163, 1998.

6 W. STEINER, A. STEINDL, H. TROGER: Center Manifold Approach to the Control of a Tethered Satellite System. *Applied Mathematics and Computation*, 70:315-327, 1995.

Addresses: BERNHARD BARKOW, HANS TROGER, Technische Universität Wien, Institut für Mechanik, Wiedner Hauptstraße 8–10, A–1040 Wien, Austria

BELYAEV, A.K.

Suppressing parametric resonances by a tuned vibration absorber

A tuned vibration absorber suppressing a parametric resonance in mechanical systems is suggested. The principal domain of the parametric instability is shown to be markedly shifted by a proper choice of the absorber's parameters. The second instability domain is slightly reduced in its size while the third one is negligibly increased. This is not a shortcoming of the concept as the second and the third domains present no danger in practice.

Conceptually, a tuned vibration absorber (TVA) for suppression of parametric resonance is shown in Fig. 1 and consists of a bar attached to a potentially unstable beam.

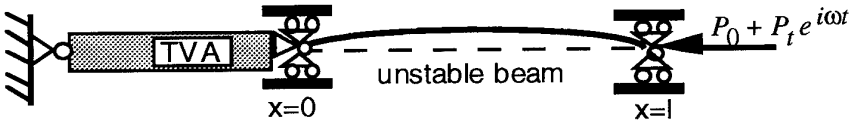


Fig. 1 - Schematic of a tuned vibration absorber for unstable beam.

The longitudinal vibration of the beam and the TVA is governed by the following equations

$$\left(1+\beta\,\partial/\partial t\right)u'' - c^{-2}\,\ddot{u} = 0,\ 0<x<l,\ c=\sqrt{E/\rho}\ ,\ u_a'' - c_a^{-2}\,\ddot{u}_a = 0,\ \ 0<x_a<l_a\ ,\ c_a=\sqrt{E_a/\rho_a}\ \ , \tag{1}$$

where u and u_a are axial displacements of the beam and absorber, respectively, c and c_a are the corresponding sound velocities, β models the internal damping and primes denote derivatives with respect to x and x_a. The boundary conditions and conditions of the beam-absorber interaction are given by

$$x_a=0,\ u_a=0;\ x=l,\ EA\left(1+\beta\,\partial/\partial t\right)u' = P_o + P_t\,e^{i\omega t},\ x=0,\ x_a=l_a,\ u(0)=u_a(l_a),\ EA\left(1+\beta\,\partial/\partial t\right)u' = E_aA_a\,u_a'\ . \tag{2}$$

Solving the boundary value problem (1, 2) and inserting the solution into the equation for lateral deflection of the axially vibrating beam, see [1], one arrives at the following equation

$$EI\left(1+\beta\frac{\partial}{\partial t}\right)w^{IV} + P_o w'' + EA\,\lambda\left(1+i\beta\omega\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(Q\cos\lambda x - H\sin\lambda x\right)w'\right)e^{i\omega t} + \rho A\,\ddot{w} = 0$$

$$H=\frac{P_t\,\omega^{-1}\tan\lambda_a l_a}{R_a\cos\lambda l - R\sqrt{1+i\beta\omega}\,\tan\lambda_a l_a\sin\lambda l},\ Q=\frac{P_t\,\omega^{-1}R_a/\left(R\sqrt{1+i\beta\omega}\right)}{R_a\cos\lambda l - R\sqrt{1+i\beta\omega}\,\tan\lambda_a l_a\sin\lambda l}\ , \tag{3}$$

where $\lambda=\omega/c\sqrt{1+i\beta\omega}$ and $\lambda_a=\omega/c_a$ are the wave numbers and $R=\rho cA$ and $R_a=\rho_a c_a A_a$ are the impedances. In order to define the principal instability zone of the beam we assume $w(x,t)=q(t)\sin\pi x/l$ and apply the Galerkin approach. This results in the following ordinary differential equation for the generalised coordinate $q(t)$

$$\ddot{q} + 2\varepsilon\,\dot{q} + \Omega^2\left[1-2\mu\left|\Phi(\omega)\right|e^{i\left(\omega t+\arg\Phi(\omega)\right)}\right]q = 0\ ,\ \Omega^2=\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\frac{P_c-P_o}{\rho A}\ ,\ P_c=EI\frac{\pi^2}{l^2},\ \varepsilon=\frac{EI\beta}{2\rho A}\left(\frac{\pi}{l}\right)^4,$$

$$\mu=\frac{P_t}{2\left(P_c-P_o\right)},\ \Phi(\omega)=\frac{4\sin\frac{\lambda l}{2}}{\lambda l}\,\frac{\lambda^2l^2-2\pi^2}{\lambda^2l^2-4\pi^2}\,\frac{R_a\cos\frac{\lambda l}{2}-R\sqrt{1+i\beta\omega}\,\tan\lambda_a l_a\sin\frac{\lambda l}{2}}{R_a\cos\lambda l - R\sqrt{1+i\beta\omega}\,\tan\lambda_a l_a\sin\lambda l}\ \ , \tag{4}$$

where the natural frequency of the bending vibration of the axially compressed beam Ω, the first critical load P_c, generalised damping ε and dimensionless magnitude of the external force μ are introduced. The boundary of the principal zone of instability of the Mathieu equation (4) is known to be given by , cf. [1],

$$\left[-\left(\omega/2\right)^2+\Omega^2\right]^2+\varepsilon^2\omega^2-\Omega^4\mu^2\left|\Phi(\omega)\right|^2=0\ . \tag{5}$$

The case $|\Phi(\omega)| = 1$ corresponds to the boundary of principal instability zone of the beam alone, cf. [1], and is shown in Fig. 2. The objective is to find such TVA parameters that beam in the instability zone of Fig. 2 can be rendered stable by attaching the TVA. The stability chart due to (5) differs from that of the beam alone since the correction factor $|\Phi(\omega)|$ depends on the frequency ω. Longitudinal vibration can increase or decrease the instability zone, in particular, the antiresonance is expected to diminish the instability zone. Therefore, the TVA parameters must be chosen in such a way that the longitudinal vibration of the beam with TVA have an antiresonance at $\omega = 2\Omega$. The dependence $|\Phi(\omega)|$ versus frequency is depicted in Fig. 3 for the following optimal tuning parameters: ratio of the impedances $R_* = R_a / R = 0.7$, length ratio $l_* = l_a / l = 0.35$, ratio of the sound velocities $c_* = c_a / c = 1$ and the dimensionless material damping $\beta_* = 2\Omega\beta = 0.01$.

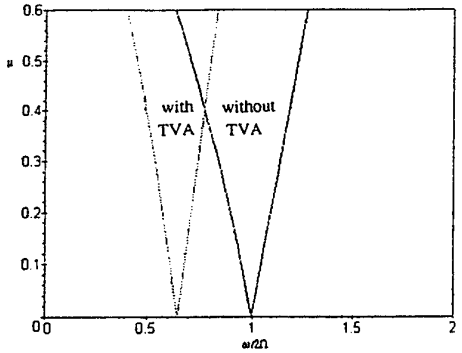


Fig. 2 - The principal instability zone of the beam with and without TVA

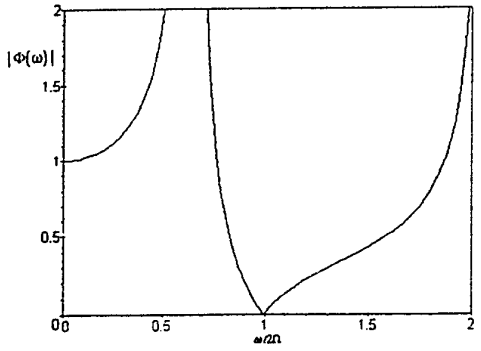


Fig. 3 - The correction factor versus frequency

The principal domain of the parametric instability is seen to be markedly shifted by a proper choice of the absorber's parameters which allows one to suppress the parametric resonance. The stability charts of the second and the third instability zone are obtained in a similar manner and depicted below

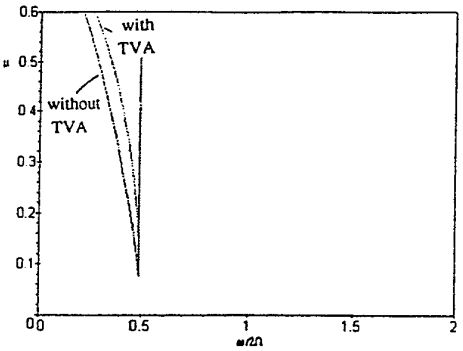


Fig. 4 - The second instability zone of the beam with and without TVA

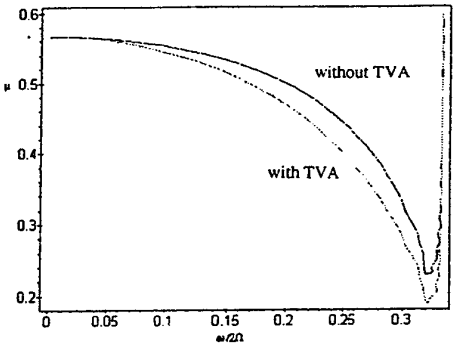


Fig. 5 - The third instability zone of the beam with and without TVA

These figures show that the second zone of instability is reduced after attaching TVA whereas a negligible increasing of the third zone of instability is observed. However the third zone of instability has no practical significance since value $\mu = 0.2$ corresponds to the magnitude of the external harmonic force which is 40% of the static critical load.

References

1. BOLOTIN, V.V.: The dynamic stability of elastic systems. Holden-Day, San-Francisco, 1964.

Address: DR. ALEXANDER K. BELYAEV, Department of Mechanics and Control Processes, State Technical University of St. Petersburg, Polytechnicheskaya 29, 195251, St. Petersburg, Russia.

ILIYA I. BLEKHMAN; HANS DRESIG

Anwendungen der Vibrationsmechanik in der Mechanismentheorie

Mit der direkten Methode der Trennung der Bewegungen werden die Möglichkeiten analysiert, ein Pendel oder einen unwuchtigen Rotor auf einem Mechanismenglied anzuordnen. Die Existenz- und Stabilitätsbedingungen für den Quasi-Gleichgewichtszustand unterscheiden sich wesentlich von denen, die im Falle der einfachen harmonischen Erregung existieren.

Die Methode der direkten Trennung der Bewegungen /1/ geht von den ursprünglichen Gleichungen des Systems aus:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{F}^*(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t, \Omega t) \tag{1}$$

Dabei ist t die „langsame" Zeit, $\tau = \Omega t$ die „schnelle" Zeit, $\mathbf{F}$ der n-dimensionale Vektor der „langsamen" Kraft, $\mathbf{F}^*$ der n-dimensionale Vektor der „schnellen" Kraft, speziell eine 2π-periodische Funktion von τ. Es wird angenommen, dass die interessierende Lösung der Gl. (1) in folgender Form dargestellt werden kann:

$$x = \mathbf{X}(t) + \psi^*(t\tau); \langle \psi^*(t,\tau) \rangle = 0; \qquad \mathbf{X}(t) = \langle x(t,\tau) \rangle \qquad \langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\tau \tag{2}$$

Dabei ist X eine „langsame" und ψ^* eine „schnelle" Komponente. Die spitzen Klammern bedeuten eine Mittelung bezüglich τ. Unter bestimmten Bedingungen gelingt es, von der urspünglichen Gl.(1) zu einer Gl.(3) überzugehen, die nur noch langsameKomponenten enthält:

$$m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) + \mathbf{V}(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) \tag{3}$$

Diese **„Grundgleichung der Vibrationsmechanik"** enthält die zusätzliche „langsame" Kraft V entsprechend /1/. Die Pendelachse vollführt eine periodische ebene Bewegung $x_{Pi}(t)$ und $y_{Pi}(t)$ auf einer geschlossenen ebenen Kurve. Die Bewegungsgleichung des Pendels hat die Form

$$J\ddot{\psi} + d\dot{\psi} + mgl \sin\psi = ml(\ddot{x}_{Pi} \cos\psi - \ddot{y}_{Pi} \sin\psi) \tag{4}$$

Dabei ist ψ der Winkel, der die Abweichung von der Vertikalen beschreibt; l, m, J, Länge, Masse und Trägheitsmoment des Pendels relativ zur Drehachse; g die Erdbeschleunigung, d die Dämpfungskonstante. Die Umformung entsprechend der oben genannten Methode führt auf folgende Gleichung ($X \hat{=} \alpha$) :

$$J\ddot{\alpha} + d\dot{\alpha} + mgl \sin\alpha = V(\alpha) = \frac{ml^2}{2J}[\langle \dot{x}_{Pi}^2 - \dot{y}_{Pi}^2 \rangle \sin 2\alpha + 2\langle \dot{x}_{Pi}\dot{y}_{Pi} \rangle \cos 2\alpha] \tag{5}$$

Die Lage der Drehachse eines Pendels an einem Gliedpunkt P_i am Glied i ergibt sich zu:

$$x_{Pi} = x_i + \xi_i \cos\varphi_i - \eta_i \sin\varphi_i; \qquad y_{Pi} = y_i + \xi_i \sin\varphi_i + \eta_i \cos\varphi_i \tag{6}$$

Dabei sind x_i und y_i die Koordinaten des Gelenkpunktes am Glied i, in dem der Ursprung des $\xi_i - \eta_i$ –Koordinatensystems liegt /2/. Die Gliedwinkel φ_i und die Koordinaten x_i, y_i, x_{Pi} und y_{Pi} sind periodische Funktionen:

$$x_i = \Sigma a_n^* \cos n\Omega t + b_n^* \sin n\Omega t, \qquad y_i = \Sigma c_n^* \cos n\Omega t + d_n^* \sin n\Omega t \tag{7}$$

$$\cos\varphi_i = \Sigma a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t, \qquad \sin\varphi_i = \Sigma c_n \cos n\Omega t + d_n \sin n\Omega t \tag{8}$$

$$x_{Pi} = \Sigma H_n \sin(n\Omega t + \beta_n); \qquad y_{Pi} = \Sigma G_n \cos(n\Omega t + \gamma_n) \tag{9}$$

Für die Beträge der Fourierkoeffizienten H_n und G_n gilt

$$H_n^2 = (a_n^* + \xi_i a_n - \eta_i c_n)^2 + (b_n^* + \xi_i b_n - \eta_i d_n)^2; \quad G_n^2 = (c_n^* + \xi_i c_n + \eta_i a_n)^2 + (d_n^* + \xi_i d_n + \eta_i b_n)^2 \tag{10}$$

Nach Mittelung erhält man aus Gl.(5) bis (10):

$$\langle \dot{x}_{Pi}^2 + \dot{y}_{Pi}^2 \rangle = \frac{1}{2}\Omega^2 \Sigma n^2 (H_n^2 - G_n^2); \langle \dot{x}_{Pi}\dot{y}_{Pi} \rangle = -\frac{1}{2}\Omega^2 \Sigma n^2 G_n H_n \sin(\gamma_n - \beta_n) \tag{11}$$

Es werden die Bezeichnungen q und B durch folgende Beziehungen eingeführt

$$-\frac{(ml)^2}{2J}\langle \dot{x}_{Pi}^2 - \dot{y}_{Pi}^2 \rangle = B\cos 2q, \qquad \frac{(ml)^2}{J}\langle \dot{x}_{Pi}\dot{y}_{Pi} \rangle = B\sin 2q \tag{12}$$

Gl.(2) erhält folgende Form, die dem Typ der Gl.(3) entspricht:

$$J\ddot{\alpha} + d\dot{\alpha} + mgl\sin\alpha + B\sin 2(\alpha - q) = 0 \tag{13}$$

Eine stabile Quasi-Gleichgewichtslage des Pendels findet man aus den Bedingungen

$$mgl\sin\alpha^* + B\sin 2(\alpha^* - q) = 0; \qquad mgl\cos\alpha^* + 2B\cos 2(\alpha^* - q) > 0 \tag{14}$$

Bei der Untersuchung möglicher Rotationsbewegungen wird folgende Bewegung angenommen:

$$\psi = \sigma[n\Omega t + \alpha(t) + \psi^*(t, \Omega t)] \tag{15}$$

Dabei ist $\sigma = +1$ oder $\sigma = -1$ in Abhängigkeit von der sich einstellenden Drehrichtung. n ist eine positive ganze Zahl. Damit erhält man analog zu Gl.(5) eine Differentialgleichung für die Berechnung des Winkels $\alpha(t)$:

$$J\ddot{\alpha} + d\dot{\alpha} + mgl\sin\alpha = V^*(\alpha) = ml\langle \sigma\ddot{x}_{Pi}\cos(n\Omega t + \alpha) - \ddot{y}_{Pi}\sin(n\Omega t + \alpha)\rangle \tag{16}$$

Man erhält nach der Mittelung

$$V^*(\alpha) = ml/2(n\Omega)^2[\sigma H_n \sin(\alpha - \beta_n) - G_n \sin(\alpha - \gamma_n)] \tag{17}$$

Im allgemeinen Fall der periodischen Bewegung können jeder harmonischen Komponente mit der Kreisfrequenz $n\Omega$ stationäre Drehbewegungen des Rotors mit der mittleren Winkelgeschwindigkeit $\langle\varphi\rangle = \pm n\Omega$ entsprechen. Die Existenzbedingungen für die Rotordrehung mit der Kreisfrequenz $n\Omega$ hängt nur vom Vorhandensein der n-ten Harmonischen in der Bewegung der Drehachse ab. Die Reaktionskräfte, die von der Drehachse des Pendels auf den Mechanismus wirken, lauten in komplexer Schreibweise:

$$F_y + jF_x = m[(\ddot{y}_{Pi} + j\ddot{x}_{Pi}) - l[exp(j\psi)]^{\cdot\cdot} - g] \tag{18}$$

Damit erhält man unter Benutzung der Ausdrücke aus Gl.(2), (4) unter Vernachlässigung kleiner Komponenten für den Zustand des Quasi-Gleichgewichts des Pendels:

$$F_y + jF_x = m(\ddot{y}_{Pi} + j\ddot{x}_{Pi})(1 - \frac{ml^2}{2J}) + \frac{(ml)^2}{2J}(\ddot{y}_{Pi} - j\ddot{x}_{Pi})exp(2j\alpha^*) - mg \tag{19}$$

und für die Betriebszustände der Rotation

$$F_y + jF_x/\sigma = ml(n\Omega)^2 exp\, j(n\Omega t + \alpha^*) - mg \tag{20}$$

Die Anwendung zusätzlicher Pendel an einem oder mehreren Mechanismengliedern erlaubt, die Aufgabe des Massenausgleichs und der Selbstsynchronisation von Mechanismen zu lösen.

References

1 BLEKHMAN, I. I.: Vibrazionnaja mechanika. Fismatgis Verlag, Moskau, 1994. (Englische Übersetzung: World Scientific Publ. House, (2000).

2 DRESIG, H.; VULFSON, I. I.: Dynamik der Mechanismen. Berlin, Dt. Verlag der Wiss. und Wien, Springer-Verlag 1989 (jetzt Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main).

Addresses: PROF. DR. HANS DRESIG, TU Chemnitz, Institut für Mechanik, 09107 Chemnitz, BRDeutschland
PROF. SC. NAT. ILYA I. BLEKHMAN, Institut für Probleme der Maschinenkunde, Russische Akademie der Wissenschaften, Bolshoy Prosp.,61 , V. O. 199178, St. Petersburg, Russland

BRYJA, D.

Coupled Lateral-Torsional Vibrations of Suspension Bridge Excited by Random Wind Load

The flexural and torsional vibrations of a single span suspension bridge due to the random wind load are examined in the paper. The bridge model is assumed in the form of thin-walled girder underslung to two cables. Inertial couplings of vibrations as well as the pendular effects are taken into account. The lateral horizontal wind pressure is regarded as the nonstationary stochastic process with the time varying mean. The solutions for the buffeting bridge response are formulated in the correlation theory sphere by using the impulse response function (response of a structure exposed to a single impulse).

1. Statement and solution of the problem

The single-span bridge under consideration consists of a prismatic thin-walled stiffening girder with monosymmetric open cross-section. The girder is simply supported and underslung by vertical hangers to two whipped cables. The cables are anchored at their ends and movable at their supporting points on the undeformable pylons. Hangers turn round the chord of the cable when the beam moves like a pendulum.The total mass of the bridge $m = m_b + 2m_c$ is assumed to be constant along the span (m_b - mass of the beam and ballast, m_c - mass of the cable with hangers).The dead-load curve of the cable forms a parabola $z(x) = 4x(l-x)f/l^2$ within the beam span, the other segments being rectilinear. The specific points are distinguished at the bridge cross-section: O - geometrical centre, B - mass centre, A - shear centre, C - centre of suspension. Deformation of the bridge section may be expressed by three components w, v, φ referred to the shear center. Spatial vibrations of the bridge are described by a following coupled system of non-linear equations ([1,2])

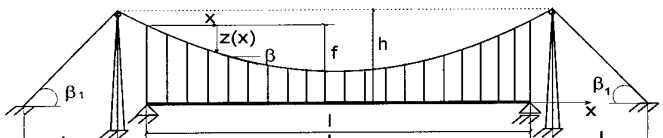


Fig. 1. View of a suspension bridge

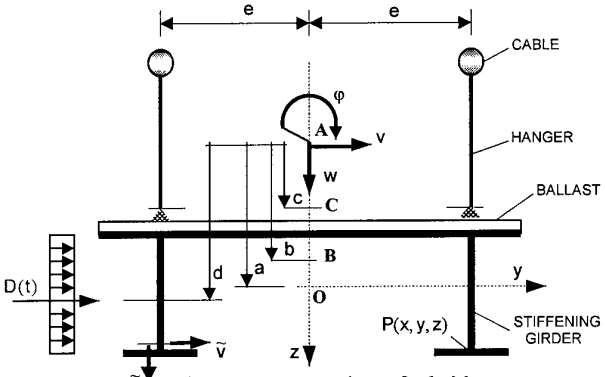


Fig. 2. Cross-section of a bridge

$$EJ_y w^{IV} - 2H_o w'' - 2k_c w'' \int_0^l w\,dx + \frac{16k_c f}{l^2}\int_0^l w\,dx - 2e^2 k_c \varphi'' \int_0^l \varphi\,dx + m\ddot{w} = p_z,$$

$$EJ_z v^{IV} + \frac{m_b g}{h} v - \frac{m_b g c}{h}\varphi + m_b \ddot{v} - m_b b\ddot{\varphi} = p_y,$$

$$EJ_\omega \varphi^{IV} - GI_s\varphi'' - 2H_o e^2\varphi'' - 2e^2 k_c \varphi'' \int_0^l w\,dx + m_b g(b-c)\varphi$$

$$+ \frac{16e^2 k_c f}{l^2}\int_0^l \varphi\,dx - \frac{m_b g c}{h} v - 2e^2 k_c w'' \int_0^l \varphi\,dx + j_A\ddot{\varphi} - m_b b\ddot{v} = m_x, \qquad (1)$$

where $()' = \partial/\partial x$, $\dot{()} = \partial/\partial t$, $j_A = j_B + m_b b^2 + 2m_c e^2$,

$$k_c = 8\psi E_c A_c f/l^3,\ \psi^{-1} = \int_{(L)} \cos^{-3}\beta\, d\xi,\ \xi = x/l,$$

j_B - polar moment of inertia, $p_y(x,t)$, $p_z(x,t), m_x(x,t)$ - loadings referred to the shear center, $EJ_y, EJ_z, EJ_\omega, GI_s$ - flexural and torsional rigidities of the beam, $E_c A_c$ - longitudinal rigidity of the cable, H_o - initial cable tension. The bridge considered relates to weakly non-linear structures, so the non-linear components may generally be neglected with small error yielding [1]. In such a case vertical vibrations are independent of both the lateral and torsional vibrations. The bridge is loaded by the horizontal lateral wind pressure, constant along the span. Therefore, only the coupled lateral-torsional vibrations will be considered. The wind is usually represented by the mean wind speed $\overline{U}$ and by the time-varying gust speed $u(t)$. It is assumed here that $u(t)$ is the sum of the mean value $\overline{u}(t)$ and the random fluctuation $\hat{u}(t)$ that occurs due to wind turbulence, so $U(t) = \overline{U} + \overline{u}(t) + \hat{u}(t)$ - see Fig.3. The time varying mean speed of the wind has the following form

$$\overline{u}(t) = \sum_{i=0}^{v} \lambda \overline{U} S_T(t - t_i),\quad S_T(t-t_i) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < t_i \text{ and } t > t_i + T \\ S(t-t_i) & \text{for } t_i \le t \le t_i + T \end{cases},\quad \lambda = \max_t[\overline{u}(t)]/\overline{U},\ t_i = i\Delta,\ v\Delta \le t < (v+1)\Delta. \qquad (2)$$

It is the regular series of long-duration gusts the shape of which is described by the deterministic function $S_T(t-t_i)$. T and Δ

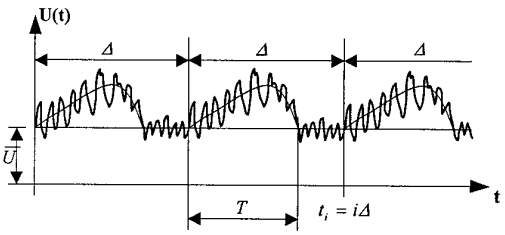


Fig. 3. Time-varying process of the wind velocity

are the deterministic quantities, $\hat{u}(t)$ is assumed to be a random process with zero mean and with known correlation function $K_{\hat{u}\hat{u}}(t_1,t_2)$. The buffeting drag force acting on section x of the span is conventionally given by the formula $D(t)=\rho U^2(t)AC_D/2$, where ρ denotes the air density, C_D is the drag coefficient, A is the across-wind area per unit length projected on the plane normal to the wind speed [3]. When the wind velocity $U(t)$ is introduced, the drag force can be expressed as

$$D(t)=\rho AC_D[\overline{U}+\overline{u}(t)]^2/2+\rho AC_D[(\overline{U}+\overline{u}(t)]\,\hat{u}(t)=\overline{D}(t)+\hat{D}(t),$$

where $[\hat{u}(t)]^2$ is neglected. The examined structure response $R(t)$, having the form of vertical displacement $\tilde{w}(x,y,t)=y\varphi(x,t)$ or horizontal displacement $\tilde{v}(x,z,t)=v(x,t)-(a+z)\varphi(x,t)$ at the optional point of the girder, has been obtained as follows

$$R(t)=(\rho AC_D/2)\int_0^t H_R(t-\tau)[\overline{U}+\overline{u}(\tau)]^2\,d\tau+\rho AC_D\int_0^t H_R(t-\tau)[(\overline{U}+\overline{u}(\tau)]\,\hat{u}(\tau)d\tau=\overline{R}(t)+\hat{R}(t). \tag{3}$$

$H_R(t-\tau)$ denote the response $R(t)$ of the bridge exposed to a single impulse $D(t)=1\cdot\delta(t-\tau)$. Such an impulse response function may be achieved by the Galerkin method with the sine approximation as it was presented in [2]. The expected value of the bridge response (3) is given for $v\Delta\le t\le v\Delta+T$ by the following formula

$$\overline{R}(t)=\frac{\rho AC_D\overline{U}^2}{2}\left(\int_0^t H_R(t-\tau)d\tau+\sum_{i=0}^{v-1}\int_{t_i}^{t_i+T}H_R(t-\tau)S(\tau-t_i)[2\lambda+\lambda^2S(\tau-t_i)]d\tau+\int_{t_v}^{t}H_R(t-\tau)S(\tau-t_v)[2\lambda+\lambda^2S(\tau-t_v)]d\tau\right).$$

The covariance function is found to be

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}_{RR}(t_1,t_2)=\mathrm{E}[\hat{R}(t_1)\hat{R}(t_2)]=\rho^2A^2C_D^2\overline{U}^2\Bigg(&\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2+\lambda\sum_{j=0}^{v_2-1}\int_{t_j}^{t_j+T}\int_0^{t_1}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_2-t_j)d\tau_1d\tau_2\\
&+\lambda\int_{t_{v_2}}^{t_2}\int_0^{t_1}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_2-t_{v2})d\tau_1d\tau_2+\lambda\sum_{i=0}^{v_1-1}\int_{t_i}^{t_i+T}\int_0^{t_2}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_1-t_i)d\tau_2d\tau_1+\lambda\int_{t_{v_1}}^{t_1}\int_0^{t_2}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_1-t_{v_1})d\tau_2d\tau_1\\
&+\lambda^2\sum_{i=0}^{v_1-1}\sum_{j=0}^{v_2-1}\int_{t_j}^{t_j+T}\int_{t_i}^{t_i+T}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_1-t_i)S(\tau_2-t_j)d\tau_1d\tau_2+\lambda^2\sum_{j=0}^{v_2-1}\int_{t_j}^{t_j+T}\int_{t_{v_1}}^{t_1}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_2-t_j)S(\tau_1-t_{v_1})d\tau_1d\tau_2\\
&+\lambda^2\sum_{i=0}^{v_1-1}\int_{t_i}^{t_i+T}\int_{t_{v_2}}^{t_2}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_1-t_i)S(\tau_2-t_{v_2})d\tau_2d\tau_1+\lambda^2\int_{t_{v_2}}^{t_2}\int_{t_{v_1}}^{t_1}H_{12}K_{\hat{u}\hat{u}}(\tau_1,\tau_2)S(\tau_1-t_{v_1})S(\tau_2-t_{v_2})d\tau_1d\tau_2\Bigg),\end{aligned}$$

where $H_{12}=H_R(t_1-\tau_1)H_R(t_2-\tau_2)$. On the basis of the numerical investigations provided for exemplary bridge it has been stated that the buffeting response quickly stabilizes and turns into the cyclostationary process with the cycle Δ when the wind is the regular series of long-duration gusts with stationary random fluctuations. Fig.4 presents exemplary results. The curves illustrate time histories of expected values of displacements $\tilde{w},\tilde{v}$ at the point P (Fig.2). The function describing the single wind gust is assumed here in the form

$$S(t-t_i)=[\sin(2\pi(t-t_i)/T-\pi/2)+1]/2.$$

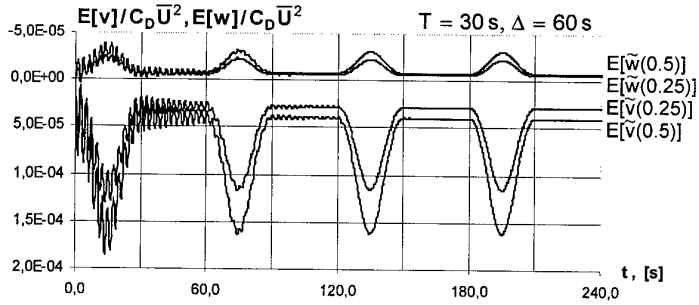


Fig. 4. Time histories of displacement expected values

2. References

1. BRYJA, D.: Spatial vibration of a suspension bridge under inertial moving load, Archives of Civil Engineering **30**, No. 4 (1984), 607-627 – in Polish.
2. BRYJA, D., ŚNIADY, P.: Spatially coupled vibrations of a suspension bridge under random highway traffic, Earthquake Engineering and Structural Dynamics **20**, (1991), 999-1010.
3. SIMIU, E., SCANLAN, R.: Wind effects on structures, John Wiley &Sons Inc. 1996.

Address: DR DANUTA BRYJA - Institute of Civil Engineering, Wrocław University of Technology, 50-370 Wrocław, Wyb. Wyspiańskiego 27, Poland.

DZIEDZIC, K. AND KURNIK, W.

Bifurcation of a Shaft under Magnetic Load

The paper is concerned with the effect of coexistence of self- and external excitations of slender rotating shafts. A symmetric edge movement is assumed to excite a simply supported and geometrically nonlinear shaft. The analysis is focused on the resonant behaviour for both stable and unstable static equilibrium. Computer simulation is applied to the equations of motion with special attention paid to periodic amplitude behaviour and irregular shaft motions for various excitation frequencies.

1. Introduction

Interest in the transverse dynamics of rotating shafts as elements transmitting power has recently increased as a result of applications of new materials (light and torsionally stiff thin-walled laminated tubes [1]) and new concepts of stabilization and control ("intelligent" shafts [1], shafts with piezoelectric resonance control [2], etc.).
It is well known that flexible rotating shafts are self-excited systems [3]. They show dynamic instability when the rotation speed exceeds a critical value greater than the first bending frequency. In general, shafts are externally excited, possibly by transverse edge movements. The resonant behaviour of such systems depends on the rotation speed modifying the modal frequencies of the system and its damping constants. At the flutter instability threshold under increasing rotation speed a self-excited limit cycle occurs developing in the postcritical speed zone and interacting with the externally excited vibration. Possible results of that interaction are studied in the following under assumption that a simply supported long-span rotating shaft is subjected to a unidirectional in-phase harmonic edge motion. The frequency of the kinematic excitation and the rotation speed are independent quantities, therefore both time flows and phase portraits of vibrations can be complicated. In the computer simulations special attention is paid to the resonant behaviour and to the regions of closely harmonic and irregular system responses in the domain of the excitation frequency.

2. Equations

A flexible simply supported beam possibly in form of a thin-walled angle-ply laminated tube is considered rotating and subjected to a harmonic transverse kinematic excitation, as shown in Fig 1.

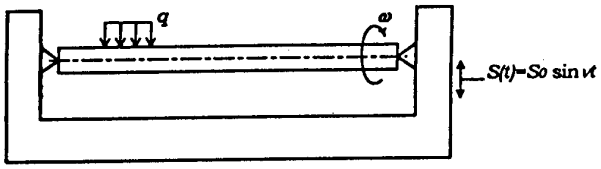


Fig. 1 Shaft configuration

In the Cartesian absolute cross-section center displacements, (U, V) and stress resultants M_Y, M_Z and N, the equations of motion are as follows (von Kárman's nonlinearity is assumed to be dominant)

$$\rho A(\Gamma_{,tt} + h^*\Gamma_{,t}) = M_{(Z,Y),xx} + (N\Gamma_{,x})_{,x} \tag{1}$$

where $\Gamma = (U, V)$, ρA denotes shaft mass per unite length, h^* is external damping and the stress resultants are expressed as follows

$$M_{Z,Y} = -EJ\left[(u, v)_{,xxxx} + \beta(u, v)_{,xxxxt} + / - \beta\omega(v, u)_{,xxxx}\right] \tag{2}$$

$$N = \frac{1}{2}EA(w_{,x})^2 + \beta EAw_{,x}w_{,xt} \tag{3}$$

where A,J denote cross-section area and moment of inertia, E,β are reduced material Young's modulus and its loss factor, respectively, w denotes shaft deflection and ω is the rotation speed.
Expressing absolute displacements (U, V) through the relative deflections $(u = U, v = V - s(t))$, introducing dimensionless variables and parameters, applying single-mode Galerkin's discretization, one obtains the following nondimensional ordinary real-time equations of motion

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -(h + \beta\omega_I^2)\dot{y} - \beta\omega_I^2\omega z - \gamma y(y^2 + z^2) - 2\beta\gamma y(y\dot{y} + z\dot{z}) \\ \ddot{z} &= -(h + \beta\omega_I^2)\dot{z} + \beta\omega_I^2\omega y - \gamma z(y^2 + z^2) - 2\beta\gamma z(y\dot{y} + z\dot{z}) - \ddot{S} - h\dot{S} \end{aligned} \tag{4}$$

where h, β, ω, γ and S represent external damping, internal friction, rotation speed, geometric nonlinearity and kinematic excitation, respectively.

3. Results of Simulation

Equations (4) were first analytically solved in the linearized form to roughly assess the effect of rotation and then numerically simulated in the wide range of speeds and frequencies. Subcritical resonant behaviour of the shaft for varying excitation frequency is shown in Fig. 2. Decrease and jump of amplitude as an effect of progressive geometric nonlinearity can be observed in comparison with the behaviour of the linearized system. The amplitude of the vertical shaft vibration as function of the excitation frequency is shown in Fig. 3 for postcritical rotation speeds. Broken lines correspond to minimum and maximum amplitudes of vibrations in the frequency regions in which flutter and externally excited vibration coexist.

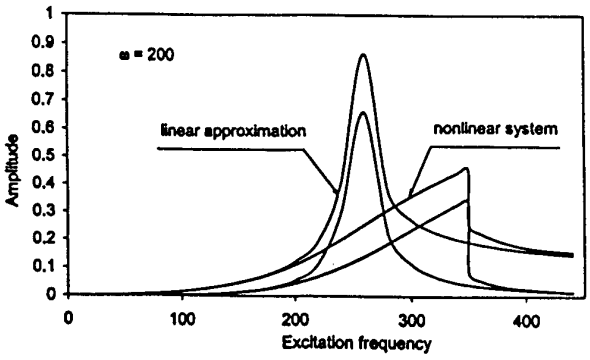


Fig. 2 Effect of nonlinearity in stable system

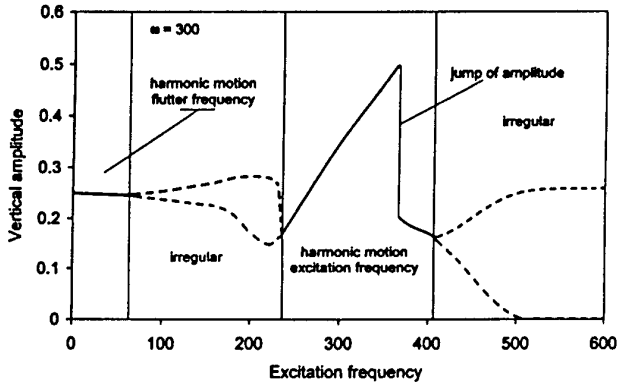


Fig. 3 Resonant behaviour in postcritical speed zone

4. Conclusions

Rotation considerably affects modal viscoelastic shaft properties. In the subcritical speed zone drop of modal damping results in increase of peak resonant amplitudes under varying excitation frequency (at the stability threshold linear resonant amplitudes tend to infinity). The effect of von Karman's nonlinearity is manifested by the jump phenomenon and shift of peak amplitudes. In the postcritical range of the rotation speed the interaction of self- and external excitations can result in closely harmonic or irregular motions. There are four regions of excitation frequencies: low - with dominating harmonic flutter vibrations, resonant - with dominating harmonic externally excited vibration, sub- and postresonant - in which flutter coexists with forced vibrations producing complicated irregular motions.

References

1 KURNIK, W., Antiwhirl Control of Shafts Using Thermoactive SMA Fibers, Proceedings of the Second International Symposium on Thermal Stresses and Related Topics, Rochester, 1997, 465-468.
2 PRZYBYLOWICZ, M. P., Torsional Vibration Control by Active Piezoelectric System, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 4, 33, 1995.
3 KIMBALL, A. L., Internal Friction Theory of Shaft Whirlings, General Electric Reviews, 17, 1924, 244-251.

Address: DZIEDZIC, K., KURNIK, W., Warsaw University of Technology, Narbutta 84, PL-02-524 Warszawa, Poland

ENGLEDER, T. AND VIELSACK, P.

The influence of regularization methods on the integration of stick-slip motion

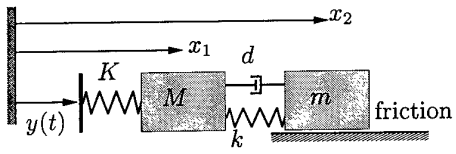
Two proposals for the regularization of contact problems with dry friction are found in the literature: smoothening of the friction law with a nonlinear damper and the use of elasto-plastic models. The regularization methods are compared with each other and numerical integration methods are valuated for a given mechanical system.

1. Introduction

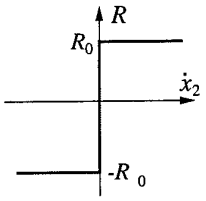
To describe non-smooth mechanical properties like impacts, intermittent constraints and friction one can distinguish between the exact solution, computed considering all partial states and the solutions obtained using an approximation, the regularisized model. Further on we will focus on the regularisation of Coulomb friction.

2. Mechanical system and regularisations for friction

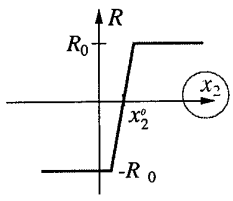
To discuss the influence of the different regularisations we choose the mechanical system like shown below with two degrees of freedom, consisting of two masses M and m, connected by the springs K and k and the damper d. The system is driven by the displacement $y(t)$. We distinguish between Coulomb friction (I), an elasto-plastic model (II) (like it is commonly used in finite element applications) and a nonlinear damper (III).



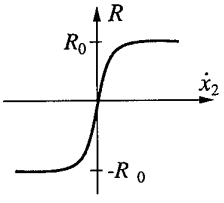
mechanical system



(I) Coulomb



(II) elasto-plastic



(III) nonlinear damper

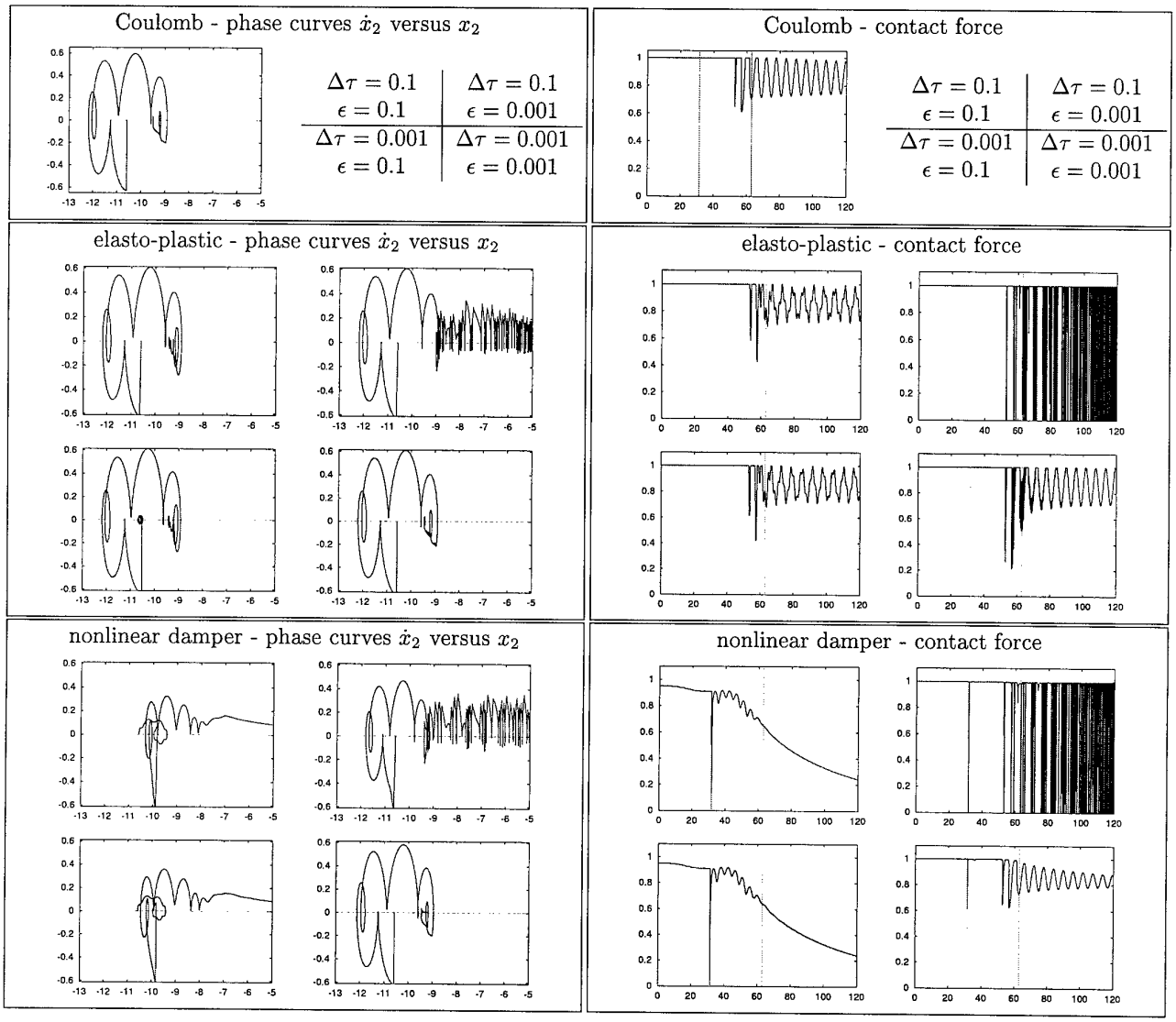
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K+k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ky(t) \\ -R_0 \ \mathrm{sgn}(\dot{x}_2) \end{bmatrix}$$

The differential equation for sliding in case of Coulomb friction is shown above. When the switching condition $\dot{x}_2(t_0) = 0$ ($t_0 = t, x_2^0 = x_2(t_0)$) gets active, the system reduces to a 1-DOF: $M\ddot{x}_1 + d\dot{x}_1 + (K+k)x_1 - kx_2^0 = Ky(t)$. As long as the switching condition $|H| = R_0$ for the passive contact force $H = d\dot{x}_2 + k(x_2^0 - x1)$ is inactive the system is the partial state of sticking. If $|H| = R_0$ gets active the switching decisions $H > 0$ and $H < 0$ have to be taken in account for the direction of sliding.
Next we use the elasto-plastic model (II). It has to be pointed out that the friction force is a function of the displacement x_2 and not of the velocity $\dot{x}_2$. With a contact stiffness c_T (the slope of the function) a contact force $H(t) = H(t - \Delta t) + c_T(x_2(t) - x_2(t - \Delta t))$ is computed for each time step Δt. As long as the switching decision $|H| < R_0$ holds, the system sticks and we consider the contact stiffness c_T in the second row and column of the stiffness matrix and the equilibrium $x_2^0 c_T = x_2(t_0)c_T - H(t_0)\,\mathrm{sgn}(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_2^0)$ in the second row of the right hand side. In the case of sliding the friction force is computed with $R_0\,\mathrm{sgn(H)}$. The system keeps its two degrees of freedom, two switching conditions but no switching decision has to be taken into account.
When using the nonlinear damper (III), a discrete damper $D = 2R_0/\pi \arctan(\dot{x}_2/\kappa)$ is added to the second mass. The slope of the function can be controlled by the value κ. No switching conditions and switching decisions have to be taken into account, the systems keeps its two degrees of freedom, only the second row of the right hand side is changed.

To obtain a reference solution we us a 5. order Runge-Kutta algorithmen with time step size control for the numerical integration of Coulomb friction and the transition states are computed using the Muller method. The regularisized models are integrated using the Newmark scheme with constant time steps and no exact computation of transitions times.

3. Example

The following example shows the results for the different regularisation methods for a constant decelerated drive $\ddot{y} = const < 0$ in comparison to the reference solution computed with Coulomb friction. Coordinates and time are non-dimensional, the friction force is normalised to $R_0 = 1$, $M/m = 1$, $K/k = 0.1$, internal damping $D = 0.001$, initial velocity $v = 1.257$, deceleration $a = -0.02$. The systems is disturbed at $\tau = 5 \cdot 2\pi$ with $\dot{x}_2 = 0$ and the drive is stopped at $10 \cdot 2\pi$. For the regularisation parameter $\epsilon = \frac{\sqrt{mk}}{\kappa R_0}$ (nonlinear damper) and $\epsilon = \frac{k}{c_T}$ (elasto-plastic) one obtains the results as shown below.



4. Conclusion

Both regularisation parameters and time step sizes can't be chosen independent from each other. Phase curves can be computed with relatively large regularisation parameters and large time steps as long as no structural errors occur. To obtain correct contact forces small regularisation parameters as well as small time steps are required. The regularisation with the nonlinear damper is preferred, because of the smooth description of the system, with the disadvantage of a drift during sticking or oscillating passive contact forces.

Addresses: PROF. DR.-ING. P. VIELSACK, DIPL.-ING. TH. ENGLEDER, University of Karlsruhe, Institute of Mechanics, Kaiserstr. 12, D-76128 Karlsruhe, Germany. E-mail: Mechanik@bau-verm.uni-karlsruhe.de

GAUSMANN, R., SEEMANN, W.

A Model for a Piezoelectric Transformer

Normally, the way to transform a voltage of a power supply is to use the electromagnetic effect. In applications, however, in which magnetic fields may not occur, this can also be done mechanically by a piezoelectric transformer. The piezoelectric transformer considered here consists of several parts. Three brass and two piezoceramic rods, that are glued together. The purpose of the system is to transform a determined input voltage to a determined ouput voltage with a high efficiency. Therefore, one of the piezoceramics is excited harmonically with a frequency close to a resonance frequency of the system. According to the electromechanical coupling in piezoceramics, the transformer oscillates with the excitation frequency. Due to the piezoelectric effect an electric displacement or an electric voltage is generated between the electrodes of the second piezoceramic. The amplitude of this output voltage depends on the geometries of the five sections and on the electric impedance Z which is connected to the electrodes of the second ceramic. A model for such a piezoelectric transformer is derived and the results of the theoretical model are compared with experiments.

1. Theoretical Model

The principle of the piezoelectric transformer is shown in Figure 1. It consists of five parts. The three brass and two piezoceramic rods are glued together. An ideal bonding is assumed, so that the influence of the glue is neglected. The mathematical model of the system is based on the equation of motion for longitudinal oscillations of a slender rod

$$\ddot{u}(x,t) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial T_3(x,t)}{\partial x} \tag{1}$$

with the density ρ and the axial tension $T_3(x,t)$. HOOKEs law and a separation for harmonic oscillations lead to an ordinary differential equation for the brass sections. To derive the equation of motion for the piezoceramic sections the linear constitutive equations [1]

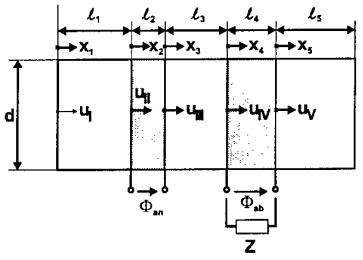


Figure 1: Model of the piezoelectric transformer

$$\begin{aligned} T_3 &= {}^{E}c_{33}S_3 - e_{33}E_3 \\ D_3 &= e_{33}S_3 + {}^{S}\epsilon_{33}E_3 \end{aligned} \tag{2}$$

with the axial strain S_3 and the piezoelectric constants for the uniaxial state of stresses are used. The vanishing divergence of the electric displacement div $D_3 = 0$ is used to get an equation for the partial derivation of the electric field E_3. This relation is inserted into the derivation of the first constitutive equation. A separation for forced harmonic vibration leads to an ODE for the piezoceramic sections of the form

$$\left({}^{S}c_{33} + \frac{e_{33}^2}{{}^{S}\epsilon_{33}}\right) U''(x) + \rho_P \Omega^2 U(x) = 0. \tag{3}$$

The solutions of the equations of motions for the five sections contain ten integration constants, that have to be determined by using the boundary and transition conditions between the five sections

$$\begin{aligned} U_I'(0) &= 0, \\ U_V'(\ell_5) &= 0, \\ U_i(\ell_i) &= U_{i+1}(0),\ i = I.IV, \\ T_{3_i}(\ell_i) &= T_{3_{i+1}}(0)\ i = I..IV. \end{aligned} \tag{4}$$

The transition conditions include the electric field both in the exciting ceramic and in the output ceramic. However, they are not explicitely known. Due to the vanishing divergence of the electric displacement div$D_3 = 0$, it is possible to integrate the partial derivative of the electric field with respect to the longitudinal coordinate x

$$E_3(x) = -\frac{e_{33}}{{}^{S}\epsilon_{33}} U'(x) + C_1. \tag{5}$$

In (5) C_1 denotes an integration constant. To determine this integration constant, a second integration of the electric field leads to the electric potential between the electrodes. The voltage amplitude at the exciting piezoceramic is known, so the integration constant C_1 and therefore the electric field can be calculated. The determination of the voltage amplitude at the second piezoceramic can be done, using Ohm's law, for the given external electric impedance between the electrodes. The current amplitude is a function of the electric displacement so that one obtains the following relation

$$\Phi_{ab} = ZI = Zj\Omega Q = Zj\Omega AD = Zj\Omega A(e_{33}S_3 + {}^{S}\epsilon_{33}E_3). \tag{6}$$

The transition and boundary conditions lead to an inhomogeneous system of algebraic equations, that can be solved even in analytical form. The solution depends on the geometrical and material parameters and on the external impedance Z. This impedance can be a resistance, a capacity, an inductivity or a combination of all.
In a further step, material damping is introduced by a complex YOUNGs modulus.

2. Theoretical Results

The theoretical model leads to an equation for the voltage gain. To reach a high transformation ratio the transformer obviously has to be excited near a resonance frequency. Naturally, the voltage gain and the eigenfrequencies of the transformer depend on the length of each area and on the external impedance Z. With a known output impedance it is possible to calculate the geometry of the transformer to reach a desired voltage gain and resonance frequency. In a wide range the voltage gain is a linear function of the cross sectional area of the transformer. The discussion of the influence of the length $l1..l5$ on the voltage gain would go too far at this place.

As an example the voltage gain as a function of an external resistance is shown in Figure 2. Obviously the voltage gain is increasing with the output impedance and zero if the output is short-circuited. The resonance frequency is decreasing with the resistance, due to the energy loss in the resitance which has an effect comparable with inner damping in the transformer.

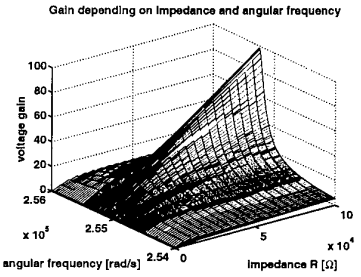


Figure 2: Voltage gain vs. output resistance and angular frequency

3. Comparison with Experiments

The comparison of the theoretical model with experiments is shown in Figure 3. Depending on the internal damping it is obvious, that the theoretical model shows the same results concerning the voltage gain in resonance. The reason for the difference between the resonance frequencies is probably due to the fact that in the theoretical model the transverse contraction is neglected, though the thickness to length ratios of the beam sections was > 1.

4. Conclusions

A model for a piezoelectric transformer was presented. The voltage gain can be expressed in an analytical form depending on the output impedance and the geometry of the transformer. The theoretical model agrees with the experiments very well in case of low input voltage.

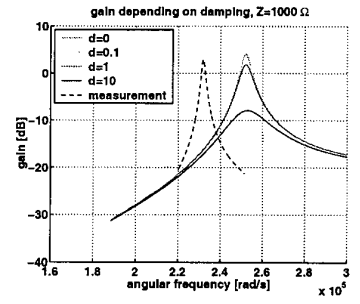


Figure 3: Comparison with measurements

Acknowledgements

Support of Dipl.-Ing. Thomas Sattel from University of Darmstadt for the measurements is gratfully acknowledged.

References

1 WILSON, O.B.: Introduction to Theory and Design of Sonar Transducers. Peninsula Publishing, Los Altos, USA (1988).

Addresses: DIPL.-ING. RAINER GAUSMANN, PROF. DR.-ING. W. SEEMANN, Department of Mechanical and Process Engineering, University of Kaiserslautern, P.O. Box 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany

HOCHRAINER M.J.

Dynamisches Verhalten von Bauwerken mit Flüssigkeitstilgern

Flüssigkeitstilger sind passive, Energie absorbende Teilsysteme, die in der Baudynamik zur Schwingungsreduktion einsetzbar sind. Ihre Wirkungsweise beruht auf einer schwingenden Flüssigkeitssäule deren Eigenfrequenz auf die Grundfrequenz des Gebäudes abgestimmt ist. Für analytische Untersuchungen wird der Flüssigkeitstilger als Einmasseschwinger modelliert, und dann in das Gebäudemodell einbezogen. Es wird das ebene Schwingungsverhalten von Bauwerken mit mehreren Flüssigkeitstilgern untersucht. Die Tilgerdimensionierung für optimales Schwingungsverhalten erfolgt durch Gütekriterien in die statistische Maßzahlen einfließen. Alle Resultate unterstreichen die effiziente Schwingungsreduktion durch die Anwendung dieser neuen, innovativen Schwingungstilger, die sich durch einfachen und kostengünstigen Aufbau auszeichnen.

1. Grundgleichungen

Der untersuchte Flüssikeitstilger (TLCD - Tuned Liquid Column Damper) besteht aus einem, mit Flüssigkeit gefülltem U-Rohr welches im i-ten Stockwerk eines Gebäudes installiert ist. Durch die Stockwerksbewegung beginnt der Flüssigkeitsfaden zu schwingen. Der schematische Aufbau sowie Geometrieabmessungen sind in Fig. (1) gegeben. Die Bewegungsgleichung des Flüssigkeitsschwingers ergibt sich zu, siehe [1],

$$\ddot{y} + 2\zeta_a \omega_a \dot{y} + \frac{\delta}{2L_{eff}}|\dot{y}|\dot{y} + \omega_a^2 y = -\frac{B}{L_{eff}}\left(\ddot{w}_i + \ddot{w}_g\right),\ |y| \le H,\ \omega_a^2 = \frac{2g}{L_{eff}},\ L_{eff} = \left(2H + B\frac{A_H}{A_B}\right). \tag{1}$$

Dabei bezeichnen y, L_{eff}, g, $\ddot{w}_i$ und $\ddot{w}_g$ die vertikale Spiegelkoordinate, die effektive Flüssigkeitslänge, siehe z.B. [2] p. 493, die Fallbeschleunigung, die relative Stockwerks- bzw. die absolute horizontale Bodenbeschleunigung. Schwingungsenergie wird in diesem System durch viskose und turbulente Dämpfung dissipiert, deren entsprechende Terme durch $2\zeta_a\omega_a\dot{y}$ und $\delta/2L_{eff}|\dot{y}|\dot{y}$ gegeben sind, siehe [2] p.621. Dabei repräsentiert ζ_a den viskosen Dämpfungskoeffizienten und die durch eine Drossel bewirkte nichtlineare Turbulenzdämpfung wird durch den Verlustfaktor δ beschrieben, welcher in der nachfolgenden linearen Untersuchung in eine äquivalente viskose Dämpfung eingerechnet ist. Die ebenen Bewegungsgleichungen eines *n*-stöckigen Gebäudes mit *m* Schwingungstilgern sind durch

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\mathbf{w}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{w}} + \mathbf{K}\mathbf{w} = -\mathbf{M}\mathbf{e}\ddot{w}_g - \sum_{i=1}^{m} F_i \mathbf{s}_i, \\ &F_i = \rho A_H\left(\ddot{w}_i + \ddot{w}_g\right)\left(2H + \frac{A_B}{A_H}B\right) + \rho\ddot{y}A_H B,\ \mathbf{s}_i = [0\cdots\underset{\uparrow}{1}\underset{j}{}0\cdots0]^T,\ \mathbf{e} = [1,\cdots,1]^T, \end{aligned} \tag{2}$$

gegeben, wobei $\mathbf{w}$ die absoluten, auf das Fundament bezogenen Stockwerksverschiebungen darstellt. $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ und $\mathbf{K}$ sind die Massen-, Dämfungs- und Steifigkeitsmatrix. ρ ist die Flüssigkeitsdichte und A_B, A_H sind Rohrquerschnitte. $\mathbf{s}_i$ ist ein Geometrievektor der festlegt in welchem Stockwerk j der i-te Tilger installiert ist. In [1] ist gezeigt wie man Glgn. (1) und (2) in ein lineares Zustandsraummodell überführt das durch den Zustandsvektor $\mathbf{z} = \left[\mathbf{w}^T\ \mathbf{y}^T\ \dot{\mathbf{w}}^T\ \dot{\mathbf{y}}^T\right]^T$ beschrieben wird,

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{z} + \mathbf{e}\ddot{w}_g,\ \mathbf{A}_r = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}), \tag{3}$$

wobei $\mathbf{A}_r$ die Systemmatrix des gesamten Systems darstellt. Alle Tilgerparameter sind in der diagonalen Parametermatrix $\mathbf{R}$ zusammengefaßt mit der über die Eingangsmatrix $\mathbf{B}$ die Dynamik des Systems in geeigneter Weise beeinflußt werden kann. Die Erdbebenanregung wird über den Störvektor $\mathbf{e}$ in das System eingeleitet. Im Unterschied zu Entwurfsmethoden mit aktiven Stellgliedern muß bei passiven Systemen darauf geachtet werden, daß der Parameterbereich in der Tilgermatrix $\mathbf{R}$ auf positive Werte eingeschränkt ist, und, wegen der gewählten Tilgeranordung, nur wenige Zustandsgrößen in die Rückkopplung einfließen.

2. Gütefunktional und Optimierung der Tilgerparameter

Für jeden Optimierungsvorgang muß ein Gütefunktional definiert sein, das die Qualität der Parameterwahl widerspiegelt und bezüglich dessen das Systemverhalten verbessert werden soll. Wird die durch Erdbebenanregung gegebene Bodenbeschleunigung durch stationäres weißen Rauschen approximiert (Mittelwert $m_q = 0$, Intensität q), siehe z.B. [3], so ist für asymptotisch stabile Systeme die stationäre stochastische Antwort durch den Mittelwertvektor $\mathbf{m}_z(t \to \infty) = 0$ und der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_z(t \to \infty) = \mathbf{P}$ vollständig charakterisiert. Im Besonderen erhält man die Standardabweichung $\sigma_{zi}(t) = \sqrt{\mathbf{P}_{zii}}$ der i-ten Zustandsgröße aus dem i-ten Diagonalelement der Matrix $\mathbf{P}$. Dabei genügt die Kovarianzmatrix der Ljapunov'schen Matrizengleichung

$$\mathbf{A}_r\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_r^T + \mathbf{Q} = \mathbf{0}\,, \quad \mathbf{Q} = q \cdot diag(\mathbf{e})\,, \tag{4}$$

$\mathbf{Q}$ repräsentiert die Intensitätsmatrix der Erregung. Ein geeignetes Gütefunktional ist dann z.B. durch $J_\sigma = \sum_{i=1}^{m+n} w_i \sqrt{\mathbf{P}_{zii}}$, als gewichtete Summe der Varianzen der Zustandsgrößen gegeben, wobei über die Wahl der Gewichtungsfaktoren w_i die Optimierung gesteuert werden kann. So wie bei der Lösung der Ljapunovgleichung (4), kann auch beim iterativen Prozeß der Minimierung von J_σ auf effiziente Verfahren der numerischen Mathematik zurückgegriffen werden, wobei eine geschickte, mechanisch begründete Wahl der Startwerte zu rascher Konvergenz und zu guten, aber trotzdem meist nur suboptimalen Lösungen führt.

3. Beispiel

Das vorgestellte Verfahren wird am Beispiel eines vierstöckigen ebenen Gebäudemodells mit 4 Schwingungstilgern angewendet, wobei jeweils 2 Tilger im 2. und 4. Geschoß installiert sind. Das Masseverhältnis zwischen Gebäude und Tilger beträgt 2%. Alle starren Geschosse haben konstante Masse und sind durch Stiele konstanter Steifigkeit miteinander verbunden, wodurch sich die Eigenfrequenzen zu 1.0, 2.8, 4.4 5.4 Hz ergeben. Alle Dämpfungskoeffizienten betragen 1% und für die Startwerte der Eigenfrequenzen gilt, daß für die beiden Tilger im obersten Geschoß die Grundfrequenz, und für die verbleibenden Tilger die zweite Eigenfrequenz gewählt wird. Die Parameteroptimierung erfolgt numerisch mit einem Gradientenverfahren, das schon nach wenigen Iterationen auf ein lokales Minimum führt. In das für die Optimierung verwendete Gütefunktional J_σ fließen die Zustandsgrößen des Gebäudes mit konstanter Gewichtung ein. Fig. (2) zeigt den Amplitudenfrequenzgang der Summe der Gebäudezustandsgrößen w_i. Man erkennt deutlich, daß jeweils zwei Tilger die Resonanzüberhöhungen der niedrigsten Eigenfrequenzen reduzieren, während die höheren Eigenschwingungen unverändert bleiben. Durch die Wahl der Startwerte kann aber sehr genau bestimmt werden welcher Tilger auf welche Eigenschwingung wirken soll.

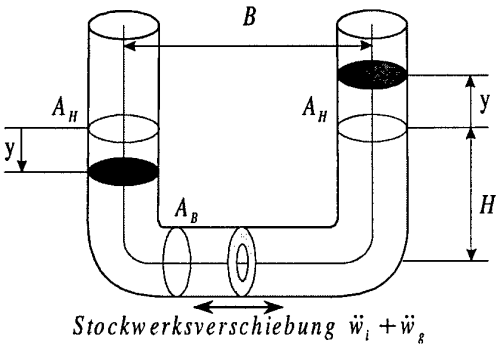


Abb.1: Schematische Darstellung des Flüssigkeitstilgers

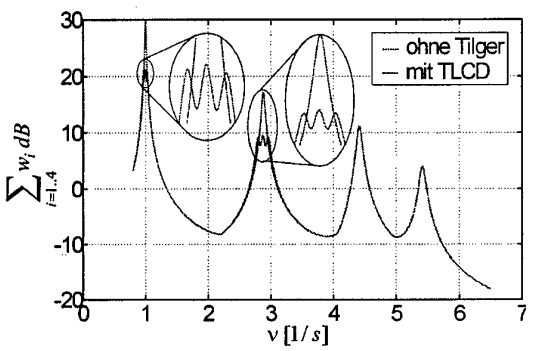


Abb.2: Amplitudenfrequenzgang mit und ohne Tilger

4. Literatur

1. HOCHRAINER M.J., C. ADAM; R. HEUER, F. ZIEGLER: Application of Tuned Liquid Column Dampers for Passive Structural Control, ICSV 2000, 4.-7. Juli 2000,Garmisch-Partenkirchen
2. ZIEGLER F., Mechanics of Solids and Fluids, 2nd. reprint of 2nd edition, Springer, New York 1998
3. MÜLLER P.C.; W. O. SCHIEHLEN: Lineare Schwingungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1976

Anschrift: M.J. HOCHRAINER, Inst. f. Allgemeine Mechanik, TU-Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10 /E201, A-1040 Wien, Austria

HORTEL, M.; ŠKUDEROVÁ, A.

Die Greensche Funktion in der Analyse von nichtlinearen parametererregten Systemen

Mathematisch physikalische Modelle gewisser Klassen von mechanischen Systemen mit kinematischen Bindungen – Zahnrädern – führen bei dynamischen Untersuchungen auf die Lösung von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit zeitlich veränderlichen Koeffizienten. Zur analytischen Bestimmung und Analyse der Systemeigenschaften von solchen komplizierten Systembewegungsgleichungen zeigte sich als Vorteilhaft ein Approximationsverfahren auf die zur Differentialrandwertaufgabe äquivalenten Integrodifferentialgleichungen anzuwenden. Das Schwergewicht liegt hierbei in der Konstruktion der lösenden Kerne in Form von Greenschen Funktionen.

1. Einleitung

Gegeben sei ein nichtlineares System von Bewegungsgleichungen

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) \equiv \mathbf{M}\mathbf{v}'' +_1 \mathbf{C}(H)_k\mathbf{v} = \mu\mathbf{V}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}, \ldots, H, \alpha, \tau^*), \tag{1}$$

die das Schwingungsverhalten z.B. in einem mechanischen System mit kinematischen Bindungen – Zahnrädern beschreiben. Hierbei ist $\mathbf{v}$ der n-dimensionale Vektor der Systembewegungen, $\mathbf{M}$ die Matrix der Massen- und Trägheitskräfte, ${}_1\mathbf{C}(H)_k$ die reguläre (n,n) Matrix der linearen Rückstellkräfte und $\mathbf{V}$ ein Funktionaloperator, der sämtliche Parameterfunktionen, Nichtlinearitäten (einschließlich der Parameternichtlinearitäten), Dämpfungen, Fremderregungen usw. beinhaltet. H ist die Heavisidesche Funktion, die es ermöglicht starke Nichtlinearitäten, wie z.B. das technologisch bedingte Zahnspiel in (1) in kompakter Form zu beschreiben. Ferner ist α die Frequenzvariation, μ der kleine Parameter und τ^* die dimensionslose Zeit. Striche bedeuten Ableitungen nach τ^*. Die zu (1) zugehörigen Rand- bzw. Periodizitätsbedingungen sind

$$N_{n1} \equiv \mathbf{v}(\tau^* + 0) = \mathbf{v}(\tau^* + 2\pi), \quad N_{n2} \equiv \mathbf{v}'(\tau^* + 0) = \mathbf{v}'(\tau^* + 2\pi). \tag{2}$$

Die Konstruktion des lösenden Kernes – der Resolvente der Integrodifferentialgleichung kann im allgemeinen für zwei Fälle der Rückstellmatrizen des Hauptteils von (1) durchgeführt werden.

2. Symmetrische Rückstellmatrizen

Für *symmetrische* Rückstellmatrizen ${}_1\mathbf{C}(H)_k = \|c_{pq}\|_1^n$, $c_{pq} = c_{qp}$, läßt sich stets eine reguläre Transformationsmatrix $\mathbf{\Phi}$ und somit die Transformation $\mathbf{v} = \mathbf{\Phi}\tilde{\mathbf{v}}$ finden, die den Hauptteil vollständig entkoppelt, führt die homogene Gleichung $\mathbf{F}(\mathbf{v}) = 0$(0 ... Nullvektor) auf Normalkoordinaten $\tilde{\mathbf{v}}$ und simultan die Diagonalmatrix $\mathbf{M} = \|m_{pq}\delta_p^q\|_1^n$ auf die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ sowie die symmetrische Matrix ${}_1\mathbf{C}(H)_k$ auf die Diagonalmatrix ${}_1\tilde{\mathbf{C}}(H)_k = \|\lambda_{pq}\delta_p^q\|_1^n$ über. Wir setzen voraus, daß das zu (1) homogene System $\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{v}}) = 0$ unter den Randbedingungen (2) nicht identisch verschwindende, zu den Eigenwerten $\lambda_{nm}(H) = 0$ zugehörige Lösungen $\overline{\mathbf{v}}_0 = const.$ hat, die durch $\int_0^{2\pi} \overline{\mathbf{v}}^2(\tau^*)d\tau^* = 1$ normiert seien, sowie zu den Eigenwerten $\lambda_{nm}(H) = m^2 \quad (m = 1, 2, \ldots)$ zweifache Lösungen $\overline{\mathbf{v}}_m(\tau^*), \overline{\mathbf{w}}_m(\tau^*)$ besitzt. Um das zur Differentialrandwertaufgabe (1),(2) äquivalente Integrodifferentialgleichungssystem wie für die *regulären*, d.h. Nichtresonanzfälle $\lambda_n(H) \neq M_k^2$ als auch für die *singulären*, d.h. Resonanz- oder *Verzweigungsfälle* $\lambda_n(H) = M_k^2$ $(n = 1, 2, \ldots N; k = 1, 2, \ldots p \leq n; M_k = 1, 2, \ldots)$ der Systemabstimmung ermitteln zu können, wird auf die Konstruktion der Resolvente die E.Schmidtsche Kernzerspaltungsmethode [1],[2], übertragen. Diese Methode ermöglicht sämtliche singulären Lösungen – Verzweigungen aus dem lösenden Kern abzuspalten. Mit dem Kroneckersymbol – $\delta_a^b = 1$ für $a = b$, $\delta_a^b = 0$ für $a \neq b$ und $\vartheta_a^b = 1 - \delta_a^b$ $(a = \lambda_i(H), b = M_k)$ – kann dann das zu (1),(2) äquivalente reziproke Gleichungssystem in der Form [1]

$$\tilde{v}_n(\tau^*) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\bar{v}_{no}^2}{\lambda_n(H)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{v}_{nm}(\tau^*)\bar{v}_{nm}(\xi) + \bar{w}_{nm}(\tau^*)\bar{w}_{nm}(\xi)}{\vartheta_{\lambda_n(H)}^{\lambda_{nm}(H)}\ \lambda_n(H) - M_k^2} \right]$$

$$\times \tilde{V}_n(\tilde{v}'', \tilde{v}', \tilde{v}, H, \alpha, \xi)d\xi + \sum_{i=1}^{p} \delta_{\lambda_i(H)}^{M_k^2}\ \left(r_{2i-1}\bar{v}_{nM}(\tau^*) + r_{2i}\bar{w}_{nM}(\tau^*)\right), \tag{3}$$

geschrieben werden, wobei der Klammerausdruck $[\frac{\bar{v}_{no}^2}{\lambda_n(H)} + \sum_{m=1}^{\infty} \dots]$ den lösenden Kern – die *leere* Greensche Resolvente $R_n(\lambda;\tau^*,\xi)$ im erweiterten Sinne bildet. $\lambda, \overline{v}, \overline{w}$ sind die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des entkoppelten Hauptteils von (1), r_{2i-1}, r_{2i} die Verzweigungsparameter ($i \dots$ Zahl der p – Pole – Resonanzen), die aus den in Vektorform geschriebenen *Verzweigungsgleichungen*

$$\begin{pmatrix} r_{2i-1} \\ r_{2i} \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} \widetilde{v}_n(\xi) \begin{pmatrix} \bar{v}_{nM}(\xi) \\ \bar{w}_{nM}(\xi) \end{pmatrix} d\xi$$

ermittelt werden.

3. Unsymmetrische Rückstellmatrizen

Bei *unsymmetrischen* Rückstellmatrizen des Hauptteils von (1) kann eine im vorherigen Abschnitt angedeutete Hauptachsentransformation, zu Schwierigkeiten führen Die Auflösung der Integrodifferentialgleichungen soll deshalb mit nichtentkoppelten Hauptteil und im ursprünglichen Koordinatensystem skizziert werden. Im Gegenteil zum vorherigen Abschnitt, ist für ${}_1\mathbf{C}(H)_k$ unsymmetrisch jetzt die Ausgangsgleichung der Form

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{V}(\mathbf{v}'', \mathbf{v}', \mathbf{v}, \dots, H, \alpha, \tau^*) - {}_1\,\mathbf{C}(H)_k \mathbf{v}. \tag{4}$$

Die homogene Gleichung zu (4) $\mathbf{v}'' = 0$ ($0 \dots$ Nullvektor) hat die den Randbedingungen (2) genügende normierte und im Bereich $\langle 0; 2\pi\rangle$ nicht identisch verschwindende Lösung $\overline{\overline{\mathbf{v}}}_h = (2\pi)^{-1/2}\mathbf{e}$ ($\mathbf{e} \dots$ Einheitsvektor). Die inhomogene Gleichung (4) ist wegen der Lösung $\overline{\overline{\mathbf{v}}}_h = const.$ von $\mathbf{v}'' = 0$ und (2) dann und nur dann lösbar, wenn die rechte Seite von (4) zu $\overline{\overline{\mathbf{v}}}_h$ orthogonal steht. Auf Grund der Kneserschen *quellenmäßigen* Darstellung gewisser Integrale [4], der Entwicklungssätze von D.Hilbert und E.Schmidt nach den normierten Eigenfunktionen $\overline{\overline{v}}_{\pm m} = \overline{\overline{v}}_h \exp(\pm im\tau^*)$ des Hauptteils von (1), von $G(\xi,\tau^*)$ [1],[3] folgt nach längerer Rechnung die zu (1),(2) äquivalente Integrodifferentialgleichung

$$\mathbf{v}(\tau^*) = \int_0^{2\pi} R_{\vartheta_m^{M_k}}(m;\xi,\tau^*)\mathbf{V}\{\mathbf{v}'', \dots, H, \alpha, \xi\}\, d\xi + {}_1\,\mathbf{C}(H)_k \sum_{m=1}^{p} \delta_m^{M_k} \frac{\mathbf{r}_m\, \overline{\overline{v}}_{-m}(\tau^*) + \mathbf{s}_m\, \overline{\overline{v}}_m(\tau^*)}{m^2(2\pi)^{\frac{1}{2}}}, \tag{5}$$

die den regulären als auch singulären, d.h. Verzweigungsfall zusammenfaßt. Der lösende Kern – die *leere* Greensche Resolvente hat die Gestalt

$$R_{\vartheta_m^{M_k}}(m;\xi,\tau^*) = (2\pi_1\mathbf{C}(H)_k)^{-1} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\overline{\overline{v}}_m(\xi)\, \overline{\overline{v}}_{-m}(\tau^*) + \overline{\overline{v}}_{-m}(\xi)\, \overline{\overline{v}}_m(\tau^*)\right)$$
$$\times m^{-2}(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left[\mathbf{E} - \vartheta_m^{M_k} \left({}_1\mathbf{C}(H)_k - m^2\mathbf{E}\right)_1^{-1} \mathbf{C}(H)_k\right]. \tag{6}$$

Die Verzweigungsparameter $\mathbf{r}_m, \mathbf{s}_m$ sind allgemein komplexe Vektoren, die das Resonanzverhalten des Systems in allen Verzweigungspunkten $m = M_k$ ausdrücken und die aus den *Verzweigungsgleichungen* [1],[3] berechnet werden können. Aus dem Vergleich der Gleichung (5) und der Gleichung (3) für ${}_1\mathbf{C}(\mathbf{H})_\mathbf{k}$ symmetrisch ist ersichtlich, daß (5) in $R_{\vartheta_m^{M_k}}(m;\xi,\tau^*)$ eine inverse Matrix $\vartheta_m^{M_k}\left({}_1\mathbf{C}(H)_k - m^2\mathbf{E}\right)^{-1}$ enthält. Durch die Bedingung $\vartheta_m^{M_k} \neq 0$ wird diese Matrix bei reiner regulären Systemabstimmung zur vollen Geltung gebracht. Im Gegenteil, sie verschwindet ganz bei n-facher Resonanz.

Der bei Systemen mit unsymmetrischen Rückstellkraftmatrizen formelle Nachteil mit inversen Matrizen zu arbeiten, wird bei symmetrischen Rückstellkraftmatrizen durch größeren Arbeitsaufwand bei der Einführung von Normal- bzw. Quasinormalkoordinaten ausgewogen.

4. Literatur

1 HORTEL, M.:Integrodifferentialgleichungen in der Analyse von Phänomenen in nichtlinearen parametererregten Systemen. In Festtagskasette TU Wien, Kolloquium/Symposium Recent Advances in Mechanics of Solids and Fluids 1997, Bd.1-3.
2 SCHMIDT, G.:Parametererregte Schwingungen, Berlin 1975.
3 HEIMANN, B.:Berechnung stationärer Schwingungen eines nichtlinearen Schwingungssystem ohne vorherige Hauptachsentransformation. Wiss.Z.Techn. Univers. Dresden, 20 (1974) 3.
4 KNESER, A.:Die Integralgleichungen, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1922.

Addresses: DR.-ING., DRSC. MILAN HORTEL, DIPL.-ING. ALENA ŠKUDEROVÁ, Institut für Thermomechanik, Tschechische AdW, Dolejškova 5, CZ–18200 Prag 8.

INSPERGER, T., STÉPÁN, G.

Stability of Retarded Systems with Parametric Excitation

The paper presents a method to investigate the stability of delayed, time periodic dynamical systems. The key step of the method is a special kind of distributed delay approximation of the discrete time-delay. As an example, the stability chart of the delayed Meissner equation is determined.

1. Basic problem

In many fields of science and technology, phenomena can only be described by systems involving time delays. The stability investigation of these systems is a well known problem of dynamical systems theory. From mathematical view point, there exist some general stability criteria (see [1]), but it is still hard to construct a stability chart in the space of the system parameters. For autonomous systems, several stability charts are presented in [2], but they can not be used for nonautonomous cases. This paper provides a novel method for stability analysis of time periodic delayed systems.

One of the most simple time periodic delay-differential equation (DDE) is the delayed Meissner equation:

$$\ddot{x}(t)+a(t)x(t)=bx(t-\tau), \qquad a(t)=a(t+T), \qquad a(t)=\begin{cases}\delta+\varepsilon & \text{if} \quad 0\le t<T/2\\ \delta-\varepsilon & \text{if} \quad T/2\le t<T\end{cases}. \tag{1}$$

Our goal is to determine the stability of the zero solution as a function of the parameters δ, ε and b. Although, there are exactly known stability charts for the special cases $b=0$ or $\varepsilon=0$ (see Fig. 1), there is no method for the determination of the exact stability charts in general cases. In Fig. 1, S denotes the stable domains and U denotes the unstable ones. We are going to determine, how the special stable triangles of autonomous DDE will change for various $\varepsilon\neq 0$ values.

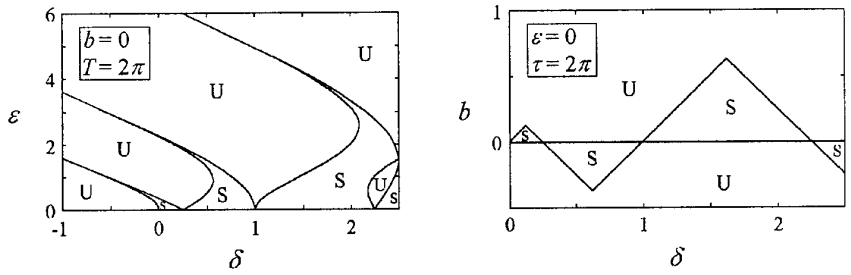


Figure 1: Stability charts for non-autonomous non-delayed ($b=0$) and autonomous delayed ($\varepsilon=0$) cases

2. Stability investigation

Time-periodic delay systems can either be approximated by a series of autonomous DDEs, or by series of time-periodic ordinary differential equations. We choose the latter way by approximating the delayed term as follows:

$$x(t-\tau)\approx\int_{-\infty}^{0}x(t+\vartheta)w_n(\vartheta)d\vartheta, \qquad w_n(\vartheta)=(-1)^n\frac{n^{n+1}}{\tau^{n+1}n!}\vartheta^n\exp\left(\frac{n\vartheta}{\tau}\right), \tag{2}$$

where $w_n(\vartheta)$ is a special weight function series coming from the product of a polynomial and an exponential expression. In [3], it is proved that the integral expression in (2) converges to $x(t-\tau)$ as n tends to infinity. The approximation (2) with a fixed finite n in the equation (1), and the introduction of the new variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n+3}$

yields a finite $(n+3)$ dimensional system of differential equations with a T periodic coefficient matrix:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t), \tag{3}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n+3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a(t) & 0 & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n/\tau & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n/\tau & -1 \\ (-1)^n\,(n/\tau)^{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n/\tau \end{bmatrix}$$

The linear system (3) is asymptotically stable, if and only if all the characteristic multipliers denoted by μ_j $(j = 1, 2, \ldots\, n+3)$ are in modulus less than one, that is, they are inside the unit circle of the complex plane (see [4]). In general, the characteristic multipliers cannot be calculated in closed form. However, the coefficient matrix $\mathbf{A}(t)$ in (3) is piecewise constant in accordance with the function $a(t)$. Let us denote the constant matrices by $\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{A}_2$ in the intervals $[0, T/2)$ and $[T/2, T)$, respectively. Then, the characteristic multipliers are the eigenvalues of the principal matrix $\mathbf{C} = \exp(\mathbf{A}_2 t_2)\exp(\mathbf{A}_1 t_1)$. The stability chart of the system (3) can be given by the investigation of the relevant eigenvalue of the principal matrix for fixed parameters δ, ε and b. The stability charts were created by point by point investigation of the parameter plane (see 2). The dotted domain is stable, the pure white is unstable.

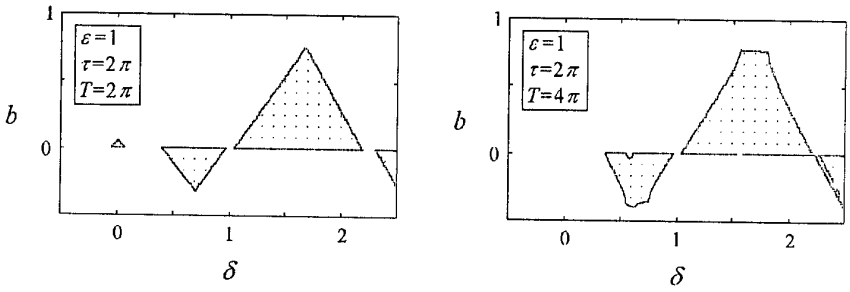


Figure 2: Stability charts for the delayed Meissner equation

The precision of our stability analysis depends on δ for a constant n: the smaller δ is, the more accurate the result is. In case of $\varepsilon = 0$, with $\delta < 2$, the $n = 120$ approximation gives already an acceptable stability chart with errors under 5% relative to the exactly known stability limit.

Note, that in the case $\tau = T = 2\pi$, the stability limits remain lines as we can prove this. For the $\tau \neq T$ case the stability limits are not lines any more. The method can be used for more complicated (damped, higher dimensional) systems also with more time periodic terms, and it can be applied for problems like the stability of milling (see [5]).

Acknowledgements

This research was supported by the Hungarian National Science Foundation under grant no. OTKA T030762/99, and the Ministry of Education and Culture grant no. MKM FKFP 0380/97.

3. References

1 : Hale, J.K., Lunel, S.M.V.: *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer-Verlag (1993) New York.
2 : Stépán, G.: *Retarded dynamical systems*, Longman (1989) Harlow.
3 : Fargue, D., 1973, "Réducibilité des systémes héréditaires á des systémes dinamiques", *C. R. Acad. Sci. Paris* **277B** pp. 471-473.
4 : Farkas, M.: *Periodic Motions*, Springer-Verlag (1994) New York
5 : Insperger, T., Stépán, G.: Vibration Frequencies in High-Speed Milling Processes - or A Positive answer to Davies, Pratt, Dutterer and Burns, *Submitted to Journal of Manufacturing Science and Engineering* (2000).

Address: Prof. G. Stépán, T. Insperger, Budapest University of Technology and Economics, Department of Applied Mechanics, H-1521 Budapest, Hungary

E. KREUZER, M. WENDT

Kentern als Verzweigungsproblem

Zur besseren Vorhersage des Seegangsverhaltens von Schiffen wird die Schiffsbewegung mit Methoden der Nichtlinearen Dynamik untersucht. Die Bewegung ist von Systemparametern wie z.B. der Wellenhöhe abhängig. Die Stabilitätsgrenzen der aufrechten Schiffsbewegung im Parameterraum sind durch Verzweigungen gekennzeichnet. Um sie systematisch bestimmen zu können, wird hier ein numerisches Verfahren – die Pfadverfolgungsmethode – auf ein komplexes numerisches Modell eines Containerschiffs angewendet.

1. Problemstellung

Jährlich gehen auf den Weltmeeren ca. 100 Schiffe mit über 500BRZ verloren. Die Ursachen dafür sind vielfältig, aber ein großer Anteil der Verluste ist auf schlechte Wetterbedingungen zurückzuführen. Dazu gehört auch das Kentern bei starkem Seegang. Zum Teil wurden bei den Verlusten die bestehenden Sicherheitsbestimmungen nicht eingehalten, zum Teil kentern Schiffe, obwohl die Vorschriften eingehalten wurden, weil diese den dynamischen Charakter des Kentervorgangs nicht ausreichend berücksichtigen. Dies war der Anlaß, eine Methode zur Bewertung von Simulationsmodellen mit Berücksichtigung der hydrostatischen und hydrodynamischen Kräfte zu untersuchen.

2. Modell

Das Simulationsmodell beschreibt die Bewegungen des als starr betrachteten Schiffskörpers in seinen sechs Starrkörperfreiheitsgraden, [3]. Die Bewegungsgleichungen werden unter Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik aufgestellt. Die hydrostatischen und hydrodynamischen Kräfte, Bild 1a, sind nichtlinear von den Bewegungsgrößen abhängig. Die hydrodynamischen Kräfte werden aus der Überlagerung von drei Anteilen bestimmt: 1. Kräfte aus der ungestörten einfallenden Welle (Froude-Krylov-Kräfte), 2. Kräfte aus der Störung der einfallenden Welle durch den Schiffskörper (Diffraktionskräfte) und 3. Kräfte, die bei der Abstrahlung von Wellen entstehen (Abstrahlungskräfte). Die Abstrahlungs- und Diffraktionskräfte werden zunächst zweidimensional im Frequenzbereich für eine Reihe von Querschnitten (Spanten) berechnet und später in Schiffslängsrichtung integriert. Weil diese Kräfte frequenzabhängig sind, werden sie durch ein frequenzabhängiges gebrochenrationales Polynom approximiert und dann mit einer inversen Laplace-Transformation in den Zeitbereich transformiert. Dann können sie in die Bewegungsgleichungen einbezogen werden. Durch die Transformation des Polynoms entstehen abhängig vom Grad des Polynoms zusätzliche Zustandsgleichungen mit den Zustandsgrößen s_i. Die Transformation wird spantweise durchgeführt, so daß eine große Anzahl von zusätzlichen Zustandsgleichungen und Zustandsgrößen entsteht. Weil die Kräfte nichtlinear von der Lage des Schiffs abhängig sind, werden die Polynomkoeffizienten durch Umschalten dem momentanen Rollwinkel und der momentanen Tauchung der Spanten angepaßt.

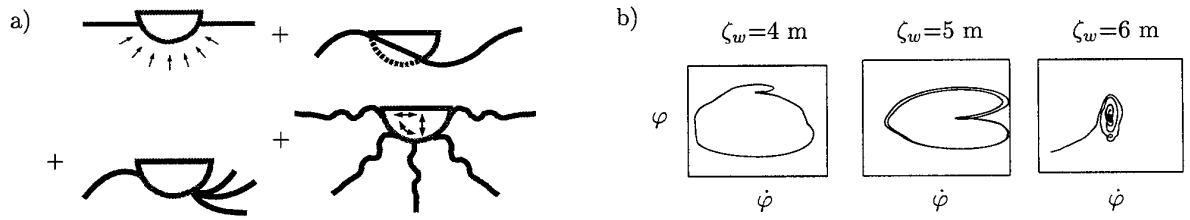


Bild 1: a) Überlagerung von Hydrostatik-, Froude-Krylov-, Diffraktions- und Abstrahlungskräften, b) Phasenportrait (φ über $\dot{\varphi}$) der Rollbewegung (Rollwinkel φ) bei schräg achterlicher See ($\mu = 30°$) und geregeltem Gierwinkel bei den Wellenhöhen ζ_w = 4 m, 5 m, 6 m

3. Simulation

Mit dem beschriebenen Modell wurde die Bewegung eines Containerschiffs in hohen regelmäßigen Wellen simuliert, [1]. Dabei zeigte sich, daß bei Variation des Kontrollparameters Wellenhöhe kurz unterhalb von einer Wellenhöhe,

die zum Kentern führt, Verzweigungen im Bewegungsverhalten auftreten. Bild 1b zeigt die Phasenportraits der Rollbewegung bei drei verschiedenen Wellenhöhen, wenn das Schiff im schräg achterlichen Seegang mit eine Geschwindigkeit von 11 m/s voranfährt. Die Bewegungen bei 4 m und 5 m Wellenhöhe sind periodisch. Bei 4 m ist die Bewegungsperiode gleich der Auftreffperiode, bei 5 m ist die Bewegungsperiode doppelt so groß: Erst nach zwei Umläufen ist wieder der gleiche Punkt im Phasenportrait erreicht. Zwischen der ein- und der zweiperiodischen Bewegung liegt eine Verzweigung. Bei Erhöhung der Wellen auf 6 m wird die periodische Bewegung instabil und das Schiff kentert. Die Verzweigung kann als Indiz für den drohenden Kentervorgang gewertet werden. Um die Systemparameter, bei denen ein Schiff kentert, systematisch bestimmen zu können, wurde eine Methode zur Bestimmung von Verzweigungen entwickelt, die im folgenden beschrieben wird.

4. Pfadverfolgungsmethode

Die Pfadverfolgungsmethode eignet sich zur Bestimmung von Verzweigungen. Sie löst zunächst das unterbestimmte, nichtlineare Gleichungssystem $\mathbf{H}(\mathbf{x}_{t=t_0}, \lambda) = \mathbf{x}_{t=t_0+T}(\mathbf{x}_{t=t_0}, \lambda) - \mathbf{x}_{t=t_0} = \mathbf{0}$. Bei Variation des Systemparameters λ werden die periodischen Lösungen des Systems, d.h. die Werte des Zustandsvektors $\mathbf{x}$, die das System nach einer Periode der Dauer T wieder einnimmt, bestimmt. Die Nullstellen der algebraischen Gleichung $\mathbf{H}$ werden mit einem Prädiktor-Korrektor-Verfahren abhängig vom Parameter λ berechnet. Bei einer Verzweigung wandern die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von $\mathbf{H}$, d.h. der Ableitung von $\mathbf{H}$ nach $\mathbf{x}$, aus dem Einheitskreis heraus. Auf diese Weise können Verzweigungen und koexistierende Lösungen bestimmt werden, [2]. Bei der Anwendung auf das beschriebene Modell treten zwei wesentliche Problemstellungen auf. Zum einen ist die Periode der Anregung nicht bekannt, da die Wellenauftreffrequenz vom Gierwinkel und von der Geschwindigkeit des Schiffs abhängt, welche bei der gewählten Modellierung als freier starrer Körper nicht festgelegt sind. Zum anderen ist die Approximation der Jacobi-Matrix bei dieser Modellierung ungenau, weil bei den zusätzlichen Zustandsgleichungen einige Zustandsgrößen implizit auftreten. Nach Entwicklung von Strategien zur Lösung dieser Problemstellungen wurde die Pfadverfolgungsmethode auf das Modell für die Schiffsbewegung angewendet. Dabei wurden allerdings die zusätzlichen Zustandsgleichungen für nur einen Spant verwendet und die seitliche und die Längsbewegung vernachlässigt. Bild 2a zeigt die gefundenen Pfade für zwei Zustandsgrößen. Es wird deutlich, daß die Bewegungskopplungen und die Nichtlinearitäten im Modell eine sehr große Rolle spielen: Die Sprünge sind durch die oben beschriebenen Umschaltvorgänge bedingt. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix wandern bei einer Wellenhöhe von 9,76 m aus dem Einheitskreis heraus, Bild 2b, d.h. hier verzweigt die Lösung. Bei 10 m Wellenhöhe kentert das Schiff bei den gewählten Randbedingungen in dieser Simulation.

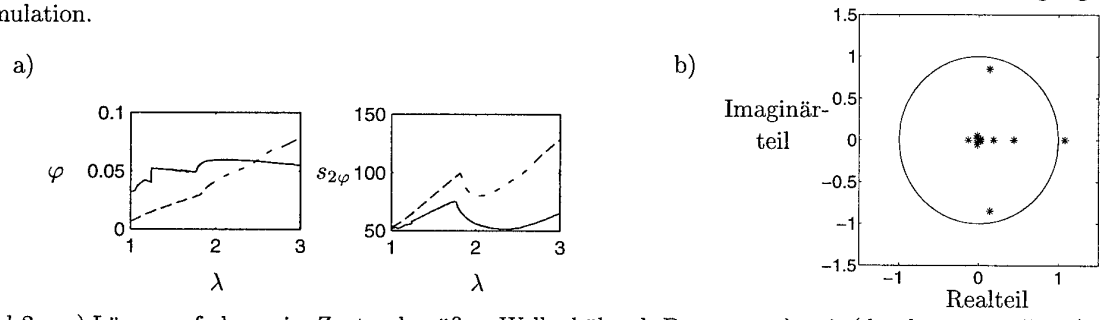


Bild 2: a) Lösungspfade zweier Zustandsgrößen, Wellenhöhe als Parameter λ, mit (durchgezogene Linie) und ohne (gestrichelte Linie) Gierbewegung, b) Eigenwerte der Jacobi-Matrix bei der Wellenhöhe $\zeta_w = 9{,}76$ m

Mit der angewendeten Methode können also Verzweigungen, die das Kentern ankündigen, bestimmt werden. Daher soll das Verfahren nun zur Bestimmung des sicheren Parameterbereichs eingesetzt werden. Mit diesem Wissen kann die Sicherheit von Schiffen im Seegang erhöht werden.

5. Literatur

1 KREUZER, E., WENDT, M.: Ship Capsizing Analysis Using Advanced Hydrodynamic Modelling. In: Spyrou, K. J., Thompson, J. M. T. (Hrsg.): The Nonlinear Dynamics of Ships. Phil Trans. R. Soc. Lond. A. (2000).

2 KREUZER, E., WENDT, M.: Nonlinear Effects in Ship Dynamics and Capsizing. In: 10th (2000) International Offshore and Polar Engineering Conference. J. Offshore and Polar Engineering (2000).

3 PEREIRA, R.: Ermittlung der Belastungen von Schiffen in steilem Seegang durch Simulation. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft **83** (1989), 145–158.

Addresses: E. KREUZER, M. WENDT, Technische Universität Hamburg-Harburg, Arbeitsbereich Meerestechnik II – Mechanik, Eißendorfer Str. 42, D-21071 Hamburg

H. LABRENZ; E. BROMMUNDT

Bewegungsgleichungen eines Walzenpaares mit Gummiüberzug

Ein wichtiges Element von Druck- und Papiermaschinen sind aufeinander abwälzende Zylinder, zwischen denen die Papierbahn hindurchläuft. Die Walzen bestehen in der Regel aus Stahl, typischerweise ist (mindestens) eine mit Gummi überzogen. Es treten selbsterregte Schwingungen auf: Die beiden Walzen schwingen gegeneinander und die beschichtete Walze wird polygonalisiert. Die Gummischicht wird als thermoviskoelastisches Kontinuum beschrieben. Sie erfährt im Kontaktbereich (Nip) Verformungen und Erwärmungen.

Es soll der Einfluß der Temperatur auf die Selbsterregung untersucht werden. Zunächst wird eine stationäre Lösung gesucht.

1. Einführung

Sueoka et al. [1] erklären die Selbsterregung mit dem Materialgedächtnis des Gummis: Bei Walzenschwingungen wird die Gummischicht über den Umfang unterschiedlich stark deformiert. Die lokale Deformation relaxiert jedoch während einer Umdrehung nicht vollständig und wirkt so auf den nächsten Nipdurchgang nach. Bei geeigneter Drehfrequenz werden die Schwingungen verstärkt. Oden und Lin [2] errechnen gleichartige Schwingungen. Aus der Industrie kommen Hinweise, daß auch die Temperatur die Selbsterregung beeinflußt. Eine thermoviskoelastisches FE-Modell für den stationären Fall wurde schon 1974 und 1976 von Batra et al. [3] vorgestellt. Da die Niplänge größer als die Dicke der Gummischicht ist, wird die Hertzsche Theorie nicht angewendet.

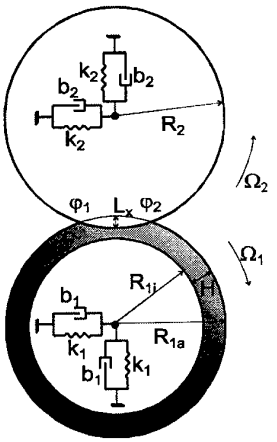


Bild 1: Makromodell

2. Modellbildung

Die zwei Walzen (Bild 1) werden als Zylinder mit den Massen m_1 und m_2, den Drehträgheiten Θ_1 und Θ_2, sowie den Radien R_{1a} und R_2 beschrieben, die gegeneinander mit den Federn k_1 und k_2 verspannt und mit den b_1 und b_2 gedämpft sind. Sie drehen sich mit den Winkelgeschwindigkeiten $\Omega_1(t)$ und $\Omega_2(t)$. Die starre Walze ist gegenüber der Referenzlage (Berührung) um die Länge L_x zugestellt. Man erhält zwei Schwinger mit je drei Freiheitsgraden.

Zur Beschreibung der Gummischicht und des Kontaktes ist es zweckmäßig, statt materieller Koordinaten (r,Φ) und den Winkel $\Psi(t)$, $(\Omega_1 = \dot{\Psi})$, nicht drehende Koordinaten (r,φ) zu verwenden (Bild 2).

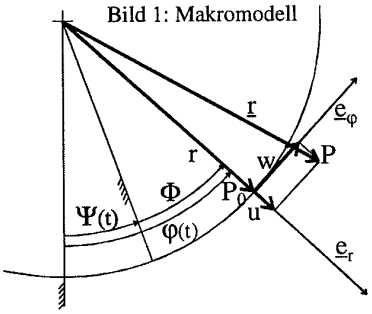


Bild 2: Koordinatentransformation

In der Gummischicht herrsche ein ebenener Verzerrungszustand mit Verschiebungen in radialer Richtung u und in tangentialer Richtung w. Die Variationsgleichungen für die Verschiebungen und die Temperatur lauten:

$$\int_t \int_V \delta \underline{u}^T \left\{ div\, \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f} - \rho \ddot{\underline{u}} \right\} dV - \int_{O_\sigma} \delta \underline{u}_r^T \left\{ \underline{n}^T \underline{\underline{\sigma}}_r - \underline{\sigma}_R \right\} dO_\sigma \, dt = 0 \tag{1}$$

$$\int_t \int_V \delta \vartheta \left\{ \rho T \dot{s} + div\, \underline{q} - r - \Lambda \right\} dV - \int_{O_q} \delta \vartheta_r \left\{ \underline{n}^T \underline{q}_r - q_R \right\} dO_q \, dt = 0 \tag{2}$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ = 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor	$\underline{u}$ = Verschiebungsfeld, $\underline{u}^T = [u,w]$	r = innere Wärmelasten
ρ = Dichte in der Referenzkonfiguration	s = volumenspezifische Entropie	$\underline{q}$ = Wärmeflußvektor
Λ = thermische Dissipationsleistung	σ_R = Oberflächenspannungen	ϑ = Temperaturfeld
$\underline{n}$ = nach außen gerichtete Normale	q_R = äußere Wärmelasten	$\underline{f}$ = Volumenkräfte

Hieraus können partielle Differentialgleichungen abgeleitet werden. Das Gummi wird unter Vernachlässigung des Dilatationsgedächtnisses als Maxwell-Körper mit inneren Variablen approximiert. Man erhält folgendes Materialgesetz:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x(\underline{x},t) \\ \sigma_y(\underline{x},t) \\ \sigma_{xy}(\underline{x},t) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{I} G_i \cdot \underline{\underline{K}}_G \underline{\varepsilon} - \sum_{i=1}^{I} G_i \underline{\underline{K}}_G \underline{y}_i^{\varepsilon} + K \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y - 3\alpha\vartheta \right) \tag{3}$$

$$\text{mit } \underline{\underline{K}}_G = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ und } \dot{\underline{y}}_i^{\varepsilon} = \frac{1}{\tau_i}\left(\underline{\varepsilon} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \alpha\vartheta - \underline{y}_i^{\varepsilon}\right) \tag{4;5}$$

$\underline{y}_i^{\varepsilon}$ = (Vektor-)Feld der i-ten inneren Variablen
α = thermischer Längenausdehnungskoeffizient
$\underline{\underline{K}}_G$ = Schersteifigkeitseinflußmatrix
G_i = Initialmodul der i-ten inneren Variablen
τ_i = Zeitkonstante der i-ten inneren Variablen
K = Kompressions- oder Dilatationsmodul
G_0 = statischer Schermodul
$\underline{\varepsilon}$ = Voigtscher Verzerrungsvektor; $\underline{\varepsilon}^T = [\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \gamma]$

Mit einem isoparametrischen Ansatz vom Grade n für die Felder der Verschiebungen, der I inneren Variablen und der Temperatur in radialer Richtung erhält man gewöhnliche Differentialgleichungen nach dem Winkel φ: $2\times n$ Dgln 2.Ordnung für die Verschiebungsfelder, $I\times 3\times n$ Dgln 1.Ordnung für die inneren Variablen und n Dgln 2.Ordnung für das Temperaturfeld. Vernachlässigt man für den stationären Fall Temperaturgradienten in Umfangsrichtung, so erhält man aus den Differentialgleichungen für die Temperatur einen Wärmeüberschuß $\underline{W}$.

Für konstante Temperatur und Winkelgeschwindigkeit ergeben sich Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$\underline{\underline{M}}_1(\vartheta)\underline{u}'' = \underline{\underline{M}}_2(\vartheta)\underline{u}' + \underline{\underline{M}}_3(\vartheta)\underline{u} + \underline{\underline{M}}_4(\vartheta)\underline{y}' + \underline{\underline{M}}_5(\vartheta)\underline{y} + \underline{\underline{M}}_6\underline{\sigma}_R + \underline{\underline{M}}_7\left(\vartheta, \rho\Omega_I^2\right) \tag{6}$$

$$\underline{y}' = \underline{\underline{M}}_8(\vartheta)\underline{u}' + \underline{\underline{M}}_9(\vartheta)\underline{u} + \underline{\underline{M}}_{10}\left(\vartheta, \rho\Omega_I^2\right) \tag{7}$$

$$\underline{W}' = \underline{y}'^T \underline{\underline{M}}_{11}(\vartheta)\underline{y}' + \underline{\underline{M}}_{12}\underline{\vartheta} \tag{8}$$

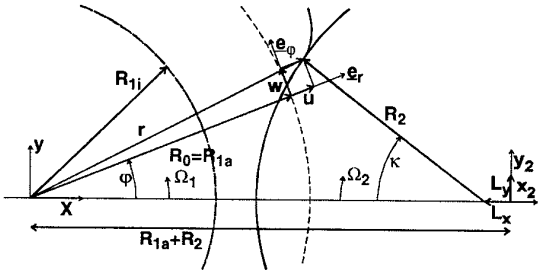


Bild 3: Kontaktgeometrie

Es gilt $\underline{u}(R_{1i}, \varphi)$. Für $n=5$ und $I=3$ ergeben sich aus (6) bis (8) 66 Dgln 1.Ordnung, in die für den Außen- und den Kontaktbereich die jeweiligen Randbedingungen einzusetzen sind.

Das Kontaktmodell enthält die Kontaktbedingungen (Bild 3)

$$g = g' = g'' = 0 \tag{9}$$

$$g = R_2 - \left[\left[\left(R_{1a} + u_a\right)\cos\varphi - w_a \sin\varphi - \left(R_{1a} + R_2 - Lx\right)\right]^2 + \left[\left(R_{1a} + u_a\right)\sin\varphi + w_a \cos\varphi - Ly\right]^2\right]^{1/2} \tag{10}$$

und die Verknüpfung der Oberflächenkräfte über ein regularisiertes Coulombsches Reibgesetz.

3. Die quasistationäre Lösung

Im Außenbereich läßt sich das mechanische Problem, Gl. (6) und (7), als Eigenwertproblem behandeln. Im Kontaktbereich werden mit dem Kontaktmodell die radiale Auslenkung am äußeren Rand u_a sowie u_a' und u_a'' eliminiert. Es entfallen 2 Dgln, das System wird nichtlinear und muß numerisch integriert werden. Die quadratische Form der thermischen Dissipation erzwingt in beiden Bereichen die numerische Integration des Wärmeüberschusses, gl. (8).

An den Kontaktgrenzen wird Stetigkeit von $\underline{u}$, $\underline{u}'$, $\underline{y}$ und $\underline{W}$ gefordert. Da im Kontaktbereich zwei Freiwerte weniger zur Verfügung stehen, werden der Ein- und Auslaufwinkel φ_e und φ_a als weitere Freiwerte genutzt, um das Problem zu lösen.

Die zugelassene Nicht-Differenzierbarkeit an den Kontaktgrenzen führt zu Spannungssprüngen (Bild 4), die bei einer besseren Approximation in radialer Richtung kleiner werden.

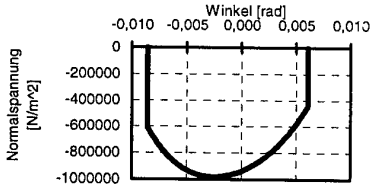


Bild 4: Normalspannungsverlauf

Danksagung

Diese Arbeit wird von der VW-Stiftung unterstützt.

4. Literatur

1 SUEOKA, A. ET.AL.: Polygonal Deformation of Roll Covering Rubber. JSME, Series C, **39**(1996), No. 1, pp. 1-10.

2 ODEN, J.T.; LIN, T.L.: On the General Rolling Contact Problem for Finite Deformations of a Viscoelstic Cylinder. Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engrg., **57**(1986), pp. 297-367.

3 BATRA, R.C.; LEVINSON, M.; BETZ, E.: Rubber Covered Rolls - The Thermoviscoelstic Problem. A Finite Element Solution. Int. J. f. Num. Meth. in Engrg., **10**(1976), pp. 767-785.

Adresse: Dipl.-Wirtschafts.-Ing. H. LABRENZ und Prof. em. Dr. E. BROMMUNDT, Technische Universität Braunschweig, Institut für Technische Mechanik, Postfach 3329 , D-38023 Braunschweig, h.labrenz@tu-bs.de.

MIKOTA, J.

Frequency tuning of chain structure oscillators to place the natural frequencies at Ω_1 and $N-1$ integer multiples $\Omega_2 \ldots \Omega_N$

Numerous activities in Engineering, e.g. the design of solid body compensators, involve the tuning of dynamic systems to place the natural frequencies $\omega_1 \ldots \omega_N$ at a certain base harmonic Ω_1 and $N-1$ integer multiples of it $\Omega_2 \ldots \Omega_N$.

In this paper a novel concept for the frequency tuning of multi-degree of freedom mass-spring oscillators will be presented which allows an exact placement of the natural frequencies in case of an un-damped system. Frequency tuning will be achieved by the selection of masses $m_1 \ldots m_N$ and spring stiffnesses $c_1 \ldots c_N$ of the system following an amazingly simple procedure.

1. Introduction

Various tasks in Engineering, e.g. the design of solid body compensators, involve the frequency tuning of dynamic systems. In this paper I will present a novel concept for the frequency tuning of chain structure mass-spring oscillators to place the natural frequencies $\omega_1 \ldots \omega_N$ at a certain base harmonic Ω_1 and $N-1$ integer multiples of it $\Omega_2 \ldots \Omega_N$.

2. Foundations

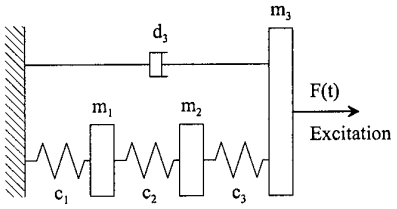


Figure 1: Structure of a third order dynamic system

The equations governing the dynamics of an N-body oscillator depicted in Fig. 1 may be written as follows:-

$$\begin{aligned} m_1\,\ddot{x}_1 + c_1\,x_1 - c_2\,(x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2\,\ddot{x}_2 + c_2\,(x_2 - x_1) - c_3\,(x_3 - x_2) &= 0 \\ &\vdots \\ m_{N-1}\,\ddot{x}_{N-1} + c_{N-1}\,(x_{N-1} - x_{N-2}) - c_N\,(x_N - x_{N-1}) &= 0 \\ m_N\,\ddot{x}_N + c_N\,(x_N - x_{N-1}) + d_N\,\dot{x}_N &= F(t) \end{aligned} \tag{1}$$

In vectorial notation, above equations may also be written as

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\,\mathbf{x} = \mathbf{F} \tag{2}$$

where $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_N]^T$, $\mathbf{M}$ is the mass matrix, $\mathbf{D}$ is the damping matrix, $\mathbf{C}$ is the stiffness matrix and $\mathbf{F}$ is the force vector of the system. Assuming an undamped system ($d_N = 0$), the natural frequencies of the oscillator may be calculated as the roots of the characteristic polynomial [2]

$$|-\omega^2\,\mathbf{M} + \mathbf{C}| = 0 \tag{3}$$

A closer look at Equ. 3 reveals that the characteristic matrix $[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{C}]$ has tri-diagonal structure and may be written as

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + c_1 + c_2 & -c_2 & & & & 0 \\ -c_2 & -\omega^2 m_2 + c_2 + c_3 & -c_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & -c_{N-1} & -\omega^2 m_{N-1} + c_{N-1} + c_N & -c_N & \\ 0 & & & -c_N & -\omega^2 m_N + c_N & \end{bmatrix}$$

By defining the first natural frequency of the oscillator as Ω and integer multiples of it as

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega \\ \Omega_2 &= 2\Omega \\ &\vdots \\ \Omega_N &= N\Omega \end{aligned} \tag{4}$$

one may place the natural frequencies of an (un-damped) chain structure oscillator at $\Omega_1 \ldots \Omega_N$ simply by making the masses $m_1 \ldots m_N$ to

$$\begin{aligned} m_1 &= m \\ m_2 &= m/2 \\ &\vdots \\ m_N &= m/N \end{aligned} \tag{5}$$

and making the stiffnesses of the springs $c_1 \ldots c_N$ to

$$\begin{aligned} c_1 &= N\,c \\ c_2 &= (N-1)\,c \\ &\vdots \\ c_N &= c \end{aligned} \tag{6}$$

By doing this, the natural frequencies of the oscillator $\omega_1 \ldots \omega_N$ are placed at $\Omega_1 \ldots \Omega_N$, where

$$\Omega = \sqrt{\frac{c}{m}} \tag{7}$$

3. Conclusions

A novel concept for the tuning of chain-structure mass-spring oscillators was presented to place the natural frequencies at a base harmonic Ω_1 and $N-1$ integer multiples of it $\Omega_2 \ldots \Omega_N$. Further investigations show that this concept is not limited to mechanical systems but is also applicable to acoustic systems, etc. As demonstrated in [1], the concept works also nicely for weakly damped systems.

4. References

1 Mikota, J., Scheidl, R.: Solid body compensators for the filtering of fluid flow pulsations in hydraulic systems. Mechatronics and Robotics'99, TU Brno, Czech Republic (1999).
2 Parkus, H.: Mechanik der festen Körper. Springer Publishing Company, Germany (1988).

Addresses: Dipl.-Ing. Josef Mikota M.Sc., Johannes Kepler University of Linz, Institute for Mechanics and Machine Design, Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, Austria.

MITTERMAYR, P.

Analytische und numerische Untersuchungen zum Rad–Schiene Kontakt

Die Trassierung, die Gleislagefehler, die Profilqualität, sowie die Fahrgeschwindigkeit stellen die wesentlichen Anregungsmechanismen für das schwingungsfähige System Fahrzeug–Gleis dar. Die wichtige Tragfunktion von Eisenbahnfahrzeugen wird hauptsächlich durch den Formschluß der Laufflächen von Rad und Schiene übernommen. Wesentlicher Bestandteil der üblichen Simulationsprogramme ist ein Modul zur geometrischen Beschreibung des Rad–Schienekontaktes (siehe [2], [5]). Beim reinen Rollen eines Radsatzes auf geradem, ungestörtem Gleis kommt es bei einer seitlichen Anfangsauslenkung zu einer periodischen Bewegung. Die seitliche Bewegung y kann unter Voraussetzung starrer Kontaktpartner und kleiner Aufstandspunktsvorverlagerung durch

$$y'' + \frac{2(r_l - r_r)}{(r_r + r_l)b} \approx y'' + \frac{\Delta R(y)}{r_0 b} = 0 \qquad \text{mit} \qquad y(0) = a,\, y'(0) = 0 \tag{1}$$

beschrieben werden. In (1) sind mit r_l, r_r die Rollradien links und rechts, und mit $2b$ der Abstand der Aufstandspunkte (entspricht etwa der Spurweite) bezeichnet. Bei einem Radsatz in Form eines Doppelkegels mit dem Öffnungswinkel γ_0 auf zwei Schneiden hängt die Rollradiendifferenz ΔR linear von y ab, die Bewegungsgleichung und Lösung

$$y'' + \frac{\gamma_0}{r_0 b} y = 0\,, \qquad y(x) = a \cos \sqrt{\frac{\gamma_0}{r_0 b}}\, x \tag{2}$$

hat Klingel schon 1883 in [1] angegeben. Wickens 1965, Joly 1972, später Matsui 1981 (siehe [4]) haben den Einfluß der Profilradien beim Rad R und der Schiene R' mit der äquivalenten Konizität γ_e

$$\gamma_e = \frac{R}{R - R'} \frac{b + R' \sin \gamma_0}{b - r_0 \tan \gamma_0} \tan \gamma_0 \tag{3}$$

in der Linearisierung (2) auf den Wellenlauf berücksichtigt.

Bei allgemein geformten Profilen wird zur Berechung von $\gamma_e(a)$ die Wellenlänge $\lambda(a)$ der periodischen Lösung von (1) als Funktion der Amplitude a berechnet und gemäß

$$\gamma_e(a) = 4\pi \frac{r_0 b}{\lambda(a)} \tag{4}$$

mit der eines Doppelkegels gleichgesetzt. Die Wellenlänge des ungedämpften freien Schwingers kann aus seinem Potential $F(y) = \int \Delta R(y)/r_0 b \, \mathrm{d}y$ mit

$$\lambda(a) = 2 \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2(F(a) - F(y))}} \tag{5}$$

berechnet werden (siehe [3]). Untersuchungen mit theoretischen als auch gemessenen Profilen zeigen, daß die Rollradiendifferenz bedingt durch Berührpunktsprünge stückweise stetig ist (siehe Arnold [2]). Sie kann i. a. durch einen linearen Verlauf ω_0, ω_1 und einen Berührpunktsprung bei y^* mit der Sprunghöhe $\delta + (w_1^2 - w_0^2) y^*$

$$f(y) = \begin{cases} \omega_0^2 y & |y| < y^* \\ \delta \operatorname{sign} y + \omega_1^2 y & |y| > y^* \end{cases} \tag{6}$$

angenähert werden (siehe Abb. 1). Nach Auswerten des Integrals (5) ergibt sich

$$\lambda(a) = \begin{cases} \frac{2\pi}{\omega_0} & |a| < y^* \\ \frac{2\pi}{\omega_1} - \frac{4}{\omega_1} \arcsin \frac{\omega_1^2 y^* + \delta}{\omega_1^2 a + \delta} + \frac{4}{\omega_0} \arcsin \frac{\omega_0 y^*}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2) y^{*2} + \omega_1^2 a^2 + 2\delta(a - y^*)}} & |a| > y^* \end{cases} . \tag{7}$$

Die äquivalente Konizität ist bis zum Berührpunktsprung konstant, darüber nunmehr eine Funktion der Auslenkungsamplitude a.

Abbildung 1 zeigt den Unterschied zwischen analytischen und numerischen Berechnungen mit der Schiene vom Typ UIC60 und dem Radprofil ORE S1002 bei Spurweite 1435 mm und Variation der Einbauneigung. Bedingt durch die kontinuierliche Krümmungsänderung des Radprofils S1002 kommt es zu deutlichen Abweichungen bei den Methoden. Bei Verwendung eines Radprofils mit Kreisbogenabschnitten (z. B. DBII) erhält man aber eine hervorragende Übereinstimmung der Ergebnisse. Die numerischen Berechungen wurden mit einem Programm durchgeführt, das das Anfangswertproblem (1) mittels Runge–Kutta Methoden löst. Eine Auswertung des Integrals (5) ist durch die Singularität des Integranden an den Integrationsgrenzen numerisch ungünstig.

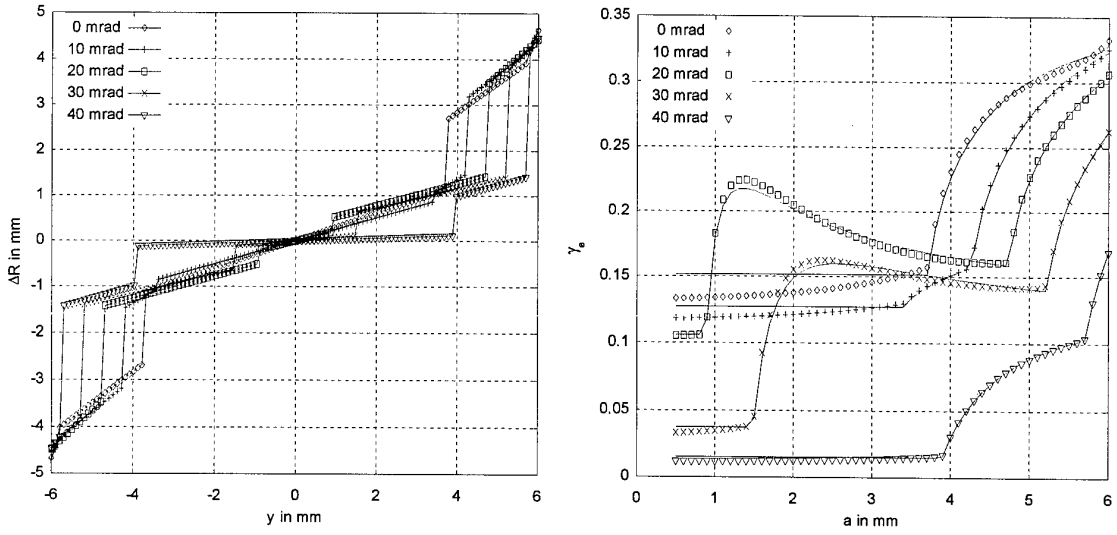


Abbildung 1: Bei Variation der Einbauneigung. Links: $\Delta R(y)$. Rechts: $\gamma_e(a)$ Vergleich der numerischen (∗) und analytischen (–) Ergebnisse

Mit dem im Auftrag der Österreichischen Bundesbahnen entstandenen Programm QuiCon ist es erstmals möglich, die äquivalente Konizität $\gamma_e(a)$ schon während einer Meßfahrt mit dem Oberbautechnischen Meßwagen EM250 bei einer Geschwindigkeit von bis zu 200 km/h aus den optisch gemessenen Schienenquerschnitten online zu ermitteln. Es wurde in [6] gezeigt, daß diese Größe als Beurteilungskriterium für die Profilqualität herangezogen werden kann. Der Vergleich von analytischer und numerischer Rechung dient der Beurteilung von Meß– und Rechenungenauigkeiten, eine entsprechende internationale Vorschrift zur Festlegung bestimmter Grenzwerte ist im Entwurf.

Acknowledgements

Den Österreichischen Bundesbahnen sei für die wertvolle Unterstützung an dieser Stelle herzlich gedankt.

References

1 Klingel, W.: Über den Lauf der Eisenbahnwagen auf gerader Bahn. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens in technischer Beziehung, Neue Folge **XX**, 4 (1883) 113–123.

2 Arnold, M.: Numerische Probleme in der dynamischen Simulation von Rad–Schiene–Systemen. ZAMM **75** (1995), T677–T678.

3 Magnus, K., Popp, K.: Schwingungen. B.G.Teubner, Stuttgart, 1997

4 Matsui, N.: A re-examination of the wheel–rail contact geometry and its application to the hunting analysis of railway bogie vehicles having profiled wheels. Proc. 7th IAVSD–Symposium, pp.468–480, Cambridge, UK, September 7–11 1981.

5 Popp, K., Schiehlen, W.: Fahrzeugdynamik. B.G.Teubner, Stuttgart, 1993

6 Presle, G., Mittermayr, P.: Beurteilung der Zuverlässigkeit des Fahrwegs durch Messung und Simulation. ZEV-Glasers Annalen **2/3** (2000), 216–222.

Address: Dr. Paul Mittermayr, Herzgasse 36/3, A–1100 Wien, Österreich.

OSIŃSKI, Z., STARCZEWSKI, Z.

Resonant vibration of a rotor supported on journal bearings with non-circular contours

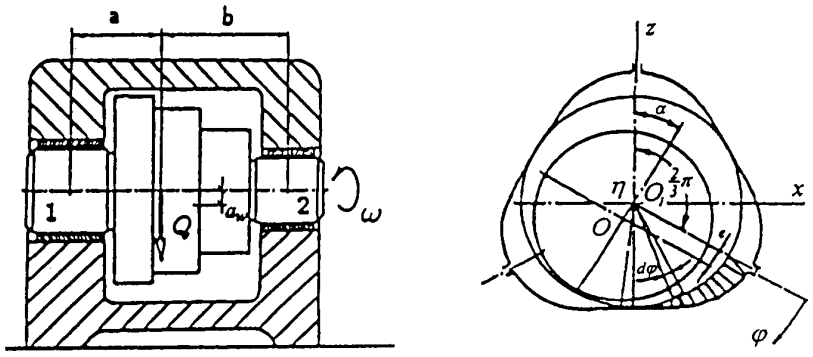
In the paper resonance characteristics of a rigid rotor supported on journal bearings with non-circular contour have been presented. The considered system is geometrically and physically asymmetric. Application of three-lobe journal bearings has proved to be efficient in lowering resonant amplitudes and increasing stability threshold. Analysis has been based on geometric approximation of the three-lobe contour of the bearings.

1. Introduction

Multi-lobe journal bearings are characterised by an increased stability threshold and higher energy dissipation properties with respect to cylindrical bearings, which makes them attractive for researchers who keep on looking for new shapes of multi-lobe bearings. Application of non-circular contours, however, excludes possibility of finding an analytical solution to the lubricant flow even in the simplified, so-called plane and short journal bearing systems. For this reason various approximating techniques have been incorporated – most of them based on replacing the real contour with a multi-arc one. In the present paper geometric approximation described in [1] has been used. It replaces pericycloidal (with multiplication factor 3) with a system of three arcs. For the thus approximated three-lobe journal bearings the investigations aimed at resonance characteristics of a rigid rotor supported on such bearings and undergoing rotating unbalance. The system: rotor/supports has been assumed asymmetric. Two types of the asymmetry have been considered: geometric, related to non-central application of external load, and physical, regarding different properties of the supports (oil clearances, viscosities, lengths, etc.)

2. Assumed model of the rotor and the support

The model of an asymmetric rigid rotor unbalanced with respect to the axis of rotation, and the model of a three-lobe journal bearing support have been assumed in the considerations. The models are shown in Fig. 1.



The symbols that appear in Fig. 1 denote: a, b – coordinates of point of application of the external load, a_w - radius of the rotating unbalance, ω – angular velocity of the journal, O and O_1 – centers of the circle inscribed in the three-lobe contour and the journal, respectively, φ – angular coordinate, α – angle between the OO_1 line and the coordinate axis z (angular position of the journal).

Fig. 1. Model of the rotor and journal bearing system

3. Equations of motion of the system

For the above-described model of the considered system the following equations of motion have been derived in terms of the journals transverse motion [2]:

$$\ddot{x}_1 = \frac{I_2}{I_1}\frac{a}{a+b}\,\omega\,(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + \left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_1}\right) F_{1x} + \left(\frac{1}{m} - \frac{ab}{I_1}\right) F_{2x} + a_w\omega^2\cos\omega t \tag{1}$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{I_2}{I_1}\frac{a}{a+b}\,\omega\,(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \left(\frac{1}{m} + \frac{a^2}{I_1}\right) F_{1z} + \left(\frac{1}{m} - \frac{ab}{I_1}\right) F_{2z} - \frac{Q}{m} + a_w\omega^2\sin\omega t \tag{2}$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{I_2}{I_1}\frac{b}{a+b}\,\omega\,(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + \left(\frac{1}{m} - \frac{ab}{I_1}\right) F_{1x} + \left(\frac{1}{m} + \frac{b^2}{I_1}\right) F_{2x} + a_w\omega^2 \cos\omega t \tag{3}$$

$$\ddot{z}_2 = \frac{I_2}{I_1}\frac{b}{a+b}\,\omega\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \left(\frac{1}{m} - \frac{ab}{I_1}\right) F_{1z} + \left(\frac{1}{m} + \frac{b^2}{I_1}\right) F_{2z} - \frac{Q}{m} + a_w\omega^2 \sin\omega t \tag{4}$$

where m is mass of the rotor, F_{ix} and F_{iz} are components of the hydrodynamic uplift forces acting on the i-th journal in the x and z direction, respectively, I_1, I_2 –principal geometric moments of inertia of the rotor, x_i and z_i – transverse displacements of the i-th journal in the x and z direction, respectively, Q – transverse load, t – time. Dots over the symbols denote differentiation with respect to time. First derivatives correspond to gyroscopic moments that have been taken into account in the model.

4. Results of numerical simulations and concluding remarks

A series of numerical simulations led to obtaining of several interesting results, which are presented in Fig. 2. The upper diagrams correspond to geometric asymmetry, the lower ones to physical asymmetry.

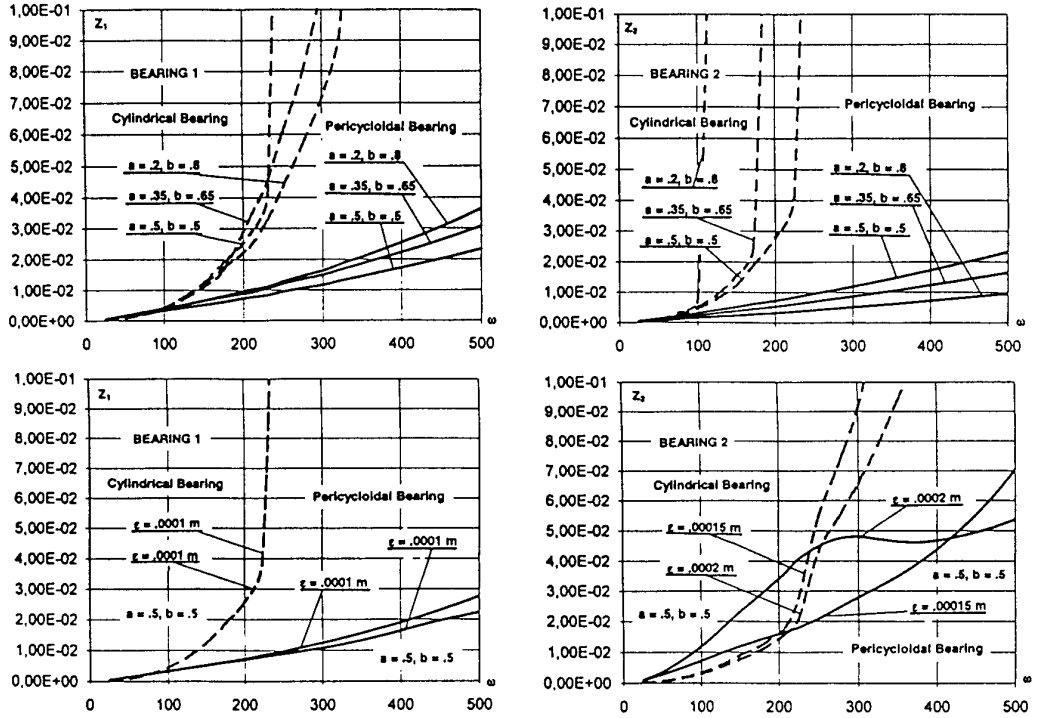


Fig. 2. Exemplary resonance curves of the three-lobe journal bearing for both kinds of the asymmetry

The presented in Fig. 2 resonance characteristics have been compared with corresponding responses of the cylindrical journal bearing systems of the same structural and operating parameters and undergoing the same asymmetry. The carried out simulations enabled formulating of the following conclusions:

- application of multi-lobe journal bearings (three-lobe) to the rotor system decreases resonant amplitudes in comparison with vibration occurring in the corresponding cylindrical bearings,
- this effect is observed within a wide range of the rotation speed, especially for small clearances in the bearing,
- drop of the resonant amplitude takes place for both types of the asymmetry.

5. References

1 Kaniewski, W., Das Mehrgleitflachenlager mit perizykloidischem Profil, Conference National de Mechanique Apliquee, Resumes des Travaux, Bucarest 1969

2 Kurnik, W., Starczewski, Z., Stability and vibration of an unsymmetric rotor/bearing system, ZAMM, 1994, 4, T46-T48

Address: Osiński, Z., Starczewski, Z. Warsaw University of Technology, Institute of Machine Design Fundamentals, Narbutta 84, 02-524 Warszawa, Poland

PANNING, L., SEXTRO, W., POPP, K.

Vibrational Behaviour of Turbine Blade Assemblies with Friction Dampers

During operation turbine blades are subjected to fluctuating gas forces that cause blade vibrations. One of the main tasks in the design of turbomachinery blading is to reduce the resonant amplitudes of the blades to prevent the arrangement from failures. The vibration amplitudes of the blades can be reduced significantly by means of damping devices such as underplatform dampers. The purpose of the present work is to develop a calculation method to investigate spatial vibrations of turbine blade arrangements with different underplatform damper types. A 3D contact model is used to calculate the forces acting between the damper and the adjacent blades. To determine the generalized relative displacements the kinematics of a blade-damper-blade structure will be derived. The comparison between measurements and predictions shows a good agreement.

1. Introduction

Underplatform friction dampers are pressed onto the blade platforms by centrifugal forces to provide friction damping. The dampers used in practice show a large variety of geometric properties, such as cylindrical (see PFEIFFER ET AL. [1], SEXTRO ET AL. [3]) or wedge-shaped dampers (see SANLITURK ET AL. [2], YANG ET AL. [5]). The goal of this work is the derivation of the governing equations of the contact kinematics and the damper kinetics in combination with a 3D contact model for arbitrary damper geometries. Both, cylindrical as well as wedge-shaped dampers are investigated, see Fig. 1a.

2. Modeling of frictionally damped bladed disk assemblies

The dynamical behaviour of rotating blade assemblies can be described in the time domain by the equation of motion

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\,\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}_E(t) + \mathbf{p}_C(t) \tag{1}$$

with external excitation forces $\mathbf{p}_E(t)$ and internal contact forces $\mathbf{p}_C(t)$ acting between the blades and the damping devices. To reduce the number of DOF, the modal description of the elastic structures is applied. The excitation forces $\mathbf{p}_E(t)$ are assumed to be harmonic and monofrequent. The contact forces $\mathbf{p}_C(t)$ are non-linear due to frictional effects. Hence, a solution of the equation of motion in the time domain leads to large computation times due to a large number of friction contacts in a rotating assembly. Thus, monofrequent displacements are assumed and the Harmonic Balance Method (HBM) is applied to give linearized, monofrequent contact forces $\hat{\mathbf{p}}_C(\hat{\mathbf{w}})$ that depend on the amplitudes of the generalized relative displacements $\hat{\mathbf{w}}$ within the contact areas. Introducing complex notation for convenience gives

$$\hat{\mathbf{S}}\,\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{\Phi}^T\,(\hat{\mathbf{p}}_E + \hat{\mathbf{p}}_C)\ , \tag{2}$$

where $\hat{\mathbf{S}}$ contains the natural frequencies and modal damping ratios, $\mathbf{\Phi}$ is the modal matrix containing the mass-normalized blade eigenvectors and $\hat{\mathbf{q}}$ denotes the amplitude vector of normal coordinates. To obtain a relationship between the contact forces and the relative displacements, a contact model is applied that has been presented by SEXTRO [4] for shroud contacts. Then, a diagonalized non-linear stiffness matrix $\hat{\mathbf{K}}_C(\hat{\mathbf{w}})$ can be calculated to determine the contact forces $\hat{\mathbf{f}}$ acting on the left and right blade within the contact areas

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{K}}_C(\hat{\mathbf{w}})\,\hat{\mathbf{w}}\ , \tag{3}$$

where $\hat{\mathbf{K}}_C$ contains six generalized complex stiffnesses for each contact area at the left and right contact, respectively. The twelve relative displacements $\hat{\mathbf{w}}$ are obtained by means of the displacements of the platforms of the neighbouring blades $\hat{\mathbf{u}}_O$ and the rigid body displacements of the damper $\hat{\mathbf{u}}_C$,

$$\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{G}_D\,\hat{\mathbf{u}}_C - \mathbf{G}_P\,\hat{\mathbf{u}}_O\ , \tag{4}$$

where $\mathbf{G}_D$ and $\mathbf{G}_P$ include the geometric properties of the damper and the platforms. The dynamical behaviour of the underplatform damper is described by the equation of motion

$$-\Omega^2\,\mathbf{M}_D\,\hat{\mathbf{u}}_C = -\mathbf{G}_D^T\,\hat{\mathbf{f}}\ , \tag{5}$$

where $\mathbf{M}_D$ denotes a generalized mass matrix of the damper containing the inertial properties.

Combining the basic equations of the contact model (eq. 3), the contact kinematics (eq. 4) and the damper kinetics (eq. 5) yields a nonlinear equation to determine the rigid body displacement $\hat{\mathbf{u}}_C$ of the damper. Inserting this expression into eq. (4), the relative displacements can be found to be

$$\hat{\mathbf{w}} = \left\{ \mathbf{G}_D \left[\mathbf{G}_D^T \hat{\mathbf{K}}_C(\hat{\mathbf{w}}) \, \mathbf{G}_D - \Omega^2 \, \mathbf{M}_D \right]^{-1} \mathbf{G}_D^T \hat{\mathbf{K}}_C(\hat{\mathbf{w}}) - \mathbf{E} \right\} \mathbf{G}_P \hat{\mathbf{u}}_O = \hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{w}}) \, \hat{\mathbf{u}}_O \, . \tag{6}$$

Eq. (6) is solved iteratively for a given vector of the platform displacements $\hat{\mathbf{u}}_O = \mathbf{\Phi}_O \hat{\mathbf{q}}$. Inserting eq. (6) into eq. (3) gives the contact forces between a damper and the platforms of the neighbouring blades. Finally, the contact forces are transformed into the blade coordinate system by $\hat{\mathbf{p}}_C = \mathbf{G}_P^T \hat{\mathbf{f}}$. Assuming a tuned bladed disk, the cyclic symmetry can be used and eq. (2) can be reduced for a single blade (i) to give

$$\left[\hat{\mathbf{S}}^{(i)} - \hat{\mathbf{\Phi}}_O^T \, \mathbf{G}_P^T \, \hat{\mathbf{K}}_C(\hat{\mathbf{w}}) \, \hat{\mathbf{N}}(\hat{\mathbf{w}}) \, \hat{\mathbf{\Phi}}_O \right] \hat{\mathbf{q}}^{(i)} = \mathbf{\Phi}_E^T \, \hat{\mathbf{p}}_E^{(i)} \, , \tag{7}$$

where $\hat{\mathbf{\Phi}}_O$ contains the eigenvectors of the left and right contact node of the blade. $\hat{\mathbf{\Phi}}_O$ becomes complex due to the cyclic constraints. Eq. (7) can be solved iteratively by a damped Newton algorithm.

3. Experimental and theoretical results

To validate the model above, a test rig has been built consisting of two non-rotating blades and a damper that is clamped underneath the blade platforms. The results for the out-of-phase bending mode of the structure are presented in Fig. 1b for different normal forces acting on a cylindrical damper. For a wide range of normal forces the vibration amplitudes and resonance frequencies fit very well. Different underplatform damper types (see Fig. 1a) have been investigated theoretically. In Fig. 1c the resonance amplitude at the tip of the blade is given versus the engine order of a tuned assembly with $n = 20$ blades and a constant normal force. It becomes evident that the damping effect of the cylindrical damper decreases rapidly for lower engine orders, i.e. small interblade phase angles. This effect occurs due to the rolling condition of the cylindrical damper where no friction damping is provided. While the damping effect of the wedge-shaped damper is still present, it has to be considered that this damper type tends to separate partially from the blades in the case of lower normal forces acting between the damper and the blades.

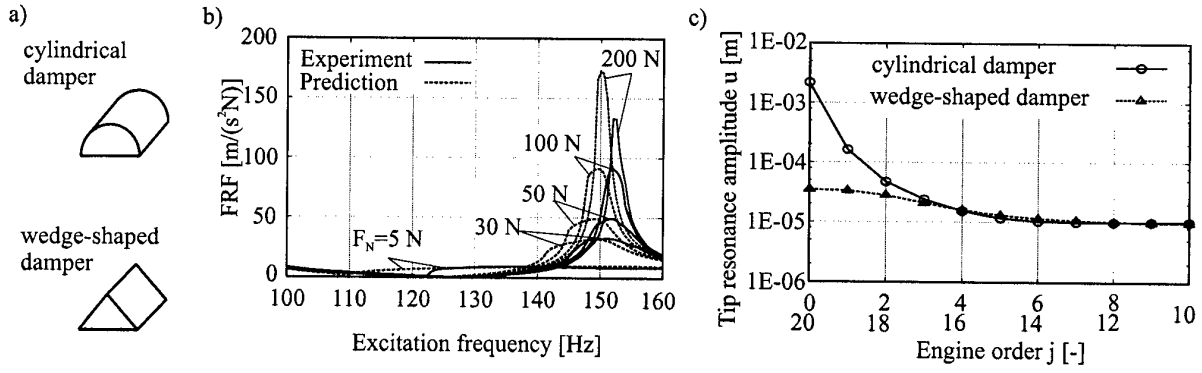


Figure 1: a) Damper types, b) Comparison measurements - predictions, c) Variation of the engine order j

4. References

1 Pfeiffer, F., Hajek, M.: Stick-Slip Motion of Turbine Blade Dampers. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 338 (1651), 1992.

2 Sanliturk, K.Y., Ewins, D.J., Stanbridge, A.B.: Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modelling, Analysis and Comparison with Experimental Data. ASME paper 99-GT-335, 1999.

3 Sextro, W., Popp, K., Wolter, I.: Improved Reliability of Bladed Disks Due to Friction Dampers. ASME paper 97-GT-189, 1997.

4 Sextro, W.: Forced Vibration of Elastic Structures with Friction Contacts. ASME paper DETC1999/VIB8180, 1999.

5 Yang, B.D., Menq, C.H.: Characterization of Contact Kinematics and Application to the Design of Wedge Dampers in Turbomachinery Blading, Parts I and II. ASME paper 97-GT-19/20, 1997.

Addresses: Dipl.-Ing. L. Panning, Dr.-Ing. W. Sextro, Prof. Dr.-Ing. K. Popp; University of Hannover, Institute of Mechanics, Appelstr. 11, D-30167 Hannover, Germany. *E-mail: panning@ifm.uni-hannover.de*

PIETRZAKOWSKI, M.

Control of Laminated Plate Vibrations by Piezoelectric Devices

The paper is focused on active damping of structural vibrations of a simply supported rectangular composite plate by using segmented piezoelectric sensors and actuators. The control law is based on the proportional-velocity feedback. Dynamic responses of the system are obtained due to the classical plate theory and the static model of piezoelement-substructure interaction with the perfect bonding assumption. The dynamic behaviour of the controlled plate is presented by means of amplitude-frequency characteristics.

1. Formulation of the problem

The considered system is a thin rectangular composite plate simply supported at the edges. The plate is symmetrically laminated and composed of orthotropic layers. It is assumed that the plate material is visco-elastic, described by the Kelvin-Voigt model. Segmented piezoelectric patches are mounted to the upper and lower surfaces of the plate and form the set of collocated sensor/actuator pairs working in independent control loops with proportional-velocity feedback. The analysis is simplified by imposing the static model of piezoelement-substructure coupling which is formulated assuming that the sensors and actuators are perfectly bonded to the plate surfaces and their bending stiffness and mass can be neglected (cf. [1], [2], [3]). A two-dimensional piezoelectric effect is taken into account. It is also assumed that the piezoelectric patches are rectangular with their principal material axes parallel to the plate axes x, y.

For specially orthotropic plates, in which the bending-stretching coupling vanishes and the bending-twisting coupling can be neglected, the equation of the transverse plate motion $w(x,y,t)$ is as follows

$$D_{11}w_{,xxxx} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)w_{,xxyy} + D_{22}w_{,yyyy} + \rho t_l w_{,tt} = q\left(x,y,t\right) \tag{1}$$

where: D_{ij} – elements of the complex stiffness matrix referring to the Kelvin-Voigt model of visco-elastic material, t_l, ρ – thickness and equivalent density of the plate, respectively, $q\left(x,y,t\right)$ – loading function.

Due to the considered coupling model the tangential forces produced by the actuators generate the equivalent bending moments, which effectively act along the actuators edges. Therefore, the loading function q is given by

$$q\left(x,y,t\right) = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \tag{2}$$

where: M_x, M_y – distributions of bending moments in x and y directions, respectively.

Taking into account the set of p distributed actuators and after differentiation the function q can be rewritten as

$$\begin{aligned} q\left(x,y,t\right) = \sum_{k=1}^{p} V^k\left(t\right)\Big\{ & C_{a1}\left[H\left(y-y_1^k\right) - H\left(y-y_2^k\right)\right]\left[\delta'\left(x-x_1^k\right) - \delta'\left(x-x_2^k\right)\right] + \\ & + C_{a2}\left[H\left(x-x_1^k\right) - H\left(x-x_2^k\right)\right]\left[\delta'\left(y-y_1^k\right) - \delta'\left(y-y_2^k\right)\right]\Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

where: V^k – voltage applied to the kth actuator, x_1^k, x_2^k, y_1^k, y_2^k – co-ordinates of the kth actuator, $H\left(x\right)$ – Heaviside function, $\delta'\left(x\right)$ – first derivative of Dirac's delta function, C_{a1}, C_{a2} – actuator constants given by

$$C_{a1} = \frac{E_a\left(t_l + t_a\right)}{1-\nu_a^2}\left(d_{31} + \nu_a d_{32}\right), \qquad C_{a2} = \frac{E_a\left(t_l + t_a\right)}{1-\nu_a^2}\left(d_{32} + \nu_a d_{31}\right)$$

where: E_a, ν_a, d_{31}, d_{32} – Young's modulus, Poisson's ratio and the strain piezoelectric constants of actuator material, respectively, t_a – actuator thickness.

The plate deflection w develops strains in the distributed sensors. The perfect bonding assumption implies strain continuity at the interface. The voltage V_s^k produced by the kth sensor can be calculated after integrating over the effective electrode area

$$V_s^k = C_{s1}\int_{x_1^k}^{x_2^k}\int_{y_1^k}^{y_2^k}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy + C_{s2}\int_{x_1^k}^{x_2^k}\int_{y_1^k}^{y_2^k}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy \tag{4}$$

where: C_{s1}, C_{s2} – sensor constants referring to the principal material axes, respectively

$$C_{s1} = \frac{E_s\,(t_l + t_s)}{2C_0\,(1-\nu_s^2)}\,(g_{31} + \nu_s g_{32})\,, \qquad C_{s2} = \frac{E_s\,(t_l + t_s)}{2C_0\,(1-\nu_s^2)}\,(g_{32} + \nu_s g_{31})$$

where: E_s, ν_s, g_{31}, g_{32} – Young's modulus, Poisson's ratio and the stess piezoelectric constants of sensor material, respectively, C_0 – sensor capacity, t_s – sensor thickness.

Assuming the proportional-velocity feedback, the control signal applied to the k*th* actuator is given by the relation $V_a^k = K_p V_s^k + K_d \frac{dV_s^k}{dt}$ where K_p and K_d idicate the gain factors of the controller.

Herein, the plate transverse vibrations are excited by the external voltage $V_e\,(t)$. Therefore, each of the actuators is driven by the electric field of the total voltage $V^k = V_e + V_a^k$. In the case of steady-state responses the voltage $V_e\,(t)$ is a harmonic single frequency function. The solution to the dynamic equation (1) for the uncontrolled as well as controlled system is harmonic with the same angular velocity ω as the excitation.

2. Results and Discussion

The influence of the sensor/actuator segmentation on the structural vibration control is numerically investigated. Calculations are performed for the simply supported, cross-ply laminate of dimensions $0.4 \times 0.4 \times 0.0015\ m$ composed of graphite-epoxy layers with the stacking sequence $[0°/90°/0°/90°/0°]$. A relatively small internal damping is applied (retardation time $\tau_0 = 10^{-5}\ s$). The control system contains PZT-ceramic actuators and PVDF-polymer sensors. The sensor/actuator devices for both the single and segmented piezoelements are dislocated on the same area of the upper and lower plate surfaces. The spatial arrangement of piezoelement patches is shown in Fig.1.

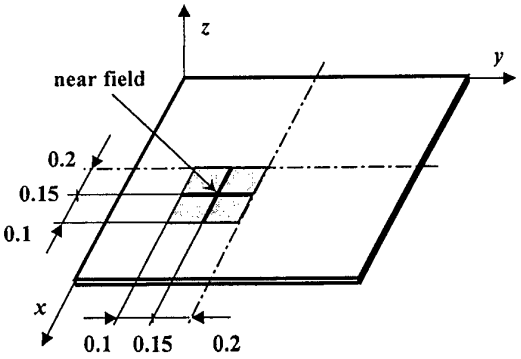


Fig.1 Geomerty of plate with piezoelements

The amplitude-frequency characteristics referring to the controlled plate with velocity feedback are calculated at the actuator field point $x = y = 0.15\ m$.

In Fig.2 the dynamic responses obtained for the single and segmented sensor/actuator pairs are compared. As expected, in the considered form of excitation the segmented piezoelements are less efficient in suppression of the resonant vibrations than the single device. As a result of segmentation some of the higher mode amplitudes vanish while other are generated. This effect is caused by the location of piezoelectric patches in relation to the modal lines. The most preferable position as regards observability and controllability corresponds to the area of the highest surface strains. Even if the segmentation decreases the control system efficiency, its noticeable advantage is a reduction of the hazard of piezoceramic element bending cracks. The appropriate spatial arrangement of sensor/actuator segments can also be adapted to the modal damping strategy.

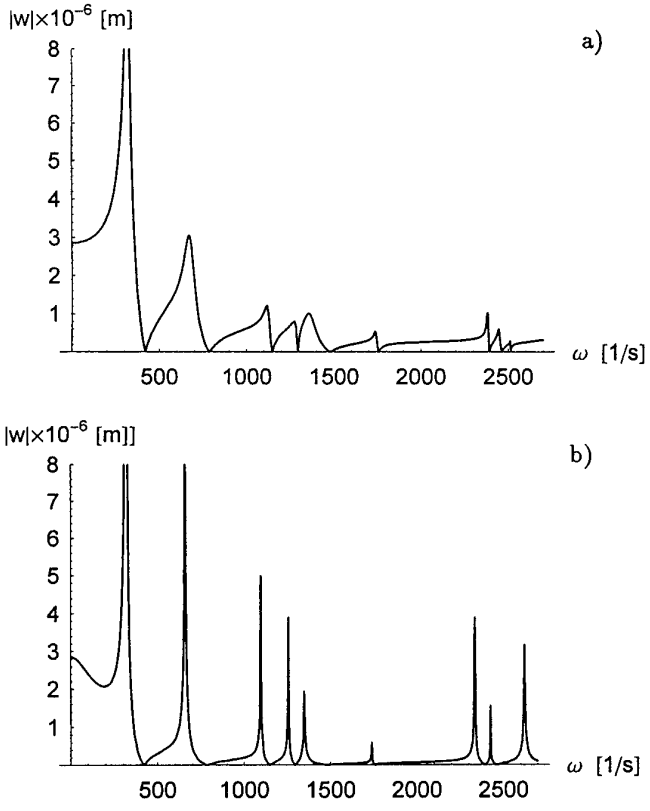


Fig.2 Effect of segmentation on active damping
a) single sensor/actuator pair, b) four sensor/actuator pairs

References

1 Dimitriadis, E., Fuller, C. R., Rogers, C. A.,: Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates, J.of Applied Mechanics, Vol. 113, 1991, 100-107.

2 Tylikowski, A.,: Simulation examination of annular plates excited by piezoelectric actuators, J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar (Editors), Smart Structures, Kluwer Academic Publishers, 1999, 365-372.

3 Tzou, H, S., Fu, H. Q.,: A Study on Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators; Part 1 - Theoretical Analysis; Active Control of Noise and Vibration, ASME, DSC-38, 1992, 239-246.

Address: Pietrzakowski, M., Warsaw University of Technology, Institute of Machine Design Fundamentals, Narbutta 84, Pl-02-524 Warszawa

POTERASU V.F., FILIPESCU C., SALOMEIA L.

SOLVING NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF MECHANICS USING WAVELETS

Wavelets transform is a potential numerical technique to solve the PDE. Because of their advantageous properties of localizations in both space and frequency domain wavelets seem to be a great candidate for adaptive schemes for solutions which vary dramatically both in space and time and develop singularities. The paper presents a new collocation method designed to solve nonlinear time evolution problems and gives as an example a nonlinear two-dimensional thermoacoustic wave problem.

1. INTRODUCTION. In order to take advantage of the properties of wavelet approximations, we have to find an efficient way to deal with nonlinearity and general boundary conditions in the PDE.[1]
The key component of the proposed collocation method is so called "Discrete Wavelet Transform" (DWT) which maps a solution between the physical space and the wavelet coefficient space. The wavelet decomposition is based on a new cubic spline wavelet for $H_0^2(I)$ where I is a bounded interval. In order to treat the boundary conditions an extra boundary scaling function $\varphi_b(x)$ and a boundary wavelet $\psi_b(x)$ have been used. A special point-wise orthogonality of the wavelet fucntions $\psi_{j,k}(x)$ results in $O(NlogN)$ operations for the DWT transform where N is the total number of unknows. Thus, the nonlinear term in the PDE can be easily treated in the physical space and the derivatives of those nonlinear terms then computed in the wavelet space. As a result collocation methods will provide the flexibility of handling nonlinearity (and also the implementation of various boundary conditions) which usually are not sheared by Galerkin type wavelet method and finite element methods.[4]
2. Scaling functions $\varphi(x), \varphi_b(x)$ and wavelet functions $\psi(x), \psi_b(x)$. The scaling function $\varphi(x)$ and boundary scaling function $\varphi_b(x)$ satisfy the following two scale relationship:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{4} 2^3 \binom{j}{4} \varphi(2x-k) \;\; \varphi_b(x) = \beta_{-1}\varphi_b(2x) + \sum_{k-0}^{2} \beta_k \varphi(2x-k) \tag{1}$$

where $\beta_{-1} = 3/4, \beta_0 = -3/8, \beta_1 = 17/4, \beta_2 = -13/4$. To construct a wavelet decomposition of Sobolev space H_0^2 (I) under the inner product, we consider the following two wavelet functions $\psi(x), \psi_b(x)$:

$$\begin{aligned} &\psi(x) = -3/7\varphi(2x) + 12/7\varphi(2x-1) - 3/7\varphi(2x-2) \in V_1 \\ &\psi_b(x) = 24/13\varphi_b(2x) - 6/13\varphi(2x) \in V_1 \end{aligned} \tag{2}$$

For any function $f(x) \in H^2(I)$we can define the following boundary interpolation[3] :

$$I_{b,j}f(x) = \alpha_1\eta_1(2^j x) + \alpha_2\eta_2(2^j x) + \alpha_3\eta_1(2^j(L-x)) + \alpha_4\eta_2(2^j(L-x)) \tag{3}$$

3. Discrete Wavelet Transform and Derivative Matrix. The cubic interpolant $I_{v_0}f(x)$ of data $\{f_k^{-1}(x)\}$ can be compressed as:

$$I_{V_0}f(x) = c_{-1}\varphi_b(x) + \sum_{k=0}^{L-4} c_k\varphi_{0,k}(x) + c_{L-3}\varphi_b(L-x) \tag{4}$$

The interior knots for V_0 are denoted by $x_k^{-1} = k$. On obtain [1] the filter coefficients $c_k, -1 \le k \le L-3$. We choose the following interpolation points in I

$$x_k^{-1} = \frac{k+1.5}{2^j} \qquad -1 \le k \le n_j - 2 \tag{5}$$

where $n_j = DimW_j = 2^j L$. The "point-wise orthogonality" condition acomplished

$$\psi_{j,k}(k_k^{(j)}) = 1, \;\; \psi_{j,k}(k_k^{(j)}) = 0 \qquad -1 \le l \le n_j - 2 \; if \; j \ge 0 \qquad -1 \le l \le L-1 \; if \; j = -1 \tag{6}$$

If we consider the derivative matrix which approximate the first differential operator

$$\mathcal{L}u = u_x \quad u(L) = 0 \tag{7}$$

and using the transformation $\xi = 2^{j+1}x$ it results

$$u'(k) = H\hat{u} = HB^{-1}\ 0 \le k \le L' \quad L' = 2^{j+1}L, I_{b,j+1} \tag{8}$$

and

$$u_\xi = D'u,\ u_x = 2^{j+1}D'u, \qquad x = \frac{j}{2^{j+1}} \qquad 0 \le j \le L' \tag{9}$$

4. Numerical example. Nonlinear two-dimensional thermoacoustic wave problem. We consider a compressible gas (ideal) in rectangular cavity. The gas is initially quiescent at a uniform pressure and temperature. The thermoacoustic waves are generated by raising the temperature locally at the walls. We denote the nondimensional density, pressure, temperature and velocity components in x and y directions by ρ, p, T and u, v respectively. The dimensionless cuantities x and y, i.e. momentum, energy and state equations describe the two-dimensional thermoacoustic waves [2]. The problem is considered for nitrogen gas at a reference temperature of 300K, $\gamma = 1.4$, Pr=3/4. Certain cases for evolution of the temperature of the two-dimensional nonlinear thermoacoustic wave problem are illustrated in Fig.1.

1. References

1 . EDS. W. DAHMEN, A.J. KURDILA, P.OSWALD, Multiscale Wavelet Methods for PDE, Academic Press, 1977

2 . T.R.PROSSER, R.S.CANT,On the Use of Wavelets in Computational Combustion, J.Comput.Physics, 147,337-361,1998

3 . S.BERTOLUZZA, G. NALDI, A Wavelet Collocation Method for the Num. Solution of PDE, Appl.Comput.H.Analysis, 3, 1-9, 1996

4 . V.F.POTERASU, Optimal Control of Smart Composite Plates for Distributed Sensors Using FEM and Wavelets, Ed. U.Gabbert. Modeling and Control of Adaptive Mechanical Structures, VDI, 268, 267-277, VDI Verlag Dusseldorf, 1988

⋮

Address: V.F.POTERASU, L.SALOMEIA Tehnical University "Gh.Asachi" Iasi, Romania
C.FILIPESCU University "Al.I.CUZA" Faculty of Computer Science, Iasi, Romania

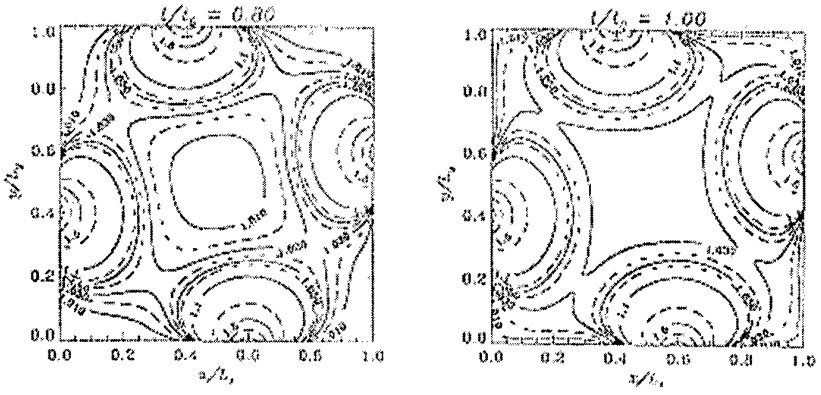


Fig.1. Temperatures map for nonlinear thermoacoustic waves

PRYTULA M., HENTOSH O.

The Hamiltonian Nonlocal Invariant Reduction of a Burgers Equation and its Lie-Algebraic Structure

The Novikov-Bogoyavlensky type reduction procedure for a bi-Hamiltonian nonlinear system upon the submanifolds of crucial points for some invariant functionals, generating by local and nonlocal conservation laws, are represented. By means of the procedure a hydrodynamic Burgers equation is proven to be Hamiltonian and Lax integrable on an invariant nonlocal canonically symplectic manifold of its solutions.

1. In the papers [1,2] the Novikov-Bogoyavlensky type procedure [3] for reducing a bi-Hamiltonian and Lax integrable nonlinear dynamical system, set on a periodical functional manifold, upon finite-dimensional nonlocal invariant submanifolds has been considered. Those submanifolds are generated by common crucial points of local conservation laws and eigenvalues of an associated isospectral problem as nonlocal ones and possess symplectic structures, which are not canonical obviously. The vector fields d/dx and d/dt, where $x, t \in \mathbb{R}-$ space and time variables correspondingly, determined by the system, are Hamiltonian on them. The equations for a monodromy matrix of that spectral problem, give their Lax representations. The letters can be interpreted by means of the Adler-Kostant-Symes theorem [2].

2. A bi-Hamiltonian Kaup-Broer dynamical system, studied in [4]:

$$du/dt = u_{xx} + uu_x + v_x, \quad v_t = (uv)_x - v_{xx}, \tag{1}$$

where $(u,v)^\top \in \mathbf{M}^2 \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^2)$, "$\top$" means transposition, has the infinite hierarchy of involutive smooth local conservation laws $\gamma_j \in D(M^2)$, $j \in \mathbb{Z}_+$:

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u dx, \quad \gamma_1 = \int_0^{2\pi} v dx, \quad \gamma_2 = \int_0^{2\pi} uv dx, \quad \gamma_3 = \int_0^{2\pi} (-uv_x + u_x v + u^2 v + v^2) dx, \ldots .$$

The Lax representation for the system (1) is a compatibility condition for the first order linear differential equations:

$$d\Psi/dx = A[u,v;\lambda]\Psi, \tag{2}$$

$$d\Psi/dt = B[u,v;\lambda]\Psi, \tag{3}$$

where $\Psi = (f,g)^\top \subset L_\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}^2)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ is a spectral parameter, and

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(u-\lambda) & \frac{1}{4}v \\ -1 & -\frac{1}{4}(u-\lambda)) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(u_x + \frac{1}{2}(u^2-\lambda^2)) & -\frac{1}{4}v_x + \frac{1}{8}(u+\lambda)v \\ -\frac{1}{2}(u+\lambda) & -\frac{1}{4}(u_x + \frac{1}{2}(u^2-\lambda^2)) \end{pmatrix}.$$

A Kaup-Broer dynamical system is invariantly reduced to a Burgers equation [5], set on a $2\pi-$ periodical functional manifold $\mathbf{M}^1 \subset C^\infty(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z};\mathbb{R}^1)$, in the case $v \equiv 0$.

Let us investigate differential-geometric properties of the submanifold $\mathbf{M}^2_N \subset \mathbf{M}^2$:

$$\mathbf{M}^2_N := \{(u,v)^\top \in \mathbf{M}^2 : grad\, L_N[u,v] = 0\}, \quad L_N := -(2\gamma_0 + \gamma_2) + \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j,$$

where $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,N}$ are eigenvalues of the spectral problem (2), being smooth functionals on $\mathbf{M}^2$, $c_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,N}$ are some constants, being invariant with respect to (1).

If we choose constants in (4) as $c_j = \int_0^{2\pi} f_j g_j dx$, $j = \overline{1,N}$, the submanifold $\mathbf{M}^2_N \subset \mathbf{M}^2$ will be described by the following way:

$$\mathbf{M}^2_N := \left\{ (u,v)^\top \in \mathbf{M}^2 : v + 1 = \sum_{i=1}^N f_j g_j, \quad u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^N g_j^2 \right\}. \tag{4}$$

Due to [1,2,3] and Dirac's theory [6] we can formulate the theorem.

Theorem The invariant $2N-$dimensional submanifold $\mathbf{M}^2_N \subset \mathbf{M}^2$ has the canonical (up to a constant) symplectic structure

$$\omega^{(2)} = 4\sum_{j=1}^{N} df_j \wedge dg_j. \tag{5}$$

The vector fields d/dx and d/dt in the forms (2) and (3) under $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1,N}$, are Hamiltonian on it with corresponding Hamiltonians functions $h^{(x)} := \bar{h}^{(x)}|_{\mathbf{M}^2_N}$, $h^{(t)} := \bar{h}^{(t)}|_{\mathbf{M}^2_N}$, arising from the relations for the Langrangian $\overline{L}_N$ such as $\overline{L}_N[u,v,f_j,g_j] = L_N[u,v]$, $j = \overline{1,N}$:

$$-d\bar{h}^{(x)}/dx = < grad\,\overline{L}_N[u,v,f_j,g_j],\ (u_x, v_x, f_{j,x}, g_{j,x})^\top >,$$
$$-d\bar{h}^{(t)}/dt = < grad\,\overline{L}_N[u,v,f_j,g_j],\ (u_t, v_t, f_{j,t}, g_{j,t})^\top > .$$

3. The Lax representations for constructed finite-dimensional dynamical systems on $\mathbf{M}^2_N$ are determined by the equations for the reduced monodromy matrix $S = S(x;\lambda)$ of the spectral problem (2):

$$dS_N/dx = [A, S_N], \quad dS_N/dt = [B, S_N], \tag{6}$$

where $S_N = S_N(f_j, g_j; \lambda) := S|_{\mathbf{M}^2_N}$ and $v = \sum_{j=1}^{N} f_j g_j$, $u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} g_j^2$. This matrix gives the Moser map [7] $\mathcal{N} : S(x;\lambda) \to S_N(f_j, g_j; \lambda)$. Because of the monodromy matrix trace gradient generates gradients of local conservation laws for (1), it is obtained the following expression for the monodromy matrix:

$$S_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{2}{\lambda - \lambda_j} \begin{pmatrix} f_j g_j & -f_j^2 \\ g_j^2 & -f_j g_j \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{j=1}^{N} f_j g_j \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

On the submanifold $\mathbf{M}^2_N$ the functional $\Phi(x;\lambda) = tr\ S^2$, being invariant with respect to the vector fields d/dx and d/dt, leads to N independent conservation laws, which are involutive with respect to (5), for the dynamical systems (2) and (3) under $\lambda = \lambda_j$, $j = \overline{1,N}$. Thus, these systems are integrable by Liouville on $\mathbf{M}^2_N$.

The constraint $v = \sum_{j=1}^{N} f_j g_j - 1 = 0$ and its derivative $\sum_{j=1}^{N} f_j^2 = 0$, applied to $\mathbf{M}^2_N$, determine $2N$-dimensional canonically symplectic submanifold $\mathbf{M}^2_N \subset \mathbf{M}^1$ of a Burgers equation, upon which the vector fields d/dx and d/dt are integrable by Lax as well as by Liouville. The formula $u = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} g_j^2$ describes all periodical solutions of a Burgers equation.

To get a Lie-algebraic interpretation for the Lax representations (6) together with (7) , we embed submanifold $\mathbf{M}^2_N$ into some cannonically symplectic matrix manifold $M_{N,2}$, determining on the latter the Hamiltonian action [2] of a deformed polynomial Lie algebra over some semi-simple Lie algebra. The equations (6) can be considered as evolution ones on the dual space to that polynomial Lie algebra in the Adler-Kostant-Symes theorem.

References

1 Prykarpatsky, A., Blackmore, D., Strampp, W., Sydorenko, Yu., Samuliak, R.: Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalism ...; Condesed Matter Phys., N6 (1995), 79–104.

2 Prykarpatsky, A., Hentosh, O., Kopych, M., Samuliak, R.: Neumann-Bogoliubov-Rosochatius oscillatory dynamical system and their integrability via dual moment maps.I; J. Nonl. Math. Phys.,**2**, N2 (1995), 98–113.

3 Bogoyavlensky, O., Novikov, S.: On connection of Hamiltonian formalisms of stationary and nonstationary problems; Func. Anal. and its Appl.,**10**, N1 (1976), 9–13.

4 Prykarpatsky, A., Mykytiuk, I.: Algebraic intergrability of nonlinear dynamical systems on manifolds; Kluwer Publishers, (1998), 533pp.

5 Tasso, H.: Hamiltonian formulation of odd Burgers hierarchy; J. Phys. A: Math.Gen., N29 (1996), 7779–7764.

6 Dirac, P.: Generalized Hamiltonian dynamics; Canad. J.Math., **2**, N2 (1950), 129–148.

7 Moser, J.: Various aspects of integrable Hamiltonian systems; CIME Conference, Bressanone. Prog. Math, **8** (1978).

Addresses: Prof. Dr. Mykola Prytula, L'viv National University, Dept. of Applied Mathematics and Informatics,1 Universitetska Str., L'viv, 79000, Ukraine, e-mail:pmm@uli.franko.lviv.ua

Dr. Oksana Hentosh, Institute for Applied Problems of Mechnics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 3b Naukova Str., L'viv, 79000, Ukraine, e-mail:igor@iapmm.lviv.ua

PRZYBYŁOWICZ, P.M.

Active damping of transverse vibration in pipes conveying fluid subjected to kinematic excitation

The paper is concerned with the problem of transverse vibration of pipes conveying fluid and its suppression by making use of active piezoelectric elements attached to such systems. There are two reasons for the transverse vibration to appear – one is presence of friction between flowing medium and internal surface of the pipe, which produces a follower load, second is kinematic excitation applied to the clamped end of the pipe. The excitation is to reflect possible forcing from the pump that undergoes a rotating unbalance. Incorporation of piezoelectric sensors and actuators results in a growth of the fluid flow velocity at which self-excitation occurs, and affects a subtle interplay between tendency of the pipe to oscillate at its near-critical frequency and action of the forcing term. The coexistence of the two effects can lead to irregular vibration of the pipe. It is shown that the active damping puts the irregularity to harmonic order.

1. Formulation of the problem

A pipe conveying fluid is a non-conservative system subjected to follower-type of loading distributed over the entire length of the pipe. The reason for the follower force to occur is friction between the flowing fluid and the internal wall of the pipe. In that way the pipes conveying fluids belong to the same class of mechanical systems as the Leipholz columns, undergoing follower forces of an abstract origin. It is well-known that non-conservative loading, if sufficiently strong, can lead to loss of stability and appearance of self-excited vibration. The thus induced motion manifests in fact a bifurcation of the fixed solution to the equations of motion into qualitatively different solution having a periodic character. In purely mathematical terms, the system is said to undergo Hopf's bifurcation.

In this paper the problem of dynamic response of the pipe conveying fluid at the critical point and the near-critical evolution of the transverse vibration is analysed. The analysis is extended to include the effect of kinematic excitation that can interfere with self-excited vibration. It also takes up the problem of artificial suppression of the interference by making use of active piezoelectric elements. The piezoelectric actuators are expected to shift the critical flow velocity at which the self-excitation appears towards greater values (i.e. to enlarge the stability domain), and to damp the near-critical vibration.

Consider the system consisting of a vertical pipe mounted to a pump (see Fig. 1) that can vibrate due to rotating unbalance. The vibration is transferred to the pipe, so it is said to be excited kinematically afterwards. Only the transverse component of the excitation is taken into account in the model. The pipe itself is a uniform cantilever beam of the length ℓ with circular cross-section. A fluid flows through the pipe with constant velocity v. Near the clamped end there are patches of piezoelectric sensors and actuators (E) glued to outer surface of the pipe. They are distanced by x_a from the clamp. The operating of the piezoelements is controlled by an electronic system (S). The model takes into consideration external damping from surrounding medium but disregards internal dissipation in the material of the pipe. There is, however, another effect the attention is paid to in the system – the Brazier effect. It describes a drop of the bending stiffness of thin-walled tubes due to ovalisation of the cross-section under bending. According to Reissner (1959) the degressive non-linearity resulting from such an ovalisation can be quantitatively expressed by the following formula:

$$M = EJ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left[1-\gamma\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\right] \qquad \text{where} \quad \gamma = \frac{3r^4(1-\nu^2)}{2h^2} \tag{1}$$

if pressure inside the tube is neglected. The following denote: E – Young's modulus of the tube, J – its cross-sectional moment of inertia, w – transverse displacement, x – spatial coordinate, r – radius of the tube, h – its thickness, and ν – Poisson ratio.

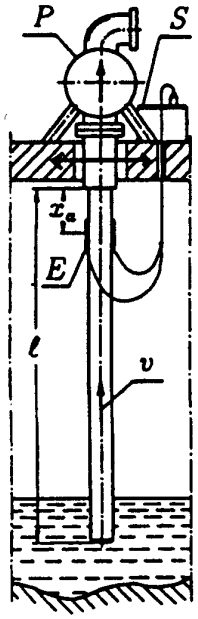


Fig. 1. Model of the pipe system

2. Equations of motion and results of numerical simulation

Dynamics of pipes conveying fluids has been recognised since early 50s, yet the first to formulate analytical description enabling investigation of the flutter-type instability was Païdoussis (1970). He developed a linear equation of motion, which allowing for the Brazier effect, operating of the piezoelectric elements, and the kinematic excitation assumes the following final (and non-linear) form:

$$(m_p + m_f)y_{,tt} + EJ\{y_{,xxxx}[1 - 3\gamma y_{,xx}^2] - 6\gamma y_{,xx}y_{,xxx}^2\} + k_d[y_{,xt}(x_{a2}) - y_{,xt}(x_{a1})][\delta'(x - x_{a1}) + \\ - \delta'(x - x_{a2})] + 2m_f y_{,xt} + (m_p + m_f)gy_{,x} + [m_f v^2 - (m_p + m_f)(\ell - x)g]y_{,xt} = s_0(m_p + m_f)\omega^2 \sin\omega t \quad (2)$$

where m_p and m_f denotes mass of the pipe and the fluid per unit length, respectively, v – velocity of the fluid flow, k_d – gain factor in the control system, x_{a1}, x_{a2} – beginning and ending coordinates of the actuators, $\delta'(.)$ – first derivative of the Kronecker delta function, g – acceleration of gravity, s_0 and ω – amplitude and frequency of the kinematic excitation. Equation (2) is expressed in terms of relative transverse displacement of the pipe y, i.e. the displacement measured with respect to the clamped end that vibrates together with the pump. The excitation function is assumed independent of the spatial coordinate: $s = s(t)$. The absolute displacement of the pipe is then: $w(x,t) = y(x,t) + s(t)$. Details of the operating of the control system were discussed by Kurnik (1995).

Equation (2) has been discretised by means of Galerkin's orthogonalisation method based on the two first eigenmodes of the cantilever. The thus derived ordinary differential equations have been examined numerically. Simulations enabled determination of resonant characteristics in which a significant drop of vibration amplitude brought about by action of the piezoactuators could be observed. This effect is shown in Fig. 2 where the upper curve corresponds to disabled control system, and the two curves below to activated system at two exemplary values of the gain factor k_d. A typical, for degressive systems, inclination of the resonant curves (due to Brazier's effect) can be seen in this diagram. In Fig. 3 two phase portraits corresponding to the pipe without and with active damping are shown. The left one indicates a superposition of self- and kinematically excited vibration that led to irregular motion of the pipe. Application of the piezoactuators lowered the vibration amplitude and choked the irregularity by putting the response to harmonic order (compare the portrait on the right).

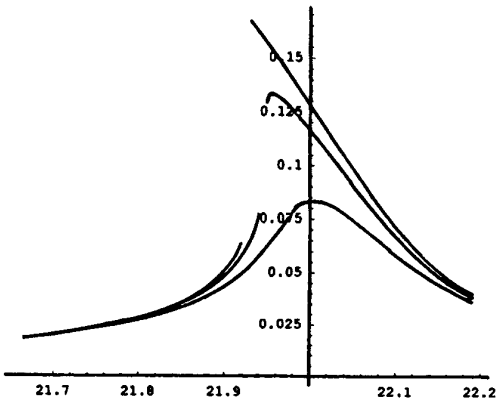


Fig. 2. Resonant curves for disabled and enabled active control system

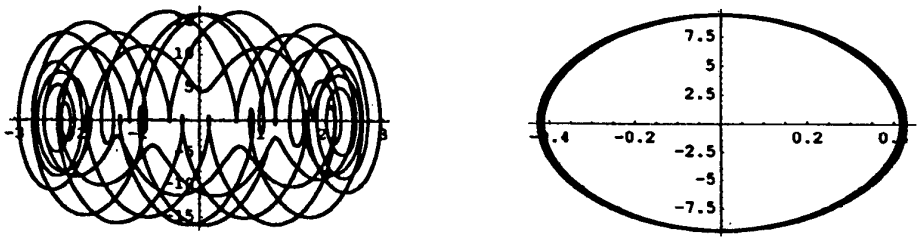


Fig. 3. Phase portraits for disabled and enabled active control system

3. Concluding remarks

Fluids flowing through pipes can generate follower force responsible for loss of stability and appearance of self-excited vibration. Piezoelectric actuators attached to outer surface of a pipe are capable of producing bending moment and that way of enlarging the stability domain by increasing the critical flow speed. Kinematically excited vibration interferes with self-excitation which results in an irregular motion of the pipe. Active damping can protect the system from such a kind of dynamic response.

4. References

1 Kurnik, W., Przybyłowicz, P.M., 1995, Nonlinear behavior of the Leipholz column actively stabilzed by piezoelements, Proc. Int. Symp. ACTIVE 95, (Eds.) S. Sommerfeld, H. Hamada, Newport Beach, CA, USA, 139-150

2 Païdoussis, M.P., 1970, Dynamics of tubular cantilevers conveying fluid, *J. Mechanical Engineering Science*, **12**, 85-103

3 Reissner, E., 1959, On finite bending of pressurized tubes, *Journal of Applied Mechanics*, **26**, 386-392

Address: PRZYBYŁOWICZ, P.M., Warsaw University of Technology, Narbutta 84, 02-524 Warszawa, Poland

RAUE, A.

Zur Wärmeschockbelastung von Verbundbalken

In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode vorgestellt, mit der Wärmeschockprobleme von Verbundbalken mit Schlupf zwischen den Schichten untersucht werden können. Die Balkengleichungen unter Annahme eines elastischen Schlupfgesetzes in der Fuge werden auf einen temperaturabhängigen Schlupf erweitert. Dieses führt auf ein zeitvariantes System. Für eine Lösung mit Hilfe der Modalen Analyse werden nach Abspaltung quasistatischer Anteile aus der Gesamtantwort die zeitabhängigen Terme auf die rechte Seite gebracht und das System unter Verwendung der Eigenfunktionen des zeitunabhängigen Hintergrundsystems mit den zeitabhängigen Termen als zusätzliche Anregung iterativ gelöst.

1. Bewegungsgleichung

Die Gleichung der Schwingungsantwort eines schubstarren Verbundbalkens aus zwei homogenen linear elastischen Schichten unter Wärmeschock bei Annahme eines elastischen Schlupf-Gesetzes mit Steifigkeitskoeffizient k in der Fuge (vgl. [2]) lautet:

$$w_{,xxxxx} - k\,\lambda^2 w_{,xxx} + \frac{1}{B_0}\,\mu\,\ddot{w}_{,xx} - k\,\lambda^2 \frac{1}{B_\infty}\,\mu\,\ddot{w} = k\,\lambda^2\,\kappa_{\theta,xx} - \kappa^{(0)}_{\theta,xxxx} \quad , \quad \lambda^2 = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{d^2}{B_0}\right) \tag{1}$$

B_i , D_i bezeichnen hierbei die Biege- und Dehnsteifigkeit der Teilquerschnitte und B_0 , B_∞ die Biegesteifigkeiten des Trägers ohne bzw. mit starrem Verbund; d entspricht dem Teilschwerpunktsabstand der beiden Schichten. Die über den Querschnitt gemittelten eingeprägten Werte der Temperaturkrümmungen κ_θ und $\kappa^{(0)}_\theta$ ergeben sich für einen Balken unter der Last eines beliebig verteilten instationären Temperaturfeldes $\theta(x, z, t)$ infolge inneren oder äußeren Wärmeschocks zu:

$$\kappa_\theta = \frac{1}{B_\infty}\int_A E\,\alpha\,\theta\,z\,dA \quad , \quad \kappa^{(0)}_\theta = \frac{1}{B_0}\left(B_1\,\kappa_{\theta 1} + B_2\,\kappa_{\theta 2}\right) \quad , \quad \kappa_{\theta i} = \frac{\alpha_i}{B_i}\int_{A_i} E_i\,\theta\,z_i\,dA, \quad i = 1, 2 \; . \tag{2}$$

Im folgenden sollen temperaturabhängige Schlupfprobleme betrachtet werden. Dazu wird exemplarisch eine linear von der Temperatur abhängige Steifigkeit in das Schlupf-Schubfluß-Federmodell der Fuge eingeführt.

$$T = k(\theta)\,\Delta u \quad , \qquad k(\theta) = k_0\left(1 - c\,\bar{\theta}(x, t)\right) \; , \tag{3}$$

wobei $\bar{\theta}(x, t)$ die Temperatur in der Fuge bezeichnet. In Gleichung (1) ist dann k durch $k(\theta)$ aus Gleichung (3) zu ersetzen. Für den Träger mit homogenem Querschnitt, der auf eine inhomogene Balkengleichung sechster Ordnung führt, wurde das äußere Wärmeschockproblem erstmalig in [1] unter Abspaltung der quasistatischen Lösung - mit Hinweis auf das Auftreten einer zweiten charakteristischen Zeit neben der mechanischen - behandelt. Nachfolgend wird diese effektive Vorgangsweise auf Verbundbalken angewendet.

2. Lösung der Bewegungsgleichung

Durch die Abhängigkeit der Fugensteifigkeit vom instationären Temperaturfeld verhält sich dieses System im Gegensatz zum System mit linear elastischem Schlupfgesetz in der Fuge nicht mehr zeitinvariant. Aber analog zum Vorgehen in [2] bei linear elastischem Schlupf läßt sich die Durchbiegung in quasistatische und komplementär dynamische Anteile separieren ($w = w_D + w_S$) , wodurch Genauigkeit und Konvergenz gesteigert werden können. Von der entsprechend erweiterten Gl. (1) läßt sich dann - unabhängig vom zeitvarianten Systemverhalten - die Gleichung für die quasistatische Durchbiegung,

$$w_{S,xxxxx} - k(\theta)\,\lambda^2\,w_{S,xxx} = k(\theta)\,\lambda^2\,\kappa_{\theta,xx} - \kappa^{(0)}_{\theta,xxxx} \; , \tag{4}$$

die sich exakt lösen läßt, abspalten. Es verbleibt eine Bewegungsgleichung für die komplementär dynamischen Anteile, mit den Zeitableitungen der quasistatischen Lösung als Anregung,

$$w_{D,xxxxx} - k(\theta)\,\lambda^2 w_{D,xxx} + \frac{1}{B_0}\,\mu\,\ddot{w}_{D,xx} - k(\theta)\,\lambda^2 \frac{1}{B_\infty}\,\mu\,\ddot{w}_D = k(\theta)\,\lambda^2 \frac{1}{B_\infty}\,\mu\,\ddot{w}_S - \frac{1}{B_0}\,\mu\,\ddot{w}_{S,xx} \ . \tag{5}$$

Um das verbleibende System, Gl. 5, trotz Zeitvarianz mit Hilfe des häufig verwendeten Verfahrens der Modalen Analyse lösen zu können, werden in dieser Arbeit die zeitabhängigen Anteile auf die rechte Seite gebracht und das System in ein zeitinvariantes Hintergrundsystem überführt, mit dessen Hilfe sich die Lösung des zeitabhängigen Problems iterativ bestimmen läßt.

$$\begin{aligned} &w_{D,xxxxx} - k_0\,\lambda^2 w_{D,xxx} + \frac{1}{B_0}\,\mu\,\ddot{w}_{D,xx} - k_0\,\lambda^2 \frac{1}{B_\infty}\,\mu\,\ddot{w}_D \\ &= k(\theta)\,\lambda^2 \frac{1}{B_\infty}\,\mu\,\ddot{w}_S - \frac{1}{B_0}\,\mu\,\ddot{w}_{S,xx} - k_0\,c\,\bar{\theta}(x,t)\,\lambda^2 w_{D,xxxxx} - k_0\,c\,\bar{\theta}(x,t)\,\mu\,\frac{\lambda^2}{B_\infty}\ddot{w}_D \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Die komplementär dynamische Antwort dieses neuen Systems wird nach seinen Eigenfunktionen entwickelt.

$$w_D(x,t) = \sum_{n=1}^{N} Y_n^D(t)\,\Phi_n(x) \ . \tag{7}$$

Nach modaler Projektion und Addition der ebenfalls nach den Eigenfunktionen entwickelten Randbedingungen des Systems läßt sich die Gleichung mit Hilfe der zugehörigen Orthogonalitätsbeziehungen des nun zeitunabhängigen Problems mit linear elastischem Schlupf (vgl. dazu [2]) in folgendes Gleichungssystem der modalen Koordinaten überführen. (Die linearen Differentialoperatoren C_{j1}^R , C_{j2}^R ergeben sich aus den Randbedingungen.)

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_n^D + \omega_n^2\,Y_n^D = &\int_0^l \Phi_n \left(\frac{\mu}{B_0}\,\ddot{w}_{S,xx} - k(\theta)\,\frac{\lambda^2\mu}{B_\infty}\,\ddot{w}_S \right) dx + \sum_{j=1}^{3} \Phi_n(0,l) \left\{ C_{j1}^R\left[\kappa_\theta(0,l)\right] + C_{j2}^R\left[\kappa_\theta^{(0)}(0,l)\right] \right\} \\ &+ \lambda^2 k_0\,c \sum_m \left[Y_m^D \int_0^l \left(\bar{\theta}(x,t)\,\Phi_n\,\Phi_{m,xxxx} \right) dx + \ddot{Y}_m^D \int_0^l \left(\bar{\theta}(x,t)\,\Phi_n \frac{\mu}{B_\infty}\Phi_m \right) dx \right] = K_n(t) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

Die Partikularlösung läßt sich mit Hilfe des Duhamelschen Faltungsintegrals i.a. in einer zeitinkrementellen Berechnung bestimmen, wobei die Anregung $K_n(t)$ iterativ anzupassen ist. Dieser wird noch die homogene Lösung mit den komplementär dynamischen Anfangsbedingungen der modalen Koordinaten überlagert.

$$Y_n^D(t) = \left[\ \cos\omega_n t\ Y_n^D(0) + \frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\ \dot{Y}_n^D(0)\ \right] + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t K_n(\tau)\sin\left[\ \omega_n(t-\tau)\ \right] d\tau \ . \tag{9}$$

Einführung einer modalen Materialdämpfung in Gl. (8) erhöht den numerischen Aufwand nicht, Gl. (9) wäre dann entsprechend zu erweitern. Die Gesamtdurchbiegung folgt durch Überlagerung der quasistatischen und komplementär dynamischen Anteile, wobei die quasistatischen Anteile nicht modal entwickelt, sondern durch die exakte Lösung ersetzt werden:

$$w = w_S + \sum_{n=1}^{N} Y_n^D\,\Phi_n \ . \tag{10}$$

3. Literatur

1. BOLEY, B. A.: Thermally Induced Vibrations of Beams. J. Aerospace Sciences 23 (1956), 179-181.
2. ADAM, C., HEUER, R., RAUE, A., ZIEGLER, F.: Thermally Induced Vibrations of Composite Beams with Interlayer Slip. J. Thermal Stresses 23 (2000), 747-772.

Anschrift: A. RAUE, Institut für Allgemeine Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/E201, A-1040 Wien, Austria

RYCZEK, B., BOGACZ, R.

Dynamics of Mechanical System with Dry Friction Described by the Model with Several Parameters

The present paper attends to a problem of vibrations of the system with self- and external excitation. The system is sustained by dry friction which is described by an experimentally identified dry friction model. The friction force is the function of the following parameters: relative velocity, time of adhesion, force rate and acceleration sign. The model was applied for the simulation of the self-excited system motion in the case of stick-slip, quasi-harmonic vibrations as well as stable slip.

Our objection was to investigate the system motion, with additional external harmonic excitation. Introduction of it, results in appearing qualitatively new system behaviour. The outcome of computer simulation of the system with simultaneous self- and external excitation is submitted in the present paper.

1. Model of the system with self- and external excitation

Self-sustained vibrations exist in non-conservative, autonomous, non-linear systems allowing for the function describing the friction model. In the considered system, friction force F occurs between a rigid body of mass M and a longitudinally undeformable belt that moves at a constant velocity S (see Fig. 1). The body is connected with the referring frame by means of viscoelastic element with parameters of the Voigt model: spring stiffness K and viscous damping D. The function representing the friction model, as a function of relative velocity, is odd, continuous and piecewise linear, as visible in Fig. 2. The external excitation is characterized by an amplitude U_0 and a frequency Ω. Similar to the afore-mentioned system but for simpler friction models, was considered in [1].

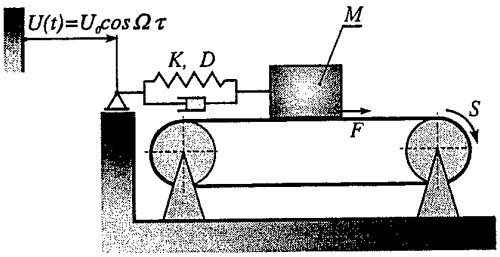


Figure 1: System with self- and external excitation.

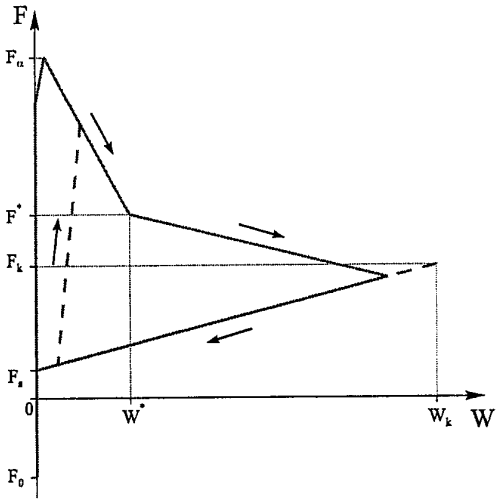


Figure 2: Friction model.

On the basis of the assumptions mentioned above, using dimensionless quantities (cf. [1]), the motion of the investigated system is described by the equation

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x = f(w, f_s, sgn\dot{w}) + u_0 \cos \eta t, \tag{1}$$

where $f()$ - function describing the friction model, f_s - static friction force, d - damping, s - belt velocity, w - relative velocity, u_0 - excitation amplitude, η - excitation frequency.

Static friction force is a function of the parameters

$$f_s = f(\delta, t_s), \tag{2}$$

where t_s - time of adhesion of the mass to the belt, δ - force rate.

Dependence (2) has been established experimentally in [2].

2. Computer simulation of the system motion

As a result of theoretical investigations of the system with self- and external excitation, phase trajectories for the assigned system motion parameters have been calculated (see Fig. (3)).

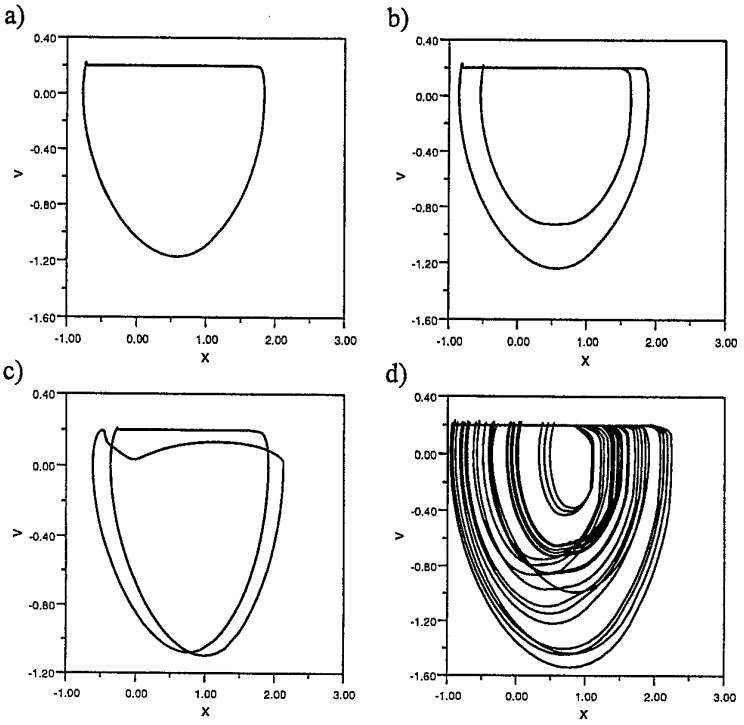


Figure 3: Different types of mass motion for various values of system parameters: a) $s = 0.20, \eta = 0.65, u_0 = 0.05$, b) $s = 0.20, \eta = 0.70, u_0 = 0.05$, c) $s = 0.20, \eta = 0.15, u_0 = 0.05$, d) $s = 0.20, \eta = 0.80, u_0 = 0.05$.

When limiting the consideration to the range of belt velocity s, within stick-slip vibrations occur, it is possible to obtain qualitatively different system behaviour. For small frequency of excitation the system reveals one-periodic vibrations (see Fig. 3a), alike the one appearing for the system without external excitation (cf. [3]). Nevertheless, for greater values of parameter η, in the system two- (Fig. 3b) or higher-periodic motion appears, leading to non-periodic (chaotic) vibrations as shown in Fig. 3d. Within the scope of the stationary solutions of the same numbers of periods, the system demonstrates qualitatively different behaviour as well. As an example, Fig. 3c depicts two-periodic phase trajectory when, in contrast with the one shown in Fig. 3b, the first cycle of motion takes the form of stick-slip vibrations whereas the second - quasi-harmonic.

Existing of one-, higher- and non-periodic solutions enables to suppose that the route to chaos via period doubling exists, which will be studied in the further investigations into the considered matter.

3. References

1 POPP, K., HINRICHS, N., AND OESTREICH, M.: Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous self and external excitation, Sadhana, Vol. 20, Parts 2-4, (1995), 627–654.

2 BOGACZ, R., RYCZEK, B.: Dry friction self-excited vibrations; Analysis and Experiment; Engineering Transactions **45,3-4** Warsaw, 1997, 487–504.

3 BOGACZ, R., RYCZEK, B.: Stability analysis of frictionally excited vibrating system; Machine Dynamics Poblems, Warsaw, to appear.

Address: PROF. ROMAN BOGACZ, M.Sc. BOGUSŁAW RYCZEK, Institute of Fundamental Technological Research, P. A. Sc., Świętokrzyska 21, 00-049 Warsaw, Poland
e-mail: rbogacz or bryczek@ippt.gov.pl

SCHMALFUSS, C.; WEDIG, W.; AMS, A.

Bremsenmodell mit nichtlinearer stochastischer Oberfläche [1]

Die Scheibenbremse von Kraftfahrzeugen wird als lineares zeitvariantes Modell mit einem Freiheitsgrad betrachtet. Fertigungs-und Montagetoleranzen sowie Verschleiß lassen der Rauhigkeit der Scheibenoberfläche, dem Schlag, dem Abrieb und dem Reibwert besondere Bedeutung zukommen. Sie werden durch verschiedene nichtlineare stochastische Prozesse in den Modellen berücksichtigt. Mittels der Ergodentheoreme können Stabilitätsaussagen gemacht werden. Die Bereiche kritischer Fahrgeschwindigkeiten werden in Stabilitätskarten aufgezeigt.

1. Das Modell

Die Bremsscheibe in Bild (1) dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um den Scheibenmittelpunkt. Ein Belag (Masse m, Schwerpunkt S) wird horizontal geführt. Er ist durch Federn $k/2$ und geschwindigkeitsproportionale Dämpfer $d/2$ visko–elastisch mit der Umgebung verbunden. Die horizontale Bewegung wird durch die Absolutkoordinate x beschrieben. Desweiteren existiert eine visko–elastische Verbindung zwischen Belag und Scheibe mit den Feder– und Dämpferkonstanten c und b. Bei Betätigung der Bremse wird der Belag im Abstand r vom Scheibenmittelpunkt an die Scheibe gedrückt. Auf der Scheibe befindet sich das körperfeste Koordinatensystem $u(s)$. Die Bewegung zwischen dem Inertialsystem und dem körperfesten System wird durch die Koordinate y und der Weg auf der Scheibe durch die Koordinate s beschrieben.

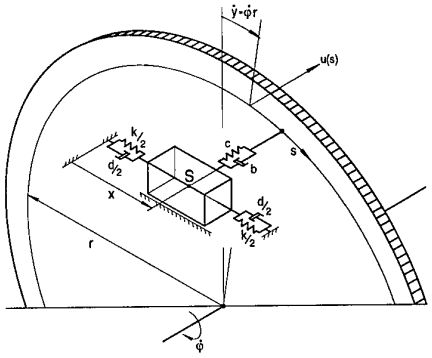


Bild 1: Subsystem Scheibe – Belag

Aus der Abbildung (1) kann durch einen Freischnitt der Masse m, dem dynamischen Gleichgewicht nach D'Alembert, dem Coulombschen Reibungsansatz (Reibzahl μ), den Beziehungen $s = x - y$ und $\dot{s} = \dot{x} - \dot{y}$ unter Verwendung der harmonischen Anregung $u(s) = -u_0 + u_1 \sin \Omega s$, $u'(s) = u_1 \Omega \cos \Omega s$ (u_0 statische Vorspannung des Bremsbelages, u_1 Taumelfehler, Ω Wegkreisfrequenz der Bremsscheibe) für konstante Scheibengeschwindigkeit $\dot{y} = v_0 = const.$, $s \approx -v_0 t$ die homogene Differentialgleichung [2]

$$\ddot{x} + \left[2D\omega_1 + 2B\omega_0 \frac{\mu u'(t) + u'^2(t)}{1 - \mu u'(t)} \right] \dot{x} + \omega_1^2 x \quad = \quad 0 \tag{1}$$

hergeleitet werden. Darin sind B und D Lehrsche Dämpfungsmaße, ω_0 und ω_1 Kreisfrequenzen, hochgestellte Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit t und Striche Ableitungen nach dem Weg s.

2. Harmonische Anregung und additives Rauschen (Cos– und Parametrisches Modell)

Verwendet wird eine harmonische (Schlag) und eine stochastische (Rauhigkeit) Oberfläche $u'(t) = u_1 \Omega \cos \Omega v_0 t + Z_t$ mit $|Z_t| \leq z_0$ (z_0 Amplitudenbegrenzung). Als stochastisches Modell wird das Cos–Modell (begrenzte Amplitude) mit $Z_t = z_0 \cos \Phi$, $\dot{\Phi}_t = \sigma \dot{W}_t$ bzw. das parametrische Modell (begrenzte Amplitude, Grenzfrequenz und Verteilungsdichte wählbar) mit $\dot{Z}_t = \left(1/2\sigma^2 - \omega_g\right) Z_t + \sigma \sqrt{z_0^2 - Z_t^2} \dot{W}_t$ (W_t Wiener Prozeß, σ Intensität, ω_g Grenzfrequenz) verwendet. Nach Transformation auf Polarkoordinaten $A_t = \sqrt{X_t^2 + \left(\dot{X}_t/\omega_1\right)^2}$, $\Psi_t = \arctan\left(\dot{X}_t/(\omega_1 X_t)\right)$ (A_t Amplitude, Ψ_t Phase) lauten die stochastischen Differentialgleichungen nach Itô [1]

$$d\Psi_t \quad = \quad \left\{ - \left[D\omega_1 + B\omega_0 \frac{\mu U_t' + U_t'^2}{1 - \mu U_t'} \right] \sin 2\Psi_t - \omega_1 \right\} dt \tag{2}$$

[1] gefördert durch das Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Technologie; FKZ: 13N7176.

$$d\ln A_t = \left\{ -\left[D\omega_1 + B\omega_0 \frac{\mu U_t' + U_t'^2}{1-\mu U_t'} \right] 2\sin^2\Psi_t \right\} dt \tag{3}$$

Cos–Modell: $Z_t = z_0 \cos\Phi_t, \quad d\Phi_t = \sigma dW_t$ (4) || P–Modell: $dZ_t = -\omega_g Z_t dt + \sigma\sqrt{z_0^2 - Z_t^2}\, dW_t.$ (5)

Mit dem multiplikativen Ergodentheorem von Oseledec $\lambda = \lim_{t\to\infty} 1/t \ln(A_t/A_0) = \lim_{t\to\infty} 1/t$ $\int_0^t -\left[D\omega_1 + B\omega_0(\mu U_t' + U_t'^2)/(1-\mu U_t')\right] 2\sin^2\Psi_t\, dt$ kann der Top–Lyapunov–Exponent λ ermittelt werden. Für $\lambda < 0$ ist das System stabil und für $\lambda > 0$ instabil. Das dynamische System wird über eine Monte–Carlo–Simulation untersucht. Eine Diskretisierung (Euler–Verfahren) $d\Psi \approx \Delta\Psi$, $dt \approx \Delta t$, $dW_t \approx \sqrt{\Delta t} R_n$ $(dW_t^2 = dt)$ liefert die benötigten Rekursionsgleichungen. In Bild (2) sind die Dichtefunktionen $p(z)$ für das Cos– und das parametrische Modell dargestellt. Es wird deutlich, daß der stochastische Prozeß beim Cos–Modell fast ausschließlich die Amplitudengrenzen $\pm z_0$ annimmt, dagegen können beim parametrischen Modell Dichteverteilungen von der Delta–Nadel bis hin zur Gleichverteilung gewählt werden. In Bild (3) ist der Top–Lyapunov–Exponent λ über der Amplitudenbegrenzung z_0 für verschiedene Rauschintensitäten $\sigma = 1, 3, 10$ für das Cos-Modell aufgetragen. Dabei wurden die Parameter $\omega_0 = 1000\,[1/s]$, $\omega_1 = 1\,[1/s]$, $\Omega = 5\,[1/m]$, $\mu = 0.3, B = 0.1$, $D = 0.001$, $v_0 = 0.4\,[m/s]$, $\eta = \Omega v_0/\omega_1, T = 10^4\,[s]$, $\Delta t = 1\,[ms]$, $N = T/\Delta t, u_1 = 3\cdot 10^{-3}\,[m]$ verwendet. Es ist erkennbar, daß das System mit wachsender Rauschintensität σ stabiler wird. Desweiteren kann festgehalten werden, daß kleine Amplitudenbegrenzungen z_0 destabilisierenden und große z_0 stabilisierenden Einfluß haben.

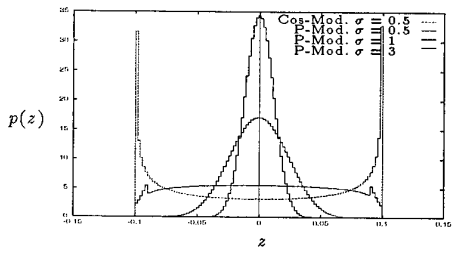


Bild 2: Dichteverteilungen Cos- und P- Modell

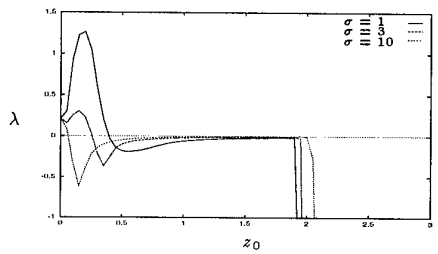


Bild 3: Einfluß der Rauschintensität

In den Bildern (4) und (5) ist der Top–Lyapunov-Exponent λ über der Amplitudenbegrenzung z_0 für das parametrische Modell aufgetragen. Dabei wurden die Parameter ω_0, ω_1, Ω, μ, B, D, v_0, η, Δt und N wie beim Cos–Modell gewählt. Weitere Parameter von Bild (4) sind $\sigma = 0.3/3, u_1 = 10^{-4}/3\cdot 10^{-3}\,[m]$, $\omega_g = 10\,[1/s], z_0 \in [0,3]$, $T = 10^5[ms]$ und von Bild (5) $u_1 = 3\cdot 10^{-3}\,[m], z_0 \in [0,3]$, $\omega_g = 1/5/10/20/100\,[1/s]$, $T = 10^4[ms]$, $\omega_g/\sigma^2 = const.$ und $\sigma = 0.09/0.21/0.3/0.42/0.94$. In Bild (4) erkennt man, daß nur ein großer Scheibenschlag u_1 das System bei kleinen Amplitudengrenzen z_0 destabilisiert. Außerdem gilt, je größer die Rauschintensität σ gewählt wird, desto stabiler ist das System. Bei Bild (5) ist die Dichteverteilung konstant. Es zeigt sich, daß eine starke Korrelation destabilisierend und eine schwache Korrelation stabilisierend wirkt.

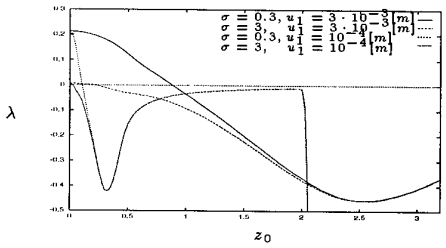


Bild 4: Wirkung eines großen Scheibenschlages

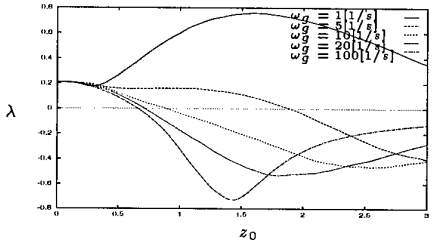


Bild 5: Stabilität in Abhängigkeit der Korrelation

3. References

1 Arnold, L.: Stochastische Differentialgleichungen. R. Oldenbourg Verlag München Wien (1973), 178–182, ISBN 3-486-33941-9.

2 Schmalfuss, C.; Wedig, W.; Ams, A.: Nichtlineare Oberflächenmodelle der Bremsscheibendynamik. ZAMM, Berlin **80** Suppl. 2, 299–300, ISSN 0946-8463.

Addresses: Dipl.–Math. techn. C. Schmalfuss, Prof. Dr.–Ing. W. Wedig, Dr.–Ing. A. Ams, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Technische Mechanik, Kaiserstraße 12, D–76128 Karlsruhe.

SCHMIDT, B.; SPERLING,L.; DUCKSTEIN, H.

Zum Einfluß der Verformbarkeit des Tragkörpers auf die Selbstsynchronisation von Unwuchtrotoren

Ein horizontal angeordneter, massebehafteter, dämpfungsfreier, federnd gelagerter Euler-Bernoulli-Balken soll durch zwei separat angetriebene Unwuchtrotoren zu Vertikalschwingungen mit möglichst geringen Balkenverformungen erregt werden. Bei gegebener Rotordrehzahl wird in Abhängigkeit von der Anordnung der Rotoren der Einfluß der Verformbarkeit des Balkens auf die stabile Phasendifferenz und auf die Bewegung des Balkens untersucht.

1. Bedingungsgleichung für die stabile Phasendifferenz

Die Achsen mehrerer separat angetriebener Unwuchtrotoren seien auf einem linearen ungedämpften mechanischen System, dem Tragsystem, gelagert. Sind die Rotordrehzahlen durch die so erregten Schwingungen beeinflußbar, so tritt unter sehr allgemeinen Bedingungen der Effekt der Selbstsynchronisation ein, d.h., daß die Rotoren - trotz evtl. unterschiedlicher Drehzahlen bei starrer Lagerung, der sog. Partialdrehzahlen - im zeitlichen Mittel völlig drehzahl- und phasensynchron umlaufen. Mittels verschiedener analytischer Näherungsverfahren lassen sich unter der Annahme kleiner Unwuchtmassen Existenz- und Stabilitätsbedingungen zur Bestimmung der synchronen Winkelgeschwindigkeit Ω und der stabilen Phasendifferenzen herleiten [1,2]. Bei Beschränkung auf 2 Rotoren sei im zeitlichen Mittel $\varphi_i = \Omega t + \alpha_i, i = 1,2,\ \alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. Unter der Annahme gleicher Rotoren und damit gleicher Partialdrehzahlen $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, läßt sich die Existenz- und Stabilitätsbedingung mit dem Fliehkraftbetrag $\hat{f}$ eines Rotors zusammengefaßt darstellen in der Form:

$$\Lambda^0 = \frac{1}{2}\hat{f}^2[-(A_{1x}^{2x} + A_{1y}^{2y})\cos\alpha + (A_{1x}^{2y} - A_{1y}^{2x})\sin\alpha] = Minimum. \tag{1}$$

Exemplarisch ist der harmonische Einflußkoeffizient A_{1x}^{2y} bezüglich rotorbezogener Inertialsysteme $O_i, \vec{e}_{ix}, \vec{e}_{iy}, \vec{e}_{iz}, i = 1,2$ (siehe Bild 1) erklärt durch stationäre Schwingungen $A_{1x}^{2y}\cos\Omega t$ in O_1 in $\vec{e}_{1x}$-Richtung bei einer Einheitserregung $1\cdot\cos\Omega t$ in O_2 in $\vec{e}_{2y}$-Richtung.

2. Anwendung auf das gegebene System

Für das System nach Bild 1 erhält man mittels der modalen Methode die harmonischen Einflußkoeffizienten

$$A_{1x}^{2x} = -\frac{1}{\varrho A_0 l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{U_k(\xi_1)U_k(\xi_2)}{m_{uk}(\omega_{uk}^2 - \Omega^2)}, A_{1y}^{2y} = \frac{1}{\varrho A_0 l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{V_k(\xi_1)V_k(\xi_2)}{m_{vk}(\omega_{vk}^2 - \Omega^2)}, A_{1x}^{2y} = 0, A_{1y}^{2x} = 0 \tag{2}$$

mit $\xi_i = \frac{a_i}{l}$, den Werten der Eigenfunktionen $U_k(\xi_i), V_k(\xi_i), i = 1,2$, den modalen Massen m_{uk}, m_{vk}, den Eigenkreisfrequenzen ω_{uk}, ω_{vk} für die u- bzw. die v-Richtung, der Dichte ρ und der Querschnittsfläche A_0. Damit folgt aus (1) für die zur Erzeugung vertikaler Erregerkräfte notwendige Phasendifferenz $\alpha = 0$ die Stabilitätsbedingung

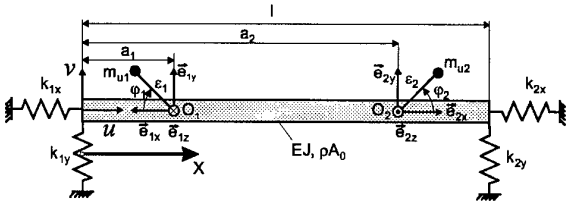


Bild 1. Federnd gelagerter Balken mit zwei Unwuchtroren

$$A_{xy} := A_{1x}^{2x} + A_{1y}^{2y} = \frac{1}{\varrho A_0 l}\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{U_k(\xi_1)U_k(\xi_2)}{m_{uk}(\omega_{uk}^2 - \Omega^2)} + \frac{V_k(\xi_1)V_k(\xi_2)}{m_{vk}(\omega_{vk}^2 - \Omega^2)}\right] > 0. \tag{3}$$

3. Numerische Ergebnisse

Mit $\rho = 7,8\ kg/dm^3$, $l = 6\ m$, Rechteckquerschnitt: Breite $b = 360\ mm$, Höhe $h = 240\ mm$, $E = 2,1\cdot 10^5 N/mm^2$, $k_{1x} = k_{2x} = k_{1y} = k_{2y} = 250\ N/mm$ (weiche Lagerung) ergeben sich die niedrigsten Eigenkreisfrequenzen

(Einheit 1/s) $\omega_{u1} = 11,12$, $\omega_{v1} = 18,97$, $\omega_{v2} = 33,29$, $\omega_{v3} = 226,73$, $\omega_{v4} = 617,05$, $\omega_{v5} = 1207,91$, $\omega_{v6} = 1996,10$, $\omega_{u2} = 2716,84$ im Vergleich zu den Eigenkreisfrequenzen bei starrem Balken $\omega_{u1} = 11,12$, $\omega_{v1} = 19,26$, $\omega_{v2} = 33,36$. Bei fixierter Erregerkreisfrequenz $\Omega_1 = 300\ 1/s$ ($\eta_1 = 0,3469$) erhält man den Stabilitätskennwert A_{xy} in Abhängigkeit von der Position $\xi_1 = 1 - \xi_2$ der symmetrisch angeordneten Rotoren entsprechend Bild 2.

Während A_{xy} bei starrem Balken stets positiv ist, gilt dies bei verformbarem Balken nur in einem bestimmten ξ_1-Intervall. Für die Werte $\xi_1 = 0,15$ bzw. $\xi_1 = 0,22785$ aus diesem Intervall wird das durch die Bilder 3.a) und 3.b) bestätigt, in denen A_{xy} in Abhängigkeit von $\eta = \sqrt{\frac{\rho}{E}} l\Omega$ dargestellt ist.

Bild 4 zeigt jedoch, daß das Ziel möglichst geringer Balkenverformungen mit den Rotor-Positionen für $\xi_1 = 0,15$ wegen des großen Verformungsanteils der zu ω_{v3} gehörenden Eigenform nicht erreichbar ist. Wie Bild 3.b) bestätigt, sind die zweiten gewählten Positionen für $\xi_1 = 0,22785$ die Knoten dieser Eigenform, so daß sich die vertikalen Amplituden in Abhängigkeit von $\xi = \frac{x}{l}$ nach Bild 4 nur relativ wenig unterscheiden. Dieses Resultat könnte bei Berücksichtigung der Dämpfung voraussichtlich noch vorteilhafter ausfallen. Es sei bemerkt, daß die beschriebenen Ergebnisse entsprechend einem bekannten Paradoxon der Selbstsynchronisation wesentlich von der horizontalen Beweglichkeit des Balkens beeinflußt sind, obwohl bei einer Phasendifferenz $\alpha = 0$ keine horizontalen Starrkörperbewegungen erregt werden.

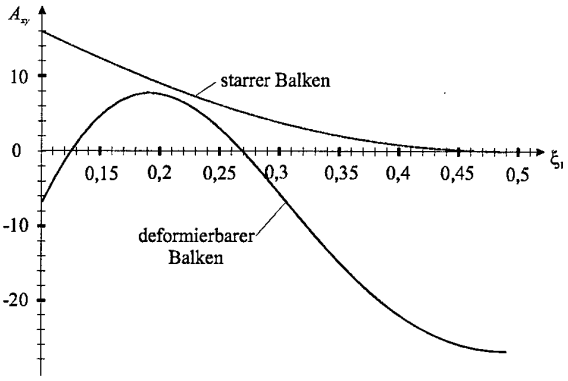


Bild 2. Stabilitätskennwert $A_{xy}[kg^{-1}s^2]$ in Abhängigkeit von der Rotorposition für $\eta_1 = 0,3469$

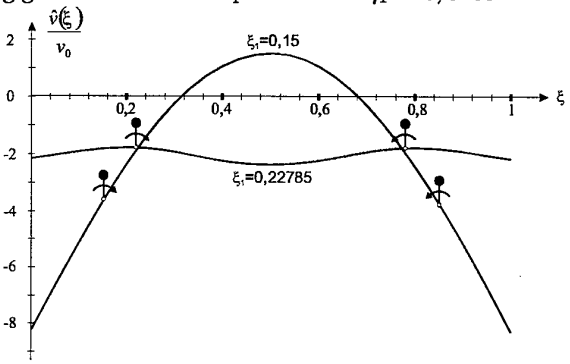


Bild 4. Auf $v_0 = 0,19785\ mm$ bezogene vertikale Amplituden in Abhängigkeit von der Längskoordinate ξ

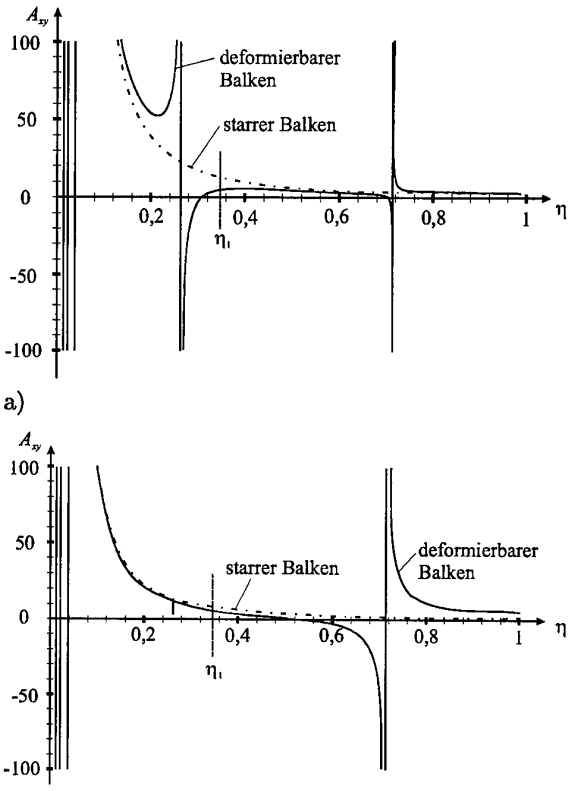


Bild 3. Stabilitätskennwert $A_{xy}[kg^{-1}s^2]$ in Abhängigkeit von η für *a)* $\xi_1 = 0,15$; *b)* $\xi_1 = 0,22785$

4. References

1 BLEKHMAN, I. I.: Synchronization in Science and Technologiy; ASME Press, New York (1988).

2 DUCKSTEIN, H., SCHMIDT, B., SPERLING, L.: Bedingungen für selbstsynchronisierte Unwuchtvibratoren - Theorie und Beispiele; Tagungsband 4. Magdeburger Maschinenbau-Tage (1999), 373–382.

Addresses: DR.-ING. BARBARA SCHMIDT, PROF. DR.-ING. HABIL. LUTZ SPERLING, DR.-ING. HENNER DUCKSTEIN, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Universitätsplatz 2, D-39106 Magdeburg

SEXTRO, W.

Heat and Wear Generation for Rolling Contacts

Railway wheels are getting unround due to wear. Since this effect is a long time phenomenon, there is a need for fast algorithms to calculate the wheel-track system and the contact problem including the wear. A point contact model is used which allows a fast calculation of the contact forces. The contact model includes the influence of the temperature, since the temperature distribution does affect the contact forces. A fast algorithm for calculating the temperature and wear distributions within the contact regime for steady rolling is presented.

1. Introduction

To calculate the exact contact forces for a rolling wheel, Kalker developed the program system CONTACT, see [1]. Due to the half space assumption this calculation leads to enormous computation time. To overcome this problem, an alternative program system FASTSIM was developed by Kalker as well. Both calculation procedures neglect the temperature distribution, wear calculation and the influence of the temperature onto other parameters such as the friction coefficient. This will be investigated in the following. In Fig.1 the discretised contact area is shown with n_x area elements in the x-direction. The point contact model presented in [3] and [4] including the elasticity of the contact and dry friction is used to calculate the tangential contact forces. The velocity v_P of the point P is given by the dynamics of the wheel relative to the track described by the creepage coefficients. The average rolling velocity of the contact is given by v_0. If the Hertzian normal contact is assumed, the tangential contact stiffness c_R can be derived from Kalkers linear theory, see [1], while neglecting viscos damping ($d_R=0$). If the point M sticks, the relative velocity vanishes ($v_M=0$). If the point contact slides the tangential friction force ΔF_R is given by Coulombs law

$$\Delta F_R = \mu(T)\Delta F_N , \tag{1}$$

where the friction coefficient μ can be dependent on the temperature T. For the analysis of the temperature and wear distribution the distributed frictional power q needs to be known and is given by the frictional power ΔP_R related to the nominal contact area ΔA_0

$$q = \frac{\Delta P_R}{\Delta A_0} = \frac{\Delta F_R v_M}{\Delta A_0} = \mu(T) p_{N0} v_M \tag{2}$$

with the Hertzian normal pressure distribution p_{N0}

$$p_{N0} = \frac{dF_N}{dA_0} \approx \frac{\Delta F_N}{\Delta A_0}, \quad \Delta A_0 = \Delta x \Delta y . \tag{3}$$

In Fig.2 numerical results of the distributed frictional power are presented, varying the longitudinal creepage coefficient s_x in the x-direction. From here, one gets the contact regimes ($p_{N0}>0$), where the contact sticks ($q=0$) or slides ($q>0$). The index ()* denotes dimensionless parameters.

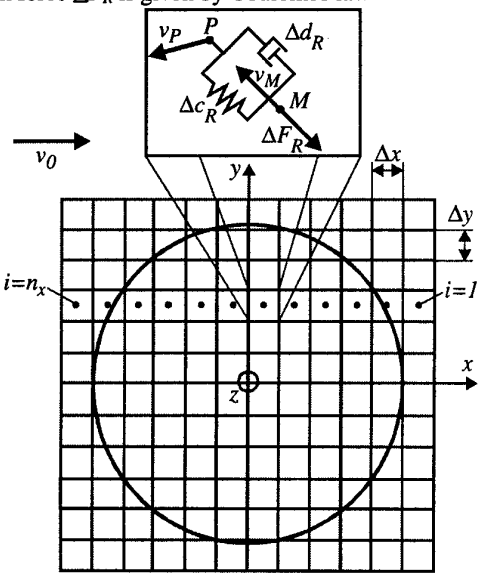


Figure 1: Discretised contact area

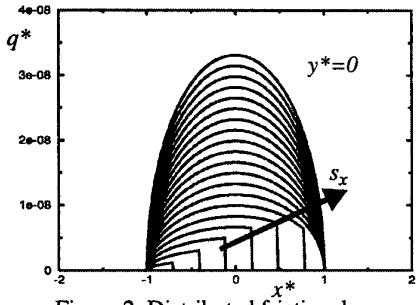


Figure 2: Distributed frictional power

2. Temperature and wear calculation

Since contact parameters are dependent on the temperature T, the temperature distribution within the contact area has to be calculated. The heat transfer equation is approximated by

$$v_0 \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} , \tag{4}$$

where κ denotes thermal diffusivity factor, see [2]. This equation holds, if the Peclet number is larger than 5. The boundary conditions within the contact regime ($p_{N0}>0$) are given by

$$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=0} = \alpha q(x), \text{ for } z=0 \text{, and } T=0, \text{ for } z \to \infty , \tag{5}$$

where λ denotes thermal conductivity and α the heat portioning factor, see [2]. Assuming the temperature distribution of

$$T(x,z)=T_0(x)\,e^{-\frac{z}{\delta(x)}}, \tag{6}$$

with the thermal penetration depth $\delta(x)$ and inserting Eq.(6) in (4) gives at the position $z=0$

$$\frac{\partial T_0(x)}{\partial x}=\frac{\kappa}{v_0}\frac{T_0(x)}{\delta^2(x)}. \tag{7}$$

Inserting Eq.(6) in (5) gives the thermal penetration depth

$$\delta(x)=\lambda\frac{T_0(x)}{q(x)}>0\,. \tag{8}$$

Inserting Eq.(8) in (7) and rearranging gives

$$T_0(x)\frac{\partial T_0(x)}{\partial x}=\frac{\kappa}{v_0\lambda^2}q^2(x). \tag{9}$$

Splitting the variables and integrating gives

$$T_E^2=T_S^2+a_C\frac{2\kappa\alpha^2}{v_0\lambda^2}\int_{x_S}^{x_E}q^2(x)\,dx\,, \tag{10}$$

with $a_C=1$. The exact solution for a constant heat flow rate q is given in [2]. Since this is an approximated method the correction factor of $a_C=2/\pi$ is introduced with respect to Eq.(10) to fit the described foregoing to the exact solution for a constant heat source. Due to the discretisation of the contact area Eq.(10) is transferred to

$$T_i^2=T_{i-1}^2+\frac{4}{\pi}\frac{\kappa\alpha^2}{v_0\lambda^2}q_{i-1}^2\Delta x,\quad q_{i-1}=\mu(T_{i-1})p_{N0i-1}v_{Mi-1}\,. \tag{11}$$

A common way to approximate the wear is to assume that the volume wear rate is proportional to the frictional power

$$\dot V=I_W P_R \tag{12}$$

with the constant I_W. Due to the discretisation of the contact area the volume wear rate can be approximated by

$$\dot V=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dV}{dx}v_0=v_0 dydz\approx v_0\Delta y\Delta z\,. \tag{13}$$

Inserting Eq.(2) and (13) in Eq.(12) gives wear depth

$$\Delta z=\frac{I_W}{v_0}q\Delta x\,. \tag{14}$$

Then, the resultant wear depth for one strip is given by the summation

$$z_{RES}=\sum_{i=1}^{n_x}\Delta z_i=\frac{I_W\Delta x}{v_0}\sum_{i=1}^{n_x}q_i\,. \tag{15}$$

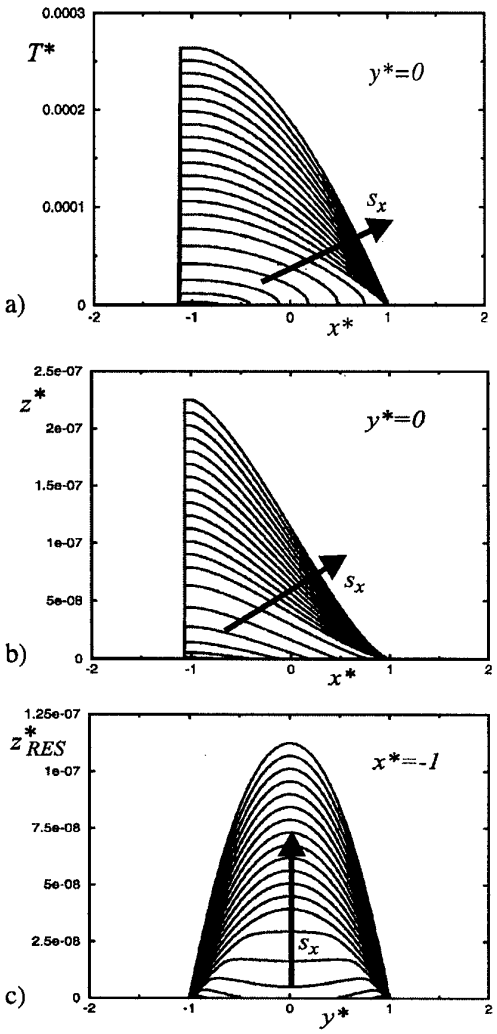


Figure 3: a) Temperature distribution
b) Wear depth versus coordinate x^*
c) Wear depth versus coordinate y^*

In Fig.3a), the temperature distribution within the contact area is shown, which is calculated from the distributed frictional power shown in Fig.2. The starting temperature at the leading edge is assumed to be $T_1=0$. Within the contact area the temperature is identical to zero, where the distributed frictional power is identical to zero. Due to sliding and dry friction the temperature increases up to the trailing edge, where the maximum temperature occurs. Fig.3b) shows the development of wear depth within the contact regime. In principle the wear depth behaves qualitatively in the same way like the temperature. In Fig.3c) the resultant wear depth for one overrun is shown. This resultant wear depth has to be calculated continuously to be able to analyse the unroundness of railway wheels. In general the described foregoing can be applied for the spatial motion of wheel-track systems.

3. References

1 KALKER, J.J.: Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Solid Mechanics and Its Application. Vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.

2 KNOTHE, K., LIEBELT, S.: Determination of Temperatures for Sliding Contact with Applications for Wheel-Rail Systems. Wear 189, 1995, pp 91-99.

3 SEXTRO, W., POPP, K.: Ein ebenes Reibkontaktmodell zur Berechnung von Schaufelschwingungen mit Reibelementen. (ZAMM) 79, 1999, pp 311-312.

4 SEXTRO, W.: The Calculation of the Forced Response of Shrouded Blades with Frictional Contacts and Its Experimental Verification. ASME Paper No 2000-GT-540, ASME TURBO EXPO 2000, Munich, Germany, 2000.

Address: DR.-ING. W. SEXTRO, University of Hannover, Institute of Mechanics, Appelstr. 11, D-30167 Hannover, Germany.

SIMHA, H. & H.W. Klein

Added Mass Finite Element Formulation of a Beam Vibrating in a Fluid

1. Introduction

A shaft vibrating with small amplitudes in a fluid is modelled using a new two-node, 8-degree of freedom Euler-Bernoulli beam element coupled to a linear triangular fluid element. The added mass approach is adopted to obtain the governing finite element equations which are then solved in the standard manner to estimate the natural frequencies of the shaft. In the following paragraphs, the mathematical formulation of the problem and the results obtained are discussed.

2. Formulation of the structure

A new two-noded beam element (figure 1) has been developed to model the shaft. The element has 4 degrees of freedom at each node, namely - the axial displacement, u, the lateral displacement, v, the rotation about a lateral axis, θ, and torsional rotation, ϕ. The u and ϕ are assumed to vary linearly in the element, while v varies according to a cubic law. Descretising the structure in a standard manner [1], the governing structural finite element equations in the absence of damping are obtained.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{f_s} \tag{1}$$

where $\mathbf{M}$ is the mass matrix, $\mathbf{K}$ is the stiffness matrix, $\mathbf{d}$ is the nodal displacement vector and $\mathbf{f_s}$ is the force due to the fluid.

3. Formulation of the fluid

A three noded triangular fluid element is developed with pressure as the lone nodal variable at each node (figure 1). Within the element, the pressure is assumed to vary linearly. The fluid is assumed to be stationary, incompressible and inviscid. A two-dimensional region of the fluid Ω bounded by the free surface Γ_1, the elastic structure interface Γ_2 and the rigid structure interface Γ_3 is modelled as shown in figure 2. The governing fluid differential equation giving the pressure distribution in the absence of surface waves [2] is

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

The boundary conditions applicable to the problem are

$$p = 0 \text{ on } \Gamma_1,\ \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho_f \frac{\partial^2 U_n}{\partial t^2} \text{ on } \Gamma_2 \text{ and } \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma_3$$

where U_n is the normal displacement of the structure with appropriate interpolation functions $\tilde{\mathbf{N}}$ for the normal direction and ρ_f is the fluid density. Applying the Galerkin method to equation (2) and using the divergence theorem, we have,

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = -\mathbf{f_f} \tag{3}$$

where $\mathbf{H} = \int_\Omega \left[\mathbf{N}_{,x}^{\mathbf{T}}\, \mathbf{N}_{,y}^{\mathbf{T}}\right] \left[\mathbf{N}_{,x}\, \mathbf{N}_{,y}\right]^{\mathbf{T}} \mathrm{d}\Omega$, $\mathbf{f_f} = \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \left(\rho_f \ddot{\mathbf{U}}_n\right) \mathrm{d}\Gamma_2$ and Ns are the appropriate pressure interpolation functions. The force on the fluid due to the structure $\mathbf{f_f}$ now can be written as $\mathbf{f_f} = \mathbf{S}\ddot{\mathbf{d}}$ where $\mathbf{S} = \rho_f \int_{\Gamma_2} \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}\Gamma_2$.

4. The added mass matrix

The system is now described by two coupled sets of equations

$\mathbf{Hp} + \mathbf{S\ddot{d}} = \mathbf{0}$ such that $\mathbf{p} = -\mathbf{H^{-1}S\ddot{d}}$ and $\mathbf{M\ddot{d}} + \mathbf{Kd} = \mathbf{f_s}$ where $\mathbf{f_s} = \int_{\Gamma_2} \tilde{\mathbf{N}}^{\mathbf{T}} p \, d\Gamma_2$.

Eliminating p from the above equations and rearranging the terms, we have

$$[\mathbf{M} + \mathbf{M_a}]\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{Kd} = \mathbf{0} \tag{4}$$

where the added mass term $\mathbf{M_a} = \frac{1}{\rho_f}\mathbf{S^T H^{-1} S}$

The equation (4) is in the form of a standard structural dynamics equation and can be readily solved for the eigensystem using methods such as the Jacobi method [3].

5. Example problem and conclusions

A stirred vessel with fluid and a partially immersed shaft is modelled as shown in figure 2. Table 1 shows the first five lateral frequencies of the system for a structure vibrating alone and for the structure vibrating in the fluid. It is clearly seen that the natural frequencies of the structure decreases appreciably in the presence of the fluid. The extent of the decrease in frequencies is shown graphically in figure 3. An attempt has been in this paper to analyse a common industrial problem in a simplified manner. The results obtained are encouraging but however need to be validated by experiments and by using a sophisticated 3-dimensional fluid-structure interaction model.

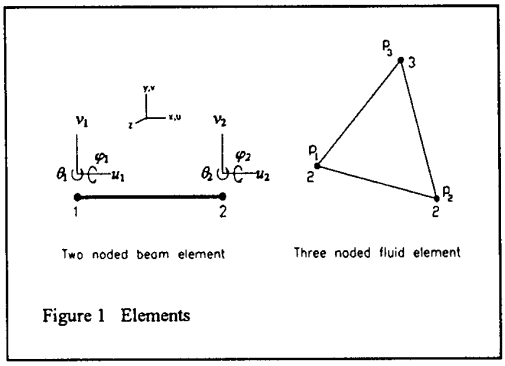


Figure 1 Elements

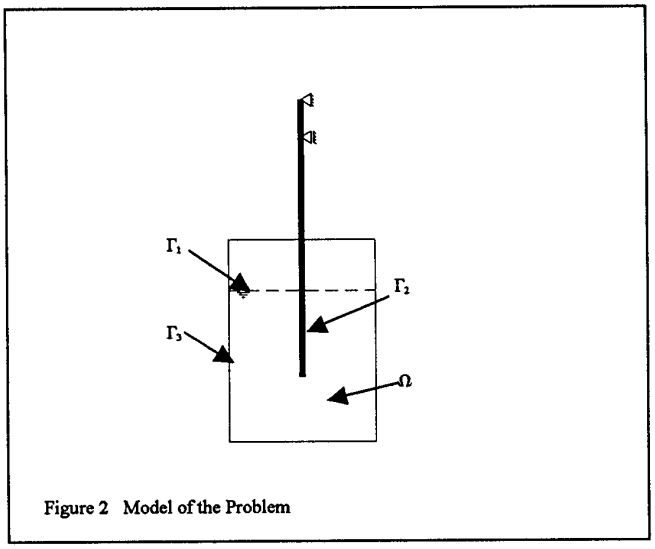


Figure 2 Model of the Problem

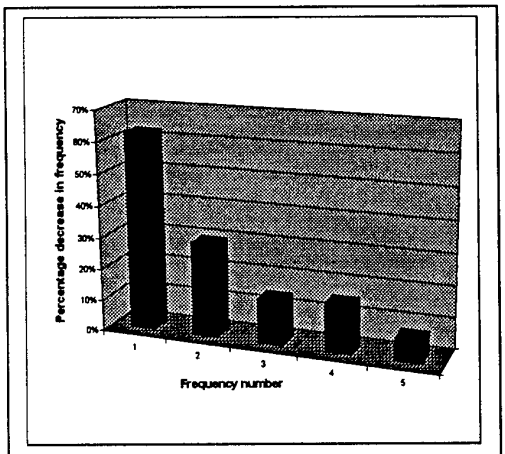


Figure 3 Effect of fluid on structural frequencies

Table 1 : Comparison of frequencies

Frequency number	Eigenfrequencies (Hz)	
	Structure alone	Structure and fluid
1	13.9	5.2
2	89.0	62.5
3	252.4	216.6
4	498.3	422.0
5	822.8	764.1

6. References

1 ASTLEY, R. J.: Finite Elements in Solids and Structures - An Introduction, 1st edition, Chapman & Hall, London, 1992.
2 O. C. ZIENKIEWICZ AND NEWTON, R. E.: Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid, Proceedings of the Symposium on Finite Element Techniques, Stuttgart, (1969), 359-379.
3 BATHE, K. J.: Finite Element Procedures, Prentice-Hall of India Pvt. Ltd., New Delhi, 1996.

Addresses: SIMHA, H. Mechanical & Design Engineering Division, IICT, Hyderabad 500 007, India
KLEIN, H. W. University of Paderborn, FB11, 59872 Meschede, Germany

SÖFFKER, D.; MÜLLER, P.C.; SAMPAIO, R.; WEBER, H.I.

Ermittlung von Kontaktkräften stoßbehafteter elastischer Systeme: Simulation und Experiment

Bei elastischen mechanischen Strukturen haben Stoßvorgänge erhebliche Auswirkungen auf das Gesamtsystemverhalten. Genannt seien hier z.B. Anstreifvorgänge von Rotor und Gehäuse, aber auch der Kontakt von Rotor und Fanglager. Als Vorbereitung auf die weiterführende aktive Schwingungsdämpfung derartiger Systeme soll die Ermittlung der Kontaktkräfte unter Nutzung von Messungen außerhalb des Kontaktes und die modellgestützte Rekonstruktion der Kontaktkräfte an einem einfachen ausgelenkten Balken erfolgen. Der Beitrag zeigt sowohl Simulationsergebnisse als auch den exemplarischen Vergleich mit dem aktuellen Stand der experimentellen Realisierung auf.

1. Problemstellung

Die im Rahmen eines interdisziplinären DAAD-CAPES PROBRAL Projektes zu realisierenden Arbeiten beeinhalten die Kontaktmodell- und Beobachtervalidierung stoßbehafteter elastischer mechanischer Systeme. Das der Aufgabenstellung zugrundeliegende Problem besteht dabei darin, dass Kontaktkräfte in realen Systemen oftmals nur indirekt gemessen werden können und die Anfangsbedingungen praktischer Stösse als unbekannt anzusehen sind. Die Grundidee des Projektes besteht daher darin, auf Basis leicht ermittelbarer Messungen des Systems eine robuste lineare Beobachtertechnik zur Rekonstruktion der Kontakteinflüsse zur Anwendung zu bringen. Ein derartiges mechanisches System ist beispielhaft in Bild 1 dargestellt.

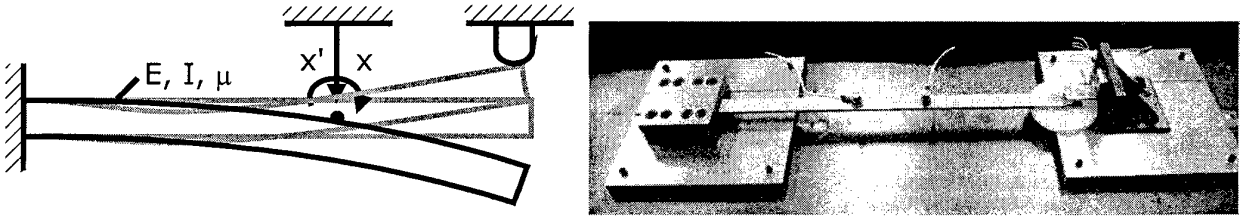


Bild 1: Einseitig eingespannter elastischer Balken (links: Modell, rechts: Versuchsstand an der PUC-Rio)

Bei zahlreichen maschinendynamischen Aufgabenstellungen spielen Kontakte eine besondere Bedeutung. Hierbei ist es prinzipiell unerheblich, ob die Kontaktpartner sich senkrecht zum Kontakt bewegen (z.B. aufeinander abrollen) oder nicht (ruhender Kontakt). Für die Modellbildung stellt der auf das betrachtete System von außen auf das System einwirkende Kontakt typischerweise eine äußere unbekannte Kraft dar, wobei die dynamischen Eigenschaften mit Systemparametern verknüpft sein können.

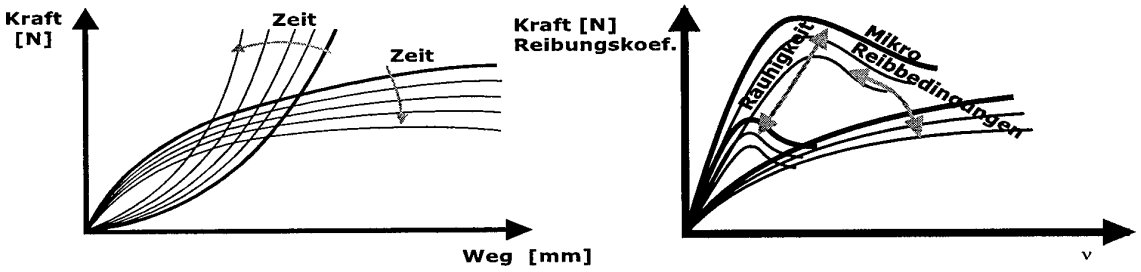


Bild 2: Funktionale dynamische Zusammenhänge des Kontaktes (Kontakt: links: ruhend, rechts: bewegt)

Die in Bild 2 dargestellen Zusammenhänge repräsentieren grafisch die Kraft-Weg-Beziehung eines elastischen Punktkontaktes, die Adhäsionscharakteristik eines rollenden Kontaktes abhängig vom Schlupf ν. Die Aufgabe der Beobachtertechnik beeinhaltet die Rekonstruktion des Zusammenhanges unter Zugrundelegung von Messungen (unabhängig von der Kontaktposition) und Schätzungen der relevanten mechanischen Größen am Kontaktort.

2. Vorgehensweise

Die strukturdynamische Beschreibung des kontaktbehafteten Systems ist durch

$$\dot{x} = Ax + b + Bu + Nn(x,\mathrm{t}) + N_k n_k(x,\mathrm{t}), \quad y = Cx \tag{1}$$

gegeben. Die Systemmatrix A beschreibt die inneren Zusammenhänge, die Vektoren b, Bu beschreiben bekannte auf das System einwirkende Einflüsse, $Nn, N_k n_k$ repräsentieren die auf das System einwirkenden unbekannten Einflüsse, wobei Nn die interessierenden unbekannten Eingänge darstellen. Die Aufgabe eines geeignet zu entwerfenden robusten, linearen Zustandsbeobachters ist die Rekonstruktion der unbekannte Eingänge n als $\hat{n}$ sowie der Zustände x als $\hat{x}$. Die Vorgehensweise ist zum Beispiel in [1,2] dargestellt. Die Anwendung der Proportional-Integralbeobachtertechnik nach [1,2] ergibt für die in Bild 1 dargestellte Balkenstruktur folgende Ergebnisse:

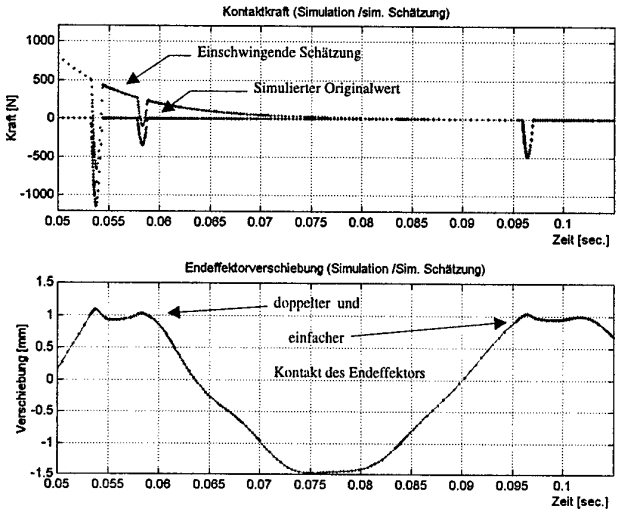


Bild 3: Simulationsergebnisse

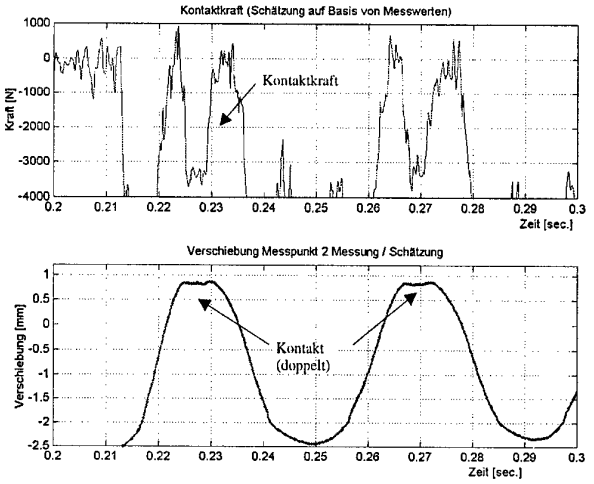


Bild 4: Experimentelle Ergebnisse

An der PUC-Rio wurde ein Versuchsstand zur experimentellen Validierung der Ergebnisse realisiert, vgl. Bild 1, rechts. Die beispielhafte Schätzung der auf die Struktur einwirkenden Kontaktkraft ist in Bild 3 zusammen mit einem Vergleich Schätzung / Messung dargestellt. Deutlich wird, dass die eingesetzte Beobachtertechnik kontaktkraftähnliche Verläufe rekonstruieren kann, die Nichtlinearität des eingesetzten Sensors ergibt jedoch zusätzliche nicht kausal mit dem Kontakt verknüpfte Schätzungen. Die Abweichungen in der Kontaktzeit und der Kraftgröße sind auf Unterschiede in der theoretischen und der praktischen Kontaktsteifigkeit zurückzuführen. Die weiteren Arbeiten beinhalten neben der Verbesserung der Messtechnik auch eine direkte Validierung von Schätzgrößen durch eine geeignete Messanordnung. Die in Bild 4 dargestellten Ergebnisse beinhalten die modellgestützte Rekonstruktion der Kontaktkraft (Bild 4 oben) auf Basis einer Wegmessung inmitten der Balkenstruktur (Bild 4 unten). Auch hier ist ein Mehrfachkontakt erkennbar, welcher jedoch von der Dynamik des eingesetzten Beobachters noch nicht rekonstruiert werden kann.

Danksagung

Die Autoren danken dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) und der brasilianischen Partnerorganisation CAPES für die Förderung der Arbeiten im Rahmen eines PROBRAL Projektes.

3. Literatur

1 Söffker, D.; Yu, T.J.; Müller, P.C.: State Estimation of Dynamical Systems with Nonlinearities by using Proportional-Integral Observer, International Journal of System Science **26** (1995), 1571–1582.

2 Söffker, D.: Observer-based Measurement of Contact Forces of the Nonlinear Rail-Wheel Contact as a Base for Advanced Traction Control, in: Wallaschek, J. et al.: Mechatronics and Advance Motion Control. HNI-Verlagsschriftenreihe **49** (1999), 305–320.

Addressen: Dr.-Ing. Dirk Söffker, Prof. Dr. P.C. Müller, BUGH Wuppertal, D-42097 Wuppertal, Bundesrepublik Deutschland
Prof. Dr. R. Sampaio, Prof. Dr. H.I. Weber, PUC-Rio, Gavea, Rio de Janeiro, Brasilien

STOFFEL, M., SCHMIDT, R., WEICHERT, D.

Experiment und Simulation stoßwellenbeanspruchter Platten

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit experimentellen und numerischen Untersuchungen des dynamischen viskoplastischen Verhaltens von Platten bei impulsförmiger Belastung durch Stoßwellen. Im Mittelpunkt der Untersuchungen steht die Entwicklung der Schnittgrößen und des Verschiebungsfelds unmittelbar nach Auftreffen der Stoßfront.

1. Einleitung

Aus experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß plastisch verformte metallische Kreisplatten bei impulsförmig wirkender Flächenbelastung im Gegensatz zur quasi-statischen Belastung eine konische Gestalt annehmen können. Im Rahmen der geometrisch linearen Plattentheorie mit starr-ideal plastischem Materialverhalten wird dieser Verformungsvorgang durch eine vom Plattenrand zur Mitte hin einlaufende Fließgelenklinie erklärt, z.B. [2]. In der vorliegenden Arbeit wird die Entwicklung der Verformungen und der Schnittgrößen im Bereich geometrischer Nichtlinearität und bei elasto-viskoplastischem Materialverhalten untersucht.

2. Experimentelle Beobachtung

In einem Stoßwellenrohr werden Aluminiumplatten impulsförmigen Druckbelastungen ausgesetzt, wobei der zeitliche Verlauf des Drucks und der Plattenverschiebung gemessen wird. Die Platten haben eine Dicke von 2mm, einen Durchmesser von 553mm und infolge der Randeinspannung verbleibt eine belastete Fläche mit einem Durchmesser von 458mm. In Abb. 1 ist die verformte Konfiguration einer mit einem Spitzendruck von 3.5 bar impulsförmig belasteten Platte dargestellt. Der Verlauf von Druck und Mittelpunktverschiebung ist aus Abb. 2a zu entnehmen. Zum Vergleich sind in Abb. 1 die verformten Konfigurationen bei quasi-statischer Belastung mit 3.5 bar und 7.2 bar dargestellt. Bei der impulsförmig belasteten Platte erkennt man deutlich die konische Form.

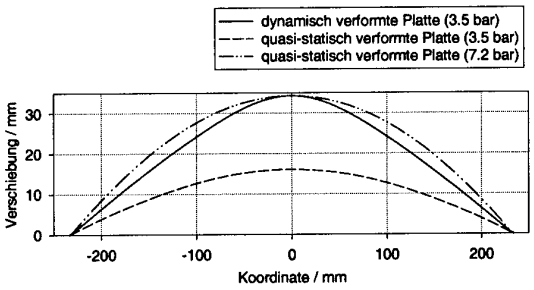
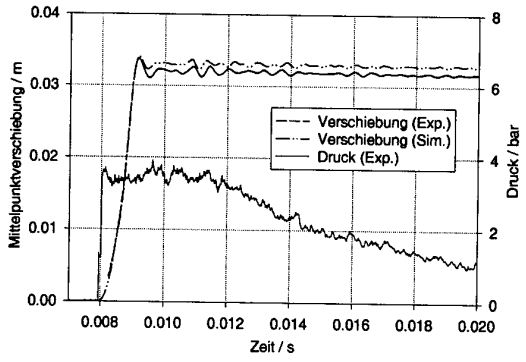


Abbildung 1: Verformte Platten

3. Modellierung und Simulation

Zur Modellierung des Strukturverhaltens wird eine geometrisch nichtlineare Schubdeformationstheorie 1. Ordnung [7] und das viskoplastische Materialgesetz von Lemaitre und Chaboche [5] verwendet. Die für die Simulation erforderlichen Materialparameter wurden aus einaxialen Zugversuchen ermittelt. Das dafür notwendige Identifikationsverfahren wird in [9] beschrieben. Ein Schichtenmodell ermöglicht die Berechnung der Evolution der Materialeigenschaften im Plattenraum, siehe [8]. Zur Simulation des transienten Strukturverhaltens wird das in [4,6] entwickelte und in [3] für viskoplastische Materialgesetze erweiterte Finite Elemente Programm verwendet. In Abb. 2a erkennt man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem experimentell ermittelten und berechneten dynamischen Strukturverhalten. In Abb. 2b ist die vom Rand ausgehende Ausbreitung von Biegewellen dargestellt. Das betrachtete Zeitintervall entspricht der Zeit, die die Verschiebung des Plattenmittelpunkts in Abb. 2a benötigt, um ihr erstes Maximum zu erreichen. Man erkennt unmittelbar nach dem Stoß ein kontinuuierliches Anwachsen des Biegemoments am Plattenrand. Dies führt zur sofortigen Ausbildung einer plastischen Zone. In Strukturen breiten sich Biegwellenanteile verschiedener Frequenz mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aus, siehe [1]. Daher treffen im Plattenmittelpunkt zunächst hochfrequente Biegewellen kleiner Amplitude ein, während die Biegewellen mit größerer Amplitude zeitlich versetzt folgen. Dadurch entsteht in Plattenmitte ein oszillierender Biegemomentenverlauf. Dieser Effekt ist für alle anderen Punkte je nach Entfernung vom Rand unterschiedlich stark ausgeprägt, siehe Abb. 2a. In Abb. 3 ist die Evolution der verformten Plattengeometrie dargestellt. Man erkennt, daß der örtlich unterschiedliche zeitliche Verlauf des Biegemoments zunächst zur Ausbildung einer trapezförmigen Gestalt führt, die dann in eine konische Form mündet.



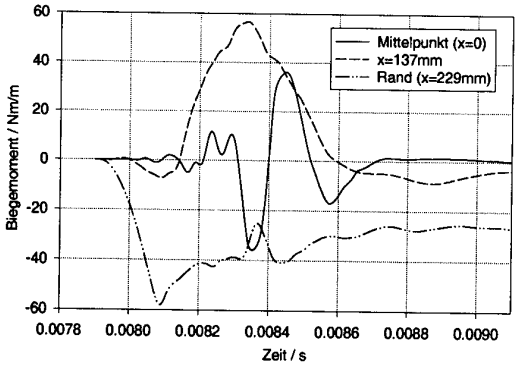
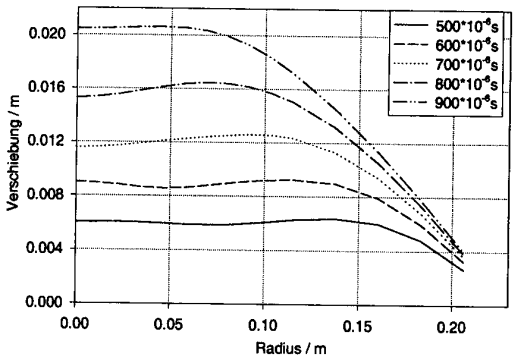


Abbildung 2: a) Simulation und Experiment, b) Momentenverlauf



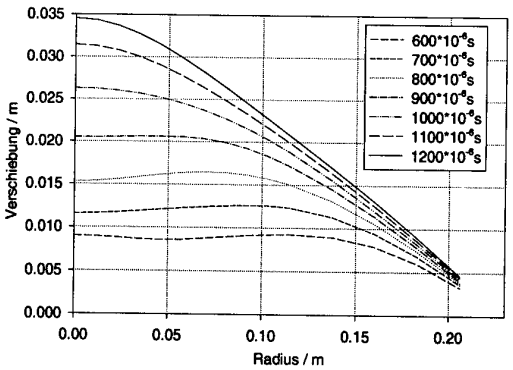


Abbildung 3: a) Trapezform, b) konische Form

4. Zusammenfassung

Bei der inelastischen Verformung einer Platte durch eine impulsförmig wirkende Flächenlast kann sich eine konische Form ergeben. Dies ist eine Folge des örtlich unterschiedlichen zeitlichen Verlaufs der Biegemomentenverteilung, die auf die unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Biegewellen verschiedener Frequenz zurückzuführen ist.

5. References

1 Doyle J.F.: Wave propagation in structures. Springer Verlag, 1997.
2 Florence A.L.: Circular plate under a uniformly distributed impulse. Int. J. Sol. Struc., **2**, pp. 37-47, 1966.
3 Kłosowski P., Woznica K., Weichert D.: A comparative study of vibrations of elasto-viscoplastic shells and plates. Engng. Trans., **43**, 1-2, pp. 183-204, 1995.
4 Kreja I., Schmidt R., Reddy J.N.: Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures. Int. J. Non-Linear Mech., **32**, pp. 1123-1142, 1997.
5 Lemaitre J., Chaboche J.L.: Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, 1994.
6 Palmerio A.F., Reddy J.N., Schmidt R.: On a moderate rotation theory of laminated anisotropic shells, Part 1 - Theory, Part 2 - Finite Element Analysis. Int. J. Non-Linear Mech., **25**, pp. 687-714, 1990.
7 Schmidt R., Weichert D.: A refined theory of elastic-plastic shells at moderate rotations. ZAMM, **69**, 1989 1, pp. 11-21.
8 Stoffel M., Schmidt R., Weichert D.: Pseudo-Shakedown viskoplastischer Flächentragwerke, Proc. of GAMM 99, ZAMM, **80**, 2, pp. S303-S304, 1999.
9 Weichert D., Stoffel M.: Theoretical and experimental investigations on plates under impulsive loading, Proc. of 5th National Congress on Mechanics, **1**, eds. P.S. Theocaris, D.I. Fotiadis, C.V. Massalas, University of Ioannina Press, Ioannina, pp. 72-83, 1998.

Addresses: Dipl.-Ing. Marcus Stoffel, Priv. Doz. Dr.-Ing. Rüdiger Schmidt, Prof. Dr.-Ing. Dieter Weichert, Institut für Allgemeine Mechanik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 52056 Aachen

TYLIKOWSKI, A.

A Study on Segmentation of Distributed Piezoelectric Sectorial Actuators in Annular Plates

In this paper distributed vibration control of structures using single-piece and multi-piece segmented actuators is examined. The study is motivated by finding an active control strategy to reduce vibrations in circular saw blades. The actuators are used to excite steady-state harmonic vibrations in the plate. Mathematical models of an annular plate with a single- and multi-piece annular actuator are formulated and performances are simulated. Simulations prove that the sector actuators are effective in exciting general vibration modes.

1. Axially Nonsymmetric Excited Vibrations of Annular Plate

In recent years we all observe strong interest in active systems applied to, so-called, "intelligent" structures. In the paper the studies on resonant properties of thin plates with attached piezoelectric elements is presented as example of such "intelligent" rotating structure [1,2]. Consider annular-sectorial actuators shown in Fig. 1. The identically polarized actuators are placed to the both opposite sides of the plate. It causes an antisymmetrical state of strains in the plate, the upper plate surface is tensioned while the lower one is compressed. In this section we approximate the action of piezoelectric layers by the bending moments acting on the plate surface (quasistatic approach). The actuator having the annular shape is segmented into the four equal segments (cf. Fig. 2). The top segment is denoted by 1, the bottom by 2, the right by 3 and the left by 4. It is assumed that the separation is very small so it is continuous elastically and open-circuit electrically [3]. Depending on the wiring the voltages applied to the actuators have different sign. Distributed moments generated by annular-sectorial actuators are written in the form

$$m_r = m_\varphi = C_o \Lambda \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i [H(r-a) - H(r-b)][H(\varphi+\alpha_i) - H(\varphi-\beta_i)] \tag{1}$$

where constant ϵ_i depends on the number of segments and the electrical connections of different segments of annular actuators. The angles α_i and β_i describe the the begining and the end of i-th segment. If all segment are excited in the same phase, shown in the left part of Fig. 2, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon_4 = 1$ For just one actuator $\epsilon_1 = 1$ and the rest indices are equal to zero. If segments are excited alternatingly $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$ and $\epsilon_2 = \epsilon_4 = -1$.

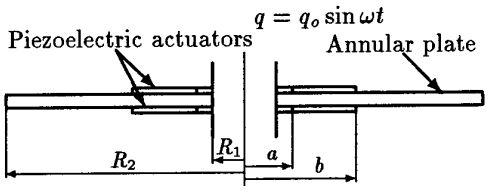


Fig.1 Geometry of plate with actuators

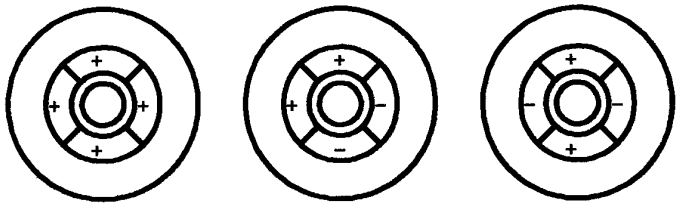


Fig. 2 Wiring of segmented actuators

Excited vibrations by axially nonsymmetric actuators are described by the following dynamic equations

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 m_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial m_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}\frac{\partial^2 m_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial m_{r\varphi}}{\partial \varphi} \tag{2}$$

where ∇^4 is calculated in the polar coordinates r and φ. Substituting moments into Eq. (2) we have

$$D\nabla^4 w + \rho_p t_p \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} = C_o \Lambda \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \Big\{ \Big[\delta'(r-a) - \delta'(r-b) + \frac{1}{r}(\delta(r-a) - \delta(r-b)) \Big] \times$$

$$\times [H(\varphi+\alpha_i) - H(\varphi-\beta_i)] + \frac{1}{r}\Big[\frac{1}{r}(\delta'(\varphi+\alpha_i) - \delta'(\varphi-\beta_i)) - (\delta(\varphi+\alpha_i) - \delta(\varphi-\beta_i))\Big] \times [H(r-a) - H(r-b)] \Big\} \tag{3}$$

Separating variables and expanding the right-hand excitation into series of eigen-functins of the uniform boundary problem we solve Eq. (3) analytically. For single frequency excitation Ω corresponding to harmonic voltage we obtain the fourth order ordinary differential equation with the right-hand-side excitation. The dominant vibration mode excited by the in-phase excitations (the left part of Fig. 2) corresponds to the axially-symmetric loading. The dominant response to the excitation shown in the middle part of Fig. 2 has one nodal line. The dominant response to the applied voltage shown in the right part of Fig. 2 has two perpendicular modal lines. The number of nodal circles depends on the the frequency excitation.

2. Analytical Verification of Dynamic Behaviour of Axially Symmetric Actuators

The in-plane piezoelement displacement and the transverse plate displacement is denoted by u and w, respectively. The thickness of the plate and actuators are t_p and t_a, respectively. The dynamic actuator equation in displacement and the equation of the transverse plate motion have the following form

$$\frac{E_a t_a}{1-\nu_a^2}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru)\right]\right\} - \tau r = \rho_a t_a r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial(Tr)}{\partial r} = \rho_p t_p r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad a < r < b \tag{4}$$

where E_a and ν_a are modulus and Poisson ratio of the actuator, and τ is the shear stress in the interface plane, T - shear force, ρ_p - plate density, ρ_a - actuator density. Taking into account the perfect bonding conditions on the interface between the piezoelectric element and the plate the two dimensional state of strains of piezoelectric elements is expressed by

$$u_r = -\frac{t_p + 2t_a}{2}\frac{\partial w}{\partial r} \qquad u_\phi = -\frac{t_p + 2t_a}{2r}\frac{\partial w}{\partial \varphi} \tag{5}$$

Writing the dynamic actuator equation and using the balance of moments the following equation is obtained for section 2

$$(D_p + D_a)\nabla^4 w + \rho_p t_p\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho_a t_a t_p^2}{2}\nabla^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = 0 \quad a < r < b \tag{6}$$

where the actuator stiffness is denoted by $D_a = E_a t_a t_p^2/2(1-\nu_a^2)$ and D_p is the plate cylindrical stiffness. The plate displacement equations for the plate section 1 and 3 have the classical form

$$D_p\nabla^4 w_1 + \rho_p t_p\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = 0 \quad R_1 < r < a \qquad D_p\nabla^4 w_3 + \rho_p t_p\frac{\partial^2 w_3}{\partial t^2} = 0 \quad b < r < R_2 \tag{7}$$

The boundary conditions at $r = R_1$ and $r = R_2$ of the plate correspond the clamped and free edge, respectively. At the joints between sections 1 and 2 and between sections 2 and 3, the continuity in plate deflection, slope and radial moment have to be satisfied. The free radial stress condition for the piezoelectric annular element at $r = a$ and $r = b$ constraints the strains at these circles. Dynamic equations (6), (7), boundary conditions and joint conditions form a boundary value problem. Assuming a harmonic single frequency excitation with frequency Ω steady-state solutions are sought as harmonics with the same angular velocity. Comparison of the results calculated from Eq. (3) for the axially symmetric excitation in the lower resonances and solutions of Eqs. (6), (7) shows good agreement.

Acknowledgements

The author gratefully acknowledges the support of the State Committee for Scientific Research under Grant 7T07A04414.

References

1 Tylikowski, A.,: Simulation examination of annular plates excited by piezoelectric actuators, [in:] J. Holnicki-Szulc and J. Rodellar, (eds.), Smart Structures, Kluwer Academic Publishers, 1999, 365-372.

2 Tylikowski, A.,: Piezoelectric absorbers of vibration in a circular plate, Journal of Thim-Walled Structures, to be published.

3 Tzou, H.S., and Fu, H.Q., : A study on segmentation of distributed piezoelectric sensors and actuators: Part 1 and Part 2, DSC, Vol.38, Active Control of Noise and Vibration, ASME, 1992, 239-246, 247-253.

Address: Tylikowski, A., Warsaw University of Technology, Institute of Machine Design Fundamentals, Narbutta 84, Pl-02-524 Warszawa

U. VON WAGNER, W. V. WEDIG

Nonlinear Stochastic Car Vibrations

High dimensional probability density functions of nonlinear dynamical systems are calculated by solutions of Fokker-Planck equations. First approximations are derived via solutions of the corresponding linear system and analytical results for the expected values. These first approximations are used as weighting functions for the construction of generalized Hermite polynomials. The Fokker-Planck equation is expanded into these polynomials and solved by a Galerkin method.
As an example, a simple model of a quarter car with nonlinear damping under excitation by colored noise is considered. The damping is piecewise linear and unsymmetric. The main result is an expected value for the displacement of the car which is not vanishing. The excitation is realized by the roughness of the street driven along with constant velocity. Monte-Carlo simulations and analytical results are used for comparison.

1. Introduction

The model of a quarter car consists of the mass M, the stiffness c and the piecewise linear damping $k(\dot{x}) = \kappa\,(1 + \operatorname{sign}\dot{x})$. It is moving along the street with constant velocity v. The roughness of the street is measured by the absolute coordinate y, the displacement of the quarter car by the relative coordinate x. It is assumed, that there is no wheel lift.

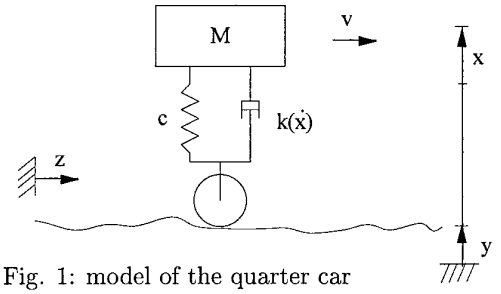


Fig. 1: model of the quarter car

2. Stochastic Differential Equations

The motion of the quarter car is described by

$$M\,\ddot{X}_t + k(1 + \kappa\,\operatorname{sign}\dot{X}_t)\,\dot{X}_t + c\,X_t = -M\,\ddot{Y}_t. \tag{1}$$

The roughness of the street is assumed to be a sequence of two low pass filters of first order with the limiting way frequencies $\omega^\star_{g,1}, \omega^\star_{g,2}$:

$$\frac{d^2}{dz^2}\,Y_z + \gamma_2^\star\,\frac{d}{dz}\,Y_z + \omega_2^{\star 2}\,Y_z = \sigma^\star \xi_z, \quad \gamma_2^\star = \omega^\star_{g1} + \omega^\star_{g2}, \quad \omega_2^\star = \sqrt{\omega^\star_{g1}\,\omega^\star_{g2}} \tag{2}$$

with white noise $\xi_z = \frac{dW_z}{dz}$ and the Wiener process W_z. To get a system of stochastic differential equations, the excitation process must be transformed into the time domain. With the transformation $\frac{dz}{dt} = v$, $\xi_t = \frac{1}{\sqrt{v}}\xi_z$, the transformation $\tau = \omega_1\,t$ and $X_{1,\tau} = X_\tau$, $X_{2,\tau} = X'_\tau$, $Y_{1,\tau} = Y_\tau$, $Y_{2,\tau} = Y'_\tau/\omega_2$ the system of stochastic differential equations

$$dX_{1,\tau} = X_{2,\tau}d\tau, \tag{3}$$
$$dX_{2,\tau} = (-\gamma_1(1 + \kappa\,\operatorname{sign}X_{2,\tau})X_{2,\tau} - X_{1,\tau} + \gamma_2\omega_2\,Y_{2,\tau} + \omega_2^2\,Y_{1,\tau})d\tau - \sigma dW_\tau, \tag{4}$$
$$dY_{1,\tau} = \omega_2\,Y_{2,\tau}d\tau, \tag{5}$$
$$dY_{2,\tau} = (-\gamma_2 Y_{2,\tau} - \omega_2 Y_{1,\tau})d\tau + \frac{\sigma}{\omega_2}dW_\tau. \tag{6}$$

is obtained, with the abbreviations $\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{M}}$, $\gamma_1 = \frac{k}{M\omega_1}$, $\gamma_2 = \frac{\gamma_2^\star\,v}{\omega_1}$, $\omega_2 = \frac{\omega_2^\star\,v}{\omega_1}$, $\sigma = \sigma^\star\sqrt{\left(\frac{v}{\omega_1}\right)^3}$. The following expected values can be calculated analytically from the equations (3), (4): $E(X_{2,\tau}) = 0$, $E(X_{1,\tau}) = -\gamma_1\,\kappa\,E(|X_{2,\tau}|)$.

3. Solution of the Fokker-Planck equation

A first approximation of the probability density is derived as follows:

$$g_1(x_1) = \exp\left(-k_1 x_1^2 + \kappa_1 x_1|x_1|\right), \qquad g_3(y_1) = \exp\left(-\frac{\gamma_2}{\sigma^2}\,\omega_2^2\,y_1^2\right),$$

$$g_2(x_2) = \exp\left(-k_2(x_2^2 + \kappa x_2|x_2|) + \alpha x_2\right), \qquad g_4(y_2) = \exp\left(-\frac{\gamma_2}{\sigma^2}\,\omega_2^2\,y_2^2\right).$$

Herein, k_1, k_2 are calculated by the exact solution of the corresponding linear system with $\kappa = 0$. The correction terms α, κ_1 are derived by considering the expected values, as shown in [2].

The functions g_{1-4} are used for the calculation of orthogonal polynomials P_{1-4}. See [1] for more details and the expansion of the Fokker-Planck equation. The ansatz

$$p(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{ijkm} P_i(x_1)\,P_j(x_2)\,P_k(y_1)\,P_m(y_2)\,g_1(x_1)\,g_2(x_2)\,g_3(y_1)\,g_4(y_2) \tag{7}$$

is introduced in the Fokker-Planck equation. Considering a finite number of ansatz functions, the Galerkin method results in a system of algebraic equations of the coefficients a_{ijkm} which is implemented in commercial software routines.

4. Results

Figures 2-5 show results of the analysis described above. The applied parameters are: $M = 245\,\mathrm{kg}$, $c = 23 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, $k = 1.8 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}}$, $\omega_{g1}^{\star} = 0.1\,\frac{1}{\mathrm{m}}$, $\omega_{g2}^{\star} = 0.5\,\frac{1}{\mathrm{m}}$, $\sigma^{\star} = 4\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{mm}}}$. For the solution of the Fokker-Planck equation the probability density was expanded until the 4th term (x_1, x_2) and the 2nd term (y_1, y_2) respectively. The Monte-Carlo simulation was realized by an Euler scheme with $N = 10^8, \Delta\tau = 0.01$.

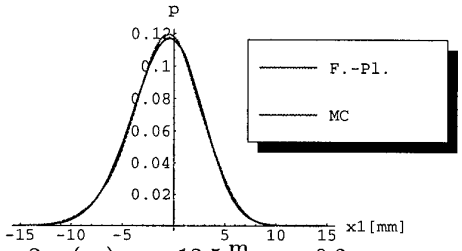


Fig. 2: $p(x_1)$; $v = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\kappa = 0.3$

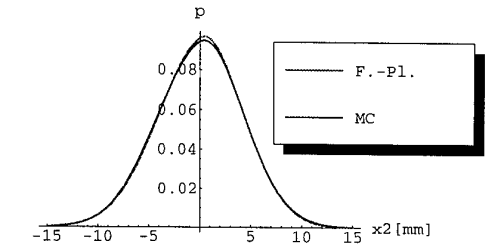


Fig. 3: $p(x_2)$; $v = 12.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $\kappa = 0.3$

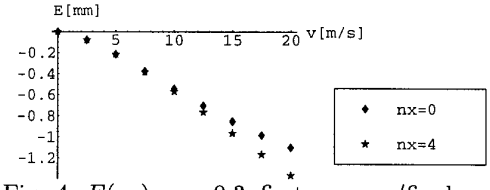


Fig. 4: $E(x_1)$, $\kappa = 0.3$; first approx./final result

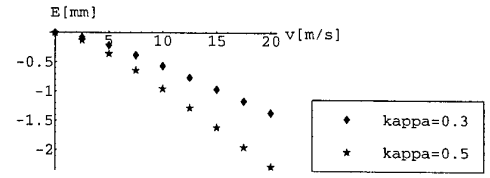


Fig. 5: $E(x_1)$, $\kappa = 0.3/0.5$

5. Conclusion

The analysis described in this paper allows to solve high dimensional Fokker-Planck equations of nonlinear dynamic systems with low effort. Basic steps are the calculation of a first approximate solution and the construction of systems of orthogonal functions using this first approximation as weighting function. This was demonstrated by a model of a quarter car driving with constant velocity over rough surfaces of roads.

6. References

1 : von Wagner, U.; Wedig, W. V.: On the Calculation of Stationary Solutions of Multi-Dimensional Fokker-Planck Equations by Orthogonal Functions. Nonlinear Dynamics Vol. 21 No. 3, 289-306, 2000.

2 : von Wagner, U.; Wedig, W. V.: Oscillatory Stochastic Systems with Nonlinear Dissipations, ZAMM 80 (2), 309-310, 2000.

Addresses: Dr.-Ing. Utz von Wagner, Institute for Applied Mechanics, Darmstadt University of Technology, Hochschulstraße 1, 64289 Darmstadt, Germany.

Prof. Dr.-Ing. Walter V. Wedig, Institute for Technical Mechanics, University of Karlsruhe, Kaiserstraße 12, 76128 Karlsruhe, Germany.

WÓJCICKI Z.

Transient Process' Sensitivity for Turbo-generator Supporting Structure with Regard to Parametric Excitation

The paper is a continuation of the research presented in GAMM'98 and GAMM'99, where the problem of a lateral parametric vibration of the steel, spatial, orthogonal frame supporting small turbo-generator structure was carried out. One column, Fig. 1, was extracted from the original structure. Dimensions, stiffness and mass parameters of the strut are the same as in the structure but rotary inertia of mass element at the top of the column and rotary stiffness of spring supporting the column were chosen to fit particular eigenvalue of the original structure. The dynamic instability region in the frequency range 6-10 Hz was observed, despite the fact that the magnitude of the whole axial force was only about 30% of the Euler's critical value for the column. Since the work regime of the turbo-generator is 50 Hz, the transient process should be examined. It is even more necessary because of the fact that the 2nd eigenvalue for turbo-generator structure is 6,86 Hz but the 1st eigenvalue for the column is 3,14 Hz. Thus the proportion between them is about 2. It corresponds to the first - the most important - parametric resonance area. The paper concerns the analysis of the transient process and transient process' sensitivity for turbo-generator supporting structure with consideration of the parametric effects. The "overshoot (peak response) sensitivity" method in time domain [1], was adopted to first order sensitivity analysis of the parametric non-periodic systems. The FEM is used to solve the dynamic model. Numerical and analytical calculations are supported by the computer system „Mathematica", "COSMOS/M" as well as author's software.

1. Statement

The first three steps of the solving algorithm are realised using the *"COSMOS/M"* Finite Element Method program for linear turbo-generator spatial supporting structure, [2]. The first step - solution of the static problem, i.e. determination of the static axial forces level V_0 for all columns of the structure. The second step - solution of the dynamic modal problem. The modal mass m, inertia J and rotationally stiffness k_Φ become the data and parameters of the parametric analysis model, Fig. 1. The third step - solution of the forcing excitation (quasi-stationary) dynamic problem. The forcing excitation changes in time according to the algorithm presented below. The fourth step - realisation of envelopes of the dynamic axial $N_t(t)$, shearing $T_t(t)$ forces and bending moments $M_t(t)$. The fifth step - determination of the excitation functions for parametric model shown in Fig. 1 - the static V_0, H_0, M_0 and dynamic $V(t)$, $H(t)$, $M(t)$ as functions of time. They are formulated according to formulas (5) and envelopes of the dynamic internal forces. The sixth step - analysis transient process and sensitivity of the transient process for the dynamic model Fig. 1 with regard to parametric excitation (the authors software (FEM) supported by computer system *Mathematica*). Non-linear equation of motion of this model can be written in well-known form (1)

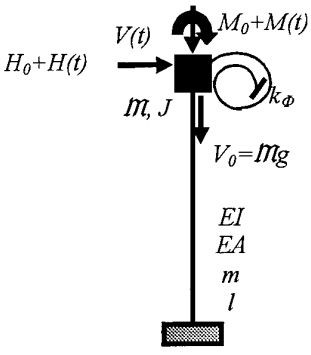


Fig. 1. Parametric analysis model.

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t)\,. \tag{1}$$

Matrix of stiffness can be written in form (2)

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_V[V(\mathbf{q})]\,, \tag{2}$$

where symbol $V(\mathbf{q})$ denotes the axial excitation force. The value of the axial force depends on the displacement vector **q**. The displacement vector **q** depends on time t. Thus the stiffness matrix **K** depends on time t

$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_V[V_0 + V_t(t)]\,. \tag{3}$$

After the discretisation and linearization the matrix equation of motion is a set of ordinary parametric second order differential equations

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \tag{4}$$

where $\mathbf{B}(t)$ is matrix of inertia and $\mathbf{C}(t)$ - matrix of damping, $\mathbf{F}(t)$ - an n-dimensional force vector,. The transient process excitation forces functions for the model shown in Fig. 1, can be written - $F(t) = \mu f(t)$, where μ is the inertia unbalance moment, $f(t)$ is the (inertia) excitation function

$$f(t) = \chi(t)\sin\varphi(t) + \nu^2(t)\cos\varphi(t)\,. \tag{5}$$

The first term of the equation (6) corresponds to a projection of a centrifugal component of the (inertia) excitation force to a

vertical direction. The second term - to a projection of a tangential component of the (inertia) excitation force to a vertical direction. For a horizontal direction - analogically. It was assumed that the frequency of the turbine work regime p is 50 Hz, time of the starting process of the turbine t_r is 50 s. The transient phase angle $\varphi(t) = \pi p t^2 / t_r$, the transient phase angle velocity $\nu(t) = 2\pi p t / t_r$, the transient phase angle acceleration $\chi(t) = 2\pi p / t_r$. The transient process envelopes of the dynamic axial force $N_t(t)$, shearing forces $T_t(t)$ and bending moments $M_t(t)$ at the top of the column are shown in Fig. 2.

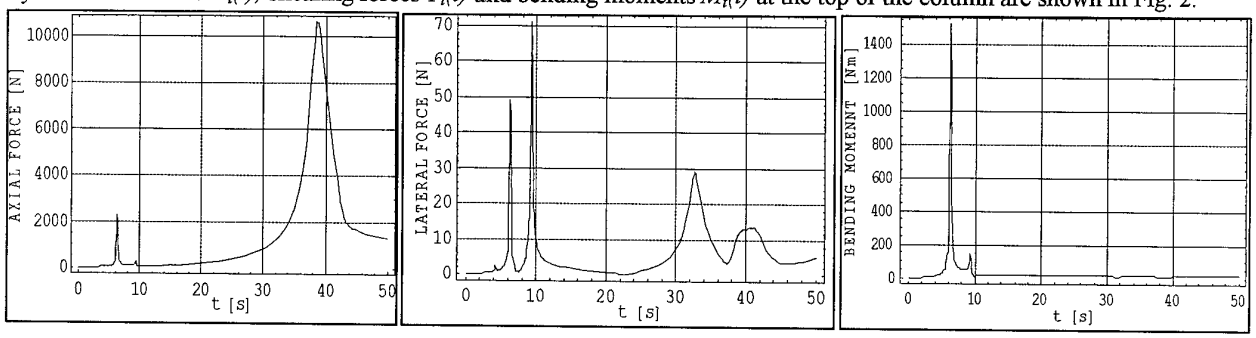


Fig. 2. The transient process envelopes of the dynamic axial $N_t(t)$, shearing $T_t(t)$ force and bending moments $M_t(t)$.

Parametric axial (vertical) excitation is described by the formula $V(t) = N_t(t)\cos\varphi(t)$, forced lateral (horizontal) excitation - $H(t) = T_t(t)\cos\varphi(t)$ and bending moment - $M(t) = M_t(t)\cos\varphi(t)$, where $\varphi(t) = \pi p t^2 / t_r$. Plots of these functions are shown in Fig. 3.

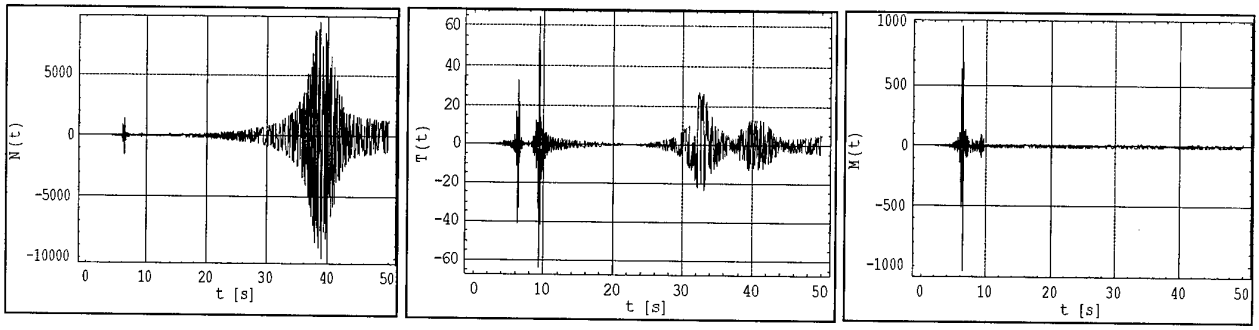


Fig. 3. Plots of axial (parametric) and lateral and bending moment excitation functions.

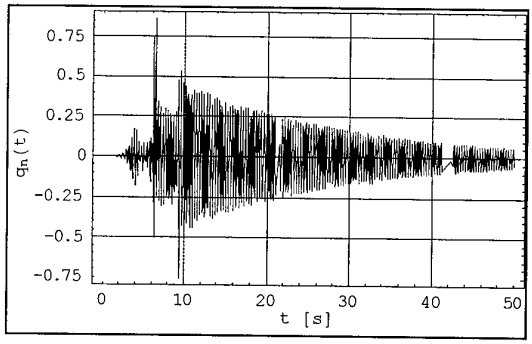


Fig. 4. Evaluation of the transient process amplitude.

The time dependent evaluation of the transient process response amplitude can be seen in Fig. 4. The maximum of the displacement is at the time point t=6,323s. According to the assumptions, the frequency is 6,323Hz and this means that the parametric resonance effects have appeared. Influence of the parametric instability is not very big, since the amplitude of vibrations is only 4μm. The "overshoot (peak response) sensitivity" method in time domain [1], was adopted to first order sensitivity analysis of the parametric non-periodic systems. The equation of motion end equation of the sensitivity was parallel numerically integrated. The values of the logarithmic sensitivity function with regard to chosen parameters (mass density, damping, static and dynamic stiffens and parametric excitation) can be seen in Table 1.

Table 1

W_b	W_c	W_s	W_k	W_p
1.35055	-0.00793	-0.35321	0.00255	0.00012

2. References

1. FRANK P.M.: Introduction to System Sensitivity Theory, Acad. Press, 1978.
2. WÓJCICKI Z., GROSEL J.: The Stability and Sensitivity Analysis of the Structure Supporting Turbo-generator with Regard to Parametric Effects, ZAMM, 79(2), 1999, pp. S367-S368.

Address: DR ZBIGNIEW WÓJCICKI - Institute of Civil Engineering, Wrocław University of Technology, Wyb. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, POLAND.

BALDINGER MARKUS, BLAIMSCHEIN P., BREMER H.

Design and Control of a Natural Gait for a Biped without Impacts

The present thesis covers the theoretical and experimental walking of a biped. The first part presents a mechanical model of considered seven-link-robot. Kinematical relations are specified which are necessary for gait generation. Control design is then carried out for state space representation. Numerical simulations for walking on a plane demonstrate the quality of the developed gait generator and control scheme. The numerical results are finally compared to experiments. For this purpose, a laboratory setup has been developed. A Typical experiment is carried out for slow single steps. Comparison to theoretical results show excellent agreement.

1. Introduction

One difficulty in designing efficient control systems for robots arises from non continuous velocity profiles. The aim of this paper is the design and the control architecture of a natural gait for a biped without impacts.
For the following walking cycle,which can be seen in figure 1.1 (see also [2]), an controller design should be made. The movement can be devided into two parts, in the first step (see figure 1.1), one leg moves forward, while in step two the opposite leg moves so that at the end of this phase the position of the biped is identically to the beginning of phase 1. During this walking, the swinging leg strikes the ground without impacts.

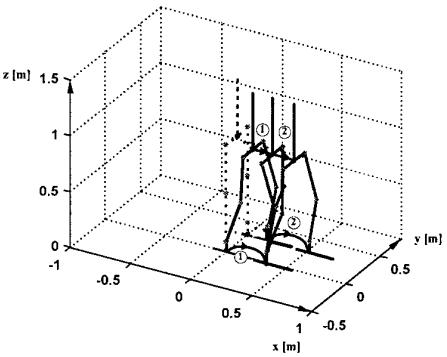


Figure 1.1: Walking cycle

2. Controller design

The basic construction of a control-unit for the above biped can bee seen in figure 2.1.

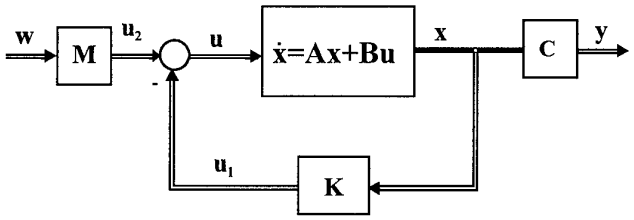


Figure 2.1: Control structure

The control architecture consit of an optimal controller with desired input functions (see [1]). For the feed back matrix $\mathbf{K}$, a simple control law in the form $\mathbf{u_1} = -\mathbf{Kx}$ is choosen so, that the quality functional $\min_{\mathbf{K}} J$ with $J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T\mathbf{R}\mathbf{u}(t)\right] dt$ gets a minimum. This task leads to a riccati equation, whose solution is an optimal controller like $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$.

For the feed forward matrix $\mathbf{M}$, one can see in the above figure, that $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = -\mathbf{Kx} + \mathbf{Mw}$. Here $\mathbf{K}$ has the dimension $\mathbf{K} \in \mathbf{R}^{f,2f}$ and $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{f,h}$ where f stands for the number of degrees of freedom and h indicates the number of inputs. With the choice $h = 2f$, which means, that the inputs are the desired values for the state variables (position and velocity), the control law can be written in the form $\mathbf{u} = -\mathbf{K}(\mathbf{x}_{act} - \mathbf{x}_{des})$ with $\mathbf{M} = \mathbf{K}$ and $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{act}$ and $\mathbf{w} = \mathbf{x}_{des}$.

3. Measurement results

With the above controller, an walking experiment with the following parameters was carried out: cycle time $T_{cyc} = 4s$, step length $s_l = 0.4m$, step height $h = 0.15m$. Therfore we get the velocity of the biped in the form $v_{body} = \frac{s_{l,entire}}{T_{entire}} = 0.135\frac{km}{h}$. Figure 3.1 shows the step result. In figure 3.2, the measurement results can be seen. One can see, that after finishing each phase ($t = 4s, 8s, 12s, 16s$), the velocities are zero and therefore no impact occurs.

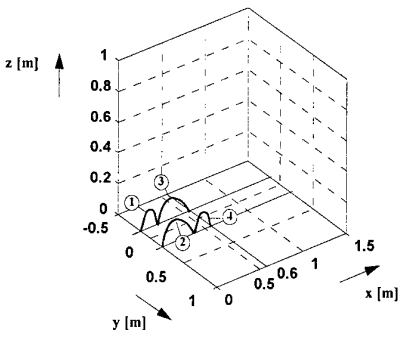


Figure 3.1: Walking experiment

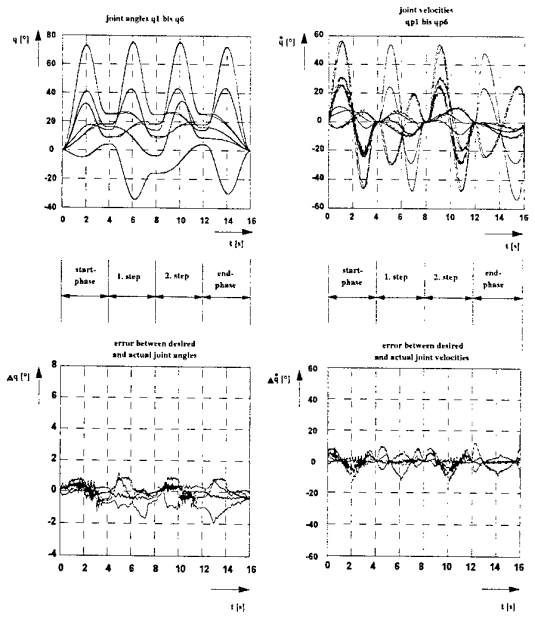


Figure 3.2: Measurement results

4. Conclusion

The locomotion experiment, which is handled in part 3, was photographed and the results can be seen in figure 4.1.

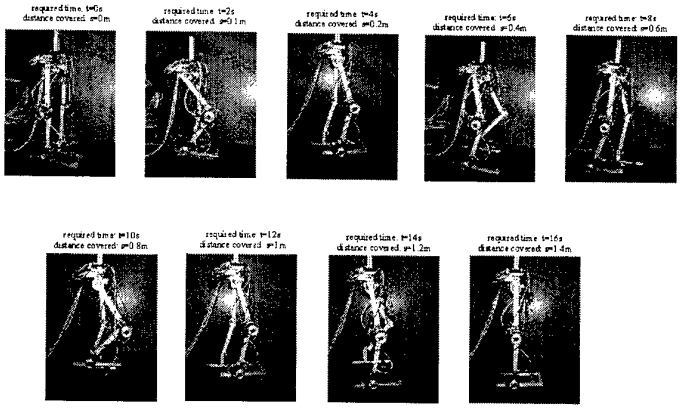


Figure 1: Figure 4.1: Photos of the walking experiment

5. References

1 BALDINGER, MARKUS: Entwicklung und Konstruktion einer zweibeinigen Gehmaschine. Dissertation, J.K. Universtität Linz, 1999.

2 BALDINGER, MARKUS, BREMER H.: Zweibeiniges Technisches Gehen, to appear in ZAMM, Berlin Vol. 80, Suppl. 1, 2000.

Addresses: Dr. Baldinger Markus, DI Blaimschein P., Prof. Dr. Bremer H., Johannes Kepler Universität Linz, Abteilung Robotik, Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, e-mail: markus.baldinger@mechatronik.uni-linz.ac.at

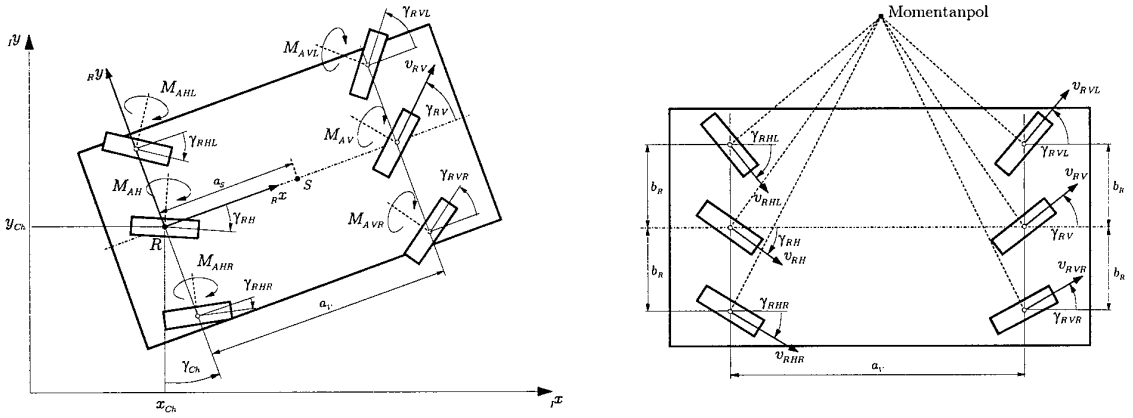
BLAIMSCHEIN P.; BREMER H.

Nichtlineares Regelungssystem für mobile Robotersysteme

Es wird hier ein Radfahrzeug mit maximaler Mobilität und nichtholonomen Zwangsbedingungen an den Rädern betrachtet. Speziell für ein Fahrzeug mit bis zu sechs gelenkten und angetriebenen Rädern wird ein nichtlineares Zustandsmodell berechnet, welches auf ein Zweiradmodell reduziert werden kann. Das reduzierte mathematische Modell kann mittels einer nichtlinearen Zustands- und Stellgrößentransformation in ein exakt lineares Modell übergeführt werden und dann mittels einer linearen Regelung einfach stabilisiert werden. Die dafür notwendige Position und Orientierung des Fahrzeuges gegenüber einem raumfesten Inertialsystem wird dabei mittels eines nichtlinearen Beobachters berechnet.

1. Mathematisches Modell

In folgender Abbildung ist der Aufbau des hier betrachteten Robotersystems schematisch dargestellt.



Das Fahrzeug besteht aus einem Chassis und bis zu sechs Rädern, wobei jedes Rad unabhängig voneinander mittels Elektromoteren gelenkt und angetrieben werden kann. Für die Modellbildung werden nichtholonome Bindungen an den Rädern (reines Rollen, kein Quergleiten) vorausgesetzt und weiters wird nur eine Bewegung in der Ebene betrachtet. Damit müssen die Lenkwinkel, Lenkwinkelgeschwindigkeiten und Radgeschwindigkeiten gewisse Zwangsbedingungen erfüllen, um eine Bewegung des Fahrzeuges zu ermöglichen (siehe [2], [3]).

Weiters wird vorausgesetzt, daß die Trägheitsmomente der Räder um die Hochachse vernachlässigbar klein sind und damit die Lenkwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\gamma}_{RH}$ und $\dot{\gamma}_{RV}$ als Eingangsgrößen des Systems angesetzt werden können. Die Bewegungsgleichung kann dann mittels der Projektionsgleichung für Subsysteme [4] hergeleitet werden und daraus ergibt sich das Zustandsraummodell in folgender Form.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x} = (x_{Ch}\ y_{Ch}\ \gamma_{Ch}\ \beta_{RH}\ \beta_{RV}\ \beta_{RHL}\ \beta_{RHR}\ \beta_{RVL}\ \beta_{RVR}\ \gamma_{RH}\ \gamma_{RV}\ v_{RV})^T$$

$$\mathbf{u} = (M_{AH}\ M_{AV}\ M_{AHL}\ M_{AHR}\ M_{AVL}\ M_{AVR}\ \dot{\gamma}_{RH}\ \dot{\gamma}_{RV})^T$$

Die Stellgrößen dieses Systems sind offensichtlich redundant, da abgesehen von den singulären Stellen mit jedem Antriebsmoment die gleiche Bewegung des Fahrzeuges erzielt werden kann.

2. Stellgrößentransformation

Da für die Regelung keine Redundanz in den Stellgrößen erlaubt ist, wird hier eine Stellgrößentransformation so eingeführt, daß das Moment am (gedachten) mittleren Vorderrad $\bar{M}_{AV}$ die gleiche Bewegung des Fahrzeuges hervorruft, wie eine Kombination aller (realen) Antriebsmomente (siehe [2], [3]). Streicht man die Raddrehwinkel β_{Ri} aus

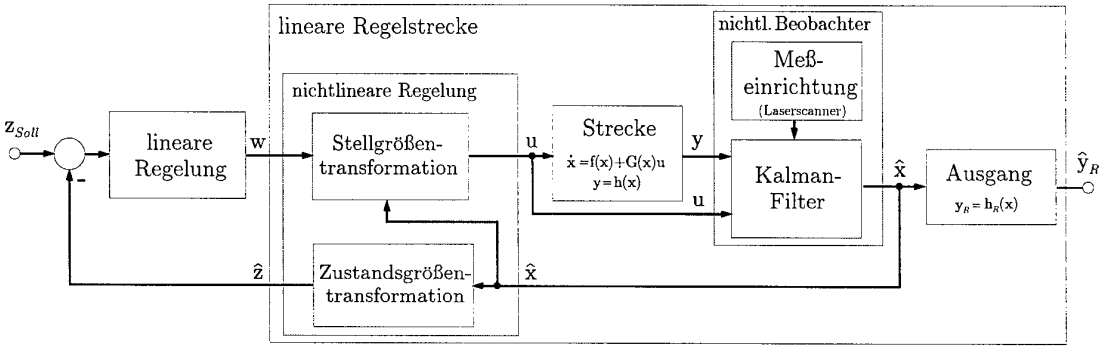
dem Modell (werden für die Regelung nicht benötigt) und wendet man die Stellgrößentransformation an, so ergibt sich folgendes Zustandsraummodell.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{G}(\mathbf{x})\,\mathbf{u}, \qquad \mathbf{x} = (x_{Ch}\ y_{Ch}\ \gamma_{Ch}\ \gamma_{RH}\ \gamma_{RV}\ v_{RV})^T, \quad \mathbf{u} = (\bar{M}_{AV}\ \dot{\gamma}_{RH}\ \dot{\gamma}_{RV})^T$$

Dieses Modell besitzt nun für alle denkbaren Radkombinationen (Zwei-, Drei-, Vier-, Fünf- oder Sechsradmodell) die gleiche Struktur, wobei sich je nach Kombination nur die konstanten Faktoren ändern. Damit ist es möglich alle weiteren Regler- und Beobachterentwürfe für dieses Modell durchzuführen und dann auf die verschiedenen Modellvarianten anzuwenden.

3. Nichtlineares Regelungskonzept

Das reduzierte mathematische Modell kann mittels einer nichtlinearen Stellgrößentransformation $\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})\,\mathbf{w}$ und einer nichtlinearen Zustandsgrößentransformation $\mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ exakt linearisiert und entkoppelt werden (siehe [6]). Da am Roboter nicht alle für die Regelung notwendigen Zustandsgrößen direkt gemessen werden können ($\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\gamma_{RH}\ \gamma_{RV}\ v_{RV})^T$), wird weiters ein nichtlinearer Beobachter (siehe [5]) eingesetzt, wobei für die Berechnung des Beobachters nur das kinematische Modell zugrundegelegt wird. Die gesamte Regelungsstruktur ist in folgendem Bild dargestellt.



Damit erhält man folgendes System, welches mittels einer linearen Regelung einfach stabilisiert werden kann.

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_4 \\ z_5 \\ z_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_\gamma \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{Ch} \\ y_{Ch} \\ \gamma_{Ch} \\ \gamma_{RH} \\ \gamma_{RV} \\ v_{RV} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_{Ch} \\ \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{\gamma}_{Ch} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_R = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \gamma_{Ch} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Ch} + a_0 \cos(\gamma_{Ch}) - b_0 \sin(\gamma_{Ch}) \\ y_{Ch} + a_0 \sin(\gamma_{Ch}) + b_0 \cos(\gamma_{Ch}) \\ \gamma_{Ch} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \bar{M}_{AV} \\ \dot{\gamma}_{RH} \\ \dot{\gamma}_{RV} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_\gamma \end{pmatrix}$$

4. Referenzen

1 BLAIMSCHEIN, P.: Modellierung und Regelung von nichtholonomen mobilen Robotersystemen; ZAMM, Volume 78, Suppl. 1, S279 - S280, Berlin 1998.
2 BLAIMSCHEIN, P.: Modellierung und Regelung eines mobilen Roboter mit redundantem Antrieb; erscheint in ZAMM, Volume 79.
3 BLAIMSCHEIN, P.; BREMER, H.: Nonlinear feedback control for a four-steering-wheel mobile robot; erscheint in ZAMM, Volume 80.
4 BREMER, H.: Dynamik und Regelung mechanischer Systeme; B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1988.
5 GELB, A.: Applied Optimal Estimation; M.I.T. Press, Cambridge 1976.
6 ISIDORI, A.: Nonlinear Control Systems; Springer Verlag, London 1995.

Adresse: DIPL.-ING. PETER BLAIMSCHEIN, O.UNIV.-PROF. DR.-ING. HABIL. HARTMUT BREMER, Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Handhabungs- und Fertigungssysteme, Abteilung Robotik, Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, Austria, E-mail: blaimschein@mechatronik.uni-linz.ac.at

BÜSKENS, CHRISTOF

A Mixed Open–Loop–Closed–Loop Strategy for Real–Time Optimization of Perturbed Optimal Control Problems with Constraints

In real–time optimization respectively real–time control one has to distinguish between open–loop and closed–loop strategies. These strategies emphasize either the calculation of the (sub)optimal solution or they try to find an admissible solution. One finds that the advantages of one method are the disadvantages of the other and vice versa. Hence a new mixed strategy is proposed which combines the advantages of both methods. Finally illustrative examples are discussed which show the efficiency and robustness of the proposed method.

1. Introduction

Optimal control problems with constraints play an important role in natural sciences, engineering and other disciplines. Typical problems appear in economics, aeronautics, astronautics, chemical engineering or robotics. Often these models are subject to perturbations in the system data. These disturbances are modelled by parameters in the dynamics, in the boundary conditions or in the constraints on state and control variables. In case that an actual deviation from nominal parameters occurs, it may be too time–demanding to compute the optimal perturbed solution. In this situation, the control engineer wants to have a fast, reliable and admissible real–time control approximation of the perturbed optimal solution. Hence this article is concerned with the numerical calculation of optimal control approximations in real–time in the presence of special perturbations in parameters of the system.

2. Parametric Nonlinear Optimal Control Problems with Constraints

Parametric control problems subject to control and state constraints are considered. Data perturbations are modelled by a parameter $p \in P = \mathbb{R}^k$. The following parametric control problem will be referred to as problem $OCP(p)$.

$$\text{Minimize} \quad g(x(t_f), t_f, p) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(x(t), u(t), p)\, dt \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), p) \quad \text{for a.e. } t \in [t_0, t_f]\,, \tag{2}$$

$$\psi(x(t_0), x(t_f), p) = 0\,, \tag{3}$$

$$C(x(t), u(t), p) \leq 0 \quad \text{for } t \in [t_0, t_f]\,. \tag{4}$$

We assume that the functions $g : \mathbb{R}^{n+1} \times P \to \mathbb{R}$, $f_0 : \mathbb{R}^{n+m} \times P \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^{n+m} \times P \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \mathbb{R}^{2n} \times P \to \mathbb{R}^r$, $0 \leq r \leq n$, and $C : \mathbb{R}^{n+m} \times P \to \mathbb{R}^l$ are sufficiently smooth on appropriate open sets. The final time t_f is either fixed or free. The admissible class is that of piecewise continuous control functions. Let us fix a *reference* or *nominal* parameter $p_0 \in P$ and consider problem $OCP(p_0)$ as the *unperturbed* or *nominal* problem. Furthermore we assume that there exists a local solution (x_0, u_0) of the reference problem $OCP(p_0)$ such that $u_0 \in C(t_0, t_f; \mathbb{R}^m)$.

3. Numerical Solution via Nonlinear Programming

Direct optimization methods provide a powerful tool for solving optimal control problems with control and state constraints; cf. e.g. [1]. The discussion is restricted to Euler's method applied to the control problem $OCP(p)$ in (1)–(4). Let $N > 0$ be a positive integer and choose grid points t_i, $i = 1, \ldots, N$, with $t_0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_N = t_f$. Denoting approximations of the values $x(t_i)$ and $u(t_i)$ by x^i and u^i, the control problem (1)–(4) is replaced by the following nonlinear programming problem with equality and inequality constraints:

$$\text{Minimize} \quad g(x^N, t_N, p) + \sum_{i=1}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) f_0(x^i, u^i, p) \tag{5}$$

$$\text{subject to} \quad x^{i+1} = x^i + (t_{i+1} - t_i) f(x^i, u^i, p), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{6}$$

$$\psi(x^1, x^N, p) = 0, \tag{7}$$

$$C(x^i, u^i, p) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8}$$

By treating the control variables as the only optimization variables and computing the discretized state recursively by equation (6), problem (5)–(8) can be solved by standard e.g. SQP–methods. A *free* final t_f is handled as an additional optimization variable. Once problem (5)–(8) is solved one can reduce it to the following parametric NLP (nonlinear programming) problem with optimization variables $u = (u^1, \ldots, u^N)$. The objective J is defined by (5) while G denotes the collection of active constraints in (7) and (8)

$$\text{NLP(p)} \qquad \begin{array}{ll} \text{Minimize} & J(u,p), \\ \text{subject to} & G(u,p) = 0. \end{array} \tag{9}$$

4. Sensitivity Analysis and Real-Time Control

An excellent reference for sensitivity analysis of parametric NLP-problems is Fiacco [2]. The Lagrangian function for problem NLP(p) is given by $L(u,\mu,p) = J(u,p) + \mu^T G(u,p)$ with Lagrange multiplier μ. Let u_0 be the unperturbed solution for the nominal parameter p_0 and let μ_0 be the associated Lagrange multiplier. Suppose that second order sufficient conditions hold for the nominal problem $NLP(p_0)$ and, moreover, assume that the Lagrange multipliers μ_i for active inequality constraints in (8) are *positive*. Then the unperturbed solution u_0, μ_0 can be embedded into a C^1-family of perturbed solutions $u(p), \mu(p)$ to NLP(p) with $u(p_0) = u_0$, $\mu(p_0) = \mu_0$. The sensitivity differentials are given by the formula

$$\begin{pmatrix} \frac{du}{dp}(p_0) \\ \frac{d\mu}{dp}(p_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{uu} & (G_u)^T \\ G_u & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L_{up} \\ G_p \end{pmatrix}. \tag{10}$$

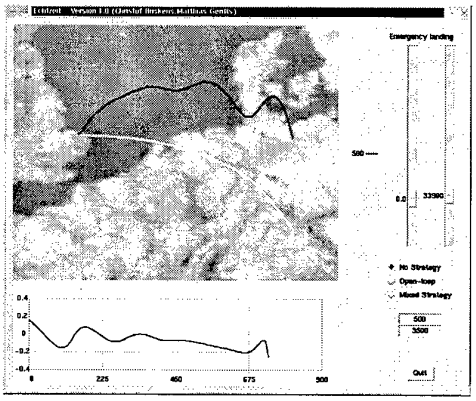
The right hand side is evaluated at the nominal solution. Note that the matrix on the right hand side is non-singular since second order sufficient conditions are assumed to hold. This type of strong C^1-stability where optimal solutions are of class C^1 with respect to a set of parameters p allows to develop an open–loop approximation of the perturbed control $u(t,p)$ by considering the following first order Taylor expansion:

$$u(t_i,p) \approx u^i(p) \approx u_0^i + \frac{du^i}{dp}(p_0)(p - p_0). \tag{11}$$

This approximation takes about 10^{-9} seconds to calculate. Please note, that errors caused by the first order approximation in (11) lead to perturbations in the trajectory. These deviations can be interpreted as perturbations p defined in problem (1)–(4). Again applying formula (11) leads to an iterative closed–loop approach of Newton type with advantages which cannot be discussed here further.

5. Example: Emergency landing of a hypersonic flight system [3]

During the ascent phase of a hypersonic flight system some malfunction necessitates to abort the ascent. The flight system is still able to manoeuvre although the propulsion system is damaged. For security reasons an emergency landing trajectory with maximum range has to be found (starting point: Bayreuth/Germany). The system consists of seven state functions, two control functions and additional control and state constraints. The admissible set is defined by a final altitude of 500 meters. Perturbations (between 20% and 300% and larger) are modelled by deviations in the air density and by additional non detectable parameters of the system. Though these huge perturbations are even not realistic, the algorithm is able to handle them. The picture shows the graphical interface for real–time optimization. Perturbations can be simulated by two slide bars on the right hand side of the picture.



6. References

1 Büskens, C., Maurer, H.: Sensitivity Analysis and Real-Time Control of Nonlinear Optimal Control Systems via Nonlinear Programming Methods, in: Variational Calculus, Optimal Control and Applications, **124**, Birkhäuser, 1998.

2 Fiacco, A.V.: Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming. Mathematics in Science and Engineering **165**, Academic Press, New York, 1983.

3 Mayrhofer, M, Sachs, G.: Notflugbahnen eines zweistufigen Hyperschall–Flugsystems ausgehend vom Trennmanöver, Seminar des Sonderforschungsbereichs 255: Transatmosphärische Flugsysteme, TU München, 1996.

Addresses: Dr. Christof Büskens, Universität Bayreuth, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, 95440 Bayreuth, Germany. URL: http://www.uni-bayreuth.de/departments/ingenieurmathematik

CHUDEJ, K.

Minimalkoordinaten zur effizienten Lösung singulärer optimaler Steuerungsaufgaben

Die Einführung von Minimalkoordinaten erleichtert die indirekte Lösung zustandsbeschränkter optimaler Steuerungsaufgaben erheblich [1]. Wir demonstrieren an einer Trajektorienoptimierungsaufgabe einer Rakete, daß diese Technik auch bei singulären Steuerungen das Konvergenzverhalten der Mehrzielmethode verbessert.

1. Optimale Steuerungsaufgabe

Wir betrachten die folgende optimale Steuerungsaufgabe für eine Rakete [4]: Gesucht sind die freie Endzeit t_f und die Steuerungen Schubdrosselung $\delta(t)$, Schubwinkel $\varepsilon(t)$ und Auftriebsbeiwert $C_L(t)$, so daß die Endgeschwindigkeit $v(t_f)$ maximiert wird und die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\dot{v} = [T\delta\cos\varepsilon - D(v,h;C_L)]/m - g(h)\sin\gamma, \qquad \dot{h} = v\sin\gamma, \tag{1}$$

$$\dot{\gamma} = [T\delta\sin\varepsilon + L(v,h;C_L)]/(mv) - [g(h)/v - v/(r_0+h)]\cos\gamma, \qquad \dot{m} = -T\delta/(g_0 I_{sp}) \tag{2}$$

der Zustände (Geschwindigkeit $v(t)$, Bahnneigungswinkel $\gamma(t)$, Höhe $h(t)$ und Masse $m(t)$) erfüllt sind. Zusätzlich werden die Steuerbeschränkung

$$0 \le \delta \le 1, \tag{3}$$

und die Randbedingungen

$$v(0) = v_0, \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad h(0) = h_0, \quad m(0) = m_0, \quad \gamma(t_f) = \gamma_f, \quad h(t_f) = h_f, \quad m(t_f) = m_f \tag{4}$$

gefordert. Es wird eine höhenabhängige Gravitation $g(h) = g_0\left(\frac{r_0}{r_0+h}\right)^2$ und ein Auftriebs- und Widerstandsmodell mit einer quadratischen Polare

$$L(v,h;C_L) = q(v,h)\ S\ C_L, \qquad D(v,h;C_L) = q(v,h)\ S\ (C_{D_0} + k\ C_L^2), \qquad q(v,h) = 1/2\ v^2\ \varrho(h) \tag{5}$$

und einem exponentiellen Luftdichtemodell $\varrho(h) = \varrho_0 \exp(-h/h_{skal})$ benutzt. Die Zahlenwerte der Konstanten finden sich in [4]. Seien einige Abkürzungen eingeführt: Steuervektor $u = (\delta, \varepsilon, C_L)^\top$, Zustandsvektor $x = (v, \gamma, h, m)^\top$. Damit lassen sich die Bewegungsdifferentialgleichungen (1) und (2) kurz als $\dot{x} = f(x,u)$ schreiben.

2. Standardansatz und neuer Ansatz mit Minimalkoordinaten

Beim indirekten Ansatz werden die notwendigen Optimalitätsbedingungen zu einem Mehrpunktrandwertproblem zusammengestellt (vgl. [4]), daß sich mit Mehrzielalgorithmen lösen läßt (z.B. [2,3]). Dazu wird mit den adjungierten Variablen $\lambda(t) = (\lambda_v(t), \lambda_\gamma(t), \lambda_h(t), \lambda_m(t))^\top$ die Hamiltonfunktion $H = \lambda^\top f(x,u)$ gebildet. Die optimalen Steuergesetze $\delta(x,\lambda)$, $\varepsilon(x,\lambda)$, $C_L(x,\lambda)$ ergeben sich aus dem Minimumprinzip:

$$C_L \text{ aus } \frac{\partial H}{\partial C_L} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial C_L^2} \ge 0 \tag{6}$$

$$\varepsilon \text{ aus } \frac{\partial H}{\partial \varepsilon} = 0, \frac{\partial^2 H}{\partial \varepsilon} \ge 0 \tag{7}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad G > 0 \\ \delta_{sing}(x,\lambda) & \text{für} \quad G = 0 \\ 0 & \text{für} \quad G < 0 \end{cases} \quad \text{mit Schaltfunktion } G(x,\lambda) = \sqrt{\lambda_\gamma^2 + v^2\lambda_v^2} + \lambda_m m v/(g_0 I_{sp}) \tag{8}$$

Die Ordnung der singulären Steuerung δ ist in diesem Beispiel eins. Auf einem Teilbogen $[t_a, t_b]$, auf dem die Schaltfunktion $G = 0$ identisch erfüllt, berechnet sich deshalb die singuläre Steuerung aus der Beziehung $\frac{d^2G}{dt^2}(x, \lambda, \delta) = 0$. Für die Schaltstruktur (der optimalen Lösung, vgl. [4])

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 0 \leq t < t_a \\ \delta_{sing}(x,\lambda) & \text{für} \quad t_a \leq t \leq t_b \\ 0 & \text{für} \quad t_b < t < t_c \\ 1 & \text{für} \quad t_c \leq t \leq t_f \end{cases} \tag{9}$$

erhält man standardmäßig das Mehrpunktrandwertproblem in $(x, \lambda)^\top$ mit abschnittsweise definierten Differentialgleichungen

$$\dot{x} = f(x, u(x,\lambda)), \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}|_{(x,\lambda,u(x,\lambda))} \tag{10}$$

wobei die Steuergesetze für $\varepsilon(x,\lambda)$ und $C_L(x,\lambda)$ aus den Gleichungen (6) und (7) und das Steuergesetz für $\delta(x,\lambda)$ aus der Gleichung (9) als Hilfsfunktion wirken. Die Rand- und Übergangsbedingungen sind durch

$$G(x(t_a),\lambda(t_a)) = 0, \quad \frac{dG}{dt}(x(t_a),\lambda(t_a)) = 0, \quad G(x(t_c),\lambda(t_c)) = 0, \quad \lambda_v(t_f) = -1, \quad H(t_f) = 0 \tag{11}$$

und die Gleichungen (4) gegeben.

Während der Iterationsschritte der Mehrzielmethode werden die Rand- und Übergangsbedingungen noch nicht erfüllt. Die Anfangswerte von x und λ sind daher bei t_a inkonsistent. Die Zwischenlösung driftet von der Lösungsmannigfaltigkeit $G = 0$ ab.

Um diesen Effekt zu verhindern, schlagen wir die folgende erfolgreiche Modifikation vor (vgl. das analoge erfolgreiche Vorgehen bei optimalen Steuerungsaufgaben mit nicht-linearer Zustandsbeschränkung und mehrdimensionalem Steuervektor in [1]):

Man führt auf dem singulären Bogen $[t_a, t_b]$ Minimalkoordinaten ein, in dem man bei singulärer Ordnung eins zwei Komponenten aus dem Vektor $(x,\lambda)^\top$ über die Beziehungen $G = \frac{dG}{dt} = 0$ eliminiert. Auf den übrigen Bögen bleiben die Differentialgleichungen (10) unverändert. Im betrachteten Flugbahnoptimierungsproblem wählt man etwa die Minimalkoordinaten $z = (v, \gamma, h, m, \lambda_v, \lambda_\gamma)^\top$, in dem man die in $G = 0$ linear auftretenden Größen λ_m und die in $\frac{dG}{dt} = 0$ linear auftretende Größe λ_h eliminiert. Die dabei gewonnenen Formeln werden in die rechte Seite der Differentialgleichungen für $v, \gamma, h, m, \lambda_v, \lambda_\gamma$ eingesetzt. Bei t_a und t_b wird die Stetigkeit von $v, \gamma, h, m, \lambda_v, \lambda_\gamma$ gefordert. Zusätzlich zu den Gleichungen (4) werden die folgenden Rand- und Übergangsbedingungen gefordert:

$$G(x(t_a^-),\lambda(t_a^-)) = 0, \quad \frac{dG}{dt}(x(t_a^-),\lambda(t_a^-)) = 0, \quad G(x(t_b^+),\lambda(t_b^+)) = 0, \quad \frac{dG}{dt}(x(t_b^+),\lambda(t_b^+)) = 0, \tag{12}$$

$$G(x(t_c),\lambda(t_c)) = 0, \qquad \lambda_v(t_f) = -1, \qquad H(t_f) = 0. \tag{13}$$

Dieses neue Randwertproblem, das auf dem Intervall $[t_a, t_b]$ nur eine sechsdimensionale Differentialgleichung besitzt, hat bei gleichen Mehrzielknoten ein i.allg. zehnmal größeres Konvergenzgebiet als das Standart-Randwertproblem (10,11,4).

3. Literatur

1 Chudej, K., Günther, M.: A global state space approach for the efficient numerical solution of state-constrained trajectory optimization problems. Journal of Optimization Theory and Applications, 103, 1 (1999) 75–93.

2 Hiltmann, P.: Numerische Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen, Dissertation, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1990). Nachdruck: Report No. 448, DFG-Schwerpunktprogramm Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, Mathematisches Institut, Technische Universität München (1993).

3 Hiltmann, P., Chudej, K., Breitner, M.: Eine modifizierte Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen, Benutzeranleitung, Report No. 14, Sonderforschungsbereich 255 Transatmosphärische Flugsysteme, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, Technische Universität München (1993).

4 Oberle, H.J.: Numerical Computation of Singular Functions in Trajectory Optimization Problems. J. Guidance, Control, and Dynamics, 13 (1990) 153–159.

Adresse: Dr. Kurt Chudej, Universität Bayreuth, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, D-95440 Bayreuth.

EPPLER, K.; TRÖLTZSCH, F.

Discrete and continuous optimal control strategies in the selective cooling of steel

We consider the problem of cooling milled steel profiles at a maximum rate subject to given bounds on the difference of temperatures in prescribed points of the steel profile. This leads to a nonlinear parabolic control problem with state constraints in a 2D domain. The controls can admit values from continuous or discrete sets. A method of instantaneous control is applied to establish a fast solution technique. Moreover, continuous and discrete control strategies are compared, and conclusions are given from an applicational point of view.

1. The optimal control problem

The selective cooling of steel profiles is an important part of the production process in steel mills. In Krengel et. al [1] and Lezius and Tröltzsch [3], the following optimal control problem is introduced to model the cooling process:

$$\text{(P)} \qquad \min \quad F(y(T)) = \sum_{n=1}^{N} a_n\, y(T, P_n)$$

subject to the state equation

$$\begin{aligned} c(y)\rho(y)\, y_t &= \text{div } (\lambda(y) \text{ grad } y) && \text{in } Q, \\ \lambda(y)\, \partial_n y &= \sum_{i,k} u_{ki}\, \chi(\Sigma_{ki})\, \alpha(\cdot, y)(y_{fl} - y) && \text{in } \Sigma, \\ y(0,x) &= y_0(x) && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

and subject to the constraints on control and state

$$\begin{aligned} |y(t, R_\mu) - y(t, Q_\nu)| &\le \Theta_{\mu\nu}, \ \mu = 1, .., N_R, \ \nu = 1, .., N_Q, \\ 0 \le u_{ki} &\le 1, \quad i = 1, .., p, \quad k = 1, .., K. \end{aligned}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ stands for the cross section of the steel profile to be cooled, $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \Gamma$, $\Sigma_{ki} = (t_{k-1}, t_k) \times \Gamma_i$, $\chi(\Sigma_{ki})$ is the characteristic function of Σ_{ki} and T is the terminal time. The control variables $u_{ki} \in \mathbb{R}$ are the cooling intensities of spray nozzles. According to our notation, we have K nozzle groups of p nozzles around the profile. The k-th group is active during (t_{k-1}, t_k) and the i-th nozzle influences Γ_i. The solution of the state equation $y = y(t,x)$ denotes the temperature at $t \in [0,T]$ and $x \in \Omega$, y_{fl} is the temperature of the cooling fluid. P_n, R_μ and Q_ν denote selected points from the closure of Ω. In Lezius and Tröltzsch [3] a method of feasible direction was developed to solve this problem. Tröltzsch and Unger [4] deal with a very fast and precise (suboptimal) solution method, where, after discretization, the optimization is reduced to a sequence of low-dimensional linear programming problems. The essence of our instantaneous control strategy can be comprised as follows: The time horizon of (P) is equal to T, the final time of the process (optimality has to be achieved at T).In contrast to this, we split $[0,T]$ into subintervals of length τ, and the optimization is performed sequentially on all subintervals. We start to minimize the temperature on the interval $[0,\tau]$. Next we proceed in the same way on $[\tau, 2\tau]$ (initiating from $y(\tau, x)$) and reach after finitely many steps T. We just reduce the time horizon of optimization to the length τ. This method is very fast and has another interesting advantage: It will not always be possible to choose the intensities u_{ki} *continuously* between 0 (nozzle is off) and 1 (nozzle sprays with full intensity). Due to technical reasons, the discrete choice $u_{ki} \in \{0,1\}$ might be more realistic. Here, the nozzles can only be switched in or off. Such strategies are investigated for example in Landl and Engl [2]. In contrast to the algorithm of [3], the method of instantaneous control in [4] can be very easily adapted to discrete strategies, because substituting $u_{ki} \in \{0,1\}$ for the control constraints of the control problem (P) leads immediately to linear integer optimization subproblems of the same structure like the subproblems of the continuous case.

2. Results and conclusions

To compare the numerical results we tested the example in [4], where the time horizon for the auxiliary optimization

subproblems coincides with the steplength τ to solve the parabolic state equation. Optimal values and computational times are compared in the table (dis=discrete, con=continuous). The parabolic state equation was solved by a Crank-Nicholson scheme in time and a 3-step multigrid algorithm for the elliptic subproblems. The integer programming subproblems were solved by complete enumeration. The size of the subproblems is so small that this method was faster than standard branch-and bound algorithm. We obtained computational times close to the ones for the continuous case, essentially faster than the time needed by the method of feasible directions.

	I dis	II dis	III dis	I con	II con	III con	Method of [3]
$F(y)$	5841.1	5848.8	5853.2	5641.8	5643.3	5653.7	5647.6
CPU	122. sec	431 sec	177 sec	124 sec	433 sec	180 sec	59 h (177 It.)

The solution of the partial differential equation(s) is the most time consuming task. The number of PDE solves depends mainly on the length of the time horizon, after that the constraint matrix and the objective of the linear programming problems have to be updated. The larger this horizon is, the smaller is the computational time for PDE's, while the precision of the method increases. Since the solution of the subproblems is sensitive with respect to the data (especially matrix and objective), we had to find a reasonable compromise between accuracy and computing time. In the table we report on 3 different choices of time steps for solving parabolic equations:
In all cases I-III, optimization subproblems have to be solved on time horizons of length τ. However, we do not update all coefficients of the problem after each time step τ. The coefficients of the objective and the matrix of the constraints are updated only after larger intervals of time (in our test example 10τ), while the right hand sides of the constraints are updated after each time step τ. In case I τ is also used as the step length of the parabolic equation for both the update and the generation of the optimization data. In case II we used a smaller time step $\tau_{II} = \tau/5$. Case III proceeds as case I with respect to the update, but the coefficients of the matrix and the objective are computed with higher precision ($\tau/5$). The optimal controls of the discrete subproblems depends stronger on this choice, but the influence on the optimal value is not too strong. A discussion these details would exceed the size of this short note. Moreover, we observed effects of ill-posedness for the solution of the subproblems and of numerical noise for the generation of the problem data (independent of the computing precision) for the small time horizon τ. Therefore, in the linear subproblems, we introduced a linear regularization by adding $\varepsilon \sum_{m=1}^{9} v_m$ to the objective, where v_m are the associated control variables and $\varepsilon > 0$ is sufficiently small.

The method of instantaneous control is able to deal with discrete cooling strategies in almost the same time as for the continuous method. However, it is quite natural that integer controls are not so flexible as the continuous ones. Even by using ten times more nozzles as in the continuous case, there is an essential lack of efficiency with a temperature difference of almost 30 K for every "hot spot", selected for the objective. Due to the state constraints, some of the nozzles are switched off during the whole process, which is the main reason for the gap. Nevertheless, using the same number of nozzles of **lower** size can improve the efficiency of discrete cooling. Moreover, the results of the continuous case give important hints to design such strategies.

Acknowledgements

This work was supported by DFG-Forschungsschwerpunkt "Real-time optimization of large systems".

3. References

1 KRENGEL, R., STANDKE, R., TRÖLTZSCH, F. AND WEHAGE, H. : Mathematisches Modell einer optimal gesteuerten Abkühlung von Profilstählen in Kühlstrecken. *Preprint 98–6*, Fakultät für Mathematik, TU Chemnitz.

2 LANDL, G. AND ENGL, H.W.: Optimal strategies for the cooling of steel strips in hot strip mills. *Inverse problems in Engineering*, 2 (1995), 102-118.

3 LEZIUS, R. AND TRÖLTZSCH, F. :Theoretical and Numerical Aspects of Controlled Cooling of Steel Profiles. In: Neunzert, H. (Edt.): *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 94*, Wiley-Teubner, 1996, 380-388.

4 TRÖLTZSCH, F. AND UNGER, A. :Fast solution of optimal control problems in the selective cooling of steel. *Preprint 99-9*, DFG-Forschungsschwerpunkt "Real-time optimization of large systems".

Addresses: PROF. DR. FREDI TRÖLTZSCH, DR. KARSTEN EPPLER, Chemnitz University of Technology, Faculty of mathematics, 09107 Chemnitz, Germany

GERDTS, MATTHIAS AND BÜSKENS, CHRISTOF

Computation of Consistent Initial Values for Optimal Control Problems with DAE Systems of Higher Index

In recent years direct methods have been favored for solving optimal control problems with ODE systems. These approaches reduce the "infinite-dimensional" optimization problem to a finite-dimensional optimization problem by approximating the control and the state over a fixed grid. Because of special problems arising from differential-algebraic equation systems (DAE systems), e.g. the calculation of consistent initial values, the transfer of these ideas to DAE optimal control problems (DOCP) can not be done without further ado. Hence we suggest ideas for a direct solution of DOCP taking these problems into account and present numerical methods for the solution of higher index systems. A high dimensional example is discussed which shows the efficiency and robustness of the proposed methods.

1. Introduction

Optimal control problems with DAE constraints typically arise in areas where DAE systems are used to describe technical processes, e.g. in the simulation of mechanical multi-body systems, process system engineering and electric circuit simulation. In addition path following problems and the discretization of optimal control problems with partial differential equations often lead to DAE optimal control problems. Subject of our interest are optimal control problems of type

$$(DOCP)\qquad \begin{array}{lrcll} \text{Minimize} & J[x,u,t_f] = \Phi(x(t_f),t_f), & & & t_0, t_f \text{ fixed}, \\ \text{subject to} & F(x(t),\dot{x}(t),u(t)) & = & 0, & t\in[t_0,t_f], \\ & g(x(t),u(t)) & \leq & 0, & t\in[t_0,t_f], \\ & \psi(x(t_0),x(t_f)) & = & 0, & \end{array}$$

with state variables $x \in \mathbb{R}^n$, control variables $u \in \mathbb{R}^m$, DAE constraints $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ given in implicit form with singular Jacobian $F_{\dot{x}}$, path constraints $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ and boundary conditions $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$. DAE optimal control problems pose several problems due to the singular character of DAE systems. One of the main problems is that, in contrast to ordinary differential equation (ODE) systems with regular Jacobian $F_{\dot{x}}$, not any initial value is admissible because hidden constraints have to be fulfilled, i.e. initial values have to be *consistent* with the DAE system, see [1]. DAE systems often are characterized by a quantity known as the *(differentiation) index* defined in [1]. We focus attention on DAE systems with index greater than one, i.e. higher index systems. For these systems the numerical computation of consistent initial values in combination with optimal control problems is not trivial especially in the presence of free components in the initial value $x(t_0)$.

2. Discretization of the problem and calculation of consistent initial values

The optimal control problem (DOCP) is discretized by introducing a suitable grid $t_0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{N+1} = t_f$ on which the control function u is approximated for example by the continuous and piecewise linear function $u_{app}(t) = u_i + \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i}(u_{i+1} - u_i)$ for $t_i \leq t \leq t_{i+1}, i = 1,\ldots,N$, where u_i denotes an approximation of $u(t_i)$. Given an initial guess x_0 of the state at $t_0 = t_1$ consistent initial values $x_{app}(t_1)$ have to be provided. Then the DAE system $F(x_{app}(t),\dot{x}_{app}(t),u_{app}(t)) = 0$ is solved on $[t_1,t_{N+1}]$ by standard DAE integrators, e.g. DASSL [1]. Introduction of these approximations into (DOCP) and evaluation of the constraints on the grid results in the finite dimensional nonlinear optimization problem for the variables $z = (x_0,u_1,\ldots,u_{N+1})^\top \in \mathbb{R}^{n+(N+1)m}$

$$(NLP)\quad \text{Minimize } \Phi(x_{app}(t_f),t_f) \text{ s.t. } g(x_{app}(t_i),u_i) \leq 0,\ i = 1,\ldots,N+1,\ \psi(x_{app}(t_1),x_{app}(t_f)) = 0,$$

which can be solved numerically by, e.g., SQP methods. For simplicity we restrict ourselves to semi-explicit index 2 DAE systems of type

$$F_d(x_d,\dot{x}_d,y_1,y_2,u) = 0,\ F_1(x_d,y_1,y_2,u) = 0,\ F_2(x_d,u) = 0,\quad \frac{\partial F_d}{\partial \dot{x}_d} \text{ and } \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \text{ regular.} \tag{1}$$

Because SQP methods work iteratively in each iteration consistent initial values have to be computed before the DAE system can be solved. Let $z^{[k]} = (x_0^{[k]}, u_1^{[k]}, \ldots, u_{N+1}^{[k]})^\top$ with $x_0^{[k]} = (x_{d0}^{[k]}, y_{10}^{[k]}, y_{20}^{[k]})^\top$ denote the k^{th} iterate of the SQP method. Consistent initial values are given by the following two computational steps. In a first step the differential part $x_{d0}^{[k]}$ of the initial state is projected onto the algebraic equation F_2 via

$$(NLP_P) \qquad \text{Minimize } \|x_{d0} - x_{d0}^{[k]}\|_2^2 + \|u_1 - u_1^{[k]}\|_2^2 \quad \text{subject to} \quad F_2(x_{d0}, u_1) = 0.$$

In a second step the algebraic parts y_{10} and y_{20} are computed employing Newton's method on the nonlinear equation system $F_1(x_{d0}, y_{10}, y_{20}, u_1) = 0$, $F_2^{(1)}(x_{d0}, y_{10}, y_{20}, u_1, (u_2 - u_1)/(t_2 - t_1)) = 0$ with the abbreviation $F_2^{(1)}(x_d, y_1, y_2, u, \dot{u}) = \frac{d}{dt} F_2(x_d, u) = \frac{\partial F_2}{\partial x_d} \cdot \dot{x}_d + \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdot \dot{u}$. According to the implicit function theorem the first equation in (1) can be solved w.r.t. $\dot{x}_d$ because of the regularity assumptions in (1). This leads to $\dot{x}_d = f_d(x_d, y_1, y_2, u)$ and the relationships $\frac{\partial F_d}{\partial y_i} + \frac{\partial F_d}{\partial \dot{x}_d} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial y_i} = 0$ hold for $i = 1, 2$. These equations can be solved w.r.t. $\frac{\partial f_d}{\partial y_i}$. Please note, that the partial derivative $\frac{\partial F_d}{\partial \dot{x}_d}$ in many practical applications is known a priori, e.g. the unity matrix. The iteration of Newton's method is given by $w_1^{[i+1]} = w_1^{[i]} + \Delta w_1^{[i]}, w_2^{[i+1]} = w_2^{[i]} + \Delta w_2^{[i]}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ with suitable starting values $w_1^{[0]}, w_2^{[0]}$ and

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_d} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_d} \cdot \frac{\partial f_d}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta w_1^{[i]} \\ \Delta w_2^{[i]} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} F_1(x_{d0}, w_1^{[i]}, w_2^{[i]}, u_1) \\ F_2^{(1)}(x_{d0}, w_1^{[i]}, w_2^{[i]}, u_1, (u_2 - u_1)/(t_2 - t_1)) \end{pmatrix}.$$

The Jacobian on the left hand side is evaluated at $x_{d0}, w_1^{[i]}, w_2^{[i]}, u_1$ and $\dot{u}_{app}(t_1)$ by finite differences. Note, that the Jacobian is regular due to the assumption that the DAE system has index 2. Gradients and Jacobians of the SQP method are computed by use of the sensitivity DAE corresponding to (1), v. [1]. Consistent initial values for the sensitivity matrices are computed by performing a sensitivity analysis of (NLP_P) with respect to the parameters $z^{[k]}$ in the sense of [2].

3. Numerical results

The two dimensional pendulum chain consists of $k = 33$ pendulums linked together and fixed to the center of mass of a vehicle. The motion of the vehicle is restricted to the horizontal plane and is controlled by a force u. The equations of motion are given by the Lagrangian equations of the first kind for mechanical multi-body systems, which is an index 3 DAE system. Index reduction leads to an index 2 DAE system of type (1) with $n = 375$ and $m = 1$. The dimensions of x_d, y_1 and y_2 are 271, 4 and 100, respectively. The objective is to minimize the integral $\int_{t_0}^{t_f} u(t)^2/\alpha + \alpha \|x_1(t)\|^2 dt$ in abstensia of path constraints and boundary conditions at t_f. Figure 1 shows the result of (DOCP) for $\alpha = 1000$, $t_0 = 0$ [s] and $t_f = 1$ [s]. The initial position is characterized by a horizontally to the right stretched chain.

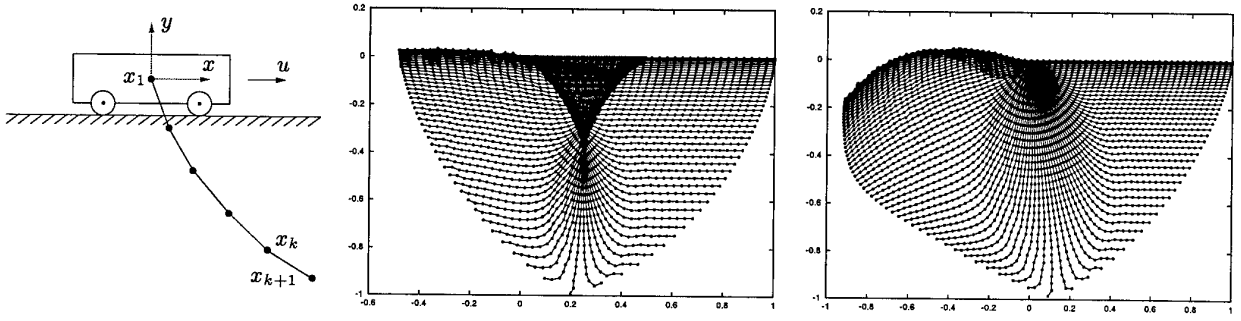


Figure 1: Uncontrolled (left) and controlled (right) motion of the 33 link pendulum chain: position of the joints.

4. References

1 Brenan, K.E., Campbell, S.L., Petzold, L.R.: Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Classics In Applied Mathematics **14** (1996), SIAM, Philadelphia.

2 Fiacco, A.V.: Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming. Mathematics in Science and Engineering **165** (1983), Academic Press, New York.

Addresses: Dipl.-Math. Matthias Gerdts, Dr. Christof Büskens, Universität Bayreuth, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, Universitätsstrasse 30, 95440 Bayreuth, Germany. URL: http://www.uni-bayreuth.de/departments/ingenieurmathematik

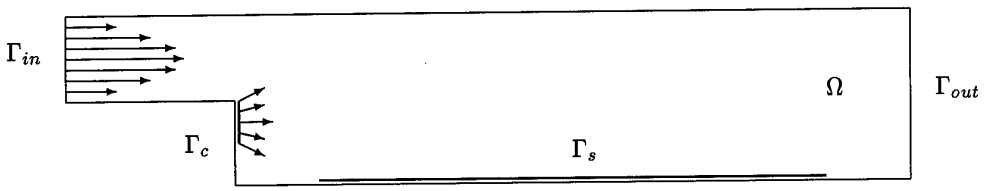
ROLAND GRIESSE

Some Aspects for Instantaneous Boundary Control of Backward-Facing Step Flow

In the present article a boundary control/boundary observation situation for time-dependent incompressible Navier-Stokes flow at low Reynolds number over a backward-facing step is studied. The control action aims at reducing the recirculation behind the step. Particular attention is given to the influence of the location of the control boundary on the efficiency of the control. Numerical examples are presented.

1. Introduction

Consider the flow of a fluid over the two-dimensional backward-facing step:



The fluid is supposed to be governed by the incompressible Navier-Stokes equations

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial v}{\partial t} + (\nabla v)v - \tfrac{1}{Re}\Delta v + (\nabla p)^T &= 0 \quad \text{on } \Omega \times [0,T] \\ \operatorname{div} v &= 0 \quad \text{on } \Omega \times [0,T] \end{aligned} \tag{1}$$

with given initial and boundary conditions. Here, a parabolic inflow profile on Γ_{in} and natural boundary conditions $\frac{1}{Re}\partial_n v = p\,n$ on Γ_{out} (as introduced in [3]) are assumed. Control is exerted by means of the boundary values on Γ_c which is either the upper or lower part of the back of the step. The remaining part of the boundary is subject to a no-slip condition.

For moderate Reynolds numbers $Re = \frac{Uh}{\nu}$ (where U is the bulk velocity of the inflow, h is the step height and ν is the viscosity of the fluid) the flow field starting from rest at $t = 0$ becomes stationary and a recirculation zone evolves behind the step. The objective function (where ∂_n denotes the derivative in the direction of the outer normal)

$$J(\phi) = \int_0^T \left[\int_{\Gamma_s} \frac{1}{2}\partial_n v(|\partial_n v| + \partial_n v)\, d\Gamma_s + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_c} |\phi|^2\, d\Gamma_c \right] dt \tag{2}$$

aims at reducing the recirculation by penalizing backflow near the sensor boundary Γ_s while also measuring the control effort.

2. Instantaneous Control

The concept of instantaneous control for this very setting has been introduced in [1]. In short, it applies the time scheme (with time step τ)

$$\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} - \frac{1}{Re}\Delta v^{n+1} + (\nabla v^n)v^n + (\nabla p^{n+1})^T = 0 \tag{3}$$

to the time-dependent equation (1) to obtain a sequence of optimal control problems for the stationary Quasi-Stokes equations. Instead of the objective functional (2) its stationary counterpart

$$J(\phi) = \int_{\Gamma_s} \frac{1}{2}\partial_n v(|\partial_n v| + \partial_n v)\, d\Gamma_s + \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_c} |\phi|^2\, d\Gamma_c \tag{4}$$

is used. The stationary control problems are not solved exactly, but only one gradient step is performed for each problem. This suboptimal approach has proven very efficient in reducing computational cost while achieving reasonable results.

3. Numerical Results

All computations were done on a domain Ω with vertices (0,0), (2,0), (2,-1), (10,-1), (10,1), and (0,1), with an inflow profile of $v = (10\,y\,(1-y), 0)$. The sensor boundary Γ_s was given by $[4,9] \times \{-1\}$. The control boundary Γ_c was either the upper half or the lower half of the back side of the step. The control action was computed until $T = 30$ with time step $\tau = 0.1$. Beforehand, a simulation with no control had been run with the fluid starting from rest in order to give the recirculation effect time to evolve completely. The Reynolds number and the control penalty parameter were chosen to be $Re = 300$ and $\gamma = 0.01$. At each time level, the initial choice for the control was $\phi^0 = 0$. Computing time amounted to about 5.5 hours for each of the configurations on a recent PC.

All flow problems were solved using the finite element multi-grid code FEATFLOW [2] on a uniform mesh with 1249 vertices and 1152 elements. For the optimal control problems the gradient algorithm suggested in [1] was used. The following graph shows the evolution of control cost $\frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_c} |\phi|^2\, d\Gamma_c$ and backflow $\int_{\Gamma_s} \frac{1}{2}\partial_n v(|\partial_n v| + \partial_n v)\, d\Gamma_s$ over time. The latter term is computed based on the prediction of the state (v^{n+1}, p^{n+1}) which comes from the linearization (3). The actual value is significantly larger.

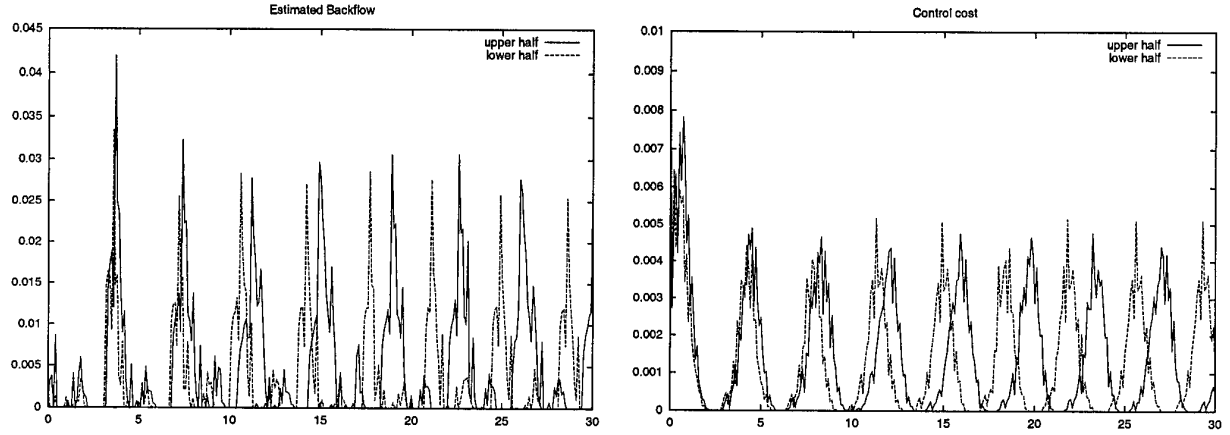


Figure 1: Estimated backflow (left) and control cost (right) over time for Γ_c being the upper half (solid) or lower half (dashed) of the back side of the step

As was observed in [1], the control action is quasi-periodic with the above mentioned choice of the sensor boundary Γ_s. It clearly shows that it does *not* make a difference in terms of control cost or control efficiency on which part of the boundary Γ_c the control acts. Nevertheless, one can observe that the fluid near the sensor boundary Γ_s reacts slightly faster to the control when the latter is exerted through the lower part of the back of the step. This gives rise to a shorter period in the control cost function. Movies and more examples can be found on my home page [4].

4. References

1 CHOI, H., HINZE, M., KUNISCH, K.: Instantaneous control of backward-facing-step flows. Applied Numerical Mathematics 31, 133-158 (1999)

2 TUREK, S., BECKER, C.: Featflow — Finite Element Software for the Incompressible Navier-Stokes Equations. User Manual Release 1.1. `http://www.featflow.de`

3 HEYWOOD, J., RANNACHER, R., TUREK, S.: Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. Int. J. Numer. Meth. Fluids 22, 325-352 (1996)

4 `http://www.staff.uni-bayreuth.de/~btmn07`

Addresses: DIPL.-MATH. ROLAND GRIESSE, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, Universität Bayreuth, D–95440 Bayreuth, Germany

HAMETNER, G.

Stabilisierung eines hydrostatischen Antriebs mit Selbsterregung

Der hydrostatische Fahrantrieb einer im Gleichlaufbetrieb arbeitenden Schienenfräsmaschine ist ein schwach gedämpftes System mit Selbsterregung, zu dessen Stabilisierung besondere Maßnahmen erforderlich sind.

Eine Reduktion des Ölleitungsvolumens würde die Dämpfung erhöhen, gleichzeitig aber verringert sich die Isolationswirkung bei den in der Praxis auftretenden Störerregerfrequenzen. Die Stabilisierung des Antriebs unter Beibehaltung der gewünschten Isolationswirkung gelingt mit einem Zustandsregler. Bei der Auslegung des zugehörigen Beobachters muß auf die höherfrequenten Meßstörungen Rücksicht genommen werden. Der Verschleiß im Stellsystem wird durch ein spezielles Filter reduziert.

1. Modellierung

Gegenstand dieser Arbeit ist der hydrostatische Fahrantrieb [1] einer Arbeitslokomotive, die zur Fräsbearbeitung von Eisenbahnschienen dient. Die Verstellpumpe (1) gemäß Abb. 1 fördert einen einstellbaren Volumenstrom Q_{1P}. Das Öl mit dem Druck p_A strömt über die Hochdruckleitung mit der hydraulischen Kapazität C_H zu den beiden kinematisch gekoppelten Hydraulikmotoren (2) und (3), deren Volumenströme mit dem Schluckvolumen V_{Mot} eines Motors und der Winkelgeschwindigkeit ω der Motorwellen zu $Q_{2Mot} = Q_{3Mot} = V_{Mot}(\omega/2\pi)$ berechnet werden können. Der Druck p_B in der Niederdruckleitung wird konstant gehalten. In Pumpe und Motoren treten die internen Leckölströme Q_{1Li}, Q_{2Li} und Q_{3Li} auf, deren Summe proportional zum Lastdruck $p_L = p_A - p_B$ modelliert wird. Mit $\dot{p}_L = \dot{p}_A$ ergibt sich für die Kontinuitätsgleichung an der Hochdruckleitung

$$C_H \dot{p}_L = Q_{1P} - K_{Lip}\, p_L - \frac{V_{Mot}}{\pi}\,\omega. \tag{1}$$

Auf die Lokomotive mit der Masse m und der Fahrgeschwindigkeit v wirken die Kräfte $F_{Mot} = (V_{Mot}/2\pi)p_L(\omega/v)$, die Schnittkraft $F_S(t)$ der Fräser und die Reibungskraft $F_R(t)$ an den Gleitschuhen, siehe Abb. 2. Bei dem verwendeten Gleichlauffräsverfahren treibt die Schnittkraft das Fahrzeug in Richtung der Fahrgeschwindigkeit an, der Betrag der Schnittkraft ist in erster Näherung proportional zur Fahrgeschwindigkeit. Für die Bewegungsgleichung der Arbeitslokomotive erhält man mit dem Referenzradius $r = v/\omega$ und dem Massenträgheitsmoment $I = mr^2$

$$I\dot{\omega} - r^2 k_v(t)\,\omega = \frac{V_{Mot}}{\pi}\,p_L - rF_R(t). \tag{2}$$

Der selbsterregende Term $-r^2 k_v(t)\,\omega$ stammt von der Schnittkraft. Die Erregungen $k_v(t)$ und $F_R(t)$ wurden aus Messungen von ω, p_L und Q_{1P} im Fräsbetrieb identifiziert [2], sodaß verschiedene Systemkonfigurationen unter realistischen Einsatzbedingungen durch Simulationen im Zeitbereich miteinander verglichen werden können.

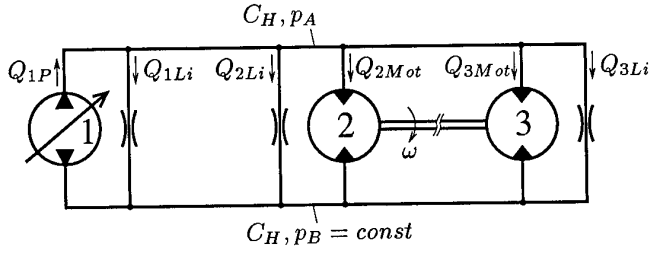


Abbildung 1: Vereinfachter Hydraulikschaltplan.

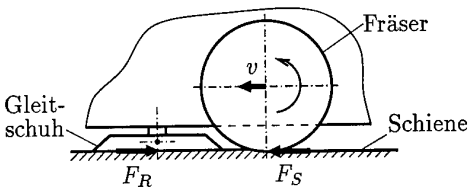


Abbildung 2: Schema einer Fräseinheit.

2. Offenes System

Die Simulationsergebnisse für das durch Vorgabe von Q_{1P} geschwindigkeitsgesteuerte offene System sind in Abb. 3 dargestellt. Die Signale ω und p_L zeigen starke Schwingungen mit der Systemeigenfrequenz von 0.5 Hz, bei höheren

Schnittiefen kann das System instabil werden. Eine mögliche passive Maßnahme zur Erhöhung der Dämpfung besteht in der Reduktion des Leitungsvolumens, wodurch sich die hydraulische Kapazität C_H vermindert. Gleichzeitig vergrößert sich aber der Übertragungsfaktor bei der Erregerfrequenz von 1.7 Hz, was unter realistischen Einsatzbedingungen zu den in Abb. 4 dargestellten Schwingungen führt.

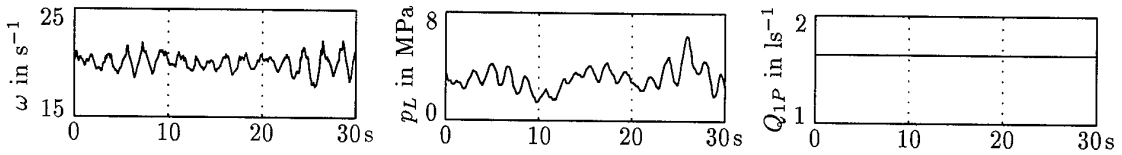


Abbildung 3: Offenes System in der praktisch ausgeführten Konfiguration.

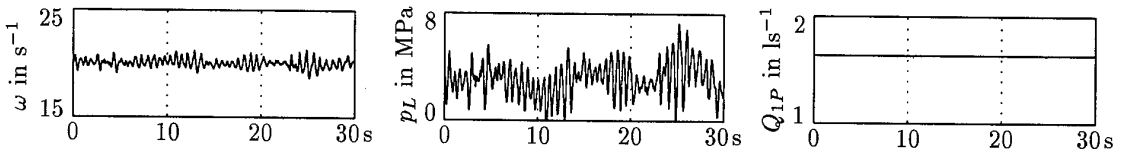


Abbildung 4: Offenes System mit reduziertem Leitungsvolumen.

3. Geschlossener Regelkreis mit Zustandsregler

Um die Fahrgeschwindigkeit v konstant zu halten, wird ein geschlossener Regelkreis mit einem digitalen Zustandsregler [3] aufgebaut. Zur Schätzung der Zustandsgrößen dient ein Beobachter, der durch Polvorgabe ausgelegt wird. Um Schwingungen am Beobachterausgang zu vermeiden, wird ein reeller Dreifachpol gewählt. Für ein schnelles Abklingen des Schätzfehlers sollte dieser Dreifachpol möglichst nahe an den Ursprung gelegt werden. Beim Schätzen der Beschleunigung $\dot{v}$ führen schnelle Beobachterpole zu einer Verstärkung von höherfrequenten Meßstörungen, woraus sich eine gegensätzliche Forderung ergibt. Abb. 5 zeigt die Simulationsergebnisse für einen entsprechenden Kompromiß.

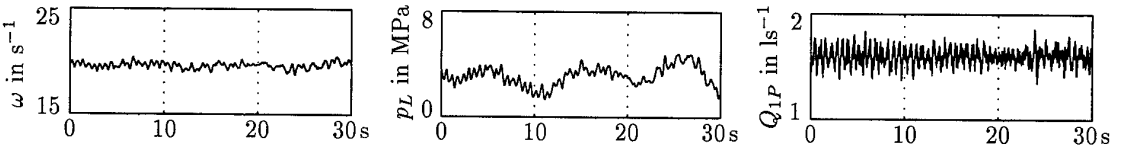


Abbildung 5: Geschlossener Regelkreis mit Zustandsregler und Beobachter.

4. Filter im Regelkreis

Die Schwingungen der Stellgröße Q_{1P} bewirken Verschleiß im Pumpenstellsystem. Signalanteile oberhalb der Systemeigenfrequenz werden deshalb durch ein spezielles Filter am Beobachtereingang abgeschwächt, dessen Übertragungsfunktion aus Besselpolynomen [4] und einem Lead-Glied besteht. Abb. 6 zeigt die verbesserten Ergebnisse.

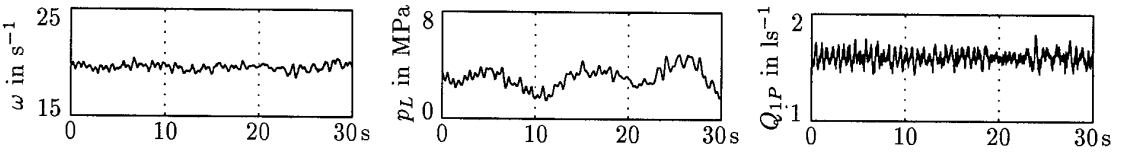


Abbildung 6: Filter am Beobachtereingang.

5. Literatur

1 Backé, W.: Servohydraulik. Umdruck zur Vorlesung, 6. Auflage, RWTH Aachen, 1992.
2 Hametner, G.: Modelling, Identification, and Simulation of a Hydrostatic Transmission. In: Proceedings of 3rd Mathmod Vienna, Wien, 2000, Volume 2, 815-818.
3 Ogata, K.: Discrete-Time Control Systems. Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
4 Tietze, U., Schenk, Ch.: Halbleiter-Schaltungstechnik. 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1978.

Adresse: Dipl.-Ing. Gudrun Hametner, Institut für Maschinendynamik und Meßtechnik/E303, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien, Austria.

S.A. MIKHAILOV, P.C. MÜLLER

Three singularities in control problems

We consider linear-quadratic optimal feedback design for singular singular-perturbed systems (SSPS). In these problems we run into various types of singularities. The first one is connected with small parameters in the coefficients of the derivatives in the differential equations. The second singularity shows up if the reduced DAE system has index > 1. And the last singularity is due to singularity of the weighting matrix in the performance criterion. Tikhonov-Levinson theory, standard time-scale modeling and Riccati equation approach to the control problem do not apply for the SSPS. Therefore in the case of design of a linear-quadratic optimal control the related difficulties have to be considered. We report interactions between singularities, and explain the different approaches to the optimal control design.

1. Introduction

In the last decades there was an essential progress dealing with index 1 singularly perturbed dynamical systems. But still there are many unsolved problems related to analysis and design of high index singularly perturbed systems. The behavior of high index systems is quite different from index 1 singularly perturbed systems: the reduced system has another order, boundary layer system is second order, and for the controlled systems a new characteristic of properness has to be taken into consideration. Proper and non-proper systems distinguish between the cases if the system is exclusively governed by the control input or by its high-order time-derivatives additionally. In this paper, introductory results for optimal control design of linear high index singularly perturbed system with respect to an infinite-horizon quadratic performance criterion will be presented. Consider linear singular perturbed system

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{1}$$

$$\varepsilon\dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \tag{2}$$

where ε is a small positive scalar, $x_1 \in R^n$ is a slow state vector, $x_2 \in R^m$ is the fast state vector, $u \in R^k$ is the vector of control variables. The essential feature of high index systems is that A_{22} is a singular matrix.
For the control design the quadratic performance criterion

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T & Z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix} dt \Rightarrow \min_u \tag{3}$$

is considered where

$$Z_{33} > 0, \quad \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12}^T & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13}^T & Z_{23}^T & Z_{33} \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4}$$

is assumed. The problem to be solved consists in designing a (feedback) control u which minimizes (3) having regard to the dynamic system (1)-(2). The significance of the notion of index in the optimal control theory can be indicated by simple finite dimensional optimization problem. Minimize a function $L(x)$, subject to equality constraint $f_i(x) = 0$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m < n$. In the optimization literature the concept of normality is used. The optimization problem is normal if matrix $\|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\|$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ has rank m. In the descriptor systems language this is index 1 problem. For the normal (index 1) case the minimization problem can be solved by means of usual Lagrange multiplier rule. But this not the case for the abnormal (index > 1) problem, as is shown by example: $L = (x+1)^2 + y^2 \to \min$, $f = y^2 - x^3$. For abnormal case some additional considerations are necessary.

2. The decoupling of the slow and fast variables (index 2 problem)

For index 1 system by means of Riccati transformation it is possible to obtain the uncoupled equations for fast

and slow variables. For pure index 2 problem matrix $A_{22} = 0$, $\det(A_{21}A_{12}) \neq 0$ the Riccati transformation is not applicable. Introducing the complementary rank $(n-m)$ projection

$$P = I - Q \tag{7}$$

where $Q = A_{12}(A_{21}A_{12})^{-1}A_{21}, \quad rank(Q) = m < n$,
then we look for the n-vector x_1 as the sum

$$x_1 = Px_1 + Qx_1 = v + w. \tag{8}$$

After transformation of co-ordinate (8) we obtain the following dynamical system

$$\dot{v} = PA_{11}v + P\{B_1 - A_{11}(A_{21}A_12)^{-1}A_{12}B_2\}u \tag{9}$$

$$w = -(A_{21}A_{12})^{-1}B_2u \tag{10}$$

$$x_2 = -(A_{21}A_{12})^{-1}(A_{21}A_{12}x_1 + A_{21}B_1u + B_2\dot{u}). \tag{11}$$

Differential-algebraic system (9)-(11) is equivalent to the original equations (1)-(2). It consists of the slow subsystem of order $n-m$, and $2m$ algebraic equations. The decomposition into slow and boundary layer subsystems suggests that separate slow and boundary control laws are designed for each subsystem, and then combined into a composite design for the original system. Note, that for index 1 problem the slow subsystem is of order n, the algebraic system corresponding to the fast subsystem is of order m.

3. Solution of the control problem

In this section we discuss general structure of linear-quadratic optimal synthesis. Although the SSPS description (1), (2) shows explicitly only input , there are hidden effects related to time derivatives as it shown by (11). This situation is very different from the common state-space discussions. It is necessary to distinguish between the two cases.

Proper systems. For the proper systems a standard linear-quadratic control problem for the reduced system can be constructed. The control for the slow subsystem (9) has to be designed with respect to the criterion (3). In the case of proper systems it is possible to substitute fast variables w and x_2 from (10), (11) into functional (3). After replacement we arrive in the common linear-quadratic problem. Therefore the solution is obtained by the "Riccati" procedure for the system of reduced order $n-m$. The optimal control is a proportional feedback of the states of the slow subsystem (9).

Nonproper systems. For non-proper systems the Riccati equation approach does not meet the problem directly. An extension of state and control variables has to be carried out:

$$\xi = u, \quad w_e = \dot{u} \tag{12}$$

Here,w_e is considered as a new control input vector. Introducing an extended state vector

$$x_e = \begin{bmatrix} v & \xi \end{bmatrix}^T, \tag{13}$$

an extended dynamical system can be described including the dynamics of slow subsystem (9) and of the exten-sion (12):

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e w_e$$

Substituting x_2 form (11) in the performance criterion (3) and taking into account (12), (13), a linear-quadratic optimal problem with respect to x_e and w_e appears. But obviously a singular control problem is obtained. There is not a regular weighting of the new input w_e . One way is to construct the direct solution of this singular control problem. But this solution has rather theoretical meaning due to the impulses in $\dot{u}(t)$. The second way is to regularize the problem introducing an additional weighting matrix in the performance criterion. In this case we have a standard linear-quadratic problem for the extended system (14) of order $n-m+1$.

Addresses: *Dr. S.A.Mikhailov, Univ.-Prof. Dr. P.C. Müller* Sicherheitstechnische Regelung und Meßtechnik, Bergische Universität-Gesamthochschule Wuppertal, Gaustr. 20, 42097 Wuppertal

MITTERHUBER, R.; BREMER H.

Kraft/Positionsregelung kooperierender, teils elastischer Knickarmroboter

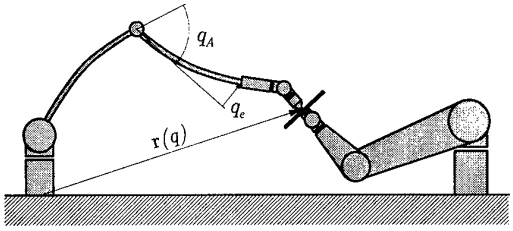
Herkömmliche Industrie - Knickarmroboter sind als starre Mehrkörpersysteme anzusehen. Die einfache Kinetik wird durch hohes Gewicht und großen Bauraum erkauft. Der elastische Roboter stellt daher nicht nur in "klassischen" Leichtbaudisziplinen eine interessante Alternative dar, sondern auch bei beengten Platzverhältnissen, wie sie in Fertigungszellen die Regel sind. Wird ein starrer Roboter kraftgeregelt, so führen kleine Positionsabweichungen zu großen Abweichungen in der Kraft, sodass in der Regel ein weiches Element integriert werden muss. Auch hier ist die elastische Konstruktion im Vorteil. Das Gebiet, mit dem sich diese Arbeit befaßt, ist die Kooperation eines elastischen mit einem starren, handelsüblichen Industrieroboter. Der elastische Roboter soll - während der starre das Werkstück bewegt - Montagearbeiten an diesem verrichten, die es erforderlich machen, sowohl Position als auch Normalkraft zwischen den beiden Endeffektoren zu regeln. Da die Absolutposition des Bauteils beim Montageprozeß nicht von Interesse ist, muss in die Regelung des Industrieroboters nicht eingegriffen werden.

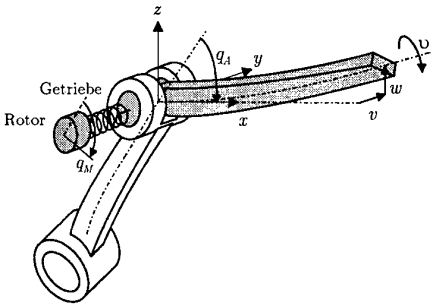
1. Aufbau und mathematisches Modell

Zwei Roboter mit je 6 Gelenken kooperieren in einer Master/Slave Struktur. Der Roboter mit den starr modellierten Armen agiert als Master, dessen Endeffektorposition und -orientierung dem Slave als Sollgröße übergeben werden. Über DMS - Sensoren wird die Krümmung und Torsion der beiden elastischen Arme gemessen. Da die Solltrajektorie, die der elastische Roboter verfahren soll, nicht a priori bekannt ist, muß die gesamte Bahnplanung in Echtzeit erfolgen.

Die Bewegungsgleichung für dieses System kann dann mittels der Projektionsgleichung hergeleitet werden, wobei zweckmäßigerweise die einzelnen Motor/Arm-Einheiten als Subsysteme dargestellt werden [1]. Die Bewegung der Subsysteme wird durch die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_k^T = \left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{v}_o^T & \boldsymbol{\omega}_o^T & \dot{q}_M & \dot{q}_A & \dot{\mathbf{q}}_e^T \end{array} \right]$ beschrieben. Bei der Modellbildung werden folgende Annahmen getroffen:

1. Die elastischen Bauteile werden als Rayleigh Balken modelliert.
2. Je einen zweigliedrigen Ritzansatz für die Biegungen, einen eingliedrigen für die Torsion.[3]
3. Die elastischen Verformungen werden um $\mathbf{q}_e = 0$, $\dot{\mathbf{q}}_e = 0$ und $\ddot{\mathbf{q}}_e = 0$ linearisiert.[4]
4. Die Getriebe sind als lineare Federsteifigkeiten modelliert.



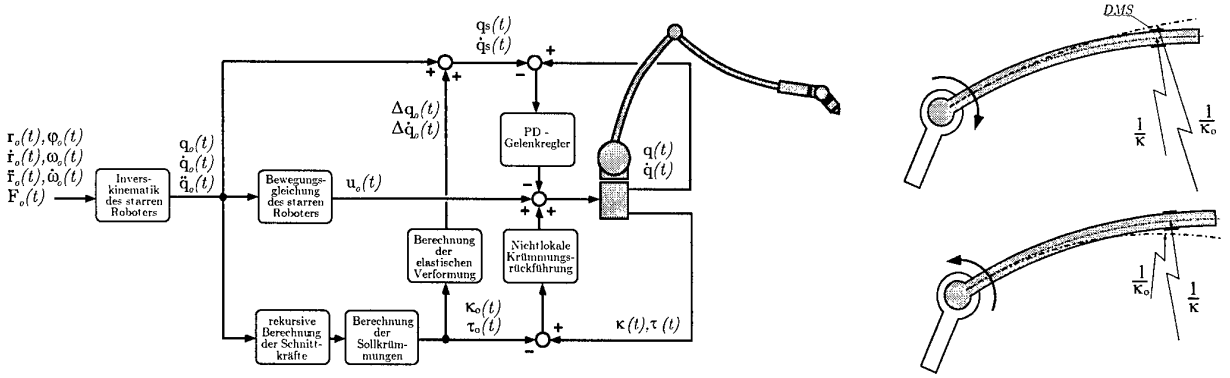


Die durch die Projektion der Subsysteme in die freien Bewegungsrichtungen entstehende Bewegungsgleichung kann mit den Minimalkoordinaten $\mathbf{q} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{q}_M^T & \mathbf{q}_A^T & \mathbf{q}_e^T \end{array} \right]^T \in \mathbb{R}^{22}$ und unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung am Endeffektor $\Phi(\mathbf{r}(\mathbf{q}), t) = 0$ in folgender Form angeschrieben werden: $\mathbf{M}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{J}^T\mathbf{F}^z$ mit $\mathbf{J}^T\mathbf{F}^z = \left(\frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T \lambda$. Zweimalige Zeitdifferenziation ergibt die Jacobigleichung [2]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & -\left(\dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T \\ -\left(\dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{q}) + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} \\ \left[\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \dot{\Phi}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]\dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

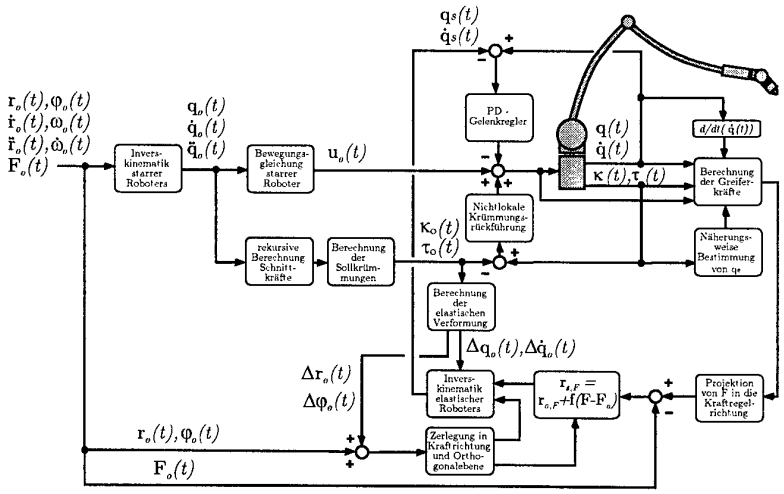
2. Nichtlokale Krümmungsrückführung

Es steht zur Regelung von $\mathbf{q}_A$ und $\mathbf{q}_e$ nur ein Stelleingriff pro Arm zur Verfügung. Das System ist dennoch steuerbar [3]. Die Regelung der Starrkörperfreiheitsgrade erfolgt über einen konventionellen Gelenk - PD - Regler, die der Normalkraft indirekt über die Armkrümmungen. Die Krümmung wird auf die errechnete Sollkrümmung des jeweiligen Bahnpunkts geregelt [4]. Die Krümmungsrückführung wirkt durch die mitkoppelnde Wirkung destabilisierend auf das System und setzt die Gesamtsteifigkeit des Roboters herab. Dadurch sinkt die Positioniergenauigkeit. Andererseits ist durch die weichere Federkennlinie die Normalkraft am Endeffektor genauer einzuhalten.



3. Impedance - Controll

Erweitert man die Krümmungsrückführung um die Impedance - Controll, so ergibt sich die dargestellte Regelung. Es handelt sich um eine Positionsregelung, wobei die Sollposition des Greifers in Kraftregelrichtung über die Kraftmessung eruiert wird. Das Verhalten des Roboters kann mittels $r_{s,F} = r_{o,F} + f(F - F_o)$ vorgegeben werden. Setzt man für $f(F - F_o) = d\int_0^t (F - F_o)dt$, so verhält sich der Roboter wie ein Dämpfer.



4. Referenzen

1 BREMER, H.: Dynamik und Regelung mechanischer Systeme; B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1988.
2 BREMER, H.; PFEIFFER, F.: Elastische Mehrkörpersysteme; B.G. Teubner Verlag, Stuttgart 1992.
3 KLEEMANN, U.: Regelung elastischer Roboter; Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Nr. 191, VDI -Verlag, Düsseldorf 1989.
4 RICHTER, K.: Kraftregelung elastischer Roboter; Fortschrittber. VDI, Reihe 8, Nr. 259, VDI -Verlag, Düsseldorf 1988.

Adresse: DIPL.-ING. RALPH MITTERHUBER, O.UNIV.-PROF. DR.-ING. HABIL. HARTMUT BREMER, Johannes Kepler Universität Linz, Institut für Handhabungs- und Fertigungssysteme, Abteilung Robotik, Altenbergerstr. 69, A-4040 Linz, Austria, E-mail: mitterhuber@mechatronik.uni-linz.ac.at

PAULKE, S., HEINEN, A.H.

Dynamische Stabilitätsanalyse für Platten unter Berücksichtigung thermomechanischer Kopplungseffekte

Grundlegende Zusammenhänge der Kontinuumsmechanik werden in die übergeordnete Theorie der Thermodynamik eingebettet. Die so ermittelten Zustandsgleichungen garantieren die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes für unterschiedliches Materialverhalten. Bei Berücksichtigung der thermoelastischen Kopplungseffekte liefert die Anwendung der kinetischen Stabilitätstheorie auf Schalen ein System von gekoppelten Stabilitätsgleichungen. Das Stabilitätsproblem thermisch erregter Plattenschwingungen wurde kürzlich in [2] für ganz bestimmte Randbedingungen gelöst. Hier wird ein allgemeinerer Lösungsweg aufzeigt, der aus einer konsequenten Anwendung der Thermomechanik und der kinetischen Stabilitätstheorie entwickelt wird.

1. Grundgleichungen

In [3] werden die mit den Hauptsätzen der Thermodynamik verträglichen Erhaltungs- und Stoffgleichungen für thermoelastisches Materialverhalten formuliert. Es wird gezeigt, daß sich daraus die mit den Impulserhaltungsgleichungen gekoppelte Wärmeleitgleichung ergibt. Unter Verwendung der Normalenhypothese von Kirchhoff-Love gelingt dann die Übertragung der dreidimensionalen Grundgleichungen auf (gekrümmte) Flächentragwerke, siehe [1]. Bei Mitnahme geometrischer Nichtlinearitäten erhält man z.B. für das Kräftegleichgewicht im Grundzustand (Gz, siehe Bild 1):

$$\overset{o}{n}{}^{\alpha k}|_{\alpha} + \left[\left(1+\overset{o}{\epsilon}\right)\overset{o}{n}{}^{\alpha s}\overset{o}{\phi}{}^{k}_{s} + \overset{o}{\epsilon}\,\overset{o}{n}{}^{\alpha k}\right]\Big|_{\alpha} + p^{k} = m\,\overset{o}{\ddot{v}}{}^{k} \quad \text{(ohne krümmungsbedingte Trgheitseffekte)} \; . \qquad (1)$$

2. Stabilitätstheorie für thermoelastisch gekoppelte Flächentragwerke

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich ein Schalenelement im unverformten Ausgangszustand (Az). Infolge äußerer Belastung bewegt sich dieses Schalenelement auf einer ungestörten Bahnkurve in den Gz zur Zeit t. Stört man diese Bewegung im Anfangszustand (Anz) zur Zeit t_0, so geht das Schalenelement in den Nachbarzustand (Nz) über. Will man die Ljapunowsche Stabilitätstheorie auf das thermomechanisch gekoppelte Problem anwenden, so muß man kleine Störungen in den Anfangsbedingungen der Verschiebung, der Geschwindigkeit und der Temperatur zulassen.

Ein zeitveränderlicher Gz wird dann als stabil bezeichnet, wenn nach der Störung die Störgrößen $(\mathbf{w}, T)$ ein gewisses vorgegebenes Maß nicht überschreiten. Um das kontrollieren zu können, müssen die Stabilitätsgleichungen gelöst werden. Hierzu formuliert man die geometrisch nichtlinearen Bewegungsgleichungen (z.B. (1)) und die gekoppelte Wärmeleitgleichung (siehe [3]) der Schale für den Gz und den Nz. Anschließend spaltet man die Größen des Gz $(\overset{o}{...})$ von denen des Nz $(\overline{...})$ ab: Mit $\bar{\mathbf{v}} - \overset{o}{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$, $\bar{T} - \overset{o}{T} = T$ folgt z.B. $\bar{n}^{\alpha\beta} - \overset{o}{n}{}^{\alpha\beta} = n^{\alpha\beta}$.

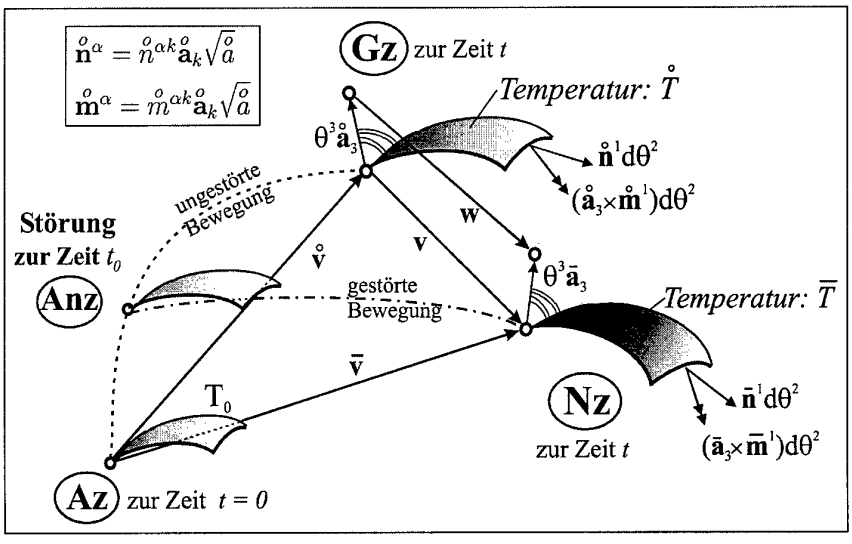


Bild 1: ungestörter und gestörter Bewegungsablauf

Nach Einbau der für sich erfüllten Gleichungen des Gz in die des Nz erhält man die nichtlinearen, thermoelastisch

gekoppelten Stabilitätsgleichungen für Schalen ($\Delta F(T)$ enthält nichtlineare Beiträge):

$$
\begin{aligned}
& n^{\alpha k}|_{\alpha} \; + \; \Delta n^{k} = m \overset{\bullet\bullet}{v}{}^{k} \; ; \quad m^{\alpha\beta}|_{\alpha} \; + \; \Delta b^{\beta} \; - \; n^{\beta 3} = 0 \; ; \\
& \overset{+}{p}\, c \overset{\bullet}{T} \; + \; \gamma_{\nu} \overset{o}{T} \left(\overset{\bullet}{\varepsilon}{}^{\alpha}_{\alpha} \; + \; \theta^{3} \, \overset{+}{\nu}{}^{\alpha}_{\beta} \, \overset{\bullet}{\kappa}{}^{\beta}_{\alpha} \right) \; + \; \Delta F(T) \; - \; \lambda \left(\overset{+}{g}{}^{km} \, T_{,m} \right) \Big|_{k} = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

In den Größen Δn^k und Δb^β sind u.a. die zeitveränderlichen, vorab zu berechnenden Schnittreaktionen $\overset{o}{n}{}^{\alpha k}$ und $\overset{o}{m}{}^{\alpha\beta}$ des auf seine Stabilität hin zu untersuchenden Gz enthalten. Macht man für die in (2) enthaltenen Störgrößen Ansätze der Form $v^k = \sum_n \overset{n}{v}{}^k \, (\theta^\alpha) \, F^k_n(t)$ und $T = \sum_m \overset{m}{T} \, (\theta^k) \, G_m(t)$ mit Eigenformen $(\overset{n}{v}{}^k, \overset{m}{T})$, so liefert das Galerkin-Verfahren ein Differentialgleichungssystem in den Unbekannten $F^k_n(t)$ und $G_m(t)$.

3. Stabilittsanalyse für eine Platte bei Beachtung von Kopplungseffekten

Eine an ihren Rändern unverschieblich gelagerte Stahlplatte wird an ihrer Ober- und Unterseite durch ein harmonisch-zeitveränderliches Temperaturfeld erwärmt.
Die Anwendung der Stabilitätsgleichungen (2) auf Platten liefert mit der oben geschilderten Vorgehensweise bei Mitnahme linearer Störgrößen Mathieusche Differentialgleichungen. Für die darin enthaltenen Unbekannten macht man Fourier-Ansätze, wie z.B. $G_m(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overset{j}{G}_m \cdot e^{i(j+1/2)t}$ und $G_m(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \overset{j}{G}_m \cdot e^{ijt}$. Damit können die thermomechanisch gekoppelten Stabilitätsgleichungen gelöst werden.

Man kann dann für ganz bestimmte Belastungskombinationen angeben, ob diese zu stabilem oder instabilem Verhalten der dynamisch beanspruchten Platte führen. So stellen die grau hinterlegten Bereiche in Bild 2 instabile thermische Belastungskombinationen dar, die zu instabilem Verhalten führen. Man erkennt - wie schon in [3] - , daß die Kopplungsterme in der Wärmeleitgleichung einen Dämpfungseffekt bewirken, der zu Schwellwerten bei den Instabilitätsbereichen führt. Diese enden nun nicht mehr auf der horizontalen Achse ($\kappa_t = 0$). Es existieren aber auch Instabilität anzeigende Bereiche (siehe a), die erst bei Mitnahme des Kopplungseffektes entstehen. Im Vergleich zur ungekoppelten Stabilitätsanalyse erhält man somit stabilisierende als auch destabilisierende Wirkungen, resultierend aus dem - nach dem 2.Hauptsatz notwendigen - Kopplungsterm.
Es sei darauf hingewiesen, daß der Vergleich unserer Ergebnisse mit denen in [2] eine sehr gute Übereinstimmung liefert.

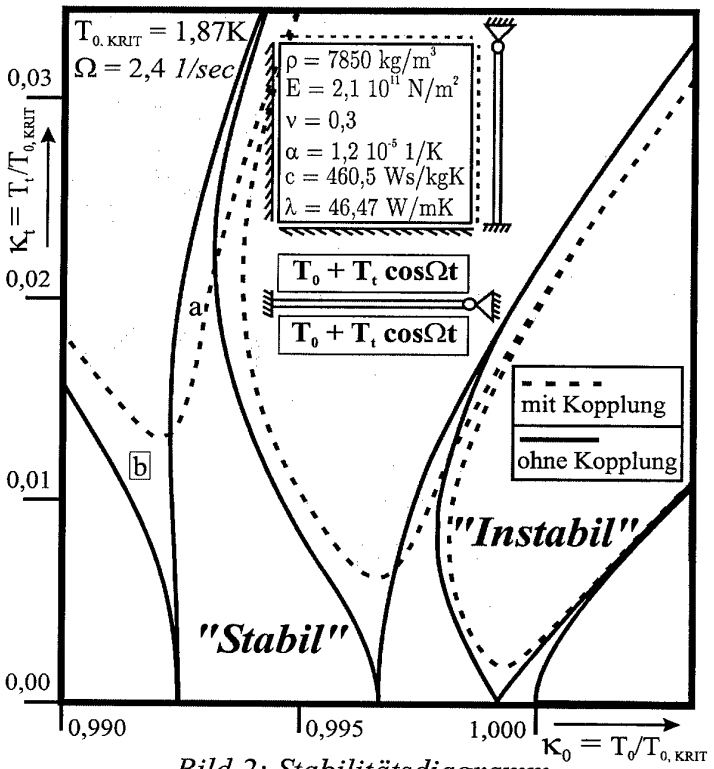


Bild 2: Stabilitätsdiagramm

4. References

1 HEINEN, A.H.: Dynamische Grundgleichungen und kinetische Instabilität dünner, elastischer Schalentragwerke unter Einbeziehung der thermodynamischen Hauptsätze, Habilitationsschrift an der Universität - Gesamthochschule - Wuppertal, Fachbereich Bautechnik 1983

2 MARKUS, S.: Coupled Thermoelastic Theory for Dynamic Stability of Composite Plates, J.Thermal.Str. **18** (1995), 335–357

3 PAULKE, S.; HEINEN, A.H.: Temperatur- und Verformungsanalyse von Flächentragwerken bei Beachtung thermomechanischer Kopplungseffekte, Z. Angew. Math. Mech. **80** (2000), S699–S700.

Addresses: DIPL.-ING. S.PAULKE, UNIV.-PROF. DR.-ING. A.H.HEINEN Universität der Bundeswehr München, Institut für Mechanik und Statik, Werner-Heisenberg-Weg 39, 85577 Neubiberg, Deutschland.

STEINDL, ALOIS; BARKOW, BERNHARD

Optimal Control for the Deployment of a Satellite

We consider the deployment process of a subsatellite from a main satellite on a circular orbit around the earth. The satellites are connected by a massless tether. Only by applying a tension force on the cable we want to steer the subsatellite as fast as possible from the initial position close to the main satellite into its final local vertical position, which for constant tether length is a stable relative equilibrium.

1. Mechanical Model and Equations of Motion

The deployment of a subsatellite from the main satellite in a tethered satellite system is a difficult task and may take long time. If one wants to avoid external controls, one can only use the small gravity gradient to separate the satellites. In order to avoid possible collisions of the satellites, the subsatellite should also remain close to the local vertical direction. Usually the so called "Kissel's" law is used ([1]), which corresponds to an exponentially decaying deployment rate and leads to a stable configuration, but takes a lot of time.

In order to estimate the shortest possible time, we study an Optimal Control problem for a quite simple model numerically. The calculated solutions are intended to serve as starting points for more realistic models.

We assume that the main satellite (M) moves on a circular Keplerian orbit of radius R around the earth. The subsatellite (S), which moves in the orbit plane of M, is connected to M by a massless string, onto which a control force f is excerted. We neglect the influence of S on the dynamics of M and approximate the local gravity gradient by the so-called "near-field dynamics". Using dimensionless variables we obtain the following differential equations for the motion of S:

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\ell}(\dot{\varphi}+\omega)/\ell + 3\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi = 0, \qquad \ddot{\ell} - (3\omega^2\cos^2\varphi + 2\omega\dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2)\ell = -u. \tag{1}$$

Here $\varphi(t)$ denotes the angular position of S, measured from the local vertical direction, and $\ell(t)$ gives the distance between both satellites. The angular velocity ω will be scaled to 1. The control variable u is proportional to the tension force f and is restricted to the interval $[0, u_{\max}]$, where $u_{\max}$ is larger than the static force $u_0 = 3\omega^2\ell(T)$, which is necessary to sustain the final configuration. We choose $u_{\max} = 1.05\,u_0$ for our calculations.

Since we search a time optimal solution, which keeps the deviation from the local vertical small, we state the following optimal control problem ([2]): For given initial and final values for the variables $\boldsymbol{z} = (\varphi, \dot{\varphi}, \ell, \dot{\ell})$, find the control function $u(t) \in [0, u_{\max}]$, which minimizes

$$I = \int_0^T F(\boldsymbol{z}(t))dt = \int_0^T \left(1 + \frac{c_v}{2}\varphi^2(t)\right) dt. \tag{2}$$

The parameter c_v weights the deviation from the vertical; for $c_v = 0$ we consider the minimum time problem.

We apply Pontryagin's Maximum principle and introduce the Hamilton function

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},u) = -F + \boldsymbol{\lambda}\cdot\dot{\boldsymbol{z}} \;=\; & -(1 + c_v\varphi^2(t)/2) + \lambda_1\psi - \lambda_2(2v(\psi+1)/\ell + 3\sin\varphi\cos\varphi) \\ & + \lambda_3 v + \lambda_4((3\cos^2\varphi + 2\psi + \psi^2)\ell - u), \end{aligned} \tag{3}$$

where $\psi = \dot{\varphi}$, $v = \dot{\ell}$, $\omega = 1$, and λ_i are the adjoint variables. The optimal control function $u^*(t)$ is given by

$$u^*(t) = \arg\max_u H(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},u) = \begin{cases} 0, & \text{for } \lambda_4 > 0, \\ u_{\max} & \text{for } \lambda_4 < 0, \\ \text{undef.} & \text{for } \lambda_4 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

If λ_4 vanishes identically in an interval, we would have to look for singular solution arcs; although we cannot strictly exclude this case, we have not yet investigated it. We assume that the optimal control will be a "bang-bang" function, switching between the limiting values of u.

The adjoint variables λ_i satisfy the differential equations $\dot{\lambda}_i = -\partial H/\partial z_i$.

In order to obtain reasonable boundary conditions, we assume that the subsatellite is steered from a relative

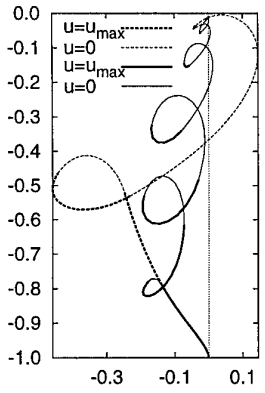


Figure 1: Flight path of the subsatellite in the orbital coordinate frame showing the local vertical line. The dashed (full) line corresponds to $c_v = 0$ ($c_v = 50$).

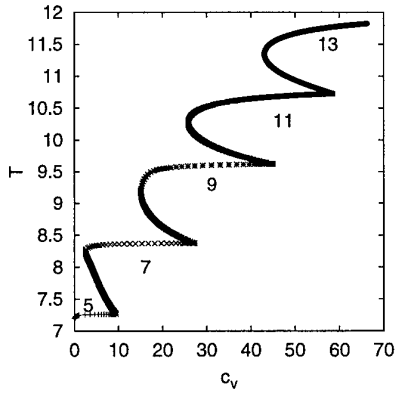


Figure 2: Dependence of the minimum time T on the cost parameter c_v. The numbers indicate the numbers of switching points.

equilibrium close to the main satellite (tether length ℓ_0) into an equilibrium further down (ℓ_1):

$$\begin{array}{llll} \varphi(0) = 0, & \psi(0) = 0, & \varphi(T) = 0, & \psi(T) = 0, \\ \ell(0) = \ell_0, & v(0) = 0, & \ell(T) = \ell_1 = 1, & v(T) = 1. \end{array} \tag{5}$$

The final time T is calculated from the additional boundary condition

$$H(\boldsymbol{z}(T), \boldsymbol{\lambda}(T), u^*(T)) = 0. \tag{6}$$

2. Numerical solution of the Boundary Value Problem

The boundary value problem (1)-(6) is solved with the multiple shooting package BNDSCO ([3]), which treats optimal control problems with switching conditions very well. In order to obtain good starting values for the Newton iteration and to study the influence of the weight parameter c_v, we use the continuation algorithm HOM ([4]). Starting with $c_v = 0$ we perform a series of homotopy steps to satisfy the boundary conditions: First we fix the final conditions and the initial condition $\boldsymbol{\lambda}(0) = 0$. The solution from this step is used as starting value for the second stage, where we locate a trajectory with one jump and the initial condition $v(0) = 0$. Proceeding in this manner we obtain the time optimal solution with 5 switching points, which is displayed in Fig. 1 (dashed lines).

Next we increase the cost parameter c_v; the continuation path in Fig. 2 shows a rather complicated structure: For increasing values of c_v additional switching points appear in pairs; when they are created, the branch first turns "subcritically" towards lower values of c_v, but later turns to the right, until a further pair of switching points has to be inserted. The solutions corresponding to the "subcritical branch" are suboptimal. A flight path for $c_v = 50$ with 13 switching points is displayed in Fig. 1 (full line).

Final Remarks Numerical calculations indicate, that the solution structure for large values of the cost parameter c_v is quite complicated. The optimal control yields rather short transition times, but for realistic applications intermediate retrievals of the tether should be avoided. Further the dynamics of the tether should be taken into account.

3. References

1 Misra, A. K., Modi, V. J., *Deployment and retrieval of shuttle supported tethered satellites,* J. Guidance and Control, vol. 5, no. 3 (1982) pp. 278–285.:

2 Feichtinger, R., Hartl, R., Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse. Walter de Gruyter, (1986).

3 Oberle, H. J., Grimm, W., Berger, E., BNDSCO, Rechenprogramm zur Lösung beschränkter optimaler Steuerungsprobleme, Benutzeranleitung, TU München, Rep. No. M 8509, (1985).

4 Seydel, R., A continuation algorithm with step control. In *Numerical methods for bifurcation problems. ISNM 70.* Birkhäuser, (1984).

Addresses: Alois Steindl, Bernhard Barkow Technische Universität Wien, Institut für Mechanik, **A-1040** Wiedner Hauptstr. 8–10.

WINDERL, SUSANNE AND BÜSKENS, CHRISTOF;

Real-Time Optimization of Perturbed Control Systems with Linear Control

Nowadays, the requirements of applications in optimal control theory increase. Concerning problems e.g. in chemical process engineering one has to deal with high dimensional optimal control problems subject to systems of ordinary differential or differential-algebraic equations. These problems are usually linear in the control variables and nonlinear in the state variables.
In process engineering it is generally mandatory to react immediately on perturbations in parameters of the underlying system. Therefore we suppose to intend both: Taking into account the particular structure of the linear optimal control problem as well as the calculation of special real-time control approximations.

1. Introduction and theoretical overview

In general there exist two methods to solve optimal control problems: Indirect methods and direct methods. Indirect methods require the evaluation of necessary conditions from optimal control theory to formulate a corresponding multipoint boundary value problem and come along with a number of disadvantages. Hence direct approaches are favoured to solve optimal control problems in the last decade. These direct methods are based on transforming the infinite-dimensional optimal control problem into a finite-dimensional nonlinear optimization problem. A main advantage is, that a solution can be obtained without using the necessary conditions of Pontryagin. Often these optimal control problems are influenced by perturbations modelled by parameters in the system data. In general the underlying optimization algorithm is not able to compensate these perturbations in a sufficient small time interval if an actual deviation is detected in the online process. Hence one needs a fast numerical method to compute real–time control approximations during the process so that optimality conditions and prescribed constraints are preserved even in the presence of disturbances. A simple approach into the area of real-time control is possible by means of the so-called sensitivity analysis of parametric optimization problems. An essential assumption is based upon the proof of second order sufficient optimality conditions (SSC). Beside others, these assumptions allow the solution differentiability, which roughly spoken implicate that optimization variables can be understood as differentiable functions of the perturbation parameters. Sufficient conditions for optimal control problems (and thus solution differentiability) can only be proven for problems with regular Hamiltonian. However, we obtain similar results regarding the theory of finite-dimensional optimization problems by suitable discretization strategies for optimal control problems with linear controls. As a first step the optimal control problem with linear controls is solved by the direct optimization method NUDOCCCS, cf. [1]. Once an optimal solution is found, the switching structure is extracted to formulate a low dimensional switching interval problem where only switching points and discretized controls on singular subarcs are optimized. By means of this transformation the number of optimization variables decreases enormously. A numerical check of second order sufficient conditions allows sensitivity analysis and real–time control of high dimensional optimal control problems.

2. Example: Batch Reactor

Hereafter, a model of a batch reactor (cf. [3]) describing the chemical reaction $A + B \rightarrow C$ and the side reaction $B + C \rightarrow D$ is considered. Let

$$x = (M_A, M_B, M_C, M_D, H, C_A, C_B, C_C, C_D, T_R, V)^T \in \mathbb{R}^{11} \tag{1}$$

denote the vector of state variables, where $M_i(t)$ $[mol]$ and $C_i(t)$ $[\frac{mol}{m^3}]$, $i \in \{A, B, C, D\}$, stand for the molar holdups and the molar concentrations. $H(t)$ $[MJ]$ denotes the total energy holdup, $T_R(t)$ $[K]$ the reactor temperature and finally $V(t)$ $[m^3]$ the volume of liquid in the system. The two dimensional control vector is given by

$$u = (F_B, Q)^T \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

where $F_B(t)$ $[\frac{mol}{s}]$ controls the feed rate of component B and $Q(t)$ $[kW]$controls the cooling load.
The problem is to determine a control u that maximizes the molar holdup of the component C subject to a semi–explicit differential–algebraic equation system of index one:

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad Z[u] &= \phi(x(t_f)) = M_C(t_f) \\
\text{s.t.} \quad \dot{M}_A &= -V \cdot r_1 \,, \\
\dot{M}_B &= F_B - V \cdot (r_1 + r_2) \,, \qquad & r_1 &= k_1 \cdot C_A \cdot C_B \\
\dot{M}_C &= V \cdot (r_1 - r_2) \,, & r_2 &= k_2 \cdot C_B \cdot C_C \\
\dot{M}_D &= V \cdot r_2 \,, & k_j &= A_j \cdot e^{-E_j/T_R},\ j = 1,2 \\
\dot{H} &= F_B \cdot h_f - Q - V \cdot (r_1 \cdot \Delta H_1 + r_2 \cdot \Delta H_2) \,, \qquad (3) \\
0 &= C_i - M_i/V, \quad i = A,B,C,D \,, \\
0 &= H - \sum_{i=A,B,C,D} M_i \cdot (\alpha_i \cdot (T_R - T_{ref}) + \frac{\beta_i}{2} \cdot (T_R^2 - T_{ref}^2)) \,, \\
0 &= V - \sum_{i=A,B,C,D} \frac{M_i}{\rho_i}.
\end{aligned}
$$

In addition a state constraint $T_R(t) \leq 520$ of order one and four control constraints $0 \leq F_B(t) \leq 10$, $0 \leq Q(t) \leq 1000$ have to be fullfiled. Initial values are defined by $(M_A(0), M_B(0), M_C(0), M_D(0), H(0)) = (9000, 0, 0, 0, 152.50997)$ and finally a terminal condition is given by $T_R(t_f) = 300$.

Solving the problem for different values of t_f [s] we observed two properties: 1.) For increasing t_f the switching structure gets more and more complex. 2.) For t_f higher than a certain value ($t_f \sim 1600$) the total profit of M_C is nearly constant (cf. (3)).

For the following considerations a final time $t_f = 1450$ was chosen. Two switching points $t_1 \sim 433.7$ and $t_2 \sim 767.3$ were found with a control structure $Q(t) = 0$, $t < t_1$, $Q(t) = 1000$, $t > t_1$, $F_B(t) = 10$, $t < t_2$, and $F_B(t) = 0$, $t > t_2$. Hence the switching interval problem consists only of the 2 optimization variables t_1 and t_2.

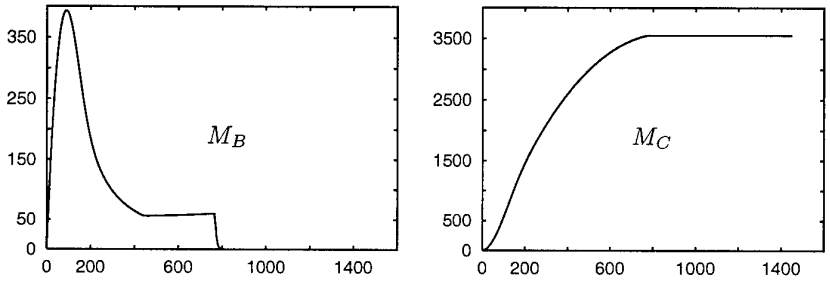


Fig. 1: Optimal solutions for M_B and M_C.

Finally, we consider perturbations in the initial values: $M_A(0,p) = M_A(0) + p$ to demonstrate the real–time capabilities. The table shows the solutions (computational time and relative error of the performance index) for the nominal case $p = 0$ and for a perturbation $p = 10 \approx 0.11\%$. The real–time approximation was calculated using the aforementioned solution differentiability by evaluating the first order Taylor expansion for the two switching points:

$$t_i[p] \approx t_i[0] + \frac{dt_i}{dp}[0] \cdot p, \qquad i = 1,2. \qquad (4)$$

A larger perturbation $p = 100 \approx 1.1\%$ results in deviations of about 2% in all values, while the first order Taylor approximation differs about 0.01%. For a more detailed description on solution differentiability please refer to [1,2].

Method	Performance index		time	relative error
direct method (512 optimization variables)	nominal solution	-3555.277	~ 87 sec.	
switching point optimization	nominal solution	-3555.281	~ 1 sec.	
switching point optimization	perturbed solution	-3557.967	~ 1 sec.	
real–time approximation	perturbed solution	-3557.976	$\sim 3 \cdot 10^{-9}$ sec.	$2.7 \cdot 10^{-6}$

3. References

1 Büskens, C.: Optimierungsprobleme und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer-und Zustandsbeschränkungen, Dissertation, Münster, Germany (1998).

2 Fiacco, A. V.: Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming; Math. in Science and Engineering **165**, Academic Press, New York (1983).

3 Vassiliades, V. S., Sargent, R. W. H., Pantelides, C. C.: Solution of a Class of Multistage Dynamic Optimization Problems. 2. Problems with Path Constraints; Ind. Eng. Chem. Res. **33**, No. 9 (1994), 2123-2133.

Addresses: Dr. Christof Büskens, Dipl.-Math. Susanne Winderl, Lehrstuhl für Ingenieurmathematik, Universität Bayreuth, 95440 Bayreuth, Germany.
URL: http://www.uni-bayreuth.de/departments/ingenieurmathematik

BLAJER, W.

An Improved Formulation for Constrained Multibody Systems with Singularities

The crux of the method, originated from the augmented Lagrangian formulation [Nonlinear Dyn. 9 (1996), 113-130], lies in adding to a constrained system large artificial masses in the constrained directions. The motion executes then primarily in the unconstrained directions (with smaller masses), and the residual motion in the constrained directions is removed by applying the constraint reactions. The formulation is relatively simple, computationally efficient, and applicable to systems with possible singular configurations, massless members and redundant constraints.

1. Introduction

A legitimate way of modelling of multibody systems is to use non-minimal sets of, say n, dependent coordinates $\mathbf{q}$, interrelated through k kinematic constraints. The equations of (holonomic and scleronomic) constraints are:

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\,\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\boldsymbol{\Phi}} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \tag{1}$$

where $\mathbf{C} = \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\mathbf{q}$ is the $k \times n$ constraint matrix, and $\boldsymbol{\xi} = -\dot{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}$ is the constraint induced acceleration vector. The system dynamic equations arise then in the form of Lagrange's equations of the first type,

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{d}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) - \mathbf{C}^T(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\lambda} \tag{2}$$

and $\mathbf{M}$ is the generalized mass matrix, $\mathbf{d}$ represents the centrifugal, Coriolis and gyroscopic dynamic terms, $\mathbf{f}$ are the generalized applied forces, $\boldsymbol{\lambda}$ are k Lagrange multipliers, and t is the time. Handled together, (2) and (1) form $n+k$ differential algebraic equations (DAE) in $\ddot{\mathbf{q}}$ and $\boldsymbol{\lambda}$, and can be solved directly or, prior to numerical integration, transformed to an equivalent set of ordinary differential equations of smaller dimension [2,3].

A variant method, called *augmented Lagriangian formulation* was proposed in [1], developed in this contribution. The amendments are: (•) $\mathbf{q}$ may be any set of dependent coordinates (the method originally relates to *natural* coordinates [1,3]); (•) the arising numerical code is reconsidered; (•) a physical interpretation is given; (•) applicability to systems with singularities and redundant constraints is claimed; (•) some peculiarities relating the modelling and numerical simulation are indicated; and (•) a scheme for elimination of constraint violation is approved.

2. The method

Instead of imposing constraints (1), k "artificial masses" of value μ resisting in the constrained directions are added to the system. Assumed μ are large enough compared to the actual system masses ($\mathbf{M}$ entries), the motion of the modified system will evolve primarily in the unconstrained directions (of smaller masses). As $\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}}$ represents the projection of the system acceleration onto the constrained directions [2], the corresponding dynamic forces due to μ are $\mu\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} = \mu\boldsymbol{\xi}$, and their representation in $\mathbf{q}$ directions is $\mathbf{C}^T\mu\mathbf{C}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^T\mu\boldsymbol{\xi}$. This, combined with (2), yields

$$(\mathbf{M} + \mathbf{C}^T\mu\,\mathbf{C})\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{C}^T\mu\,\boldsymbol{\xi} - \mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda}^* \tag{3}$$

Assumed $\mathbf{q}_0$ and $\dot{\mathbf{q}}_0$ satisfy the first two of the constraint conditions (1), for $\mu \longrightarrow \infty$ (and $\boldsymbol{\lambda}^* = \mathbf{0}$) the solution of (3) will tend to be consistent with the constraints - the motion in the constraint directions will be excluded. In computations μ must be limited to a certain value, however, and the residual motion in the constrained directions can be removed by applying constraint reactions $\boldsymbol{\lambda}^*$. Since $\boldsymbol{\lambda}^*$ are not known *a priori*, the determination of the constraint-consistent accelerations $\ddot{\mathbf{q}}$ and the determination of $\boldsymbol{\lambda}^*$ must be performed iteratively. Denoted $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{M} + \mathbf{C}^T\mu\,\mathbf{C}$ and $\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) = \mathbf{f} - \mathbf{d} + \mathbf{C}^T\mu\,\boldsymbol{\xi}$, at a given integration time t, the iteration process is (setting $\boldsymbol{\lambda}_0^* = \mathbf{0}$):

$$\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{q})\,\left(\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},t) - \mathbf{C}^T(\mathbf{q})\,\boldsymbol{\lambda}_i^*\right)\,; \qquad \boldsymbol{\lambda}_{i+1}^* = \boldsymbol{\lambda}_i^* + \mu\,\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_{i+1}\,; \qquad i = 0,1,2,... \tag{4}$$

where $\ddot{\boldsymbol{\Phi}}_{i+1} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\,\ddot{\mathbf{q}}_{i+1} - \boldsymbol{\xi}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$. For μ ranging from 10^5 to 10^7 usually only $N = 1 \div 3$ iterations suffice to achieve $|\ddot{\mathbf{q}}_N - \ddot{\mathbf{q}}_{N-1}| \leq \varepsilon$, where ε is a required accuracy, and $\boldsymbol{\lambda}_N^*$ is the approximated constraint reaction.

3. Comments and conclusions

A simple physical interpretation of the method is shown in Figure 1. A mass m is subject to constraint $\Phi(q_1, q_2) = 0$. The additional mass is μ, and the applied force on m is h. For $\mu \gg m$, the motion of m will evolve primarily in the direction tangent with respect to $\Phi = 0$. There will still however be some residual motion of both masses in the constrained direction. Such a situation is for $i = 0$ ($\lambda_0^* = 0$). At the end of the iteration process (for large i), a reaction $\lambda_i^* \approx h_c$ is added which excludes the residual motion with a numerical accuracy - m moves along $\Phi = 0$. This simple interpretation can be extended to a general multibody system, treated as a generalized particle in a multidimensional space, subject to a manifold (1); see [2] for more details.

Compared to the standard DAE formulations ($n+k$ equations), only n differential equations (3) are now solved. The iterative process (4) converges usually in $1 \div 3$ steps ($\mathbf{H}^{-1}$ and $\mathbf{h}$ are determined only once), and assures the same numerical accuracy as the standard formulations. The bigger μ, the better convergence of scheme (4). Too large μ's cause numerical instability, however, which limits the value of μ to $10^6 \div 10^7$ (compare with [1,3]). While the method is originally related to *natural coordinates*, $\mathbf{q}$ may be any set of dependent coordinates. Multibody systems with redundant constraints and possible singularities, both geometrical and due to massless members, are tractable. Even though $\mathbf{M}$ may be singular and $\mathbf{C}$ may not be of maximal row-rank, $\mathbf{H} = \mathbf{M} + \mathbf{C}^T \mu \mathbf{C}$ may be invertible. The solution to (3) are time-variations of the state variables $\mathbf{q}(t)$ and $\dot{\mathbf{q}}(t)$, and the constraint reactions $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$, which are the actual constraint reactions on the system (in the iteration process $\boldsymbol{\lambda}^*(t) \longrightarrow \boldsymbol{\lambda}(t)$). The solution to (3) may suffer from the *constraint violation* problem, however. The constraint violations $\boldsymbol{\Phi}$ and $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ can be eliminated, after each integration step or a sequence of steps, using the following correction schemes [1-3]:

$$\triangle \mathbf{q} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}^T \mu \boldsymbol{\Phi} \qquad \textit{and} \qquad \triangle \dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}^T \mu \dot{\boldsymbol{\Phi}} \tag{5}$$

The presented method perfectly works when applied to the absolute variable formulation - systems with possible singularities and/or redundancy can effectively be analysed without any precautions. Some care is required only when the code is combined with the joint coordinate formulation, but only for systems with singularities. The closed loops should not be cut off in the joints but must be disjointed by rending off whole members, the latter modelled as "free" bodies. The code has successfully been used to numerical simulation of motion of the parallel four-bar linkage (with redundant constraints and singular configurations) shown in Fig. 2. The results are not reported here.

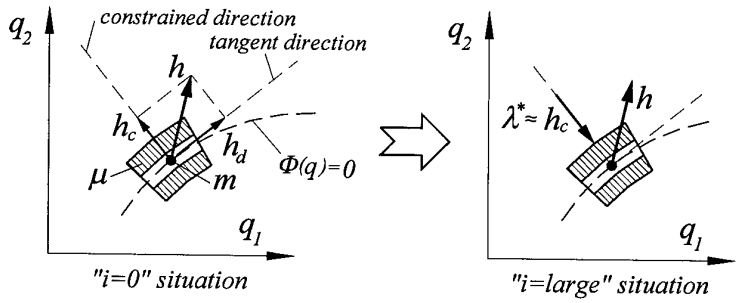


Fig. 1 The physical interpretation of the method.

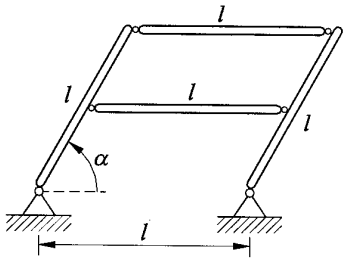


Fig. 2 The parallel four-bar linkage.

Acknowledgements

The work has been completed during the author's stay in the Institute B of Mechanics, University of Stuttgart, Germany, on behalf of the Alexander von Humboldt Foundation. The research was also supported by the State Committee for Scientific Research (KBN), Poland, under grant 9 T12C 060 17.

4. References

1 BAYO,E., LEDESMA, R.: Augmented Lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics. Nonlinear Dyn. **9** (1996), 113-130.

2 BLAJER, W.: A geometric unification of constrained system dynamics. Multibody Syst. Dyn. **1** (1997), 3-21.

3 GARCIA DE JALON, J. BAYO, E.: Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The Real-Time Challenge. Springer-Verlag, New York, 1993.

Address: PROF. DR. HABIL. WOJCIECH BLAJER, Institute of Applied Mechanics, Technical University of Radom, ul. Krasickiego 54, PL-26-600 Radom, Poland. Email: wblajer@poczta.onet.pl

BUSCHMANN, A.

Adaptive Schrittweiten bei der globalen Bahnplanung

Bei der globalen Bahnplanung für große Handhabungssysteme hat der Konfigurationsraum oft fünf oder mehr Dimensionen. Die Vorgabe fester Schrittweiten für die verallgemeinerten Koordinaten stellt dabei eine komplexe Aufgabe dar. Sie orientiert sich an Speicherplatzbedarf und Rechenzeit auf der einen und erzielbarer Bahngüte auf der anderen Seite. Werden diese Schrittweiten bei geringer lokaler Bewegungsfreiheit adaptiert, so können bessere Lösungen bei geringerem Speicherplatzbedarf erzielt werden. Dazu sind geeignete Techniken erforderlich, da der gerasterte Konfigurationsraum nicht vollständig im Speicher aufgebaut werden kann. Es werden die Grundzüge der Implementierung und einfache Ansätze zur Nutzung vorgestellt.

1. Motivation

Benutzt man für die globale Bahnplanung großer Handhabungssysteme graphenbasierte Verfahren [1,2] mit einem Gitter fester Weite im Konfigurationsraum, so steigt der Berechnungsaufwand in Abhängigkeit von der Anzahl der Freiheitsgrade f des Systems und der Anzahl n_i der Schritte im Konfigurationsraumgitter entlang jeder verallgemeinerten Koordinate mit $O(\prod_{i=1}^{f} n_i)$. Damit stehen sich bei der Wahl der Gitterweiten zwei Kriterien gegenüber. Eine große Schrittweite des Gitters beschleunigt den Planungsvorgang, da der Rechenaufwand abnimmt, kann aber dazu führen, daß mögliche Lösungen durch Engstellen im Konfigurationsraum entfallen. Dies soll am Beispielroboter aus Abbildung 1, der lediglich über zwei Drehgelenke verfügt, kurz demonstriert werden.

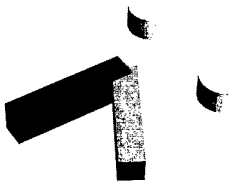


Abbildung 1: Beispielroboter

Entsprechend Abbildung 2 soll er aus der Start- in die Zielkonfiguration bewegt werden. Der zugehörige Konfigurationsraum ist rechts dargestellt und die kollisionsbehafteten Konfigurationen sind mit Punkten markiert. Bei den gezeigten 1°-Schritten ist es möglich, die Mitte des Konfigurationsraums, die der Zielkonfiguration entspricht, zu erreichen. Abbildung 3 zeigt den Eintritt in die Mitte des Konfigurationsraums bei steigender Gitterweite.

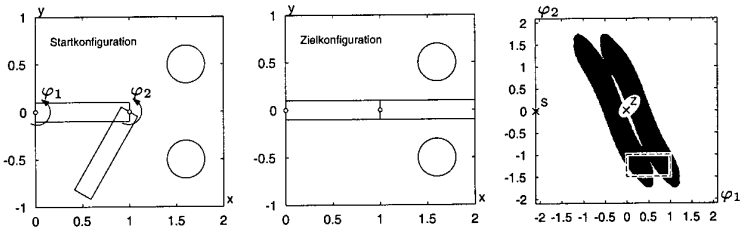


Abbildung 2: Planungsbeispiel und zugehörige Konfigurationsraumhindernisse

Durch + sind die kollisionsbehafteten Konfigurationen dargestellt, durch × die kollisionsfreien. Bei Schrittweiten von 1° und 2° existieren Lösungen, die nur aus Schritten mit jeweils einem bewegten Gelenk bestehen. Bei 4° sind schon Schritte erforderlich, bei denen beide Gelenke gleichzeitig bewegt werden und bei 8° existiert keine Lösung.

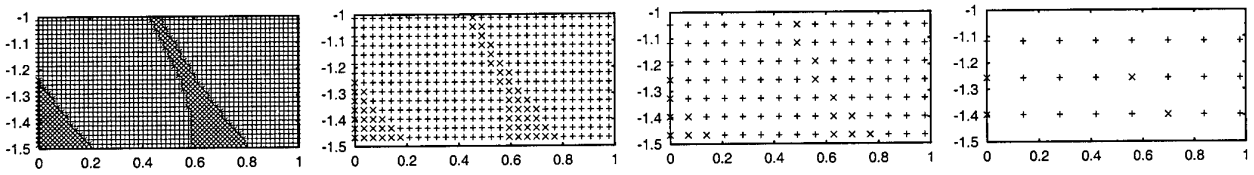


Abbildung 3: Engstelle im Konfigurationsraum bei 1°-, 2°-, 4°- und 8°-Schritten

2. Gitterverfeinerung

Anstatt die Planung mit einem sehr feinen Gitter durchzuführen, bietet es sich an, das Gitter in den Gebieten des Konfigurationsraums zu verfeinern, in denen Engstellen vorhanden sind. Damit ergibt sich der erste Algorithmus: 1. Wenn es für einen Punkt noch erreichbare Nachbarn außer dem Vorgänger gibt, suche normal weiter. 2. Halbiere anderenfalls die Gitterweiten wenn dies noch weiter zulässig ist, sonst breche ab. 3. Überprüfe die neuen Nachbarn auf dem feineren Gitter, außer in Richtung des Vorgängers. 4. Gibt es damit keine neuen erreichbaren Nachbarn, gehe zum 2. Schritt. 5. Setze die Suche mit den gefundenen Nachbarn und halber Schrittweite fort.

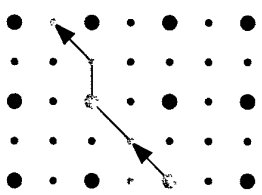


Abbildung 4:
Algorithmus 1

Der Effekt ist in Abbildung 4 dargestellt. Die schwarzen Punkte sind kollisionsbehaftet, die grauen kollisionsfrei. Die Suche auf dem gröberen Gitter (dicke Punkte) läuft sich fest und wird entsprechend dem Algorithmus auf dem feineren Gitter nach links oben fortgesetzt. Hierbei muß für jeden Punkt gespeichert werden, mit welcher Gitterweite er erreicht wurde, da von ihm aus die Suche zunächst mit der gleichen Weite fortgesetzt werden muß. Nachteilig ist, daß erst dann auf ein feineres Gitter umgeschaltet wird, wenn eine Sackgasse vorliegt. Unter Umständen wird eine enge Passage zwischen den Hindernissen nicht erkannt. Diese Problematik wird durch den zweiten Algorithmus umgangen, der bereits dann eine Suche im feineren Gitter beginnt, wenn es in einer Gitterrichtung kein Fortkommen mehr gibt.

Allerdings darf bei jedem Schritt nur eine Koordinate geändert werden, während beim ersten Algorithmus auch mehrere Koordinaten gleichzeitig geändert werden durften.

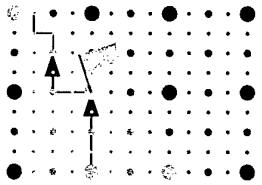


Abbildung 5:
Algorithmus 2

1. Wenn es für einen Punkt noch erreichbare Nachbarn in allen Richtungen gibt, suche normal weiter. 2. Halbiere anderenfalls die Gitterweiten wenn noch weiter zulässig, sonst breche ab. 3. Überprüfe die neuen Nachbarn, aber nur in den Richtungen, die vorher nicht mehr möglich waren. 4. Ergibt das keine neuen erreichbaren Nachbarn, gehe zurück zum 2. Schritt. 5. Setze die Suche mit den gefundenen Nachbarn und halber Schrittweite in dieser Richtung fort.

Abbildung 5 zeigt, wie der Mechanismus beim großen, markierten Punkt in Reihe zwei eingreift. In vertikaler Richtung kann kein Nachbar auf dem groben Gitter erreicht werden, daher wird die Schrittweite halbiert und die Suche nach links, rechts und oben fortgesetzt.

Dabei wird der mittelgroße Punkt links daneben gefunden. Von diesem aus geht es auch einen Schritt nach oben. Von dort aus geht es in horizontaler Richtung wieder nicht weiter und die Schrittweite wird abermals halbiert und die Suche nach links, rechts und oben fortgesetzt.

3. Abbruchbedingung

Ein weiteres Problem, das im gleichen Zusammenhang gelöst werden muß, ist eine Abbruchbedingung für die Nutzung eines feinen Gitters. Anderenfalls würde nach dem Durchschreiten einer Engstelle die Suche unbegrenzt mit dem feinsten Gitter fortgesetzt. Dies wird durch den dritten Algorithmus realisiert.

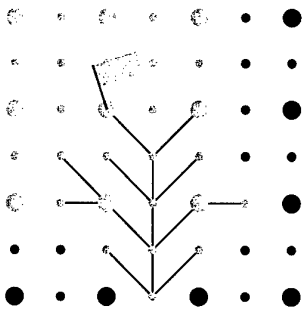


Abbildung 6:
Algorithmus 3

1. Liegt ein Punkt auch auf dem Gitter, das doppelt so groß ist wie das aktuell benutzte, prüfe zunächst seine Nachbarn im gröberen Gitter. 2. Sind diese alle erreichbar, verwerfe das kleinere Gitter und markiere den Punkt gesondert. 3. Hat er Nachbarn auf dem kleineren Gitter, die bereits einmal untersucht worden sind, entferne diese aus der Warteschlange, da hiervon keine weitere Suche ausgehen darf. 4. Trifft ein Punkt des kleinen Gitters auf einen derart markierten Nachbarn, füge ihn nicht in die Warteschlange ein.

Der Vorgang ist in Abbildung 6 gezeigt. Die Suche tritt aus der Engstelle hervor und erreicht den großen, markierten Punkt in Reihe zwei. Da seine Nachbarn im großen Gitter alle erreichbar sind, wird er markiert und alle bereits entwickelten Nachbarn des kleineren Gitters (die drei kleineren Punkte eine Reihe tiefer) werden aus der Warteschlange entfernt und damit nicht weiter verfolgt. Die Suche wird sich auf dem großen Gitter nach links oben ausbreiten.

Wie gezeigt wurde, ist durch diese Strategie eine adaptive Diskretisierung des Konfigurationsraums bei der globalen Bahnplanung für Handhabungssysteme möglich. Dabei werden die einmal gewählten Schrittweiten mehrfach halbiert. Auch wenn einige zusätzliche Operationen erforderlich sind, so verspricht diese Strategie bei höher dimensionalen Konfigurationsräumen einen erheblichen Zeitgewinn bei der Planung.

4. Literatur

1 Dijkstra, E. W.: A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. Numerische Mathematik. **1**:3 (1959), 269–271.
2 Hart, Peter E.; Nilsson, Nils J.; Raphael, Bertram: A Formal Basis for the Heuristic Determination of Minimum Cost Paths. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. (1968), 100–107

Anschrift: Dr.-Ing. Axel Buschmann, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Mechanik, D-47048 Duisburg

EBERHARD, PETER

Übergänge in der hybriden Mehrkörpersystem/FE Kontaktsimulation

In der hybriden MKS/FEM Kontaktsimulation muß häufig zwischen den verschiedenen Beschreibungen gewechselt werden, d.h. von Starrkörpern zu verformbaren Körpern und zurück. In diesem Artikel werden die wichtigsten dafür erforderlichen Übergangsbeziehungen dargestellt.

1. Einleitung

Kontaktsimulationen sind wichtig für die Untersuchung vieler technischer Systeme. Sind die Deformationen vernachlässigbar, so können effiziente Methoden der Mehrkörperdynamik verwendet werden, siehe z.B. [1], müssen die Verformungen jedoch berücksichtigt werden, was z.B. mit der Finite Elemente Methode möglich ist, so sind meist sehr lange Rechenzeiten erforderlich. Für eine Übersicht zu FE-Kontaktproblemen siehe z.B. [2].

Die hybride Simulation kann die hohen Rechenzeiten drastisch reduzieren, indem bei häufig wechselndem Kontaktstatus nur die kontaktierenden Körper als deformierbar und alle anderen Körper als starr betrachtet werden. Dazu müssen viele Teilprobleme untersucht werden, wie z.B. die mechanisch korrekten Übergänge zwischen einem Mehrkörpersystemmodell und einem Finite Elemente Modell. In diesem Artikel soll nur dieser eine Aspekt betrachtet werden, Informationen zum Gesamtalgorithmus und vielen anderen Teilproblemen wie der Vernetzung, der Zeitintegration oder der Kontakterkennung und -behandlung können in [3] detailiert nachgelesen werden.

2. Starrkörper → diskretisierter Körper

Während der Mehrkörper-Simulation wird die im folgenden ebene Bewegung der starren Körper jeweils über die Lage $\boldsymbol{r}_{OC}(t)$ und den Verdrehwinkel $\alpha(t)$ eines Koordinatensystems K_C in einem beliebigen körperfesten Punkt C sowie die zugehörige Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_C(t)$ und Drehgeschwindigkeit $\omega(t)$ festgelegt. Die äußere Form des Körpers wird über ein bezüglich C in K_C festgelegtes Randpolygon aus n Punkten P_i mit Punktkoordinaten $\boldsymbol{r}_{CP_i}$ angegeben. Dieses wird nur zur Kollisionserkennung und zur Bestimmung der Trägheitseigenschaften verwendet, geht jedoch im Gegensatz zu FE-Berechnungen nicht in die Diskretisierung ein.

Für die Vernetzung werden dem Vernetzungsalgorithmus die Lagen $\boldsymbol{r}_{OP_i} = \boldsymbol{r}_{OC} + \boldsymbol{r}_{CP_i}$ der n Polygonpunkte P_i bezüglich des Inertialsystems vorgegeben und als Ergebnis erhält man neben der Elementinformation auch die Lage $\boldsymbol{r}_{OK_j}$ der m Knotenpunkte K_j des FE Netzes. Mit den Knotengeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{v}_{K_j} = \boldsymbol{v}_C + (\boldsymbol{r}_{OK_j} - \boldsymbol{r}_{OC}) \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{r}_{CK_j} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \tag{1}$$

sind alle notwendigen kinematischen Größen des FE Netzes als Anfangsbedingungen für die Zeitsimulation berechenbar. Dieser Übergang ist nicht kompliziert und es muß keine Näherung zu seiner Durchführung vorgenommen werden.

3. Diskretisierter Körper → Starrkörper

Der Übergang von den Finiten Elementen zum Mehrkörpersystem ist weitaus schwieriger und erfordert die Einführung von Näherungen. Diese sind notwendig, da ein diskretisierter Körper sehr viel mehr Freiheitsgrade hat als ein starrer Körper und so eine Informationsreduktion erforderlich ist. Zur Verfügung stehen die Lagen $\boldsymbol{r}_{OK_j}$ und Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_{K_j}$ der FE Knoten, gesucht werden die Lage $\boldsymbol{r}_{OC}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_C$ des Starrkörpers sowie dessen Verdrehung α und Drehgeschwindigkeit ω.

Nach der Separation bewegt sich ein Körper frei im Raum, wobei sich sein Schwerpunkt stets auf einer Wurfparabel befindet, wenn auf ihn nur die konstante Schwerkraft wirkt. Es liegt daher nahe, den Körper bei der Freigabe des Gitters so zu verschieben, daß die Schwerpunkte des vernetzten und des unvernetzten Körpers zusammenfallen. Für einen homogenen ebenen Körper gilt dann mit den FE-Ansatzfunktionen $\bar{\boldsymbol{N}}$, der Massenmatrix $\boldsymbol{M}$, der Dichte ρ,

der Masse m, der Knotenreferenzlage $\boldsymbol{X}$ und den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{U}$ für die Schwerpunktslage

$$\boldsymbol{r}_{OS} = \frac{1}{m}\int_\Omega \rho \bar{\boldsymbol{N}} d\Omega \cdot (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{U}), \qquad m = \frac{\sum_{i,j} M_{ij}}{2}, \tag{2}$$

bzw. mit der Hilfsmatrix $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2n_e} \qquad \text{auch} \qquad \boldsymbol{r}_{OS} = \frac{1}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}\cdot(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{U}). \tag{3}$$

Der Körperverdrehwinkel α wird näherungsweise berechnet durch Mittelung geeigneter Elementkantenverdrehungen, siehe [3], oder durch ein geeignet formuliertes lineares Ausgleichsproblem, siehe [4].

Die Grundidee bei der Bestimmung der Schwerpunktsgeschwindigkeit ist es, den Impuls vor und nach der Netzfreigabe zu erhalten. Für den Starrkörper gilt für den Impuls $\boldsymbol{J}_S = m\boldsymbol{v}_S$, während für den diskretisierten Körper mit den Knotengeschwindigkeiten $\boldsymbol{V}$ für den Impuls

$$\boldsymbol{J}_{FE} = \int_\Omega \rho \bar{\boldsymbol{N}} d\Omega \cdot \boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{V} \tag{4}$$

gilt. Setzt man diese Impulse gleich, so kann nach der Schwerpunktsgeschwindigkeit aufgelöst werden

$$\boldsymbol{v}_S = \frac{1}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{V}. \tag{5}$$

Analog kann die Drehgeschwindigkeit ω durch Erhaltung des Dralls vor und nach der Netzfreigabe berechnet werden. Während die Drehgeschwindigkeit an jedem Punkt eines Starrkörpers gleich ist, muß für die Drallberechnung ein Bezugspunkt gewählt werden. Eine besonders günstige Wahl ist hierbei der Schwerpunkt S.

Für das Massenträgheitsmoment des diskretisierten Körpers bezüglich des Schwerpunktes ergibt sich mit der Abkürzung $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{U} - \boldsymbol{X}_S$

$$J_{FE,S} = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\bar{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{R}\rho d\Omega = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{R}. \tag{6}$$

Sein Drall berechnet sich nach einigen Umformungen, vgl. [3], zu

$$D_{FE,S} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\bar{\boldsymbol{V}}_{SP} \tag{7}$$

mit den Relativgeschwindigkeiten $\bar{\boldsymbol{V}}_{SP} = [V_{SP1y} \;\; -V_{SP1x} \;\; V_{SP2y} \;\; -V_{SP2x} \cdots] \in \mathbb{R}^{2n_e\times 1}$. Damit erhält man schließlich die gesuchte Drehgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{D_{FE,S}}{J_{FE,S}} = \frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\bar{\boldsymbol{V}}_{SP}}{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{R}}. \tag{8}$$

Abschließend werden die Größen $\boldsymbol{r}_{OS}, \boldsymbol{v}_S$ noch vom Schwerpunkt S auf den Körperreferenzpunkt C transformiert [4], wobei für die Berechnung von $\boldsymbol{r}_{SC}$ der sogenannte 'Ear-Cutting' Algorithmus nach [5] verwendet wird.

Danksagung

Mein herzlicher Dank gebührt Herrn Dipl.-Ing. Lars Kübler für sein Engagement bei Herleitung, Implementierung und Untersuchung verschiedener Methoden im Rahmen seiner Studienarbeit [4].

4. Literatur

1 Pfeiffer, F., Glocker, C.: Multibody Dynamics with Unilateral Contacts. New York, Wiley, 1996.
2 Wriggers, P.: Finite Element Algorithms for Contact Problems. Archive of Computational Methods in Engineering, **2** (4), (1995), 1–49.
3 Eberhard, P.: Kontaktuntersuchungen durch hybride Mehrkörpersystem / Finite Elemente Simulationen. Aachen, Shaker Verlag, 2000.
4 Kübler, L.: Zur hybriden Simulation von Kontaktvorgängen mit Mehrkörpersystemen und Finiten Elementen. STUD–173, Universität Stuttgart, Institut B für Mechanik, 1999.
5 O'Rourke, J.: Computational Geometry in C. Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

Adresse: Prof. Dr.-Ing. Peter Eberhard, Universität Erlangen, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Egerlandstr. 5, D-91058 Erlangen, Email: eberhard@ltm.uni-erlangen.de

HEINZL, PH.; PLÖCHL, M.; LUGNER, P.

Regelung eines Gliederzuges unter Verwendung einer 3-gliedrigen kinematisch geschlossenen Schleife

Ein Nahverkehrsgliederzug wird als 3-gliedrige kinematisch geschlossene Schleife modelliert. Die Knickwinkel zwischen den drei Gliedern werden entweder passiv durch Feder-Dämpfer-Elemente oder aktiv durch eine Steuerung eingestellt. Störungen und Parameterschwankungen können durch einen zusätzlichen Regler kompensiert werden.

1. Einleitung

Der betrachtete Nahverkehrsgliederzug besteht aus zwei Endwagen mit jeweils zwei Radsätzen - diese sind in separaten, gegen den jeweiligen Endwagen abgestützten Rahmen gelagert - und einem dazwischen über Gelenke eingehängten Brückenwagen. Die Knickwinkel zwischen End- und Brückenwagen können durch aktiv ansteuerbare Hydraulikzylinder beeinflußt werden, was für ein sicheres Befahren von unterschiedlichen Gleistrajektorien oder ein günstiges Verhalten bei Störungen wesentlich ist. Für theoretische Untersuchungen wird der Gliederzug als 3-gliedrige kinematisch geschlossene ebene Schleife modelliert. Zur Auslegung einer Steuerung und Regelung der Knickwinkel wird das linearisierte Systemmodell herangezogen. Das Ziel der aktiven Einstellung der Knickwinkel ist die Tangentialstellung der Endwagen zum Gleis, um ein günstiges Verschleißverhalten der Räder bzw. Radsätze zu erreichen. Bei entsprechender Wahl der Reglerparameter läßt sich sowohl ein rasches Abklingen von Störungen als auch ein günstiges dynamisches Verhalten bei einer Kurvendurchfahrt erreichen.

2. Das nichtlineare Modell der Regelstrecke

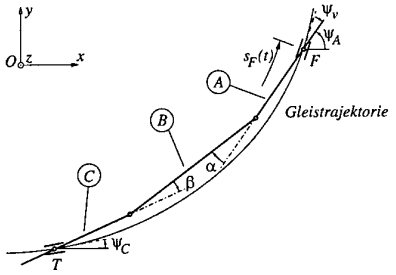


Abbildung 1: Modell des Gliederzuges

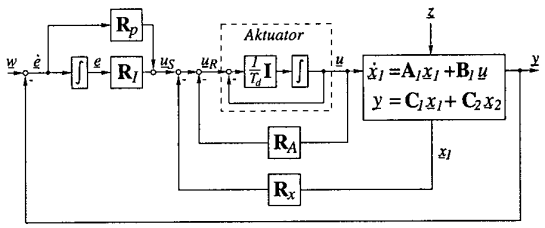


Abbildung 2: Regelkreis

Die Bewegungsgleichungen des nichtlinearen Modells werden nach einer symbolisch-numerischen Methode in Minimalkoordinaten (ψ_A und α nach Abb. 1) erstellt, siehe [1]. An den Stellen F und T sind Drehfeder-Drehdämpferkombinationen definiert. Zwischen Brücken- (B) und Endwagen (A, C) wirken zusätzlich zu Drehdämpfern Drehfedern mit einer bilinearen Kennlinie im passiven Fall, die Momente $M_\alpha = M_{\alpha 0}$ bzw. $M_\beta = M_{\beta 0}$ im gesteuerten Fall oder $M_\alpha = M_{\alpha 0} + \Delta M_\alpha$ bzw. $M_\beta = M_{\beta 0} + \Delta M_\beta$ im geregelten Fall. Die Bewegung des Punktes F des vorderen Endwagens wird mit der Bogenlänge $s_F(t)$ vorgegeben.

3. Linearisierung der Bewegungsgleichungen und Reglerauslegung

Durch die Forderung nach der Tangentialstellung der Endwagen ergeben sich die Winkel ψ_{v0}, α_0 und β_0 (und die geschwindigkeitsabhängigen Steuermomente $M_{\alpha 0}$ und $M_{\beta 0}$) je nach Krümmung κ ($\approx \dot{\psi}_A / \dot{s}_F$) in eindeutiger Weise. Da bei Gleisführungen von Vollbahnen i.a. nur kleine Krümmungsänderungen $d\kappa/ds$ auftreten und beim Zug selbst nur kleine Winkelabweichungen von den jeweiligen stationären Werten zu erwarten sind, werden die differential-algebraischen Bewegungsgleichungen zur Reglerauslegung bezüglich der stationären Kreisfahrt linearisiert. Man erhält das lineare, autonome Deskriptorsystem (mit λ als Lagrange-Multiplikator)

$$\mathbf{E}\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)\,, \quad \underline{x}(t) = \left[\Delta \underline{y}_{bl}, \Delta \dot{\underline{y}}_{bl}, \Delta\lambda\right]^T, \quad \underline{y}_{bl} = [\psi_v, \alpha, \beta]^T \tag{1}$$

mit den Regelmomenten $\underline{u}(t) = [\Delta M_\alpha, \Delta M_\beta]^T$. Man beachte die Singularität der Matrix $\mathbf{E}$ zufolge der algebraischen Zwangsbedingung. Der Systemausgang $\underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) = [\Delta\alpha, \Delta\beta]^T$ wird durch die Abweichungen der Knickwinkel von ihren stationären Werten gebildet. Ausgehend von einem Anfangszustand $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ soll es möglich sein, vorgegebene Führungsgrößen $\underline{w}(t)$ durch die Stellgrößen $\underline{u}(t)$ einzustellen bzw. beim Einwirken von Störungen die Knickwinkel auf ihre stationären Werte auszuregeln. Zu diesem Zweck wird nach [2] das Deskriptorsystem in Weierstraß-Kronecker-Normalform übergeführt. Dies wird mit Hilfe der Transformationsmatrizen $\mathbf{R}$ und $\mathbf{S}$, die in [3] für mechanische Systeme mit holonomen Zwangsbedingungen angegeben sind, durchgeführt, und man erhält mit dem transformierten System ($\mathbf{RES} = [\mathbf{I}_1, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{N}_k]$, $\mathbf{RAS} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{0}; \mathbf{0}, \mathbf{I}_2]$, $\mathbf{RB} = [\mathbf{B}_1; \mathbf{B}_2]$, $\mathbf{CS} = [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]$, $[\underline{x}_1, \underline{x}_2]^T = \mathbf{S}^{-1}\underline{x}$)

$$\dot{\underline{x}}_1(t) = \mathbf{A}_1\underline{x}_1(t) + \mathbf{B}_1\underline{u}(t) \tag{2}$$

$$\mathbf{N}_k\dot{\underline{x}}_2(t) = \underline{x}_2(t) + \mathbf{B}_2\underline{u}(t) \tag{3}$$

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}_1\underline{x}_1(t) + \mathbf{C}_2\underline{x}_2(t) \tag{4}$$

die Zerlegung in ein langsames (2) und ein schnelles Teilsystem (3). Da hier $\mathbf{N}_k\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ gilt, bezeichnet man das System nach [2] als *proper*; somit gilt für die Lösung des schnellen Systems: $\underline{x}_2(t) = -\mathbf{B}_2\underline{u}(t)$. Nun wird ein PI-Zustandsregler nach Abb. 2 entworfen, wobei auch die Dynamik der Aktuatoren berücksichtigt ist. Das Regelungsproblem wird auf eine konst. Zustandsvektorrückführung mit $\underline{u}_R = -\mathbf{k}_e\,[\underline{x}_1, \underline{e}, \underline{u}]^T$ zurückgeführt und die von der Krümmung κ und Geschwindigkeit $\dot{s}_F$ abhängige Verstärkungsmatrix $\mathbf{k}_e$ durch Polvorgabe bestimmt. Zur Bestimmung des Zustandes $\underline{x}_1(t)$ des langsamen Teilsystems aus den gemessenen Knickwinkelverläufen wird mit $\dot{\hat{\underline{x}}}_1(t) = \mathbf{A}_1\hat{\underline{x}}_1(t) + \mathbf{B}_1\underline{u}(t) + \mathbf{L}_1\left(\underline{\bar{y}}(t) - \hat{\underline{\bar{y}}}(t)\right)$ ein Luenberger-Beobachter eingeführt, wobei nach [2] der modifizierte Ausgang $\underline{\bar{y}}(t) = \mathbf{C}_1\underline{x}_1(t)$ unter Berücksichtigung von (4) und der bekannten Lösung von (3) verwendet wird.

4. Simulationsergebnisse

Die wesentlichen Parameter des Gliederzuges sind in [1] angegeben. Die Gleistrajektorie einer charakteristischen Kurveneinfahrt mit Krümmungsverlauf nach Abb. 3a wird mit der konst. Geschwindigkeit $\dot{s}_F = 14\ ms^{-1}$ durchfahren. In Abb. 3b sind die Verläufe der Winkel ψ_v und α für die Fälle *passiv*, *gesteuert* und *geregelt* dargestellt. Man erkennt zum einen die beruhigten Winkelverläufe im geregelten Fall, zum anderen, daß nur in den aktiven Fällen die Tangentialstellung erreicht werden kann und während einer Störeinwirkung (siehe Abb. 3a) nur noch im geregelten Fall. Abb. 3c zeigt die (mit einem einfachen Fahrwerkmodell errechneten) Summengleisquerkräfte auf die 1. und 2. Achse. Die größte Kraftspitze tritt im passiven Fall auf. Gleichmäßige Radabnützung kann man nur im gesteuerten und geregelten Fall erwarten, bei einer zusätzlichen Störung wieder nur im geregelten.

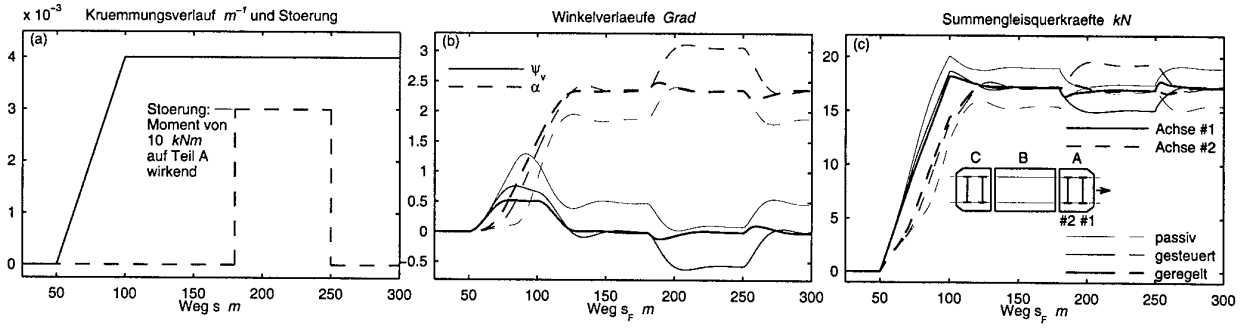


Abbildung 3: Krümmungsverlauf und Störungsbeschreibung, Winkelverläufe, Summengleisquerkräfte

5. Literatur

1 Plöchl, M.; Heinzl, Ph.; Mack, W.; Lugner, P.: Dynamic analysis of an articulated interurban train by means of a symbolic-numerical method for closed-loop mechanisms. Proc. Instn Mech. Engrs, Part K, J. Multi-body Dynamics (im Druck).

2 Müller, P.C.: Linear control design of linear descriptor systems. Proc. IFAC, 14th Triennial World Congress, Beijing, P.R. China, 1999.

3 Müller, P.C.: Stability of linear mechanical systems with holonomic constraints. Appl. Mech. Rev. **46** (1993), 160-164.

Anschrift: Philipp Heinzl, Manfred Plöchl und Peter Lugner, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10, A-1040 Wien, Österreich

HÖRSKEN, C.; HILLER, M.; SCHULTHEISS, R.; HINZE, U.

Effiziente Simulation von Mehrkörpersystemen im Konfigurationsraum

Die Simulation von Mehrkörpersystemen ist sehr rechenzeitintensiv, da viele Konfigurationen des Systems berechnet werden müssen. Betrachtet man das Mehrkörpersystem im Konfigurationsraum, so reduziert sich die Bewegung zwischen je zwei Körpern auf ein eindimensionales Problem. Sich berührende Bauteile bewegen sich im Konfigurationsraum entlang einer eindimensionalen Kontaktkurve. So lassen sich zum Beispiel im Voraus für Echtzeitsimulationen an beliebigen Stellen auf der Kurve Kontaktkräfte berechnen. In dieser Arbeit wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem rechenzeitoptimierte Stellen auf der Kontaktkurve ermittelt werden. Anschließend wird der Algorithmus auf zweidimensionale Kontaktflächen erweitert. Diese Flächen entstehen, wenn man bei der Modellbildung geometrische Toleranzen berücksichtigt. Abschließend wird die Effizienz der Verfahren anhand eines Beispiels demonstriert.

1. Einleitung

Für eine realistische Simulation eines ebenen Starrkörper-Mechanismus soll die Bewegung mit einem Haptik-Gerät abgebildet werden. Denkbar ist der Einsatz zum Beispiel bei der Simulation eines Handbremshebels in einem Kraftfahrzeug. In der Simulation bewegt der Anwender das Haptik-Gerät auf einer vorgegebenen Bahn von einer Anfangs- in eine Endposition. Während der Bewegung wird für endlich viele Konfigurationen das statische Gleichgewicht berechnet. Die auf den gesteuerten Körper einwirkenden Kräfte werden auf das Haptik-Gerät eingeprägt, so dass der Anwender während der Bewegung ein physikalisch realistisches Gefühl für den Kraftverlauf erhält. Dynamische Effekte spielen hier eine untergeordnete Rolle und werden daher nicht modelliert.

Da diese Simulation in Echtzeit ausgeführt wird, ist eine hohe Abtastrate nötig. Eine Berechnung der Statik in Echtzeit ist aber im Allgemeinen nicht möglich, so dass in diesem Beitrag ein Verfahren beschrieben wird, wie mit minimalem Rechenzeitaufwand vorab die Berechnung von Kraft-Kennfeldern durchgeführt werden kann. Hierzu wird der Starrkörper-Mechanismus zunächst in den Konfigurationsraum transferiert. Die Berechnung des Konfigurationsraums erfolgt paarweise für je zwei Körper A und B, deren Geometrie ausschließlich aus Geraden und Kreisbögen A_i bzw. B_i besteht mit $A = \bigcup A_i$ bzw. $B = \bigcup B_i$. Die Körper haben jeweils den Freiheitsgrad 1. Dann lässt sich der Konfigurationsraum stückweise zusammensetzen durch das implizite Gleichungssystem

$$\boldsymbol{P}_{A_i}(p) = \begin{pmatrix} x_{A_i}(p) \\ y_{A_i}(p) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} x_{B_j}(q) \\ y_{B_j}(q) \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}_{B_j}(q) \quad \forall i,j \quad , \tag{1}$$

wobei $\boldsymbol{P}_{A_i}(p)$ bzw. $\boldsymbol{P}_{B_j}(q)$ die kartesische Darstellung eines Körpers in Abhängigkeit seiner verallgemeinerten Lagekoordinaten p bzw. q ist. Man erhält durch Umformung eine Parameterdarstellung (p, q) der Kontakthyperfläche, die den Konfigurationsraum in einen freien und einen gesperrten Raum unterteilt. Der gesperrte Bereich enthält die Konfigurationen, in denen sich die Bauteile überlappen würden, während im freien Raum kein Kontakt zwischen den Bauteilen stattfindet. Beide Bereiche sind durch die Kontaktkurve getrennt. Die Achsen des Konfigurationsraums entsprechen den verallgemeinerten Lagekoordinaten des Mechanismus. Details zur Berechnung des Konfigurationsraums sind in [4] zu finden. Die Berechnung der Statik erfolgt mit Hilfe des Prinzips der Kinetostatik [2], kinematische Schleifen werden mit graphentheoretischen Methoden behandelt [1].

2. Optimierte Berechnung von Kraft-Kennfeldern auf Kontaktkurven

Zur Berechnung der statischen Gleichgewichte an möglichst wenigen Stellen im Konfigurationsraum sei die Kontaktkurve (p, q) gegeben. Für Konfigurationen, die nicht auf der Kontaktkurve liegen, ist keine Statikberechnung notwendig, da dort zwischen den Körpern keine Kontaktkraft übertragen wird. Durch Einführung einer Parametrisierung λ reduziert sich die Parameterdarstellung (p, q) zu einem eindimensionalen Problem, das durch eine Funktion $\boldsymbol{F} : [\lambda_0, \lambda_1] \to \mathbb{R}^n, \lambda \mapsto \boldsymbol{F}(\lambda)$ gegeben ist, wobei die Anzahl der berechneten Kräfte je Konfiguration n ist. Der Algorithmus zur minimalen Berechnung der Statik beschränkt die Schrittweite $\Delta\lambda$ auf $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$, und die zulässige Kraftänderung wird durch $F_{\min}$ und $F_{\max}$ vorgegeben.

1: Berechnung von $\mathbf{F}(\lambda_0)$
2: Halbierung der Schrittweite $\Delta\lambda$, solange $|\mathbf{F}(\lambda) - \mathbf{F}(\lambda + \boldsymbol{\Delta}\lambda)| > F_{\max}$ und $\Delta\lambda \geq 2\lambda_{\min}$
4: Verdopplung der Schrittweite $\Delta\lambda$, falls $|\mathbf{F}(\lambda) - \mathbf{F}(\lambda + \boldsymbol{\Delta}\lambda)| < F_{\min}$ und $2\Delta\lambda \leq \lambda_{\max}$

3. Auswirkungen von Geometrietoleranzen

Im vorigen Abschnitt wurde vorausgesetzt, dass die Geometrie der Starrkörper mit festen, konstanten Maßen vorgegeben ist. In diesem Abschnitt wird diese Nominalgeometrie ergänzt um Geometrietoleranzen. In der Realität hat jedes Maß eines Körpers einen gewissen Toleranzbereich um einen Nominalwert. Diese Toleranzen lassen um die feste Form eines Bauteils eine Toleranzhülle entstehen. Die Toleranzhülle entspricht dabei der maximalen geometrischen Ausdehnung eines Bauteils. Genau wie die Form eines Mechanismus ändert sich auch der zugehörige Konfigurationsraum unter Berücksichtigung von Toleranzen. Aus Gleichung (1) wird eine Ungleichung und somit aus den eindimensionalen Kontaktkurven zweidimensionale Kontaktflächen (Abbildung 1). Ein Algorithmus zur Optimierung einer minimalen Anzahl an Statikberechnungen für dieses zweidimensionale Problem wird im Folgenden vorgestellt:

1: Erzeugung eines Basisgitters auf der zweidimensionalen Kontaktfläche, bestehend aus gleichseitigen Dreiecken (Abbildung 1)
2: Rekursive Teilung eines Dreiecks in 4 Subdreiecke, falls $i, j \in \{1,2,3\}$ existiert mit $|F_i - F_j| > F\text{max}$ (Abbildung 2)
3: Abbruch der Rekursion, falls Seitenlänge $l < l_{\text{min}}$

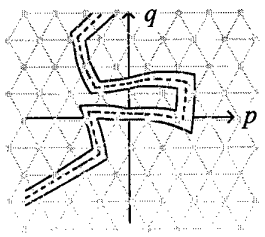


Abbildung 1

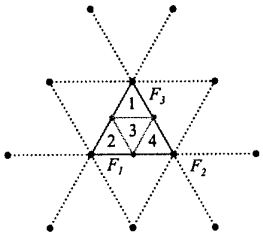


Abbildung 2

4. Anwendungsbeispiel

Der im vorigen Abschnitt vorgestellte Algorithmus zur optimierten Berechnung der statischen Gleichgewichte wird hier nun anhand eines Malteserkreuzgetriebes vorgestellt. In [3] ist die detaillierte Modellierung des Mechanismus beschrieben. Zwölf Maße sind, wie in der CAD-Zeichnung in Abbildung 3 dargestellt, mit Toleranzen versehen. Auf den rechten Antrieb wird ein konstantes Moment von $M = 15\,\text{Nm}$ gegeben. Der Betrag der Gelenkkraft im linken Rad ist in Abbildung 4 als Kraft aufgetragen.

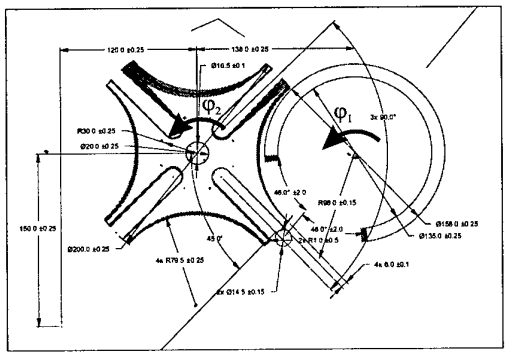


Abbildung 3

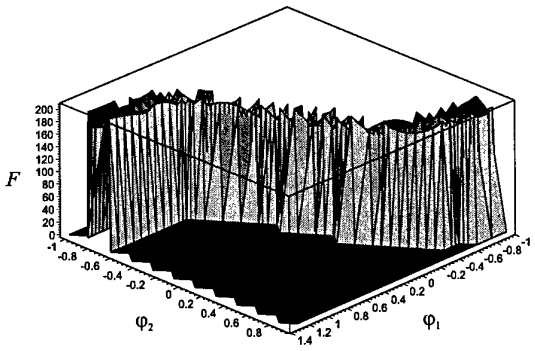


Abbildung 4

Zur Erzeugung der Kräfte im Konfigurationsraum wurden 17104 Berechnungen der Statik durchgeführt. Die Seitenlänge eines Dreiecks des Grundgitters beträgt $l_0 = 0,5$. Führt man den Algorithmus ohne rekursive Verfeinerung durch, so sind 61380 Berechnungen der Statik notwendig, um eine vergleichbare Genauigkeit zu erzielen. Die (konstante) Seitenlänge der Dreiecke beträgt hier $l_0 = 0,035$. Die Reduzierung der Rechenzeit liegt in diesem Beispiel bei 72 %.

5. Literatur

1 Hörsken, C., Schultheiss, R., Hiller, M.: Statical Contact Analysis in Computer Aided Design Using Graph Theory. In *New Directions in Contact Analysis and Simulation.* 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation.
2 Kecskeméthy, A.: *Objektorientierte Modellierung der Dynamik von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen.* Fortschrittsberichte VDI Reihe 20 Nr. 88. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993.
3 Preisner, M.: Untersuchung von Verfahren zur Toleranzanalyse bei CAD-Konstruktionen und Mehrkörpersystemen. Studienarbeit, Gerhard-Mercator-Universität – GH Duisburg, 1999.
4 Sacks, E., Joskowicz, L.: Computational Kinematic Analysis of Higher Pairs with Multiple Contacts. *Journal of Mechanical Design*, 117:269–277, 1995.

Adressen: Christian Hörsken, Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Hiller, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, D-47048 Duisburg; Ralf Schultheiss, Dr. Uwe Hinze, Ford-Werke AG, D-50725 Köln

MARKUS, B.; FRIK, M.

Globale Bahnplanung zur Erhöhung der Fehlertoleranz bei Gelenkausfall

Die Beweglichkeit eines kinematisch redundanten Handhabungssystems wird durch einen Gelenkausfall reduziert, was jedoch nicht zwangsläufig zum Abbruch der Handhabungsaufgabe führen muss. Dies gilt, wenn ein Ausfall oder Fehler durch eine Gelenkblockierung technisch beherrscht werden kann. Als Maß für den konfigurationsabhängigen Beweglichkeitsverlust kann die Manipulierbarkeit beider Zustände verglichen werden. Eine Methode zur Gewährleistung der Durchführbarkeit einer Handhabungsaufgabe nach Gelenkausfall ist die der künstlichen Gelenkbegrenzungen, bestimmt aus den Mannigfaltigkeiten der Nullraumbewegung. Ziel dieses Beitrags ist es, ein Kriterium zur Optimierung der Fehlertoleranz im Hinblick auf die mit dem Endeffektor anzufahrende Zielposition zu formulieren.

1. Fehlertoleranz: Maße und Bedingungen

In der VDI/VDE-Richtlinie 3542 Blatt 1 sind sicherheitstechnische Begriffe für Automatisierungssysteme beschrieben. Der Geltungsbereich „erstreckt sich allgemein auf die Sicherheit bei der Erstellung und beim Betrieb von Automatisierungssystemen in der Verfahrens-, Fertigungs- und Transporttechnik sowie in ähnlichen Bereichen". Unter Fehlertoleranz (auch Fehlzustandstoleranz) versteht man danach die „Eigenschaft einer Einheit, die geforderte Funktion auch dann zu erfüllen, wenn Fehlzustände bei speziellen bezeichneten Untereinheiten entstehen". Die hier zugrundeliegenden Betrachtungen aus Sicht der Mechanik bzw. Bahnplanung orientieren sich an dieser Richtlinie.

Die Manipulierbarkeit [1] eines kinematisch redundanten Handhabungssystems kann durch das Maß

$$w = \sqrt{\det\left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{q})\right]} \tag{1}$$

bewertet werden. Das Maß hängt ab von der nichtquadratischen JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ für den Endeffektor, welche wiederum vom konfigurationsbeschreibenden Vektor $\boldsymbol{q}$ der verallgemeinerten Koordinaten abhängt. Die Beweglichkeit eines Systems mit blockiertem Gelenk i kann entsprechend durch

$$w_i = w\left[{}^i\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\right] \tag{2}$$

beschrieben werden [2], mit der um die Spalte i reduzierten JACOBI-Matrix ${}^i\boldsymbol{J}$. Ist $w_i = 0$, so liegt der Extremfall einer fehlerintoleranten Systemkonfiguration bezüglich Gelenk i vor. Der Beweglichkeitsverlust kann durch die Manipulierbarkeitsdifferenz $w(\boldsymbol{q}) - w_i(\boldsymbol{q})$ oder die relative Manipulierbarkeit $w_i(\boldsymbol{q})/w(\boldsymbol{q})$ mit $w(\boldsymbol{q}) \neq 0$ quantifiziert werden. Ein Ziel für die Bahnplanung ist demnach die Bevorzugung von Konfigurationen, die ein hohes Beweglichkeitsmaß besitzen und zudem durch ein blockiertes Gelenk nur einen geringen Beweglichkeitsverlust erleiden.

Der Nachteil dieser lokalen Betrachtung ist, dass keine Aussage darüber vorliegt, ob z. B. die Zielposition mit dem Endeffektor nach der Blockierung noch erreicht werden kann. Je nach Anwendungsfall kann diese Information entscheidend sein, mit dem Vorteil, dass Gefahren für Mensch und Umwelt abgewendet werden können und eine zeitliche Verschiebung der erforderlichen Reparatur möglich ist.

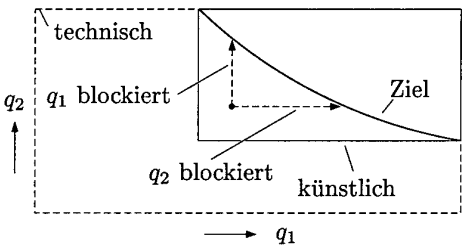


Bild 1: Künstliche Gelenkbegrenzung

Die in [3] vorgestellte Methode ermöglicht es, die Durchführbarkeit der Handhabungsaufgabe auch nach Gelenkausfall sicherzustellen. Dazu müssen Mannigfaltigkeiten der Nullraumbewegung berechnet werden. Für ein ebenes System mit drei Freiheitsgraden (→ Redundanzgrad eins) entspricht die Mannigfaltigkeit einer eindimensionalen Kurve im dreidimensionalen Konfigurationsraum. Eine solche Kurve für die Zielposition des Endeffektors ist in Bild 1 dargestellt, zur grafische Vereinfachung projiziert auf die q_1-q_2-Ebene im Konfigurationsraum. Der äußere Rahmen repräsentiert die technischen Gelenkbegrenzungen. Der innere Rahmen gibt die engeren, künstlichen Gelenkbegrenzungen an, die wie folgt ermittelt werden:

Die künstlichen Begrenzungen für alle q_i ergeben sich aus allen Schnittpunkten von Zielpositions-Mannigfaltigkeit und technischen Begrenzungen. Von einer Konfiguration, die sich innerhalb der künstlichen Begrenzungen (Bild 1)

befindet, kann mit einem blockierten Gelenk unter Einsatz der beiden verbleibenden intakten Gelenke die Zielposition erreicht werden. In der Projektion (Bild 1) entspricht dies den achsenparallelen Verschiebungen zur Mannigfaltigkeit.

2. Optimierungskriterium für die globale Bahnplanung

Wenn die Zielposition unbedingt erreicht werden muss, so kann auf die Methode der künstlichen Gelenkbegrenzungen nicht verzichtet werden. Die gesamte Bahn muss dann innerhalb dieser Grenzen liegen. Hier wird nun der allgemeine und abgeschwächte Fall betrachtet, dass die Startkonfiguration außerhalb dieser Begrenzungen für die Zielposition liegt. Ziel ist deshalb die Formulierung eines Optimierungskriteriums, mit dem die künstlichen Begrenzungen „schnell" erreicht werden. Sind die Grenzen erreicht, so ist das System ab diesem Bahnpunkt fehlertolerant.

Haupterkenntnis der bisherigen Untersuchungen ist, dass ein solches Optimierungskriterium erstens kurze Weglängen im Konfigurationsraum und zweitens eine hohe und zielpositionsgerichtete Beweglichkeit hervorrufen sollte. Da es sich bei der Manipulierbarkeit um ein ungerichtetes Beweglichkeitsmaß handelt, wird zur Bildung des Kriteriums ein anderes Maß verwendet, welches als zielgerichteter „Singulärwert" bezeichnet werden kann. Mit Hilfe einer Singulärwertzerlegung der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T$ kann das Manipulierbarkeitsellipsoid um die aktuelle Endeffektorposition erzeugt werden. Eine Darstellung im Arbeitsraum für den zweidimensionalen Fall (Ellipse) zeigt Bild 2 mit den beiden Singulärwerten $\sigma_1(\boldsymbol{q})$ und $\sigma_2(\boldsymbol{q})$ der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$ für den Endeffektor.

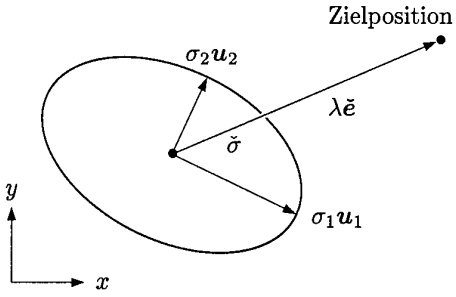


Bild 2: Zielgerichteter „Singulärwert"

Die beiden Vektoren $\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{q})$ und $\boldsymbol{u}_2(\boldsymbol{q})$ beschreiben die Hauptachsen der Manipulierbarkeitsellipse. Über den Vektor $\lambda\check{\boldsymbol{e}}$, der die Verbindung zwischen aktueller Endeffektorposition und Zielposition herstellt, kann (jetzt mit $\sigma_3(\boldsymbol{q})$ und $\boldsymbol{u}_3(\boldsymbol{q})$ erweitert auf den dreidimensionalen Arbeitsraum) der zielgerichtete „Singulärwert"

$$\check{\sigma}(\boldsymbol{q}) = \left[\left(\frac{{}'\check{e}_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{{}'\check{e}_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{{}'\check{e}_3}{\sigma_3}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

ermittelt werden mit ${}'\check{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{U}^T\,{}^0\check{\boldsymbol{e}}$ zur Transformation von Inertial- in Ellipsoidkoordinaten. Als global zu minimierende Kostenfunktion für K Bahnschritte ergibt sich durch Diskretisierung des Integralkriteriums

$$u = \sum_{j=1}^{K} \left(\hat{\sigma} - \frac{\check{\sigma}(\boldsymbol{q}_j) + \check{\sigma}(\boldsymbol{q}_{j-1})}{2}\right) \|\boldsymbol{q}_j - \boldsymbol{q}_{j-1}\| \tag{4}$$

mittels Trapezregel. Die obere Schranke $\hat{\sigma}$ ist erforderlich, da ein großes $\check{\sigma}(\boldsymbol{q})$ erzeugt werden soll, aber die Summe (4) global minimiert wird.

Die Methode der künstlichen Gelenkbegrenzungen hat neben dem Berechnungsaufwand einen weiteren Nachteil, sofern weitere Randbedingungen (z. B. Kollisionsfreiheit) eingehalten werden müssen. So führen Hindernisse im Arbeitsraum auf unzulässige Bereiche im Konfigurationsraum, welche die Methode [3] nicht erfasst. Aus diesem Grund ist diese Methode für die Bahnplanung nur bedingt nutzbar. Mit dem Kriterium nach (4) besteht hingegen der Vorteil, die zielpositionsorientierte Fehlertoleranz ohne Kenntnis der künstlichen Gelenkbegrenzungen und unter Beachtung aller Randbedingungen zu erhöhen. Dies kann z. B. auch im Rahmen einer Mehrkriterienoptimierung erfolgen.

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung im Rahmen des SFB 291.

3. Literatur

1 YOSHIKAWA, T.: Manipulability of Robotic Mechanisms. The Int. Journal of Robotics Research, **4**, No. 2 (1985), 3–9.
2 ROBERTS, R. G.; MACIEJEWSKI, A. A.: A Local Measure of Fault Tolerance for Kinematically Redundant Manipulators. IEEE Transactions on Robotics and Automation, **12**, No. 4 (1996), 543–552.
3 LEWIS, C. L.; MACIEJEWSKI, A. A.: Fault Tolerant Operation of Kinematically Redundant Manipulators for Locked Joint Failures. IEEE Transactions on Robotics and Automation, **13**, No. 4 (1997), 622–629.

Anschrift: DIPL.-ING. BERNHARD MARKUS, PROF. DR.-ING. MARTIN FRIK, Gerhard-Mercator-Universität Duisburg, Fachbereich Maschinenbau, Fachgebiet Mechanik, D-47048 Duisburg

PÎSLĂ D., PÎSLĂ A.

Effiziente dynamische Rechnersimulation für Parallelroboter

In diesem Beitrag wird es eine graphische dynamische Simulation für Parallelroboter mit hoher Positioniergenauigkeit vorgestellt. Als Anwendung wird die neue Parallelstruktur vom Typ DELTA mit Schubantrieben vorgestellt. Für die dynamische Rechnersimulation wird das inverse dynamische Modell der Parallelstruktur mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen erzeugt. Mit Hilfe dieses Algorithmus werden die Antriebskräfte als Funktionen der Zeit berechnet, die als Eingabedaten der "feed-forward" Steuerung dienen. Die entwickelte Methode ist allgemein und kann auch für andere Parallelroboter mit kleinen Veränderungen benutzt werden.

1. Einleitung

Dynamische Rechnersimulation ist eine der wichtigsten Aspekte auf dem Gebiet der Roboterforschung. Ein fundamentaler Vorteil in industriellen Anwendungen ist die Verwendung der Simulationssysteme für die Entwicklung der Off-line Programmierung. Während der letzten Jahren wurde unsere Forschungstätigkeit auf die Simulation von Parallelrobotern konzentriert. Das Ziel des Beitrags ist die Wichtigkeit eines effizienten Simulationsprogramms für Parallelroboter mit hoher Positioniergenauigkeit hervorzuheben.

2. Beschreibung der DELTA-Parallelstruktur mit Schubantrieben

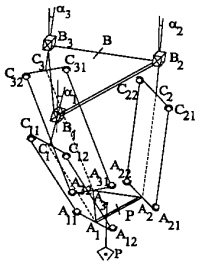


Bild 1

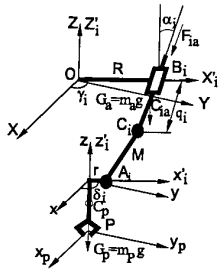


Bild 2

Im Bild 1 wird die Parallelstruktur vom Typ DELTA mit Schubantrieben dargestellt. Diese neu entwickelte Parallelstruktur ist ein Mechanismus mit drei Freiheitsgraden, der identische kinematischen Ketten zwischen dem Gestell und der Arbeitsplattform hat. Jede kinematische Kette hat die folgende Struktur: ein Schubgelenk auf dem Gestell, der obere Arm, Kugelgelenke in Punkten C_{ij}, das räumliche Parallelogramm, Kugelgelenke in Punkten A_{ij}. Unter der wichtigsten Eigenschaft dieser Struktur kann man erwähnen: der Endeffektor führt nur Translationsbewegungen aus, große Steifigkeit, hohe Positioniergenauigkeit und Geschwindigkeit, mechanische Modularität.

3. Das inverse dynamische Modell

Zur Erzeugung des dynamischen Modells ist die Lösung des folgenden Probleme notwendig [5]: inverses geometrisches Modell, direktes geometrisches Modell, inverses kinematisches Problem für Geschwindigkeiten, direktes kinematisches Problem für Geschwindigkeiten und inverses kinematisches Problem für Beschleunigungen. Die Lösungen für diese Probleme wurden in [3], [4] vorgestellt. Als Eingabedaten für das inverse dynamische Modell werden die Bewegungsgleichungen des Punktes P auf dem Endeffektor vorgegeben und es werden die Antriebskräfte $F_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ gesucht (Bild 2). Es werden die Voraussetzungen gemacht: der Motor hat die Masse m_a; die Plattform hat die Masse m_P; andere Elemente haben keine Masse. Die virtuelle mechanische Arbeit der Schwerkräfte und Antriebskräfte hat die folgende Form:

$$\delta W = -m_P\ddot{X}_P\delta X_P - m_P\ddot{Y}_P\delta Y_P + (-m_Pg - m_P\ddot{Z}_P)\delta Z_P + \sum_{i=1}^{3}(-m_a\ddot{q}_i + F_{ia})\delta q_i + \sum_{i=1}^{3} -m_ag\delta Z_{C_i} = 0 \quad (1)$$

Die virtuellen Verschiebungen δX_P, δY_P, δZ_P sind:

$$\begin{cases} \delta X_P &= a_X \delta q_1 + b_X \delta q_2 + c_X \delta q_3 \\ \delta Y_P &= a_Y \delta q_1 + b_Y \delta q_2 + c_Y \delta q_3 \\ \delta Z_P &= a_Z \delta q_1 + b_Z \delta q_2 + c_Z \delta q_3 \end{cases} \tag{2}$$

wobei die Koeffizienten $a_X, \ldots, c_Z$ abhängig von geometrischen Parametern, Endeffektorkoordinaten und Antriebskoordinaten sind. Endlich werden die Antriebskräfte berechnet:

$$\begin{cases} F_{1a} &= m_a \ddot{q}_1 - m_a g \cos\alpha_1 + m_P[a_X \ddot{X}_P + a_Y \ddot{Y}_P + a_Z(g + \ddot{Z}_P)] \\ F_{2a} &= m_a \ddot{q}_2 - m_a g \cos\alpha_2 + m_P[b_X \ddot{X}_P + b_Y \ddot{Y}_P + b_Z(g + \ddot{Z}_P)] \\ F_{3a} &= m_a \ddot{q}_3 - m_a g \cos\alpha_3 + m_P[c_X \ddot{X}_P + c_Y \ddot{Y}_P + c_Z(g + \ddot{Z}_P)] \end{cases} \tag{3}$$

4. Simulationsergebnisse

Das dynamische Modell wurde im integrierten Simulationssystem für Parallelroboter implementiert [2]. Auf der Basis der Bewegungs-, Geschwindigkeit- und Beschleunigungsverläufe des Endeffektors in der X-Richtung wurden die Antriebskoordinaten, -geschwindigkeiten und beschleunigungen berechnet und in entsprechenden Diagrammen dargestellt (Bild 3). Es wurden danach die Antriebskräfte der Parallelstruktur berechnet und dargestellt.

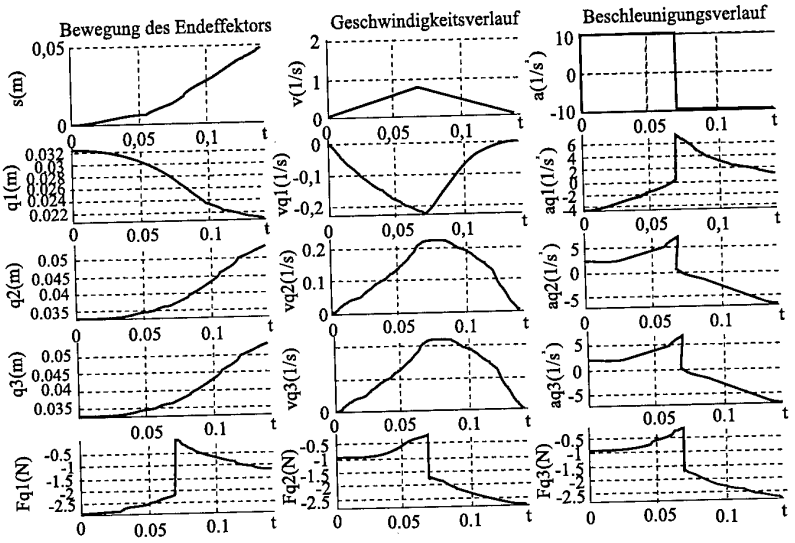


Bild 3

Die Simulationsergebnisse haben gezeigt, daß das Prinzip der virtuellen Verschiebungen eine effiziente Rechnersimulation des inversen dynamischen Modells für die DELTA Parallelstruktur mit Schubantrieben erlaubt. Mit Hilfe der Simulationsergebnisse können die Funktionalität der Struktur und ihre Beschränkungen getestet werden, bevor ein Prototyp aufgebaut wird.

5. Literatur

1 PIERROT, F., REYNAUD, C., FOURNIER, A.: DELTA: a simple and efficient parallel robot; Robotica 9 (1990), 105-109

2 PÎSLĂ, DOINA, PÎSLĂ, A.: Vorstellung eines graphischen Bewegungssimulationsprogramms für einen HEXA-Parallelroboter, Proc of 6^{th} International DAAAM Symposium, Polonia (1995), 277-278

3 PÎSLĂ, D.: Algorithmus für die Lösung der Kinematik eines Parallelroboters vom Typ DELTA mit Schubantrieben. Proc of 7th International DAAAM-Symposium, Austria (1996), 339-340

4 PÎSLĂ, D., PÎSLĂ, A.: Algoritm pentru rezolvarea problemei cinematice pentru acceleraţii a unui robot paralel de tip DELTA cu cuple motoare de translaţie, Proc. of International Symposium PRASIC'98, Romania (1998), 235-240

5 ZHANG, C.-D., SONG, S. M.: An Efficient Method for Inverse Dynamics of Manipulators Based on the Virtual Work Principle, Jl. Of. Robotic Systems 10 (1993), 605-627

Anschrift: DR.-ING. DOINA PÎSLĂ, Institut für Mechanik und Computerprogrammierung, TU Cluj-Napoca, C. Daicoviciu Str. 15, RO-3400 Cluj-Napoca, Rumänien
DR.-ING. ADRIAN PÎSLĂ, Institut für Werkzeugmaschinen und Industrieroboter, TU Cluj-Napoca, C. Daicoviciu Str. 15, RO-3400, Cluj-Napoca, Rumänien

BERG, C.P.; DREYER, M.; RATH, H.J.

Pointed-Droplets in Uniaxial Extensional Flow

An instationary deformed low viscous droplet undergoes typically a shape transition from an initially spherical shape to a long slender body. A nearly spherical droplet shape at the beginning of the deformation is well described by the small deformation theory and on the other hand a slender droplet at the end of the deformation is sufficiently well described by the large deformation theory. But during deformation, there is the necessity to use a new modified ellipsoid function with a shape parameter to describe empirically the droplet shape in the full range from small to large deformation theory. The new modified ellipsoid function was used to investigate more precisely the deformed drop shapes in uniaxial extensional flow at different capillary numbers.

1. Introduction

The exact knowledge of the deformation dynamics of droplets in extensional flow has great importance for industrial processing of emulsions. The character of the break-up in supercritical extensional flow depends on the droplet and flow qualities and determines the resulting drop size distribution. An uncontrolled change of the drop size distribution may cause a loss of specific product qualities. The aim of our investigations is an experimental analysis of the shape transition from an elliptical drop contour to a shape with pointed-ends at stable and unstable droplets in plane and uniaxial extensional flow. The droplets at low viscosity ratio $\lambda = \mu_d/\mu_m$ (μ_d, μ_m dynamic shear viscosity of the droplet, matrix) undergo a shape transition from an initially spherical shape to a long slender pointed droplet.

The small and large deformation theory were derived to describe the droplet shape and stability limit in extensional flow at low REYNOLDS numbers $\mathrm{Re} = \rho G a/\mu_m$ (ρ matrix density, G strain rate, a spherical drop radius). The range of validity of the theories is divided by the viscosity ratio λ. The higher order small deformation theory [2] predicts the stationary deformed droplet shape in an expansion of the capillary number $\mathrm{Ca} = \mu_m G a/\gamma$ (γ interfacial tension). In first order of Ca, the droplet shape function $r(\varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) is an ellipsoid function

$$r(\varphi) = r_0 + \Delta r \cos(2\varphi) + O(\mathrm{Ca}^2) \tag{1}$$

with $r_0 = a\left(1 - \frac{3}{2}\mathrm{Ca}F\left(\lambda, \mathrm{Ca}^{-1}\right)\right)$, $\Delta r = -\frac{9}{2}a\mathrm{Ca}F\left(\lambda, \mathrm{Ca}^{-1}\right)$ and $F(\lambda, \mathrm{Ca}^{-1})$ given by [2]. Comparisons of the theory with experiments and numerical simulations are quite good for $\lambda \geq 0.1$ [3]. On the other hand, for $\lambda < 0.01$, the large deformation theory [1] predicts the drop shape

$$r(z) = B\left[1 - \frac{z^2}{L^2}\right] \tag{2}$$

with the drop semi-axes L and $B = a\,(8L\mathrm{Ca})^{-1}\left[1 + \sqrt{1 - 64\lambda\mathrm{Ca}^{-2}}\right]$ with typical errors less than 20 % [3]. The deformation theories were developed to describe a stationary deformed droplet in extensional flow. But, for the evaluation of the experimentally observed shape transition from an elliptical drop contour to a shape with pointed-ends we use a modified ellipsoid function

$$r(z, s) = \frac{B}{1 - s}\left[\sqrt{1 - (1 - s^2)\frac{z^2}{L^2}} - s\right], \tag{3}$$

which allows to describe empirically the special drop shape by a new shape parameter s. The function is a common ellipsoid at $s = 0$, which is the drop shape of the small deformation theory (Eq. (1)) in first order of Ca. On the other hand, at $s = 1$, an expansion in s shows, that the ellipsoid function is identical to the shape of the large deformation theory (Eq. (2)). In this way, the shape parameter s controls the tips and slenderness at the droplet ends in the range from an elliptical ($s = 0$) to a pointed droplet ($s = 1$).

2. Experiments

The experiments in uniaxial extensional flow were carried out in a liquid bridge stretching device [4] with different

matrix and drop fluids in the range of the large deformation theory $\left(9 \cdot 10^{-5} \leq \lambda < 10^{-1}\right)$ at sub- and supercritical capillary numbers $(0.1 \leq \mathrm{Ca} < 1)$. A typical shape transition $s(t)$ and deformation $D_f(t)$ $(D_f = (L-B)/(L+B))$ in uniaxial flow is presented in Fig. 1. The deformation starts immediately with the extensional flow, but the shape transition to pointed-ends is typically delayed and ends at stationary deformation. The shape parameter $s(\mathrm{Ca})_{t\to\infty}$ of stationary deformed droplets and bubbles [5] in dependence on the capillary number is displayed in Fig. 2. The droplet and bubble shape parameters increase by increasing capillary numbers. At $\mathrm{Ca} > 0.4$, a further increase of the flow strength, even supercritical flow, does not increase the drop slenderness much more. At this point, the drop shapes are most similar, but not identical $(s < 1)$ to the shapes of the slender body theory, as formerly found by Bentley and Leal [3] in plane extensional flow.

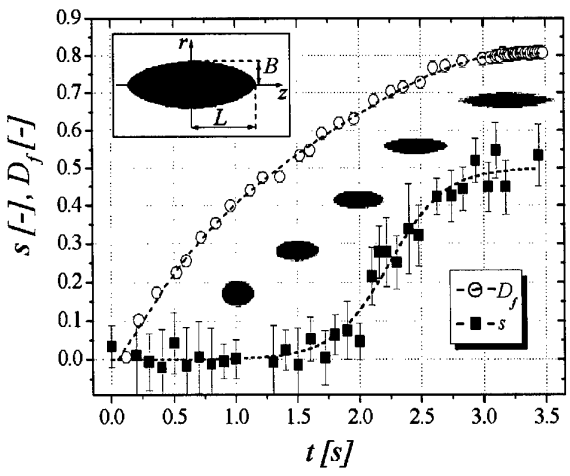


Fig. 1. Instationary drop deformation and shape transition in uniaxial extensional flow at $\mathrm{Ca} = 0.22, \lambda = 9 \cdot 10^{-5}$. The dotted lines represent the smoothed experimental data. Some droplet pictures are added.

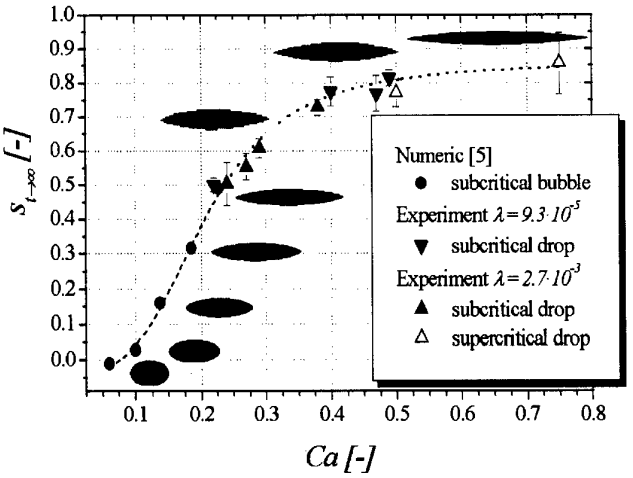


Fig. 2. Droplet and bubble shape parameter in dependence on the capillary number. The dotted line represents the smoothed experimental data. Some examples of bubble [5] and droplet pictures are added.

3. Results

A new function has been used to describe empirically the shape transition from spherical to pointed-end shapes during deformation. Due to the new shape parameter s, which controls the shape slenderness at the drop tips in the range from the small $(s = 0)$ to the large $(s = 1)$ deformation theory, the modified ellipsoid function allows a more detailed shape description than the current theories. The observed instationary shape $s(t)$ transition is typically delayed and ends at maximum deformation. The shape parameter $s(Ca)_{t\to\infty}$ at stationary deformed droplets represents the increasing slenderness at increasing capillary numbers up to a maximum slenderness at supercritical deformation.

Acknowledgements

This work is supported by the German Aerospace Center DLR under grant number 50 WM 9901.

4. References

1 Acrivos, A., Lo, T.S.: Deformation and breakup of a single slender drop in an extensional flow; J. Fluid Mech. **86** (1978), 641-72.

2 Barthès-Biesel, D., Acrivos, A.: Deformation and burst of a liquid droplet freely suspended in a linear shear field; J. Fluid Mech. **61** (1973), 1-24.

3 Bentley, B.J., Leal, L.G.: An experimental investigation of drop deformation and breakup in steady, two-dimensional linear flows; J. Fluid Mech. **167** (1986), 241-83.

4 Berg, C.P., Dreyer, M., Rath, H.J.: A large fluid-bridge device to measure the deformation of drops in uniaxial extensional flow fields; Meas. Sci. Technol. **10** (1999), 956-64.

5 Pozrikidis, C.: Numerical studies of cusp formation at fluid interfaces in Stokes flow; J. Fluid Mech. **357** (1998), 29-57.

Address: Dipl.-Phys. Christian P. Berg, Dr.-Ing. Michael Dreyer, Prof. Dr.-Ing. Hans J. Rath, ZARM, Universität Bremen, Am Fallturm, D–28359 Bremen.

BROCKMANN, T.; LAMMERING, R.

An Analytic Approach to Piezoelectric Fiber Composites - From Micromechanics Modeling to Beam Behavior

In the context of adaptive systems, the technology of piezoelectric fiber composites with its capabilities for high-speed actuation and the beneficial effects of tailorable anisotropy is of great interest for structurally integrated vibration suppression and acoustic control. In order to study the interaction between active and load carrying functionalities and to analyze the influence of the diverse parameters, an analytic model containing all major characteristics from the micromechanics to the structural mechanics level is described. The effective electroelastic properties of a lamina with embedded continuous piezoceramic fibers exposed to an electric field in fiber direction are examined in the close-up investigation of a representative volume. With the aid of the classical lamination theory, extended by the internal actuation loads, such plies can be combined for the respective purpose. Finally, the active and passive properties of a single-cell closed cross-section beam with walls made from these laminated composites are derived.

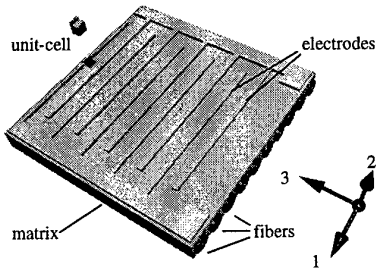
1. Piezoelectric Material

For the purpose of actuation it is made use of the converse piezoelectric effect as exhibited for example by Lead Zirconate Titanate (PZT). By applying an electric field (E) in or against the poling direction (P) of the material an extension or contraction respectively is achieved in this direction. Below, the linear constitutive relation for poled polycrystalline piezoelectric material is shown where **T**, **S**, **D**, **E** are the vectors of stress, strain, electric displacement, and electric field. The submatrix **C** contains the accustomed transversely isotropic stiffness coefficients, while the submatrices **e** and $\boldsymbol{\epsilon}$ comprise the induced stress piezoelectric and dielectric constants. Further details can be found in [2, 4]. The electromechanical shear mode problem is uncoupled and it reduces to a mechanical one when poling direction and electric field are perpendicular to the plane of isotropy.

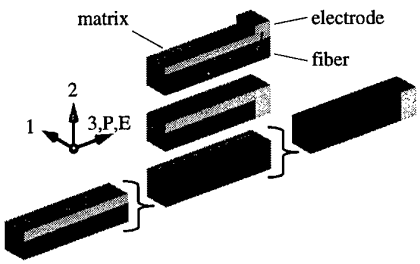
$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{e}^T \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

2. Micromechanics

Assuming entirely uniform mechanical and electric fields within each of the material phases, the rules of mixtures (Voigt and Reuss, see [1]) are applied to the three dimensions of a representative unit-cell with incorporation of the electromechanical coupling (Bent and Hagood, see [2]). Thus the constitutive relation has to be rewritten in terms of those variables which are equal for both phases in the regarded direction. Then the resulting coefficient matrix for fiber and matrix material weighted by their fraction has to be summed. By rearranging the constitutive relation in the original way the effective coefficients are obtained. To combine the three directions of the continuum the determined coefficients of one direction are substituted as the piezoceramic properties of the subsequent case.



Piezoelectric fibers composite ply equipped with interdigitated electrodes and the excised unit-cell, simplifying representation and substitution of the subsequent directional cases.



3. Macromechanics

In order to reduce the problem to the planar case, the stresses and shear stresses normal to the fiber layers are assumed to be negligible small. Further on, the separately treated in-plane shear coefficient is incorporated and the transformation matrix for the property rotation around the normal direction is introduced leading to a plate stiffness matrix **Q** for every layer k with the normal coordinate n bounded to the mid-plane.

The application of the classical lamination theory results in the constitutive relation with the additional vector of the internal actuation loads for the active laminated composite that will form the walls of a beam [3, 4]. Assuming the closed cross-section to be infinitely rigid in its plane eliminates the transverse and twisting curvatures and the absence of internal pressure causes the transverse internal force to vanish. The membrane response assumption for the thin walled beam permits the exclusive retention of the membrane properties.

$$\left\{ \begin{array}{c} N_x \\ N_{xs} \end{array} \right\} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} & A_{16} - \frac{A_{12}A_{26}}{A_{22}} \\ A_{16} - \frac{A_{12}A_{26}}{A_{22}} & A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \end{array} \right]}_{\mathbf{K}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_x \\ \gamma_{xs} \end{array} \right\} + \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{N}_x - \frac{A_{12}}{A_{22}} \widetilde{N}_s \\ \widetilde{N}_{xs} - \frac{A_{26}}{A_{22}} \widetilde{N}_s \end{array} \right\}}_{\widehat{\mathbf{N}}} \qquad \begin{array}{l} \mathbf{A} = \sum\limits_{k=1}^{k_{\max}} \mathbf{Q}_k \cdot (n_k - n_{k-1}) \\ \widetilde{\mathbf{N}} = \sum\limits_{k=1}^{k_{\max}} \mathbf{e}_k E_{3k} \cdot (n_k - n_{k-1}) \end{array}$$

4. Structural Mechanics

A single-cell beam is modeled as a Timoshenko beam with torsional warping [3, 4], where x is the spanwise and s the circumferential coordinate. The position of a point on the contour is marked by y_o, z_o and the displacements of the beam reference line by u_o, v_o, w_o, while ϕ, β_y, β_z are the cross-sectional rotations and $\phi_{,x}$ is the twist rate. Θ represents the warping function, A the enclosed area and S the circumference. The strains read:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x(x,s) = u_{o,x}(x) + z_o(s)\beta_{y,x}(x) - y_o(s)\beta_{z,x}(x) + \Theta(s)\phi_{,xx}(x) & \gamma_{xy}(x) = v_{o,x}(x) - \beta_z(x) \\ \gamma_{xs}(x,s) = \gamma_{xy}(x)y_{o,s}(s) + \gamma_{xz}(x)z_{o,s}(s) + 2\frac{A}{S}\phi_{,x}(x) & \gamma_{xz}(x) = w_{o,x}(x) + \beta_y(x) \end{array}$$

The beam internal loads in terms of the membrane internal forces follow for example from the comparison of the strain energy of beam and membrane. Q_w is the warping related bimoment.

$$\begin{array}{llll} N(x) = \oint\limits_S N_x(x,s)ds & Q_y(x) = \oint\limits_S N_{xs}(x,s)y_{o,s}(s)ds & M_y(x) = \oint\limits_S N_x(x,s)z_o(s)ds & M_x(x) = 2\frac{A}{S} \oint\limits_S N_{xs}(x,s)ds \\ & Q_z(x) = \oint\limits_S N_{xs}(x,s)z_{o,s}(s)ds & M_z(x) = -\oint\limits_S N_x(x,s)y_o(s)ds & Q_w(x) = \oint\limits_S N_x(x,s)\Theta(s)ds \end{array}$$

Substituting the strains into the walls constitutive equations and the result into the expressions for the beam internal loads gives the force deformation relation which is shown for the simple case of a circular cross-section.

$$\left\{ \begin{array}{c} N \\ Q_y \\ Q_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ Q_w \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} 2\pi r K_{11} & 0 & 0 & 2\pi r^2 K_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi r K_{22} & 0 & 0 & -\pi r^2 K_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi r K_{22} & 0 & 0 & -\pi r^2 K_{12} & 0 \\ 2\pi r^2 K_{12} & 0 & 0 & 2\pi r^3 K_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi r^2 K_{12} & 0 & 0 & \pi r^3 K_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\pi r^2 K_{12} & 0 & 0 & \pi r^3 K_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_{o,x} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \phi_{,x} \\ \beta_{y,x} \\ \beta_{z,x} \\ \phi_{,xx} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 2\pi r \widehat{N}_x \\ 0 \\ 0 \\ 2\pi r^2 \widehat{N}_{xs} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

5. Summary and Perspective

With the aid of numerous simplifying assumptions, the stiffness coefficients and internal actuation loads for an active thin-walled single-cell closed cross-section Timoshenko beam with torsional warping have been obtained analytically. In the next step, the equations of equilibrium can be derived with the principle of virtual displacements and the governing equations can be solved to get the displacements in terms of the applied electric field analytically for some simple examples and numerically for more complicated cases. Refinements on the different modeling levels might lead to a more exact representation.

6. References

1 Chawla, K.K.: Composite Materials: Science and Engineering; Springer-Verlag, New York, 1998.

2 Bent, A.A.: Active Fiber Composites for Structural Actuation; Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1997.

3 Rehfield, L.W.; Altigan, A.R.; Hodges, D.H.: Nonclassical Behavior of Thin-Walled Composite Beams with Closed Cross Sections; **35**, No. 2 (1972), 42–50.

4 Du Plessis, A.J.; Hagood, N.W.: Modeling and Experimental Testing of Twist Actuated Single Cell Composite Beams for Helicopter Blade Control; Report based on M.S. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1996.

Addresses: Dipl.-Ing. Tobias H. Brockmann, M.S.E.; Prof. Dr.-Ing. Rolf Lammering; Universität der Bundeswehr Hamburg, Institut für Mechanik, Holstenhofweg 85, 22043 Hamburg, Germany.

ECKERT, S.; GROSS, D.; MUELLER, R.

3D Periodic Arrangements of Misfitting Precipitates in Anisotropic Materials

In high temperature applications Nickel-base alloys are frequently used. These two-phase materials consist of misfitting precipitates, which are periodically arranged in the matrix material. The physical behaviour of such materials strongly depends on the morphology and on the volume fraction of the inclusions. The interfacial energy and the elastic strain energy are utilized in the determination of equilibrium shapes, incorporating the concept of generalized driving forces. As an efficient numerical method the Boundary Element Method for anisotropic materials is used. Results are presented for cubic materials to mimic Ni-base alloys. The influence of volume fraction, particle size, elastic inhomogeneity and external loading on the equilibrium morphology is discussed.

1. Micromechanical model

Two-phase materials in general can be considered as eigenstrain problems with the elasticity tensors of the matrix $\boldsymbol{C}^{\text{out}}$ and of the inclusion $\boldsymbol{C}^{\text{in}}$, where the constant eigenstrain $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ accounts for the different lattice structures of the two phases (Fig.1). The stress-strain relation in the domain $\mathcal{B}$, for which the mechanical equilibrium condition $\text{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ holds, is given by

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{C}^{\text{out}}\boldsymbol{\varepsilon} & \text{in } \mathcal{B}^{\text{out}}, \\ \boldsymbol{C}^{\text{in}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) & \text{in } \mathcal{B}^{\text{in}}, \end{cases} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}$ is the linearized strain tensor. The assumption of a coherent interface $\partial\mathcal{B}$ separating the two phases, yields

$$[\![\boldsymbol{u}]\!] = \boldsymbol{0} \quad \text{and} \quad [\![\boldsymbol{\sigma}]\!]\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \quad \text{on } \partial\mathcal{B}, \tag{2}$$

where $[\![(.)]\!] = (.)^{\text{out}} - (.)^{\text{in}}$ describes the jump of the quantity $(.)$ across the interface. The periodic arrangement of the precipitates within the matrix is realized by using a cubic unit cell (see Fig.1) with the appropriate boundary conditions

$$\boldsymbol{t}|_{\Gamma_i^+} + \boldsymbol{t}|_{\Gamma_i^-} = \boldsymbol{0} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{u}|_{\Gamma_i^+} - \boldsymbol{u}|_{\Gamma_i^-} = \boldsymbol{v}^i \quad \text{with} \quad \boldsymbol{v}^i = \text{const.} \tag{3}$$

for the tractions $\boldsymbol{t}$ and displacements $\boldsymbol{u}$. Furthermore, in absence of external loads, the condition

$$\int_{\Gamma_i^+} \boldsymbol{t}\, dA = \boldsymbol{0} \qquad i = 1...3 \tag{4}$$

holds. The last equation is still valid in case of an external load $\boldsymbol{\sigma}^\infty = \text{const.}$, if the eigenstrains $\boldsymbol{\varepsilon}^0$ in (1) are replaced by the equivalent eigenstrains $\boldsymbol{\varepsilon}^0_{\text{eq}} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 - [\![\boldsymbol{C}^{-1}]\!]\boldsymbol{\sigma}^\infty$.

2. Equilibrium shapes

To determine the particles equilibrium shape, a variational formulation is applied. In the absence of an external load, the total potential Π of the system is given by the elastic strain energy of the particle and the matrix phase and by the interfacial energy

$$\Pi = \int_{\mathcal{B}^{\text{in}}} W_{\text{el}}\, dV + \int_{\mathcal{B}^{\text{out}}} W_{\text{el}}\, dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \gamma\, dA \qquad \text{with} \qquad W_{\text{el}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{el}}, \tag{5}$$

where the interfacial energy density γ is assumed to be constant on $\partial\mathcal{B}$. Supposing that Ostwald ripening is already completed, conservation of mass implies constant particle volume $V_{\mathcal{B}^{\text{in}}} = V_0$. This additional constraint is taken

into account by the augmented Lagrange functional $\hat{\Pi} = \Pi - \lambda(V_{\mathcal{B}\text{in}} - V_0)$ with the Lagrange multiplier λ. Applying calculus of variations with respect to the displacement field $\boldsymbol{u}$, the particle shape $\partial\mathcal{B}$ and λ leads to

$$\tau_n + \lambda = 0 \quad \text{on} \quad \partial\mathcal{B} \qquad \text{and} \qquad V_{\mathcal{B}\text{in}} - V_0 = 0 \tag{6}$$

as necessary conditions for an equilibrium morphology. Here, $\tau_n = [\![W_{\text{el}}]\!] - \boldsymbol{t} \cdot [\![\nabla \boldsymbol{u}]\!]\boldsymbol{n} + \gamma\kappa$ describes a generalized driving force (see [1] for details) and κ denotes twice the mean curvature of the interface $\partial\mathcal{B}$. Following the general procedure of [2,3] and incorporating the jump equations (2), a coupled system of integral equations is achieved, describing the periodic two-phase problem. With the use of the Boundary Element Method the unknown field quantities can be calculated to determine τ_n for a given particle shape.

3. Results

For numerical simulations, orthotropic material tensors are chosen to imitate the elastic behaviour of Ni-base alloys. In Voigt notation, the components of the elasticity matrix for the inclusion and the matrix material are $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 2.465 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$, $a_{44} = a_{55} = a_{66} = 1.247 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$ and $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 1.473 \cdot 10^5\,\text{N/mm}^2$. Pure dilatational eigenstrain is assumed to be $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = 0.001 \cdot \mathbf{1}$.

The equilibrium shape of the particle depends on the volume fraction $f = V_{\mathcal{B}\text{in}}/V_{\mathcal{B}\text{tot}}$ and on the elastic properties $\boldsymbol{C}^{\text{in/out}}$ for the inclusion and the matrix respectively as well as on the dimensionless particle size L (for the detailed derivation of L, see [4]). The assumption that $\boldsymbol{C}^{\text{in}} = \boldsymbol{C}^{\text{out}}$ and the increase of L leads to cube-like shapes for every $f = \text{const}$. If the particle size L is kept constant and f is increased, the inclusion tends towards a more sphere-like shape first and becomes more cuboidal for higher values of f, as displayed in Fig.2. Considering different stiffness ratios for matrix and particle and claiming $L = \text{const.}$, the soft inclusion ($\boldsymbol{C}^{\text{in}} = 0.8\,\boldsymbol{C}^{\text{out}}$) is much more cube-like than the stiff inclusion ($\boldsymbol{C}^{\text{in}} = 1.2\,\boldsymbol{C}^{\text{out}}$) as long as small volume fractions are assumed. For $f \approx 42\%$ both shapes are almost identical, whereas the stiff particle becomes more cuboidal compared to the soft inclusion for even higher volume fractions. The described changes in morphology of the equilibrium shapes for different combinations of the parameters f, L and $\boldsymbol{C}^{\text{in/out}}$ are in agreement with 2D-simulations performed in [5]. Assuming that $\boldsymbol{C}^{\text{in}} = 0.8\,\boldsymbol{C}^{\text{out}}$ and $L = \text{const.}$, the external loading case $\sigma_{11} = 50\,\text{N/mm}^2$ is simulated. Application of the tensile stresses leads to oblate particle shapes perpendicular to the loading direction for small volume fractions. Increase of f shows more pronounced oblate-shaped particles as long as $f \leq 25\%$. For higher values of f, the effect of particle coalescence, which has been neglected here, might become relevant.

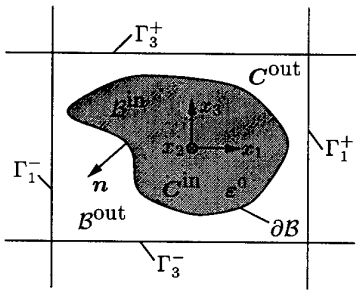


Figure 1: Unit cell

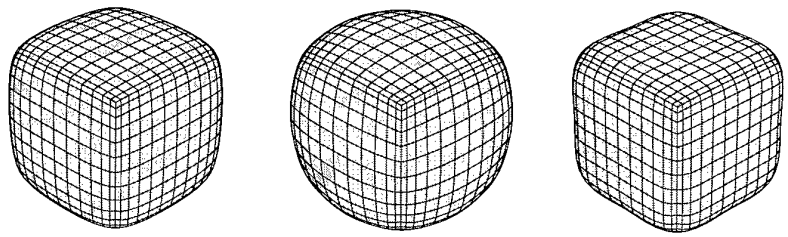


Figure 2: Equilibrium shapes for different f with $\boldsymbol{C}^{\text{in}} = \boldsymbol{C}^{\text{out}}$ and $L = 9$

4. References

1 Gurtin, M.E.: The Nature of Configurational Forces. Arch. Rational Mech. Anal. **13** (1995), 67–100

2 Brebbia, C.; Telles, J.F.C.: Boundary Element Techniques. Springer Verlag (1985)

3 Schclar, N.A.: Anisotropic Analysis using Boundary Elements. Vol. 20 of Topics in Engineering. Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA (1994)

4 Mueller, R.; Gross, D.: 3D Simulation of Equilibrium Morphologies of Precipitates. Comp. Mat. Science **11** (1998), 35–44

5 Schmidt, I.; Gross, D.: The Equilibrium Shape of an Elastically Inhomogeneous Inclusion. J. Mech. Phys. Solids **45(9)** (1997), 1521-1549

Address: Dipl.-Ing. Steffen Eckert, Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross, Dipl.-Ing. Ralf Mueller, Institut für Mechanik, TU-Darmstadt, Hochschulstr. 1, 64289 Darmstadt, Germany

EHLERS, W.; MARKERT, B.

Modelling of Open and Closed Cellular Foams

Porous foamed materials, like synthetic sponges and polymer or metal foams, are of great interest in all fields of engineering. The cellular micro structure gives these types of materials their outstanding mechanical characteristics. However, this complex structure demands for an appropriate model for the description at a suitable means of computational costs. The goal of this paper is to present an efficient continuum model based on the Theory of Porous Media (TPM) accounting for the porous cell structure and the occuring effects at large deformations. To set an example, the model is extended by a finite viscoelasticity law to describe the behaviour of even viscoelastic polymer foams.

1. Governing Equations

In the framework of the Theory of Porous Media (TPM), a fluid-filled cellular solid foam can be treated as an immiscible mixture of constituents φ^α ($\alpha = S$: solid skeleton; $\alpha = F$: pore-fluid). Based on the assumption of superimposed continua, the constituents are averaged over a representative elementary volume (REV) occupied by the whole mixture (homogenized model). In the biphasic macro model, the local structure of the mixture is represented by scalar variables, the volume fractions n^α. Thus, to avoid any vacant space, the saturation constraint $n^S + n^F = 1$ is assumed. For more details on the TPM approach, the reader is referred to *Bowen* [1] and *Ehlers* [2,3].

For the numerical treatment of the problem within the finite element method (FEM), weak forms of the governing field equations, i. e. the mixture balance of momentum and the fluid balance of mass, are required. Therefore, after eliminating the seepage velocity by use of the *Darcy* filter law, the balance relations weighted by independent test functions and integrated over the spatial domain Ω with surface $\partial\Omega$ result in the respective weak formulations $\mathcal{G}_{\mathrm{MM}}$ and $\mathcal{G}_{\mathrm{MF}}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\mathrm{MM}} \;\equiv\; & \int_\Omega \operatorname{grad}\delta\mathbf{u}_S \cdot (\mathbf{T}_E^S - p\,\mathbf{I})\,\mathrm{d}v \\
& - \int_\Omega \delta\mathbf{u}_S \cdot (\rho^S + \rho^F)\,\mathbf{b}\,\mathrm{d}v \\
& - \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}_S \cdot \bar{\mathbf{t}}\,\mathrm{d}a \;=\; 0\,, \\
\mathcal{G}_{\mathrm{MF}} \;\equiv\; & \int_\Omega \delta p \left[n^F\,(\rho^{FR})'_S + \rho^{FR} \operatorname{div}(\mathbf{u}_S)'_S \right] \mathrm{d}v \\
& + \int_\Omega \operatorname{grad}\delta p \cdot \left[\frac{K^S}{\mu^{FR}}\,\rho^{FR} \left(\operatorname{grad} p - \rho^{FR}\mathbf{b} \right) \right] \mathrm{d}v \\
& + \int_{\partial\Omega} \delta p\,\bar{q}\,\mathrm{d}a \;=\; 0\,.
\end{aligned}
$$

Herein, $\delta\mathbf{u}_S$ and δp are the test functions corresponding to the solid displacement $\mathbf{u}_S$ and the pore pressure p, $\bar{\mathbf{t}} = (\mathbf{T}_E^S - p\,\mathbf{I})\,\mathbf{n}$ is the external load vector acting on both constituents, where $\mathbf{T}_E^S$ is the solid Cauchy extra (effective) stress, $\mathbf{I}$ is the identity tensor, and $\mathbf{n}$ is the outward oriented unit surface normal. Furthermore, $\bar{q} = n^F \rho^{FR}\,\mathbf{w}_F \cdot \mathbf{n}$ denotes the filter mass flow of the fluid draining through the surface $\partial\Omega$, $\mathbf{b}$ is the body force density, ρ^S and ρ^F are the partial densities, and μ^{FR} is the fluid viscosity. In this representation, the pore-fluid can either be compressible, i. e. the effective (material) fluid density is a function of the pore pressure, $\rho^{FR} = \rho^{FR}(p)$, or incompressible, i. e. $\rho^{FR} = \text{const.}$, whereas the cellular solid skeleton is assumed to be materially incompressible, i. e. $\rho^{SR} = \text{const.}$ Moreover, the intrinsic permeability K^S depends on the deformation state and is assumed to be a function of the actual porosity. Therefore, K^S governs the property of an open-cell, i. e. permeable ($K^S > 0$), or a closed-cell, i. e. impermeable ($K^S \to 0$), structure.

2. Finite Viscoelasticity Law

To describe the intrinsic dissipative phenomena of a polymeric, cellular matrix, e. g. polyurethane (PU), an adequate viscoelastic material formulation is required including the property of structural hardening towards the point of compaction. In the framework of a finite deformation theory of materials with elastic and inelastic (here: viscous)

behaviour, we proceed from a multiplicative split of the solid deformation gradient $\mathbf{F}_S = (\mathbf{F}_{Se})_n\,(\mathbf{F}_{Si})_n$ into elastic parts $(\mathbf{F}_{Se})_n$ and inelastic parts $(\mathbf{F}_{Si})_n$ (Fig. 1). Furthermore, from thermodynamics with internal state variables and rheological considerations [4], one obtains the ansatz of a decomposed solid *Helmholtz* free energy density and a decomposed solid extra stress,

$$\psi^S[\mathbf{F}_S, (\mathbf{F}_{Se})_n] = \psi^S_{EQ}[\mathbf{F}_S] + \psi^S_{NEQ}[(\mathbf{F}_{Se})_n]\,,$$

$$\boldsymbol{\tau}^S_E[\mathbf{F}_S, (\mathbf{F}_{Se})_n] = \boldsymbol{\tau}^S_{EQ}[\mathbf{F}_S] + \boldsymbol{\tau}^S_{NEQ}[(\mathbf{F}_{Se})_n]\,,$$

into equilibrium parts (Index *EQ*) and non-equilibrium parts (Index *NEQ*) vanishing in the thermodynamic equilibrium. Note that the *Kirchhoff* extra stress is a weighted *Cauchy* stress ($\boldsymbol{\tau}^S_E = J_S\,\mathbf{T}^S_E$).

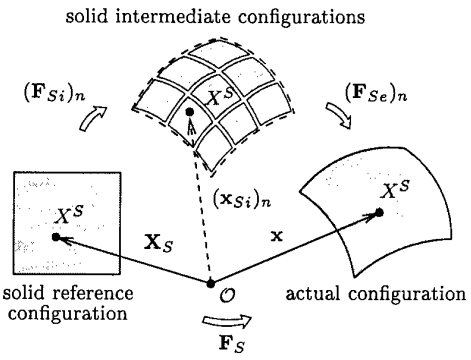


Fig. 1. Solid configurations.

The solid extra stresses are determined from hyperelastic *Neo-Hookean* type strain energy functions which imply the structural point of compaction. Thus,

$$\boldsymbol{\tau}^S_{EQ}[\mathbf{F}_S] = \mu^S_0\,(\mathbf{B}_S - \mathbf{I}) + \lambda^S_0\,(1 - n^S_{0S})^2 \left(\frac{J_S}{1 - n^S_{0S}} - \frac{J_S}{J_S - n^S_{0S}}\right)\mathbf{I}\,,$$

$$\boldsymbol{\tau}^S_{NEQ}[(\mathbf{F}_{Se})_n] = \sum_{n=1}^{N}\left[\mu^S_n\left[(\mathbf{B}_{Se})_n - \mathbf{I}\right] + \lambda^S_n\left[1 - (n^S_i)_n\right]^2\left(\frac{(J_{Se})_n}{1 - (n^S_i)_n} - \frac{(J_{Se})_n}{(J_{Se})_n - (n^S_i)_n}\right)\mathbf{I}\right].$$

Therein, $J_S = \det\mathbf{F}_S$ and $(J_{Se})_n = \det(\mathbf{F}_{Se})_n$ are the *Jacobian* determinants, $\mathbf{B}_S = \mathbf{F}_S\,\mathbf{F}^T_S$ and $(\mathbf{B}_{Se})_n = (\mathbf{F}_{Se})_n\,(\mathbf{F}^T_{Se})_n$ are the left *Cauchy-Green* deformation tensors, n^S_{0S} is the initial solidity and $(n^S_i)_n = n^S_{0S}\,\det(\mathbf{F}_{Si})^{-1}_n$ are the inelastic solid volume fractions with respect to the intermediate configuration. The *Lamé* constants μ^S_0, λ^S_0 and μ^S_n, λ^S_n are macroscopic parameters of the solid skeleton structure and not of the microscopic skeleton material itself. The inelastic strains as internal state variables are obtained from linear evolution equations formulated with respect to the intermediate configuration, since i. e. the actual configuration of the viscous deformation:

$$(\hat{\mathbf{D}}_{Si})_n = \overset{4}{\hat{\mathbf{D}}}{}^{-1}_n\,(\hat{\boldsymbol{\tau}}^S_{NEQ})_n\,, \qquad \overset{4}{\hat{\mathbf{D}}}{}^{-1}_n = \frac{1}{2\eta^S_n}\,(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})^{\overset{23}{T}} - \frac{\zeta^S_n}{2\eta^S_n\,(2\eta^S_n + 3\zeta^S_n)}\,(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})\,.$$

Therein, $(\hat{\mathbf{D}}_{Si})_n$ are the inelastic solid deformation rates, $\overset{4}{\hat{\mathbf{D}}}{}^{-1}_n$ are the positive definite, isotropic fourth order viscosity tensors, where η^S_n and ζ^S_n are the viscosity parameters, and $(\hat{\boldsymbol{\tau}}^S_{NEQ})_n = (\mathbf{F}_{Se})^{-1}_n\,(\boldsymbol{\tau}^S_{NEQ})_n\,(\mathbf{F}_{Se})^{T-1}_n$ are the respective non-equilibrium stress tensors. The topscript $(\hat{\cdot})$ indicates the belonging to the intermediate configuration.

3. Applications

The presented biphasic viscoelastic model based on the TPM is capable to describe any biphasic cellular foam with elastic or viscoelastic solid skeleton, where the overall cell structure can either be permeable (open-cell) or impermeable (closed-cell). Moreover, the pore-fluid can either be compressible or incompressible. Therefore, there is a wide range of applications from liquid-saturated synthetic sponges to gas filled polymeric foams (Fig. 2).

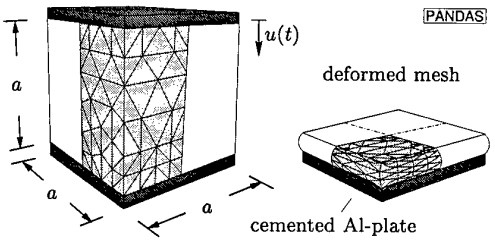


Fig. 2. Simulated displacement driven compression experiment on open-cell PU-foam ($u_{max}/a = 86\,\%$).

4. References

1 Bowen, R. M.: Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. Int. J. Engng. Sci. **18** (1980), 1129-1148.

2 Ehlers, W.: Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie. Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen **47**, Universität Essen, 1989.

3 Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie poröser Medien. Technische Mechanik **16** (1996), 63-76.

4 Reese, S.; Govindjee, S.: A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. Int. J. Solids Structures **35** (1998), 3455-3482.

Addresses: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Ehlers, Dipl.-Ing. Bernd Markert, University of Stuttgart, Institute of Applied Mechanics (Civil Engineering) Chair II, Pfaffenwaldring 7, D-70569 Stuttgart, Germany.

B. GAMPERT, T. BRÄMER UND T. EICH

Experimentelle Untersuchungen zur Orientierung von Makromolekülen in turbulenten Kanalströmungen viskoelastischer Fluide

In dieser Arbeit wurden strömungsmechanische und rheooptische Experimente an viskoelastischen Flüssigkeiten in der vollausgebildeten turbulenten Kanalströmung durchgeführt. Dabei wurden das Turbulenzverhalten und die Orientierung der Makromoleküle in der Strömung mit Hilfe der Laser-Doppler-Anemometrie für Lösungsmittel-Reynoldszahlen von 10.000 bis 50.000 untersucht. Es zeigte sich, daß die Orientierung der Makromoleküle sehr stark durch die Parameter Lösungsstruktur und mechanische Beanspruchung charakterisiert ist und insbesonders dort erfolgt, wo das Turbulenzverhalten im Vergleich zu Newtonschen Fluiden besonders stark verändert ist.

1. Einleitung

Viskoelastische Flüssigkeiten wie z.B. Polymerlösungen, zeigen im Vergleich zu Newtonschen Flüssigkeiten deutlich veränderte Turbulenzeigenschaften (siehe z. B. [1]).Erklärungsansätze gehen davon aus, dass diese unter anderem auf die Streckung und Orientierung der Makromoleküle in wandnahen Scher- und Dehnfeldern zurückzuführen sind. In der vorliegenden Arbeit wird im Zusammenhang mit dieser Hypothese die Lichtintensität zufolge strömungsinduzierter Doppelbrechung bei turbulenter Kanalströmung wässriger Polymerlösungen vermessen. Es stellte sich die Frage, in wieweit die veränderten Turbulenzeigenschaften mit der Orientierung der Makromoleküle in der turbulenten Kanalströmung korrelieren.

2. Versuchsdurchführung

Die Untersuchungen zum Turbulenzverhalten und die rheooptischen Experimente wurden in in einem quadratischen Kanal, der im Kreislaufverfahren betrieben wurde (siehe [3]) und einen hydraulischen Durchmesser d_h=19 mm aufwies im Bereich der vollausgebildeten Strömung stromab im Abstand von 128 hydraulischen Durchmessern durchgeführt. Als Meßsystem wurde für die fluiddynamischen Experimente ein Zweikomponenten Laser-Doppler-Anemometer und für die rheooptischen Experimente ein Helium-Neon-Laser verwendet.

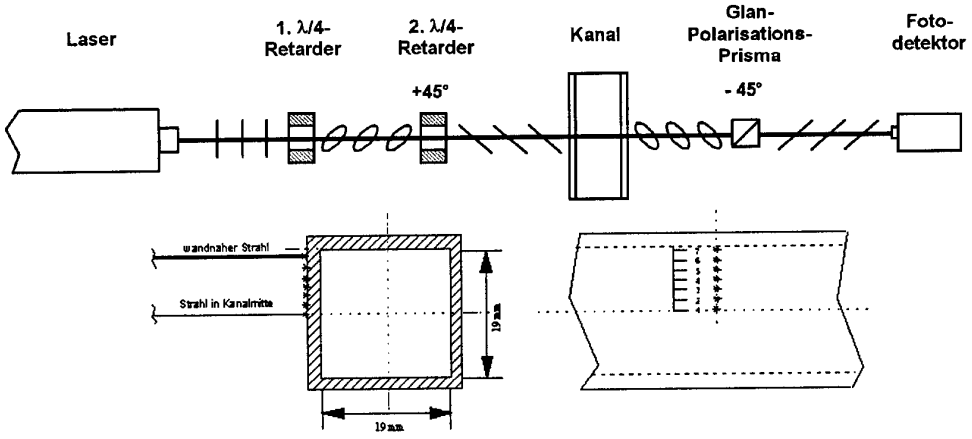


Abbildung 1: Rheooptischer Versuchsaufbau

Als Polymer wurde das technische nicht-ionogene Polyacrylamid Praestol 2300 der Firma Stockhausen eingesetzt [4].Das mittlere Molekulargewicht beträgt laut Herstellerangaben 5-10$\times 10^6$ g/mol. Als Lösungsmittel wurde Leitungswasser mit einer durchschnittlichen Leitfähigkeit von $\kappa = 550$ μS/cm verwendet. Auf der Basis strukturrheologischer Überlegungen konnte die Grenze zwischen verdünnten und konzentrierten Lösungssystemen in Ruhe bei einer Konzentration von etwa c =700 wppm angegeben werden.

3. Ergebnisse und Diskussion

In Abbildung 2 ist die Wandschubspannung τ_w in Abhängigkeit von der Konzentration c für Praestol 2300 gelöst in Leitungswasser für die Lösungsmittel Reynoldszahl von 40.000 dargestellt. Mit steigender Konzentration c nimmt die Wandschubspannung τ_w im verdünnten Bereich deutlich ab, während die Werte im konzentrierten Bereich etwa konstant sind.

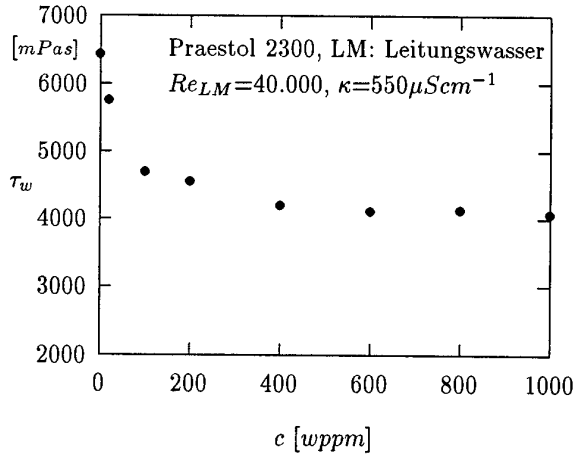


Abbildung 2: Wandschubspannung.

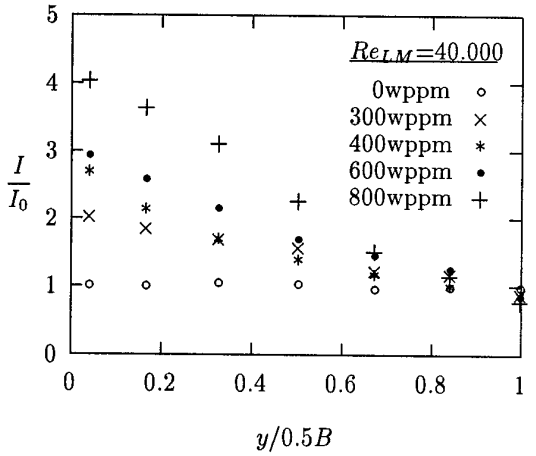


Abbildung 3: Doppelbrechungssignale.

In Abbildung 3 sind die Intensitätsmaxima I der Doppelbrechungssignale normiert auf das Nullsignal in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstandes für die Reynoldszahl Re=40.000 und verschiedene Lösungszustände dargestellt. Es lassen sich zwei charakteristische Bereiche im Strömungsfeld feststellen. Ausgehend von der signalschwachen Kanalmitte, nehmen die Lichtintensitätsmaxima der Doppelbrechungssignale in Richtung des wandnahen Bereichs zu. Dies kann auf die Ausrichtung und Streckung der Makromoleküle durch die Wirkung von Scher- und vor allem Dehnfeldern zurückgeführt werden. Der Einfluß der Polymere auf die durch Doppelbrechung hervorgerufene Signalintensitätsänderung ist in unmittelbarer Wandnähe am größten. Im Vergleich zu hochverdünnten Partikellösungen sind die Lichtintensitätswerte in Wandnähe für höher konzentrierte Polymerlösungen größer. Dieses kann auf die große Anzahl ausgerichteter Makromoleküle zurückgeführt werden. Für die Polymerlösung mit der Konzentration c=800 wppm ist eine überproportionale Zunahme der Lichtintensitätsmaxima erkennbar.

Die fluiddynamischen und rheooptischen Untersuchungen haben gezeigt, dass im wandnahen Bereich in Abhängigkeit von der Lösungsstruktur erhöhte Lichtintensitätswerte detektiert werden konnten und unterstützen daher die These, dass dort eine Streckung und Ausrichtung der Polymermoleküle stattfindet. Weiterhin ist zu erwarten, dass diese Orientierung der Makromoleküle Einfluss auf die veränderten Turbulenzeigenschaften hat.

Danksagung

Die Verfasser danken der Universität Essen für die Unterstützung dieser Arbeit.

4. Literatur

1 Gampert, B. und Rensch, A.: Polymer Concentration and Near Wall Turbulence Structure of Channel Flow of Polymer Solutions; Proc. of the ASME FED Summer Meeting 1996, San Diego, FED-Vol. 237, 129–136.

2 Eich, T.: Elastische Eigenschaften hochverdünnter Polymerlösungen; Fortschr.-Ber. VDI Reihe 7; 2000.

3 Gampert, B.; Hahn, H. und Brämer, T: Auffälligkeiten im Turbulenzverhalten viskoelastischer Einlaufströmungen, erscheint in der ZAMM, GAMM 1999.

4 Chemische Fabrik Stockhausen: Übersichtstabelle zur Charakterisierung der Praestol-Marken; Krefeld.

Adresse: Prof. Dr.-Ing. B. Gampert, Dipl.-Ing T. Brämer und Dr.-Ing. T. Eich, Universität Essen, Angewandte Mechanik, Schützenbahn 70, D-45127 Essen, e-mail: bernhard.gampert@uni-essen.de, thomas.braemer@uni-essen.de und t.eich@t-online.de

B. Gampert, C. Wilkes und T. Eich

Dehnströmungen hochverdünnter viskoelastischer Fluide

Es werden in dieser Arbeit experimentelle Untersuchungsergebnisse der Fließeigenschaften von viskoelastischen Fluiden in Dehnfeldern vorgestellt. Die rheo-optischen Untersuchungen wurden mit dem kommerziellen anionischen Polyacrylamid Sedipur AF 701 sowie einem selbst polymerisierten hochreinen nicht-ionischen Polyacrylamid mit einer relativ engen Molekulargewichtsverteilung durchgeführt.

1. Einleitung

Flexible Polymere mit einer hohen molaren Masse können nach Frank und Mackley[3] in einem Strömungsfeld theoretisch voll gestreckt vorliegen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Dehnkomponente der Strömung im Vergleich zur Rotationskomponente dominant ist. In der Literatur wird diskutiert, daß die Deformation der Ketten in einem Dehnströmungsfeld mit kontinuierlich steigender Dehnrate plötzlich beginnt, de Gennes[1], Hinch[5], Peterlin[7]. Ab einer kritischen Dehnrate gehen die Ketten von einem leicht verformten zufälligen in einen nahezu voll gestreckten Zustand über.

Die strömungsinduzierte Deformation flexibler Polymerketten in Lösung kann dann beobachtet werden, wenn die Ketten nahezu gestreckt vorliegen. Die Eigenschaften der Lösung sind dann anisotrop. Diese Anisotropie beinhaltet wichtige Informationen über den Zustand der Deformation und Orientierung der Makromoleküle in der Lösung. Die Strömungsdoppelbrechung stellt eine Möglichkeit dar, Rückschlüsse auf die Deformation und Orientierung zu ziehen.

Zur Bestimmung der Dehnviskosität hochverdünnter Polymerlösungen wurde ein Dehnrheomat entwickelt der nach dem Prinzip der Staupunktströmung arbeitet, Eich[2]. Der Meßaufbau ermöglicht es, die planare Dehnviskosität als Funktion der Dehnrate nach dem bekannten Prinzip der Gegenstrahlen, Fuller et al.[4], Keller und Odell[6], für vergleichsweise hohe Dehnraten bis etwa $\dot{\epsilon} = 4000$ 1/s aufzunehmen.

Zur Bestimmung der Orientierung und Deformation der Makromoleküle in der Lösung wird simultan die Lichtintensität, die durch Doppelbrechung an den gestreckten Polymeren im Strömungsfeld entsteht, gemessen. Der schematische Aufbau der Versuchsanlage ist in Bild 1 dargestellt.

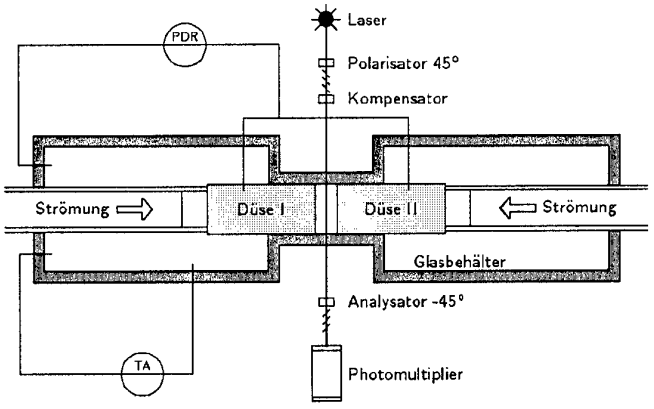


Bild 1: Schematische Darstellung des Dehnrheomaten nach dem Prinzip der Staupunktströmung

2. Ergebnisse und Diskussion

Die Untersuchungen wurden mit dem kommerziellen Polyacrylamid Sedipur AF 701 der Firma BASF AG und dem selbst polymerisierten Polyacrylamid PAA-T19 durchgeführt. Sedipur AF 701 ist zu 70% teilverseift und anionisch. Die mittlere Molmasse beträgt laut Herstellerangaben $\bar{M}_w \approx 14 \cdot 10^6$g/mol. Sedipur AF 701 wurde in mit 0.2 mol/l NaCl versetztem Reinstwasser gelöst. Der Überlappungsparameter $c_p[\eta]$ für das Polymer-Lösungsmittel-System beträgt bei $c_p = 0.004$ g/l $c_p[\eta] = 0.02$. Das Polymer PAA-T19 ist hochrein, nicht-ionogen und hat eine mittlere

Molmasse von $\bar{M}_w \approx 5.6 \cdot 10^6$ g/mol wobei die Dispersität $\delta = 1.9$ beträgt. Das PAA-T19 wurde in Reinstwasser gelöst und der Überlappungsparameter bei $c_p = 0.250$ g/l zu $c_p[\eta] = 0.31$ ermittelt.

Das Bild 2 zeigt die Trouton-Zahl als Funktion der Dehnrate für wässerige Lösungen von Sedipur AF 701 mit einer Polymerkonzentration von 0.004 g/l und von PAA-T19 mit einer Konzentration von 0.250 g/l. Die Scherviskosität der Sedipur AF 701 Lösung hat für $\dot{\gamma} < 100$ 1/s den Wert $\eta_s = 0.9$ mPas und für die PAA-T19 Lösung den Wert $\eta_s = 1.1$ mPas. Die Scherviskositäten der beiden Lösungen sind im Vergleich zum Wasserwert nur leicht erhöht und können als konstant angenommen werden. Die Trouton-Zahl für die Sedipur AF 701 Lösung steigt zwischen $\dot{\varepsilon} = 500$ 1/s und $\dot{\varepsilon} = 3500$ 1/s von etwa $Tr = 7$ auf etwa $Tr = 24$ an. Zwischen $\dot{\varepsilon} = 0$ und 500 1/s liegen keine Meßdaten vor. In diesem Bereich sollte die Trouton-Zahl jedoch noch weiter bis auf $Tr = 4$ absinken, da dies dem theoretischen Grenzwert für $\dot{\varepsilon} \to 0$ der planarer Dehnung entspricht.

Im untersuchten Dehnratenbereich $500 \leq \dot{\varepsilon} \leq 4000$ 1/s liegen die Trouton-Zahlen für die PAA-T19 Lösung zwischen 4 und 29. Für $\dot{\varepsilon} < 1600$ 1/s streuen die Meßergebnisse in einem Bereich von $Tr \approx 4$ und sind unabhängig von der Dehnrate. Mit einer Dehnrate von $\dot{\varepsilon} > 1600$ 1/s steigt die Trouton-Zahl plötzlich deutlich mit der Dehnrate an und erreicht bei $\dot{\varepsilon} = 4000$ 1/s den Wert von $Tr = 29$. Der Anstieg der Trouton-Zahlen in Abhängigkeit der Dehnrate ist kennzeichnend für Lösungen mit ausgeprägten elastischen Eigenschaften.

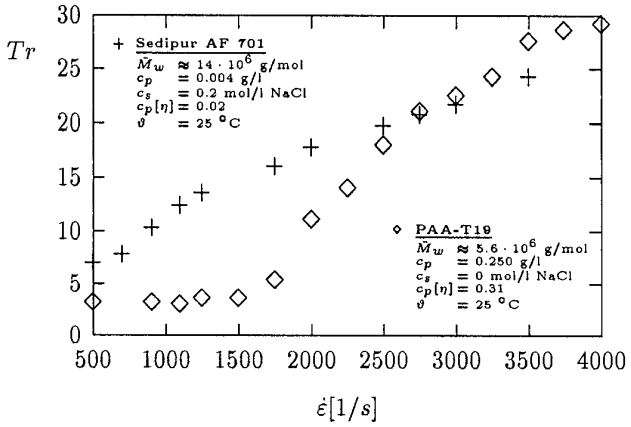


Bild 2: Trouton-Zahl in Abhängigkeit der Dehnrate für eine Sedipur AF 701 und eine PAA-T19 Polymerlösung

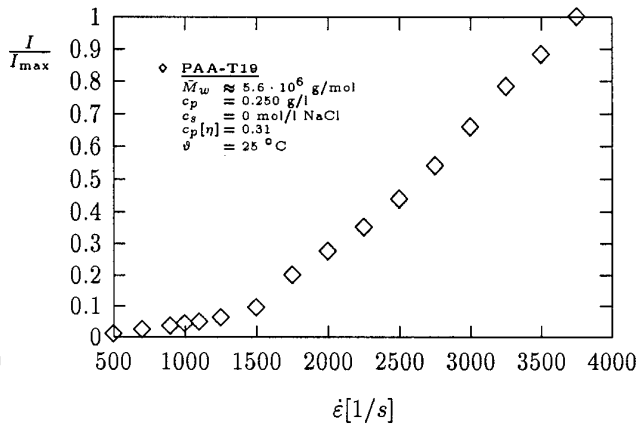


Bild 3: Lichtintensität als Funktion der Dehnrate für eine PAA-T19 Polymerlösung

In Bild 3 ist die Lichtintensität I bezogen auf die maximale Lichtintensität I_{max} als Funktion der Dehnrate dargestellt. Die Lichtintensitätsänderung ist die Folge des Doppelbrechungseffekts der gestreckten Polymere. Die Messungen wurden mit dem nicht-ionogenen Polyacrylamid PAA-T19 durchgeführt. Die Polymerkonzentration beträgt wie in Bild 2 0.250 g/l. Es läßt sich erkennen, daß die Werte für die dimensionslose Lichtintensität I/I_{max} im Dehnratenbereich $\dot{\varepsilon} < 1500$ 1/s von 0 auf 0.1 ansteigen. Ab der Dehnrate $\dot{\varepsilon} = 1500$ 1/s erfolgt ein sehr starker Anstieg der Lichtintensität mit zunehmender Dehnrate.

Die Doppelbrechungssignale weisen darauf hin, daß sich in dem strömenden Fluid eine Struktur ausbildet, die sich mit steigender Dehnrate weiter ausprägt. So werden wahrscheinlich die Polymermoleküle zunächst gestreckt und dann mit steigender Dehnrate immer weiter in Strömungsrichtung ausgerichtet. Dabei könnte die schwache Zunahme von I/I_{max} für $\dot{\varepsilon} < \dot{\varepsilon}^*$ mit der Streckung und die starke im wesentlichen mit der Ausrichtung der Moleküle zusammenhängen.

3. Referenzen

1 DE GENNES, P.G.: Journal of Chemical Physics. **60** (1974), 5030-5042.
2 EICH, T.: Elastische Eigenschaften hochverdünnter Polymerlösungen. Dissertation, Universität Essen (1999).
3 FRANK, F., MACKLEY, M.: Journal of Polymer Science. **14** (1976), 1121-1127.
4 FULLER, G.G., CATHEY, C.A., HUBBARD, B., ZEBROWSKI, B.E.: Journal of Rheology. **31** (1987), 235-249.
5 HINCH, E.J.: Physics of Fluids. **20** (1977), s22-s30.
6 KELLER, A., ODELL, J.A.: Colloid & Polymer Science. **263** (1985), 181-201.
7 PETERLIN, A.J.: Polymer Science (B). **4** (1966), 287-293.

Adresse: PROF. DR.-ING. B. GAMPERT, Universität Essen, Angewandte Mechanik, Schützenbahn 70, 45127 Essen, e-mail: bernhard.gampert@uni-essen.de

GAWINECKI J. A., KACPRZYK P.

The initial-boundary value problem in nonlinear system of equations of microelasticity theory

The aim of this paper is to prove the theorem about existence, uniqueness and regularity of the solution to the initial-boundary value problem for a linearized system of equations of the microelasticity theory associated to the non-linear one. Such a system of equations describes the microelastic medium in the three dimensional space. In our proof we used the method of semigroup theory and the method of Sobolev spaces.

1. Introduction

We consider the non-linear hyperbolic system of six partial differential equations of second order describing the microelastic medium in the three – dimensional space:

$$\partial_t^2 u_i - c_{i\alpha j\beta}(\nabla u, \nabla\varphi)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \alpha_{ij}(\nabla u, \nabla\varphi)\varepsilon_{jlk}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_l} = f_i \tag{1.1}$$

$$\partial_t^2 \varphi_i - d_{i\alpha j\beta}(\nabla u, \nabla\varphi)\frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \bar{\alpha}_{ij}(\nabla u, \nabla\varphi)\varphi_j - \alpha_{ij}(\nabla u, \nabla\varphi)\varepsilon_{jlk}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = Y_i, \quad i = 1,2,3 \tag{1.2}$$

where: $u = u(t,x) = (u_1(t,x),\ u_2(t,x),\ u_3(t,x))^*$ — is the displacement vector of the medium, $\varphi = \varphi(t,x) = (\varphi_1(t,x), \varphi_2(t,x), \varphi_3(t,x))^*$ — is the microrotation vector, depending on $t \in \mathbb{R}_0^+$ and $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — being a bounded domain with $\partial\Omega$ smooth enough, $\nabla u = (\partial_1 u, \partial_2 u, \partial_3 u)$, $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \partial_2\varphi, \partial_3\varphi)$ — are the spatial gradients of the functions u, φ respectively, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,2,3$, $c_{i\alpha j\beta}(\cdot)$, $d_{i\alpha j\beta}$, $\alpha_{ij}(\cdot)$, $\bar{\alpha}_{ij}(\cdot)$ — are the nonlinear coefficients depending on the gradients of unknown functions;

$f = f(t,x) = (f_1(t,x), f_2(t,x), f_3(t,x))^*$ — is the body force vector,
$Y = Y(t,x) = (Y_1(t,x), Y_2(t,x), Y_3(t,x))^*$ — is the body couple vector, the symbol ε_{ijk} is defined as follows

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{when the permutation of the indices } i,j,k \text{ is even} \\ -1 & \text{when the permutation of the indices } i,j,k \text{ is odd} \end{cases} \qquad i,j,k = 1,2,3$$

with the following initial conditions:

$$u(0,x) = u^0(x), (\partial_t u)(0,x) = u^1(x) \qquad \varphi(0,x) = \varphi^0(x), (\partial_t\varphi)(0,x) = \varphi^1(x)$$

where: $u^0, u^1, \varphi^0, \varphi^1$ — are given data and with boundary condition:

$$u(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \varphi(t,\cdot)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.4}$$

Putting in the system (1.1), (1.2)

$$c_{i\alpha j\beta} = \mu\delta_{\alpha\beta} + (\lambda+\mu)\delta_{ij}, \qquad \alpha_{ij}(\cdot) = 2\alpha$$

$$\bar{\alpha}_{ij}(\cdot) = 4\alpha, \qquad d_{i\alpha j\beta} = (r+\varepsilon)\delta_{\alpha\beta} + (\beta+\gamma-\varepsilon)\delta_{ij}$$

we obtain from (1.1) ÷ (1.4) the linear hyperbolic system with constant coefficients describing the microelastic medium.

2. The main theorem

Now, we formulate the main theorem about the local existence (in time) solution to the initial-boundary value problem to the nonlinear system (1.1) ÷ (1.2).

Theorem 1. *(Local existence) Let the following conditions be satisfied:*

1) $s \geq [\frac{3}{2}] + 4 = 5$ — *is an arbitrary but fixed integer*

2) $\partial_t^k f_i, \partial_t^k Y_i \in C^0([0,T]H^{s-2-k}(\Omega))$ $k = 1, 2, \ldots, s-2$, $\partial_t^{s-1} f_i$, $\partial_t^{s-1} Y_i \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$

3) there are the constants $k_1, k_2 > 0$ *such that* $(c_{\alpha\beta}\eta|\eta)\xi_\alpha\xi_\beta \geq k_1|\eta|^2|\xi|^2$ $(d_{\alpha\beta}|\eta|)\xi_\alpha\xi_\beta \geq k_2|\eta|^2|\xi|^2$ *where:* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$ *and* $c_{\alpha\beta} = [c_{i\alpha j\beta}]$ $i,j = 1,2,3$, $d_{\alpha\beta} = [d_{i\alpha j\beta}]$ $i,j = 1,2,3$ $\alpha_{ij}, c_{i\alpha j\beta}, d_{i\alpha j\beta} \in C^{s-1}(\mathbb{R}^9)$
$c_{i\alpha j\beta} = c_{j\alpha i\beta} = c_{i\alpha\beta j} = c_{j\beta i\alpha}$ $d_{i\alpha j\beta} = d_{j\alpha i\beta} = d_{i\alpha\beta j} = d_{j\beta i\alpha}$

4) The initial data $u^0, \varphi^0, u^1, \varphi^1$ *shall satisfy* $u^0, \varphi^0 \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $u^1, \varphi^1 \in H^{s-1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *for* $x \in \Omega$ *and the compatibility conditions:* $u^k \in H^{s-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $2 \leq k \leq s-1$, $\varphi^k \in H^{s-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

Then for sufficiently small $T > 0$ there exists a unique solution (u, φ) to the initial-boundary value problem (1.1) ÷ (1.4) with the properties:

$$u \in \bigcap_{k=1}^{s-1} C^k([0,T],\ H^{s-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

$$\varphi \in \bigcap_{k=1}^{s-1} C^k([0,T],\ H^{s-k}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$$

$$\partial_t^s u \in C^0([0,T],\ L^2(\Omega)), \qquad \partial_t^s \varphi \in C^0([0,T],\ L^2(\Omega))$$

Sketch of proof: The proof of this theorem is based on energy estimate for the linearized system of equation associated with (1.1), (1.2) and the application of the Banach fixed point theorem for nonlinear system of equations (1.1), (1.2).

3. References

1 Adams R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York 1975.
2 Agmon I. A.: Lecture on elliptic boundary-value problem. Van Nostrand, Princeton 1965.
3 Dafermos C. T., Hrusa W. J.: Energy method for quasilinear hyperbolic initial boundary-value problem. Arch. Rat. Mech. Anl. 87 (1985), 267–292.
4 Gawinecki J., Sierpiński K.: Existence, uniqueness and regularity of the solution of the first boundary initial value problem for the equations of thermodiffusion in solid body. Bull. Acad. Polon. Sci. Tech., **30**, 1-12 (1982), 163–171.
5 Gawinecki J. Kacprzyk P.: Existence, uniqueness and regularity of the solution of the first boundary initial value problem for the equations of thermodiffusion in micropolar medium. Bull. acad. Polon. Acad. Sci. Sier. Techn., **42**, 3 (1994), 341–359.
6 Kato T.: Abstract differential equations and nonlinear mixed problems. Center for Pure and Appl. Math. Report. University of California, Berkeley, Published in Fermi Lectures. Scola Normale sup. Pisa 1985.
7 Kawashima S.: Systems of hyperbolic–parabolic composite type, with applications to the equations of magnetohydrodynamic. Kyoto University, Thesis 1983.
8 Kawashima S. and Matsumura M.: Mixed problems for symmetric hyperbolic-parabolic systems. manuscript 1989.
9 Kawashima S., Yanagisawa T. and Shizuta Y.: Mixed problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems. Pro. Japan, Acad. Ser. A., 63 (1987), 243–241.
10 Li D.: The nonlinear initial-boundary value problem and the existence of multi-dimensional shock wave for quasilinear hyperbolic-parabolic coupled systems. Chin Ann. Math., 8B(2) (1987), 252–280.
11 Milani A. J.: A requlority result for strongly elliptic systems. Bull. de Uni. Math. Itali. Ser., 2B (6) (1983), 641–651.
12 Nowacki W.: Theory of asymmetric elasticity. Pol. Sci. Publ., Warszawa 1986.

Adresses: Prof. Dr hab. Sc.math J. A. Gawinecki; M. Sc. Math. P. Kacprzyk, Military University of Technology, Institute of Mathematics and Operations Research, Faculty of Cybernetics 00-908 Warsaw, Kaliskiego 2, Poland

GERLACH, S.; MATZENMILLER, A.; SIPPEL ,W.

Identification of retardation spectra by approximation theory

A numerical method is described which generates the discrete retardation spectrum from the response function of a static experiment. The identification of the retardation spectrum is a nonlinear optimization problem with non-negative constraints on the parameters. The algorithm presented solves the identification task in three steps by using the TSCHEBYSCHEFF*-approximation and the quadratic optimization method by* WOLFE. *An application to experimental data is given.*

1. Introduction

The retardation function J and the relaxation function G must be determined from experimental data for linear viscoelastic material with the following constitutive equations:

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(t-\tau)\,\sigma'(\tau)d\tau \qquad \sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-\tau)\,\epsilon'(\tau)d\tau \tag{1}$$

where ϵ' and σ' denote time derivatives of the strain and stress history. Especially the relaxation function is needed as the input data for the displacement formulation of the FE-method, if a boundary value problem with a viscoelastic material model should be analysed numerically. Due to the fact that usually only creep data is available from static experiment, a solution scheme has to be proposed, which determines the parameters for the retardation function form the given data by a creep experiment. Afterwards the retardation function must be interconverted into the relaxation function.
The scope of this paper is the fitting of the creep data with an appropriate retardation function. A finite Dirichlet–Prony serie is chosen for the characteristic material function, presenting well the linear viscoelastic behavior in general. In the case of the retardation function it corresponds to the generalized rheological model of Kelvin, for the relaxation function to the generalized Maxwell model.

$$J_N(t) = J_0 + \sum_{\nu=1}^{N} J_\nu \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_\nu}}\right) \qquad G_N(t) = G_0 + \sum_{\nu=1}^{N} G_\nu \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta_\nu}} \tag{2}$$

The unknown material parameters J_ν and τ_ν, denoting retardation coefficients and retardation times, represent the discrete retardation spectrum. For physically realistic materials these parameters are positive. Therefore, the fitting algorithm has to take into account these constraints ($J_\nu \geq 0$, $\tau_\nu \geq 0$).

2. Numerical method of the parameter identification

The identification of the retardation spectrum is a nonlinear optimization problem with non-negative constraints. The application of the discrete least square method leads to a set of nonlinear normal equations. They involve the difficulties that the convergence to the minimal solution and the compliances with the constraints is not guaranteed. The approximation task is divided into three substeps:

1. Approximation of the creep data by a qualified tendency function J_T in order to allow the approximation by the Dirichlet–Prony series by means of the TSCHEBYSCHEFF–method. Here, a power law ($J_T = \gamma\, t^\alpha$) is introduced as a tendency function for demonstration purposes.
2. TSCHEBYSCHEFF–approximation of the tendency function J_T by the model function J_N in eq. (2). With the maximum norm in the approximation of the function J_T the TSCHEBYSCHEFF–approximation is obtained, which converges to the minimal solution for a nonlinear exponential approximation [2]. By rearranging the TSCHEBYSCHEFF approach, a set of nonlinear equations is obtained:

$$J_N(t_\mu) + (-1)^\mu\, \lambda = J_T(t_\mu) \tag{3}$$

with J_N according to eq. 2a and unkowns J_0, J_ν, t_ν and λ for $\nu = 1, 2, \ldots, N$ and given N.

The solution of equation (3) leads to the error function $e = J_T - J_N$, which is an alternating function with absolute value λ at the time points t_1, t_2, t_3, ... as shown in figure 1. For the determination of this error function a system of nonlinear equations is solved by an iterative process, which needs starting values for the material parameters and a set of time points for the first alternating error function.

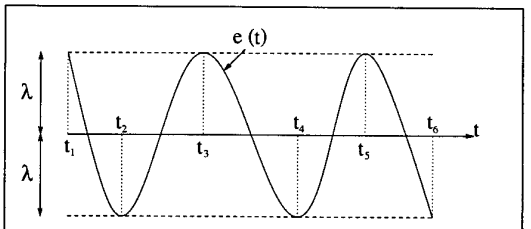


Fig.1: Error function after iteration method

3. Redetermination of the retardation coefficients by fitting the model function J_N to the creep data:
In consideration of the constraints and the calculated retardation times the retardation coefficients are fitted to the creep data with the least square method. The retardation times are kept the same as found in step 2. The inequality constraints are transformed into equations by introducing slack variables. By using the LAGRANGE multiplier method, the necessary condition for the minimal solution leads to a set of linear and simple nonlinear algebraic equations. This set can be solved by a modified simplex method (WOLFE's method - see [1]). The necessary objective function (6) of the simplex method is introduced by expanding the system of linear equations with artical variables $\mathbf{v}$ - see eq.(4), where $\mathbf{J}$ and $\mathbf{u}$ denote the vectors of the unkown retardation coefficients and the Lagrange multipliers.

The solution of the minimization task is found, if all artificial variables are equal to zero. The fulfillment of the nonlinear equation (5) is guaranteed by modifying the usual rules for the simplex method. In practise this means that at least one variable of the pair (u_0, J_0),(u_1, J_1) ... (u_N, J_N) is not allowed to be a basisvariable ($\neq 0$).

$$\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}\,\mathbf{J} - \frac{1}{2}\mathbf{u} + \mathbf{v} \qquad (4)$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}\mathbf{J} = 0 \qquad (5)$$

$$z = \sum_{k=0}^{N} v_k \rightarrow \text{Min. !} \qquad (6)$$

3. Example

The method presented is applied to creep data for a unidirectional composite. The left figure shows that the description of the experimental data with a power law is only a crude approximation, however, for the purpose of a tendency function it is adequate. The two other pictures show that an increasing number of exponential terms improve the approximation of the creep data.

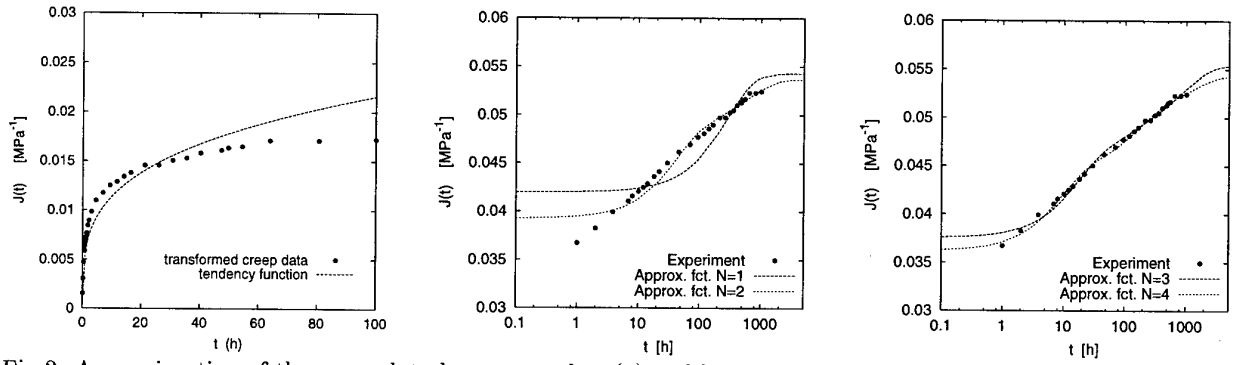


Fig.2: Approximation of the creep data by a power law (a) and by Dirichlet–Prony series with different number of exponentials $N = 1, 2, 3$ or 4 (b),(c)

4. References

1 BUNDAY, B.D.: Optimisation methods in PASCAL, Edward Arnold, 1987
2 KLEIN, U.: Optimale Bestimmung der Materialparameter für die die lineare Viskoelastizitätstheorie, Diplomarbeit 2, Institut für Mechanik, Universität Gh Kassel, 1999
3 MEINARDUS, G.: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer-Verlag, 1964
4 TSCHOEGL, N.W.: The Phenomenolgical Theory of Linear Viscoelastic Behavior, Springer-Verlag, 1989

Addresses: DIPL.-ING. SEBASTIAN GERLACH, PROF. DR.-ING. ANTON MATZENMILLER,
Institute of Mechanics, University Gh Kassel, 34109 Kassel, Germany
PROF.DR. WOLFGANG SIPPEL, Department of Mathematics, University Gh Kassel, 34109 Kassel

HERRMANN, K.P., MÜLLER, W.H., NEUMANN, S.

THE DISCRETE FOURIERTRANSFORMATION WITH APPLICATIONS TO COMPOSITES-AN ALTERNATIVE TO FINITE ELEMENTS?

The objective of our contribution is to present the discrete Fouriertransformation (*DFT*) as a serious alternative for the numerical computation of local stresses and strains in a two dimensional Representative Volume Element (*RVE*) containing heterogeneities of complex shape and high volume fractions. The methodology is based on the application of the so-called „equivalent inclusion method„ (Mura 1987). This method is used to devolve the original problem onto the determination of an auxiliary strain field which is related to the stresses by virtue of a spatially constant auxiliary stiffness tensor. The resulting Partial Differential Equations (*PDE*) are firstly approximated by difference schemes leading to a linear system of equations (*LSE*) to solve. Two different types of difference schemes for an approximation are presented, a 9-pixelstar which is well-known in this context and a new one which uses 21 pixel for the numerical approach in order to increase the quality of the numerical solution. In a second step the DFT has been used which allows to solve the LSE analytically, obtaining a functional relation for the auxiliary strain field. Finally the solution of this equation is determined approximately by virtue of a *Neumann* iteration procedure. Different heterogeneity problems are considered where the accuracy of both difference stars is checked by existing analytical solutions.

1. Discrete Fourier Transforms and Linear Elasticity Theory

Consider a periodically arranged array of representative volume elements (RVE), each of which is discretized by $N_1 \times N_2$ points at positions $\underline{x} = (\alpha_1 h_1, \alpha_2 h_2)$ in the physical space (c.f. Fig. 1). Let a set of discrete field variables, $f(\underline{\alpha})$, be defined by these points $\underline{\alpha}$. Then the DFT, $\hat{f}(\underline{s})$, of these quantities is defined as follows (cf., [2]):

$$\hat{f}(\underline{s}) = Y[f](\underline{s}) = (N_1 N_2)^{-1/2} \sum_{\alpha_1=0}^{N_1-1} \sum_{\alpha_2=0}^{N_2-1} f(\underline{\alpha}) \exp\left(\mathrm{i}\, 2\pi \left(\frac{\alpha_1 s_1}{N_1} + \frac{\alpha_2 s_2}{N_2} \right) \right) \tag{1}$$

If periodicity conditions hold true across the RVE, the corresponding quantities, $f(\underline{\alpha})$, in physical space can be obtained from $\hat{f}(\underline{s})$ as follows:

$$f(\underline{\alpha}) = Y^{-1}\left[\hat{f}\right](\underline{\alpha}) = (N_1 N_2)^{-1/2} \sum_{s_1=0}^{N_1-1} \sum_{s_2=0}^{N_2-1} \hat{f}(\underline{s}) \exp\left(-\mathrm{i}\, 2\pi \left(\frac{\alpha_1 s_1}{N_1} + \frac{\alpha_2 s_2}{N_2} \right) \right), \tag{2}$$

where $\underline{s} = (s_1, s_2)$ denotes the position vector in the Fourier space. Partial derivatives are approximated by difference quotients, this leads to differentiation rules of the following kind:

$$Y[f_{,j}] = -\mathrm{i}\,\xi_j Y[f] + O(h_j^4), \; Y[f_{,ij}] = \xi_{ij} Y[f] + O(h_i^2 h_j^2), \; i,j \in \{1,2\}, \tag{3}$$

where :

$$f_{,j} = \partial f / \partial x_j \,, \; \xi_r = \frac{1}{6h_r}\left[-\sin\left(4\pi \frac{s_r}{N_r}\right) + 8\sin\left(2\pi \frac{s_r}{N_r}\right) \right] \,, \; \xi_{rr}(\underline{s}) = \frac{1}{6h_r^2}\left(-\cos\left(4\pi \frac{s_r}{N_r}\right) + 16\cos\left(2\pi \frac{s_r}{N_r}\right) - 15 \right)$$

$$\begin{aligned} \xi_{12}(\underline{s}) = \frac{1}{12 h_1 h_2}\Bigg[& -\cos\left(2\pi\left(\frac{2s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2}\right)\right) - \cos\left(2\pi\left(\frac{s_1}{N_1} + \frac{2s_2}{N_2}\right)\right) \\ & + 10\cos\left(2\pi\left(\frac{s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2}\right)\right) - 10\cos\left(2\pi\left(-\frac{s_1}{N_1} + \frac{s_2}{N_2}\right)\right) \\ & + \cos\left(2\pi\left(\frac{2s_1}{N_1} - \frac{s_2}{N_2}\right)\right) + \cos\left(2\pi\left(\frac{-s_1}{N_1} + \frac{2s_2}{N_2}\right)\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

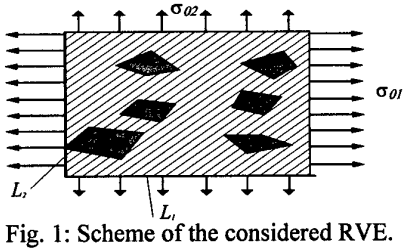


Fig. 1: Scheme of the considered RVE.

Note that these equations are the discrete analogue to the differentiation theorem which is well known in connection with the continuous Fourier transformation. The rate of approximation in Eq. 3 depends on the chosen difference scheme. By virtue of these differentiation rules the resulting PDE in the physical space are mapped onto a LSE in the Fourier space which can

be solved analytically under the assumption of periodic boundary conditions. For the determination of the stresses and strains in the RVE the fundamental equations of the linear elasticity theory are used:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \ , \sigma_{ij} = C_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon^*_{kl}\right), \ \ \varepsilon_{kl} = 1/2\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right), \tag{4}$$

where σ_{ij} stands for the stress tensor, ε_{kl} for the total strains, ε^*_{kl} for the eigenstrains, u_k for the displacements, and C_{ijkl} is the stiffness tensor. In addition to these equations some appropriate boundary conditions have to be prescribed to close the problem. By the application of the equivalent inclusion method (c.f. [1]) in conjunction with the DFT a formal solution for the total strains is obtained which depends on an unknown auxialiary strain field $\hat{\varepsilon}^H_{kl}$ (see [2] for details):

$$\varepsilon_{ij}(\underline{x}) = (N_1 N_1)^{-\frac{1}{2}} \hat{\varepsilon}_{ij}(\underline{0}) + Y^{-1}\left(\hat{A}^H_{ijkl}\left[\hat{\varepsilon}^*_{kl} + \hat{\varepsilon}^H_{kl}\right]\right)(\underline{x}), \ \ \hat{A}^H_{ijkl} = -\frac{1}{2D}\left(\xi_i N_{jr} + \xi_j N_{ir}\right) C^H_{rsmn} \xi_s, \ M_{ik} = C^H_{ijkl}\xi_{jl}, \ M^{-1}_{ij} = \frac{N_{ij}}{D}, \tag{5}$$

where N_{ij} is the adjoint, D the determinant of M_{ij}, and an auxiliary stiffness tensor, C^H_{ijkl}, has been included which is now spatially constant and has to be chosen suitably. Representation (5) for the total strains has been used to derive the following functional equation for the auxiliary strain field $\hat{\varepsilon}^H_{kl}$, which is solved by a standard Neumann iteration procedure:

$$\varepsilon^H_{ij}(\mathbf{x}) = \left(C^H_{ijkl}\right)^{-1}\left(C^H_{klrs} - C_{klrs}(\mathbf{x})\right)\left((N_1 N_2)^{-\frac{1}{2}}\hat{\varepsilon}_{rs}(\mathbf{0}) + Y^{-1}\left(\hat{A}^H_{rsop}\hat{\varepsilon}^*_{op}\right)(\mathbf{x}) + Y^{-1}\left(\hat{A}^H_{rsop}\hat{\varepsilon}^H_{op}\right)(\mathbf{x}) - \varepsilon^*_{rs}(\mathbf{x})\right). \tag{6}$$

2. Applications and Discussion

The accuracy of the DFT procedure has been checked by considering an inclusion problem and a problem of Kirsch's type, e.g. an elliptical hole under tension at the remote boundary. The first problem should tell us about the impact of the stiffness deviation of matrix and inclusion on the numerical results. As it is visible, for a moderate stiffness deviation the coarse grid is sufficient, whereas for a large deviation in stiffness excellent results are obtained with a 256×256-grid. The second problem is used to compare the quality of the two difference schemes mentioned above. Ellipses of different slenderness are considered, e.g. the ratio of the major axes a to the minor axes b varies. The outcome is, that the improvement by using the 21-pixelstar becomes more and more significant when the ratio a/b increases, and the stress concentrations arise in front of the hole. Therefor the new approximation scheme is superior when a precise knowledge of the stresses in the vicinity of the boundary of the hole is needed.

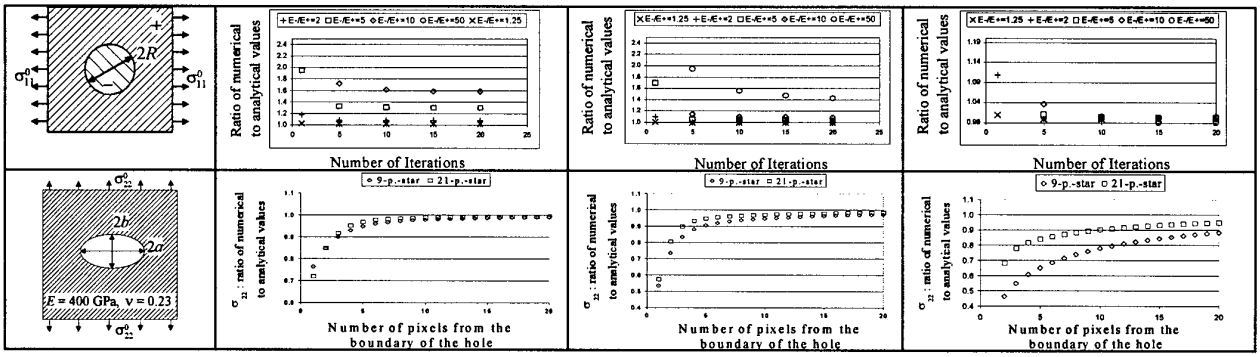


Fig. 1. First row: inclusion problem and the ratio of the numerical and analytical values at the centre of the matrix for a 64×64- (left), a 128×128- (middle) and a 256×256-grid (right). Second row: elliptical hole and ratio of the numerical and analytical values in front of the hole for $a/b = 1.5$ (left), $a/b = 3$ (middle), $a/b = 6$ (right.)

3. References

[1] MURA, T.: Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff Publishers, 2nd revised edition, The Netherlands, 1987.

[2] S. NEUMANN, K.P. HERRMANN, W.H. MÜLLER: Fourier Transforms-an alternative to finite elements for elastic plastic stress/strain analyses of heterogeneous bodies. Accepted by Acta Mechanica, 2000.

Addresses:

PROF. K.P.HERRMANN, Laboratorium für Technische Mechanik, Pohlweg 47-49, D-33098 Paderborn.

PROF. W.H. MÜLLER, Dep. of Mechanical and Chemical Engineering, Heriot-Watt University, GB Edinburgh EH 14 4AS.

DIPL.-MATH. S. NEUMANN, Laboratorium für Technische Mechanik, Pohlweg 47-49, D-33098 Paderborn.

HEUER, R.

Zum thermischen Durchschlagen kompositer flacher Schalen

Ausgangspunkt der vorgestellten Untersuchung sind flache Schalen unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität. Ein mittensymmetrischer Aufbau aus transversal isotropen Schalenschichten wird angenommen und der Schubeinfluß auf die Querdeformation berücksichtigt. Die Einwirkung thermischer Lasten sowie die Spezialisierung auf unverschieblich gelagerte gerade Schalenränder führen auf ein Randwertproblem vierter Ordnung für die Schalendurchbiegung, das mit Hilfe modaler Projektion unter Verwendung der Eigenformen einer Platte mit Geometrie des Schalengrundrisses algebraisiert werden kann. Es zeigt sich, daß das thermischen Durchschlagsproblem der Schale - analog zu jenem der Platte unter thermischer Krümmung - durch eine "Spitzenkatastrophe" beschrieben wird.

1. Das Randwertproblem schubweicher flacher Schalen unter Temperatureinwirkung

In der vorliegenden Arbeit wird das thermische Stabilitätsverhalten mäßig dicker, flacher Schalen mit Rändern untersucht. Ausgehend von der geometrisch nichtlinearen Schalentheorie von VON KARMAN und TSIEN [1] werden, unter Berücksichtigung der Schubdeformation nach MINDLIN [2], die Verschiebungskomponenten u, v, w und Querschnittsrotationen ψ_x, ψ_y durch fünf gekoppelte Differentialgleichungen beschrieben, siehe [3]. Für unverschiebliche Schalenränder wird die BERGERsche Approximation [4] angenommen, die in der Verzerrungsenergie die zweite Invariante des Verzerrungstensors der Mittelfläche vernachlässigt. Nach Elimination der Querschnittsrotationen erhält man folgende Differentialgleichung vierter Ordnung für die Schalendurchbiegung:

$$K(1+sn)\,\Delta\Delta w - n\left[\Delta w - 2(H - Ks\,\Delta H)\right] = -(1+\nu)\,K\,\Delta\kappa_\theta \quad , \quad H = (k_x + k_y)/2 \, . \tag{1}$$

Der Einfluß der Membrankräfte wird dabei durch eine im Schalenbereich konstante mittlere Normalkraft angenähert, die mit der Differentialgleichung der Schalendurchbiegung nichtlinear gekoppelt ist,

$$n = -D\left[\frac{1}{2A}\int_A w\,(\Delta w - 4H)\,dA + \bar{n}^*_\theta\right] \quad , \quad \bar{n}^*_\theta = \frac{(1+\nu)}{A}\int_A n^*_\theta\,dA \, . \tag{2}$$

H ist die mittlere Krümmung der Schalenmittelfläche, und für aus N transversal isotropen Schichten mittensymmetrisch aufgebaute Schalen lauten die Steifigkeitsparameter:

$$K = \sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k z^2/(1-\nu_k^2)\,dz \, , \quad D = \sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k} E_k/(1-\nu_k^2)\,dz \, , \quad \nu = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{N} K_k \nu_k \, , \quad \frac{1}{s} = \kappa^2 \sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k} G_k\,dz \, . \tag{3}$$

Der Einfluß der thermischen Beanspruchung $\theta(x, y, z)$ wird durch die mittlere Temperaturdehnung n^*_θ sowie durch die thermische Krümmung κ_θ ausgedrückt,

$$n^*_\theta = \frac{1}{D(1+\nu)}\sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\frac{E_k}{(1-\nu_k)}\alpha_k\,\theta\,dz \, , \quad \kappa_\theta = \frac{1}{K(1+\nu)}\sum_{k=1}^{N}\int_{z_{k-1}}^{z_k}\frac{E_k}{(1-\nu_k)}\alpha_k\,\theta z\,dz \, . \tag{4}$$

Die Randbedingungen für frei drehbare Lagerung lassen sich bei polygonaler Geometrie wie folgt anschreiben, siehe z.B. [3]:

$$\Gamma: \; w = 0 \, , \quad \Delta w = -(1+\nu)\,\kappa_\theta \, . \tag{5}$$

2. Diskretisierung mit Hilfe Modaler Projektion

Zur Diskretisierung des Randwertproblems wird für die Schalendurchbiegung ein Separationsansatz gewählt,

$$w(x,y)=\sum_{j=1}^{N} c_j\, w_j^*(x,y)\,, \tag{6}$$

welcher neben der zu bestimmenden Lagekoordinaten c_j die Eigenfunktionen $w_j^*(x,y)$ des zugeordneten linearen Plattenproblems enthält, siehe z.B. [3]. Für polygonal berandete, frei drehbar gelagerte schubelastische Platten genügen diese Eigenformen dem Dirichletschen Helmholtz-Problem. Seine Eigenwerte α_j stehen mit der kritischen mittleren thermischen Plattendehnung in folgendem Zusammenhang:

$$\bar{n}_{j\theta}^{*P}=\alpha_j h^2/(1+D\,s\,h^2\alpha_j)\,. \tag{7}$$

Nach modaler Entwicklung der thermischen Krümmung und anschließender Anwendung der Galerkinschen Vorschrift erhält man ein gekoppeltes algebraisches Gleichungssystem mit quadratischen und kubischen Nichtlinearitäten zur Bestimmung der Lagekoordinaten,

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}c_k+\sum_{k=1}^{N} b_{jk}c_k^2+c_j\sum_{k=1}^{N} d_{jk}c_k+c_j\sum_{k=1}^{N} e_{jk}c_k^2=f_{\theta j}\,,\quad j=1,2,...,N\,. \tag{8}$$

Die Koeffizienten sowie die generalisierten thermischen Kräfte enthalten neben den Steifigkeitsparametern die Geometrieinformation nur durch folgende Größen des zugeordneten Helmholzproblems:

$$\alpha_j\ldots\text{Eigenwert},\quad \beta_j^*=\frac{1}{A}\int_A w_j^{*2}\,dA\,,\quad \vartheta_j^*=\frac{R_0}{A}\int_A Hw_j^*\,dA\,,\quad \delta_j^*=\frac{R_0^3}{A}\int_A \Delta Hw_j^*\,dA\,. \tag{9}$$

Für den Fall einer Einfreiheitsgradapproximation (Indizes werden hier weggelassen) läßt sich die Gleichgewichtsbedingung (8) auf eine reduzierte kubische Gleichung transformieren,

$$e\,\bar{c}^3+\bar{a}\,\bar{c}+\bar{f}=0\,,\qquad \bar{c}=c+b/e\,,\ \bar{a}=a-3b^2/e\,,\ \bar{f}=2b^3/e^2-ab/e-f\,. \tag{10}$$

Diese ist vom gleichen Aufbau wie jene der Platte unter Temperaturkrümmungsbeanspruchung, siehe [5]. Für thermisches Durchschlagen gilt

$$3e\,\bar{c}^2+\bar{a}=0\,, \tag{11}$$

und der Grenzbereich läßt sich durch die Gleichung einer Spitzenkatastrophe beschreiben, siehe [6]:

$$\bar{a}^3+27e\bar{f}^2/4=0\,. \tag{12}$$

3. Literatur

1. VON KARMAN, TH.; TSIEN, H.S.: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. Aer. Sci. 8 (1941), 303-312.
2. MINDLIN, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech. 18 (1951), 31-38.
3. HEUER, R.: Large flexural vibrations of thermally stressed layered shallow shells. Nonlinear Dynamics 5 (1994), 25-38.
4. BERGER, H.M.: A new approach to the analysis of large deflection of plates. J. Appl. Mech. 22 (1955), 465-472.
5. IRSCHIK, H.: Large thermoelastic deflections and stability of simply supported polygonal panels. Acta Mechanica 59 (1986), 31-46.
6. TROGER, H.: Ein Beitrag zum Durchschlagen einfacher Strukturen. Acta Mechanica 23 (1975), 179-191.

Anschrift: RUDOLF HEUER, Institut für Allgemeine Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8-10/E201, A-1040 Wien, Austria

HOHE, J.; BECKER, W.

Homogenization of Cellular Sandwich Cores Considering Core Face Sheet Constraints

Aim of the present study is the determination of the effective elastic properties of two-dimensional cellular sandwich cores in consideration of core-face sheet constraints. The microstructure is homogenized by a strain-energy based RVE-concept assuming that strain states, which are equivalent on the macroscopic level, lead to equal strain energy in a representative volume element whether the real microstructure or the quasi-homogeneous "effective" medium is considered. The strain energy is evaluated analytically assuming that the displacement field of the cellular structure can be described by a weighted superposition of the displacement fields of the unconstrained core and the face sheets.

1. Introduction

Structural sandwich panels with two-dimensional cellular cores are widespread elements in lightweight construction. Therefore, numerous studies with respect to the effective properties are available in literature (e.g. GIBSON and ASHBY [3]). Most of these studies consider the deformation of the free core, which is not constrained by the face sheets. Nevertheless, the mode of deformation of the unconstrained core in general is incompatible with the mode of deformation of the face sheets (fig. 1). This effect causes additional strain energy to be stored in the cell walls in the vicinity of the face sheets. Thus, in comparison to an analysis based on the mode of deformation of the unconstrained core, a significant increase in the effective stiffness of the cellular structure can occur.

2. Strain Energy Based Concept for Homogenization

For determination of the effective properties, a representative volume element for the microstructure of the body Ω and a corresponding volume element consisting of the quasi-homogeneous "effective" medium are considered (fig. 2). The properties of the effective medium have to be determined in such a way that the mechanical behaviour of both volume elements is equivalent on the macroscopic level. Within the concept of the present study, equivalence of the mechanical behaviour is assumed, if the total strain energy W in both volume elements is equal for strain states which are equivalent on the macroscopic level. According to BISHOP and HILL [2], equivalence of the strain states on the macroscopic level is assumed, if the volume average of the strain tensors ε_{ij} and ε^*_{ij} is equal. Thus,

$$\int_V w(\varepsilon_{ij})\,\mathrm{d}V = \int_{V^*} w^*(\varepsilon^*_{ij})\,\mathrm{d}V \qquad \text{for:} \qquad \frac{1}{V}\int_V \varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{V}\int_{V^*} \varepsilon^*_{ij}\,\mathrm{d}V \tag{1}$$

where V denotes the volume of the representative volume element. The strain energy for the representative volume element can be evaluated either by an analytical approch or in a pure numerical analysis.

3. Determination of the Strain Energy

For determination of the strain energy, the entire representative volume element is decomposed into the individual cell walls. Two limit cases for the displacement field of each cell wall are examined. The first case consists of the

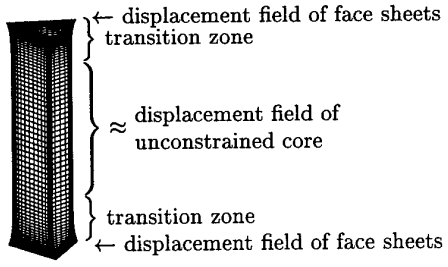


Figure 1: Transition in mode of deformation

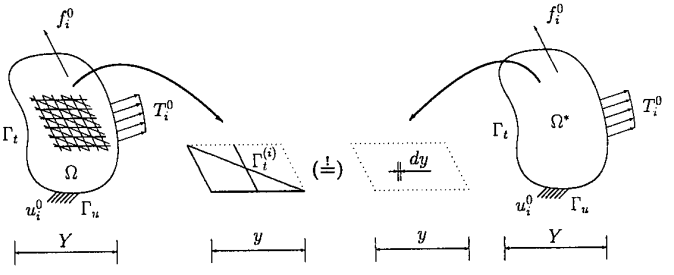


Figure 2: Representative volume element

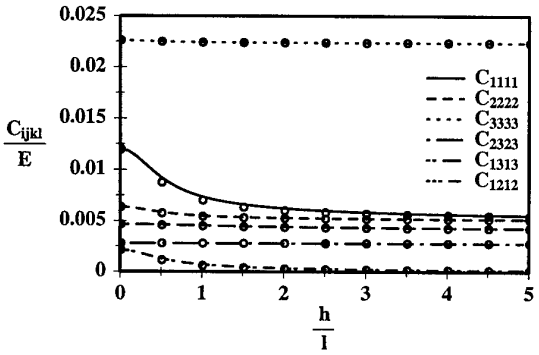


Figure 3: Hexagonal core – normal and shear properties

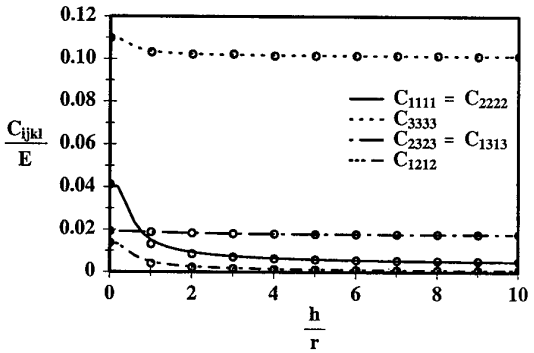


Figure 4: Tubular core – normal and shear properties

displacement field u_i^{u} which would develop if the cellular core were not constrained by the face sheets. A matrix method for determination of this limit case for general cell geometries was proposed by the authors in an earlier study [4]. The second case is given by an extension of the displacement field of the face sheets into the region of the core (u_i^{c}). The total displacement field is determined as a weighted superposition of both limit cases:

$$u_1(\tilde{x}_i) = u_1^{\mathrm{c}}(\tilde{x}_i) f(\tilde{x}_3) + u_1^{\mathrm{u}}(\tilde{x}_i)\,(1 - f(\tilde{x}_3)) \tag{2}$$

$$u_2(\tilde{x}_i) = u_2^{\mathrm{c}}(\tilde{x}_i) f(\tilde{x}_3) + u_2^{\mathrm{u}}(\tilde{x}_i)\,(1 - f(\tilde{x}_3)) \tag{3}$$

$$u_3(\tilde{x}_i) = u_3^{\mathrm{c}}(\tilde{x}_i) f(\tilde{x}_3) + u_3^{\mathrm{u}}(\tilde{x}_i)\,(1 - f(\tilde{x}_3)) - \tilde{x}_2 \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{x}_3}\bigg|_{\tilde{x}_2=0} \tag{4}$$

Here, $\tilde{x}_i$ is a local system where the $\tilde{x}_1$-$\tilde{x}_3$-plane is the cell wall plane and the $\tilde{x}_1$-direction is the longitudinal direction. The function $f(\tilde{x}_3)$ describes the decay of the displacement field from the displacement field u_i^{c} in the vicinity of the face sheets to the displacement field u_i^{u} far from the face sheets. The function $f(\tilde{x}_3)$ is defined by:

$$f(\tilde{x}_3) = \frac{\cosh \lambda \frac{2\tilde{x}_3}{h}}{\cosh \lambda} \tag{5}$$

where h is the core thickness. The parameter λ is determined by means of the principle of minimum strain energy. A similar concept was proposed by BECKER [1] in a study, which is restricted to the in-plane properties of the regular hexagonal cell geometry. Nevertheless, this approach does not account for bending effects with respect to the $\tilde{x}_1$-axis in the transition zone and therefore is insufficient for cases when cell wall bending is the dominant effect in the transition from u_i^{c} to u_i^{u}. In order to take this effect into account, the last term in eq. (4) has to be added.

4. Numerical Examples

The scheme presented in the preceding sections is applied to the determination of the effective properties of a regular hexagonal core with low relative density ($\bar{\rho} = 0.02$) and a moderate density tubular core ($\bar{\rho} = 0.1$). The normal and shear components of the effective elasticity tensors are presented in figs. 3 and 4 in dependence of the core thickness h, normalized by the cell wall length l and the tube radius r respectively. Finite element based reference solutions are marked by symbols. Especially in case of the in-plane properties C_{1111}, C_{2222} and C_{1212}, a strong effect of the core thickness is observed which is caused by the mentioned constraint since for thick cores the solution of the unconstrained core is dominant while the displacement field of the face sheets is dominant in the thin core limit. An excellent agreement of the present analytical approach with finite element results is observed. Finally, the outstanding computational efficiency of the analytical scheme should be emphasized.

5. References

1 BECKER, W: The Inplane Stiffness of a Honeycomb Core Including the Thickness Effect. Arch. Appl. Mech. **68** (1998), 334-341

2 BISHOP, J.F.W. and HILL, R: A Theory of the Plastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate Under Combined Stress. Phil. Mag. **42** (1951), 414-427

3 GIBSON, L.J. and ASHBY, M.F: Cellular Solids. Pergamon Press, Oxford 1997

4 HOHE, J. and BECKER, W: An Energetic Homogenization Procedure for the Elastic Properties of General Cellular Sandwich Cores. Composites B, accepted for publication

Addresses: J. HOHE, W. BECKER, Universität Siegen, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Paul-Bonatz-Str. 9-11, D-57068 Siegen, Germany

ITSKOV, M.

On the elastic constants and their admissible values for incompressible and slightly compressible anisotropic materials

Constitutive relations for incompressible (slightly compressible) anisotropic materials cannot (could hardly) be obtained through the direct inversion of the generalized Hooke's law since the corresponding compliance tensor becomes singular (ill-posed) in this case. The problem requires a special procedure discussed in the paper. The idea of this procedure is based on the spectral decomposition of the compliance tensor but leads to a closed formula for the elastic moduli without explicit using the eigenvalue problem solution. The condition of non-negative (positive) definiteness of the elasticity tensor restricts the elastic constants to belong to an admissible value domain illustrated graphically for the special case of orthotropy.

1. Introduction

The incompressibility condition imposes some constraints on the elastic constants such that the compliance tensor of an incompressible material becomes singular. In this case the stress-strain relations cannot be obtained through the straightforward inversion of the generalized Hooke's law which requires a special procedure discussed in the paper. The idea of this procedure is based on the spectral decomposition of the compliance tensor but leads to a closed formula for the elasticity tensor without explicit using the eigenvalue problem solution. Alternatively, this closed formula can also be obtained as the so-called generalized inverse of the compliance tensor [1,3].

Nearly incompressible or in other words slightly compressible anisotropic materials are characterized by the bulk modulus large in contrast to other elastic constants which leads to ill-posed material tensors. Therefore, in order to formulate the constitutive equations for slightly compressible materials it is reasonable to refer again to the closed formula mentioned which is modified such that to take into account a special case of isotropically compressible anisotropic solids. This means that under a uniform hydrostatic pressure the deformation of the anisotropic material is purely volumetric. Only for such anisotropic solids with the isotropic volumetric response the slightly compressibility can be considered as a result of only one "weak internal material constraint" and, as can also be shown, the bulk modulus is independent of the stress state and might be referred to as a material parameter. This special case is of interest in the following consideration.

The closed formula presented is applied to obtain the elasticity tensor for orthotropic and transversely isotropic materials being of special importance for engineering practice. By means of incompressibility (isotropic compressibility) condition the Poisson's ratios can be expressed in terms of elastic (and bulk) moduli which reduces the number of independent material parameters. The requirement of positive definiteness (or in the case of incompressibility semi-definiteness) of the compliance tensor imposes some additional restrictions (thermodynamic constraints) on the remaining elastic constants. These restrictions are well-established in literature for compressible orthotropic materials (see e.g. [2]) but, to our best knowledge, are absolutely unknown for incompressible as well as isotropically compressible ones. Using the eigenvalues of the compliance tensor we formulate the thermodynamic constraints yielding admissible value domains for the Young's moduli. Finally, these domains are illustrated graphically.

2. Incompressibility condition for anisotropic materials

The generalized Hooke's law establishing the linear relationship between the stress $\boldsymbol{\sigma}$ and strain tensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ as well as its inverse counterpart (constitutive relations) can be given for incompressible materials by

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{H} : \boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} - p\mathbf{I}, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{\mathbb{C}}$ denote the compliance and elasticity tensor, respectively, and p represents a hydrostatic pressure. The incompressibility condition given in the linear case by $\mathrm{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I} : \boldsymbol{\varepsilon} = 0$ must be satisfied for arbitrary stresses $\boldsymbol{\sigma}$. This imposes the following condition on $\boldsymbol{H}$

$$\mathbf{I} : \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} : \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{2}$$

and reduces the number of independent material parameters. In view of (1) and (2), one of the eigenvalues in the spectral representation of $\boldsymbol{H}$ and $\boldsymbol{\mathbb{C}}$ should be equal to zero. Assuming that the only zero-energy mode of the elasticity tensor is purely volumetric we obtain the following spectral decompositions

$$\boldsymbol{H} = \sum_{r=1}^{5} \lambda_r \mathbf{M}_r \times \mathbf{M}_r + 0 \cdot \bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}, \qquad \boldsymbol{\mathbb{C}} = \sum_{r=1}^{5} \frac{1}{\lambda_r} \mathbf{M}_r \times \mathbf{M}_r + 0 \cdot \bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}, \qquad \text{where} \quad \bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I} / \sqrt{3}. \tag{3}$$

By means of the closed formula

$$\mathbb{C} = \left(\boldsymbol{H} + \bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}\right)^{-1} - \bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}. \tag{4}$$

the elasticity tensor $(3)_2$ can be expressed in terms of the compliance tensor without explicit using the eigenvalue problem solution. This procedure is analogous to the so-called Moore-Penrose generalized inverse [1,3].

3. Slightly compressible anisotropic materials with isotropic volumetric response

The conditions of the isotropic compressibility can be given in terms of the bulk modulus $\kappa = -p / \operatorname{tr}\varepsilon$ by

$$\boldsymbol{H} : \mathbf{I} = \mathbf{I} : \boldsymbol{H} = \frac{1}{3\kappa}\mathbf{I}, \qquad \mathbf{I} : \mathbb{C} = \mathbb{C} : \mathbf{I} = 3\kappa\mathbf{I}, \tag{5}$$

which leads to the following spectral decompositions for the compliance and elasticity tensor:

$$\boldsymbol{H} = \sum_{r=1}^{5} \lambda_r \mathbf{M}_r \times \mathbf{M}_r + \frac{1}{3\kappa}\bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}, \qquad \mathbb{C} = \sum_{r=1}^{5} \frac{1}{\lambda_r}\mathbf{M}_r \times \mathbf{M}_r + 3\kappa\bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}. \tag{6}$$

For nearly incompressible materials the compliance tensor becomes ill-posed since $(1/3\kappa) << \lambda_r$ $(r = 1, 2...5)$. To avoid its numerical inversion we propose a modified form of the closed formula (4). Accordingly

$$\mathbb{C} = \left[\boldsymbol{H} + \left(1 - \frac{1}{3\kappa}\right)\bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}\right]^{-1} + (3\kappa - 1)\bar{\mathbf{I}} \times \bar{\mathbf{I}}. \tag{7}$$

4. Bounds on the Young's moduli of isotropically compressible orthotropic materials

Orthotropic solids are described by 9 independent material parameters: the Young's moduli E_i, Lamé's shear moduli G_{ij} and Poisson's ratios ν_{ij} $(i \neq j = 1,2,3)$ usually refereed to as engineering elastic constants. For isotropically compressible orthotropic materials the Poisson's ratios can be expressed by virtue of the conditions (5) by

$$\nu_{ij} = \frac{E_j}{2}\left(\frac{1}{E_i} + \frac{1}{E_j} - \frac{1}{E_k} - \frac{1}{3\kappa}\right) \quad (i \neq j \neq k = 1, 2, 3), \tag{8}$$

which reduces the number of independent elastic constants to 7. The condition of positive definiteness of the compliance tensor imposes the thermodynamic constraints on the remaining material parameters. For the Young's moduli of an isotropically compressible orthotropic material these constraints (9) yield a set of the admissible value domains corresponding to various values of κ. These domains (with excluded boundaries) are illustrated in Fig.1.

$$\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3} - \frac{1}{3\kappa} > 0, \quad \frac{3}{4}\left(\frac{2}{E_1E_2} + \frac{2}{E_2E_3} + \frac{2}{E_3E_1} - \frac{1}{E_1^2} - \frac{1}{E_2^2} - \frac{1}{E_3^2}\right) - \frac{1}{6\kappa}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{E_3}\right) + \frac{1}{36\kappa^2} > 0. \tag{9}$$

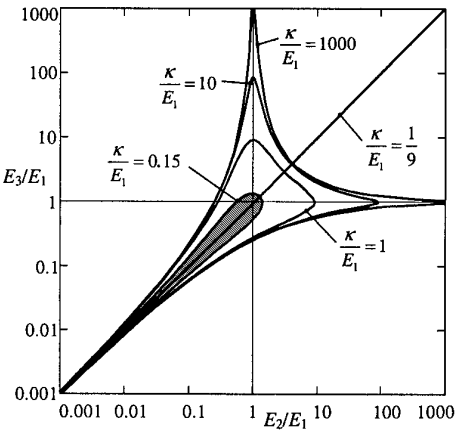


Fig.1.Admissible value domains for the Young's moduli of isotropically compressible orthotropic materials

5. References

1 CAMPBELL, S.L., MEYER, C.D.: Generalized inverses of linear transformations; Dover Publications, New York 1979.

2 JONES, E.M.: Mechanics of Composite Materials; McGraw-Hill Book Company, New York 1975.

3 LOREDO, A., KLÖCKER, H.: Generalized inverse of the compliance tensor, and behaviour of incompressible anisotropic materials – application to damage; Mech. Res. Commun. **24** (1997), 371-376.

Address: Dr.-Ing. MIKHAIL ITSKOV, Institut für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstraße 150, D-44780 Bochum, Germany.

ITSKOV, M., BAŞAR, Y.

A new orthotropic hyperelastic constitutive model with application to incompressible shells

This paper briefly presents a new orthotropic hyperelastic constitutive model (for more details see [1,2]) which can be applied to the numerical simulation of a wide range of anisotropic materials and particularly biological soft tissues. The model is obtained as a non-linear extension of the orthotropic St.Venant-Kirchhoff material and is described in each principal material direction by an arbitrary isotropic tensor function coupled with the associated structural tensor. In the special case of isotropy this constitutive formulation reduces to the Valanis-Landel hypothesis and can therefore be considered as its generalization to the case of orthotropy.

1. Introduction

Various biological soft tissues such as blood vessels, lung pleura, cardiac muscle and many others are characterized by strongly anisotropic, in most cases orthotropic material properties and can simultaneously undergo large elastic deformations. This completely refers also to many reinforced rubber-like structures such as pneumatic membranes, automobile tires, hydraulic hoses. The numerical simulation of such materials is not possible under the assumption of small elastic strains and requires a hyperelastic constitutive formulation.

In the present paper we propose a generalized orthotropic hyperelastic constitutive model applicable to a wide spectrum of orthotropic materials. The model is obtained as a non-linear extension of the orthotropic St.Venant-Kirchhoff material. To this end, the Green-Lagrange strain tensor $\mathbf{E}$ is substituted in the expression of the strain energy function by three arbitrary isotropic tensor functions coupled with the associated structural tensors. These functions are approximated by power series including an arbitrary number of polynomial terms and corresponding material coefficients. In the special case of isotropy the constitutive formulation proposed reduces to the Valanis-Landel [4] hypothesis or to the well-known Ogden model [3] and can therefore be considered as their generalization to orthotropic materials.

Constitutive relations and tangent moduli of the model presented are expressed in terms of eigenvalue-bases of the right Cauchy-Green tensor $\mathbf{C}$ and obtained for the cases of distinct and coinciding eigenvalues as well. For the analysis of shells this model is then coupled with a six (five in incompressible case) parametric shell kinematics able to deal with large strains and finite rotations. The incompressibility condition is satisfied by eliminating the transverse normal strains C_{33} and the stretching parameter at the element level. For numerical simulations we use a four-node isoparametric finite shell element interpolating transverse shear strains according to the assumed strain concept. Finally, the application of the finite element is illustrated by an numerical example.

2. General description of orthotropy, the orthotropic symmetry group

A material is said to be *orthotropic* if there exist three orthogonal to each other planes, by reflections with respect to which material properties remain invariant. The axes normal to these planes are called principal material directions. In arbitrary point of an undeformed body we consider a set of orthogonal unit base vectors $\mathbf{l}_i = \mathbf{l}^i$ (i = 1, 2, 3) coinciding with the principal material directions. Any orthogonal transformation $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T}$ belonging to the orthotropic symmetry group $\mathcal{G}$ conserves the *structural tensors* $\mathbf{L}_{ii} = \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i$ (i =1, 2, 3) unchanged. Thus

$$\mathbf{Q}\mathbf{L}_{ii}\mathbf{Q}^{T} = \mathbf{L}_{ii} \qquad (i=1,2,3) \qquad \forall \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T} \in \mathcal{G}. \tag{1}$$

The strain energy function of an orthotropic hyperelastic material has also to be an invariant within $\mathcal{G}$. Accordingly,

$$\psi\left(\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^{T}\right) = \psi(\mathbf{C}) \qquad \forall \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{-T} \in \mathcal{G}, \tag{2}$$

where $\mathbf{C}$ denotes the right Cauchy-Green tensor.

3. Strain energy function of the generalized orthotropic material model

The starting point in the construction of the generalized orthotropic hyperelastic model is the St.Venant-Kirchhoff orthotropic material which can be described by the strain energy function of the form

$$W(\mathbf{C})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{3}a_{ij}\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}\mathbf{L}_{ii})\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}\mathbf{L}_{jj})+\sum_{i,j\neq i}^{3}G_{ij}\,\mathrm{tr}(\mathbf{E}\mathbf{L}_{ii}\mathbf{E}\mathbf{L}_{jj}). \tag{3}$$

Substituting $\mathbf{E}$ in (3) by three arbitrary isotropic tensor functions $\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})$ (i = 1,2,3) we obtain

$$W(\mathbf{C})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{3}a_{ij}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\Theta}_{ii}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{\Theta}_{jj}+\sum_{i,j\neq i}^{3}G_{ij}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Theta}_{ii}\boldsymbol{\Theta}_{jj}),\quad \text{where}\quad \boldsymbol{\Theta}_{ij}(\mathbf{C})=\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})\mathbf{L}_{ij}\qquad (i,j=1,2,3). \tag{4}$$

Due to the functions $\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})$ the constitutive model (4) can describe arbitrary non-linearities for each principal material direction i (i =1, 2, 3). Keeping in mind that the functions $\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})$ are isotropic it can easily be verified that the scalars $\mathrm{tr}\boldsymbol{\Theta}_{ii}$ and $\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Theta}_{ii}\boldsymbol{\Theta}_{jj})$ appearing in (4) represent invariants within the orthotropic symmetry group $\mathcal{G}$ such that the condition (2) is automatically fulfilled. For incompressible materials the tensor $\mathbf{C}$ is subjected in (4) to the constraint $\mathrm{III}_{\mathbf{C}}=\det\mathbf{C}=1$ which can be satisfied by introducing it in (4) with a Lagrange multiplier p^* as follows:

$$\psi(\mathbf{C})=W(\mathbf{C})+p^*\,(\mathrm{III}_{\mathbf{C}}-1). \tag{5}$$

Similarly to the Ogden model the functions $\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})$ are approximated by the power series

$$\boldsymbol{\Omega}_i(\mathbf{C})=\sum_r\frac{\mu_{ri}}{\alpha_{ri}}\left(\mathbf{C}^{\alpha_{ri}/2}-\mathbf{I}\right), \tag{6}$$

where μ_{ri} and α_{ri} represent the Ogden-type material constants associated with the orthotropic direction i (i = 1, 2, 3). Thus, the energy function (4) automatically satisfies the condition of existence of the natural state. In this state the constitutive model proposed should also recover the engineering elastic constants which further requires that $\sum_r\mu_{ri}=1$, (i = 1, 2, 3).

4. Numerical example

In this example a spherical balloon made of a transversely isotropic hyperelastic material is submitted to the internal hydrostatic pressure (Fig.1). The reinforcing fibres are arranged in the circumferential direction such that the problem under consideration is axisymmetric. To ensure adequate quality of the finite element discretization in the vicinity of the pole we have analysed an octant of the structure. Through the transverse isotropy of the material the initially spherical shell takes by loading a form of a rugby ball. Large strains and finite rotations involved in this example should be emphasized as well.

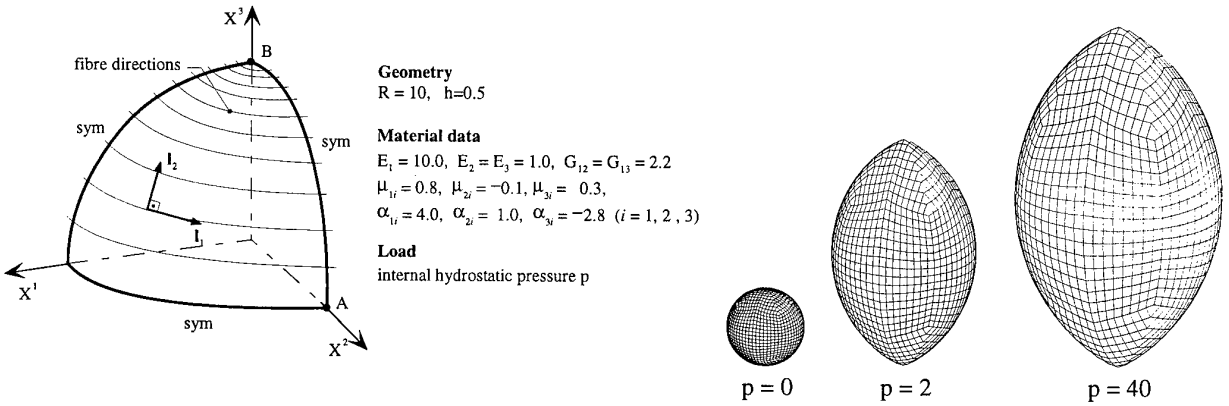


Fig.1. Inflation of a spherical balloon made of a transversely isotropic material

5. References

1 ITSKOV, M.: A generalized orthotropic hyperelastic material model with application to incompressible shells; Int. J. Numer. Meth. Engrg. (in press).

2 ITSKOV, M., BAŞAR, Y.: A generalised hyperelastic orthotropic constitutive model for reinforced rubber-like materials; in: Constitutive Models for Rubber, Al. Dorfmann and A. Muhr (eds.) Balkema, Rotterdam 1999, 107-115.

3 OGDEN, R.W.: Non-Linear Elastic Deformations; Ellis Horwood, Chichester 1984.

4 VALANIS, K.C., LANDEL, R.F.: The Strain-Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios; J. Appl. Phys., **38** (1967), 2997-3002.

Address: Dr.-Ing. MIKHAIL ITSKOV, Prof. Dr.-Ing. YAVUZ BAŞAR, Institut für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Universitätsstraße 150, D-44780 Bochum, Germany.

JAŃSKI, Ł.; ULBRICHT, V.

FE-Modellierung des freien Faltens von Textilien

Es besteht heutzutage ein großer Bedarf, Modelle zu finden, die das Aussehen einer gefalteten textilen Probe mit ihren mechanischen Materialkennwerten verbinden. Da die Gestalt einer deformierten Stoffprobe sehr kompliziert ist und da während der Deformation große Verschiebungen auftreten, sind numerische Methoden zur Simulation heranzuziehen. Zur Approximation einer gefalteten Stofffläche wird ein auf dem Cosserat-Kontinuum basierendes FE-Schalenmodell verwendet. Nach der Darstellung des Fallversuches und Behandlung des Problems der Materialkennwerte werden Simulationsergebnisse einfacher Strukturen präsentiert.

1. Fallversuch

Die Drapierbarkeit eines textilen Stoffes gehört zu den Eigenschaften, die eine besondere Wichtigkeit bei der Auswahl eines textilen Materials für ein bestimmtes Kleidungstück erlangt. Sie bildet die Grundlage für das äußere Erscheinungsbild eines Kleidungsstücks am Körper und wird somit seit längerem sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht. Cusick [1] hat einen Fallversuch vorgeschlagen, in dem man das Verhalten eines Stoffes im freien Falten überprüfen und quantitativ beschreiben kann. Aus dieser Untersuchung wird u.a. ein Fallkoeffizient abgeleitet. Um diese textilabhängige Größe zu bestimmen, werden entsprechende Flächen des frei hängenden Teiles einer Stoffprobe der Endkonfiguration und der Ausgangskonfiguration ins Verhältnis gebracht. Der Fallkoeffizient kann daher einen Wert aus dem Interval [0,1] annehmen. Je „weicher" sich ein Stoff verhält, desto kleiner ist der dazugehörige Fallkoeffizient. Da man heutzutage eine Abhängigkeit zwischen dem Aussehen von Textilien im gefalteten Zustand und den Materialkennwerten beschreiben möchte, wird u.a. eine Beziehung zwischen dem Fallkoeffizienten und den Materialkennwerten gesucht.

2. Materialparameter

Seit geraumer Zeit wird versucht, die für die Drapierbarkeit maßgeblichen Materialparameter zu identifizieren. Von Anfang an [2] war klar, daß das Biegeverhalten bei der Faltenbildung eine sehr große Rolle spielt. Nach einer tieferen Untersuchung [3] stellte sich heraus, daß das Schubverhalten in der Ebene wesentlich in Gebieten doppelter Krümmung ist. Neuere Untersuchungen [4] beschreiben den Einfluß von zwei weiteren Kennwerten (Linearität des Kraft-Dehnungs-Verlaufes und der mittleren Abweichung vom Reibungskoeffizienten [5]) auf die Drapierbarkeit. Im Rahmen des hier verwendeten Schalenmodells wird das Biege- und Schubverhalten berücksichtigt. Die zur Beschreibung benötigten Biegesteifigkeiten und Schubsteifigkeiten werden mit dem Verfahren nach Kawabata [5] bestimmt. Die für die Modellierung notwendige Verdrillsteifigkeit kann nicht experimentell ermittelt werden. Außerdem sind zur vollständigen Beschreibung des Materialmodells Dehnsteifigkeiten erforderlich. Aufgrund der nichtlinearen Last-Verformungs-Kurve als Ergebnis des Kawabata-Versuchs und der zu erwartenden Membrandehnung bei der Bekleidung können nur näherungsweise Materialparameter für die Dehnsteifigkeiten ermittelt werden. Generell mangelt es an Experimenten zur Bestimmung von Querkontraktionszahlen. Daher ist es sinnvoll, eine Parameteranalyse durchzuführen, um den Einfluß bestimmter Kennwerte auf die Drapierbarkeit zu erfassen.

3. Verwendete Schalentheorie und ihre numerische Umsetzung

Eine textile Probe wird in dieser Arbeit als ein zweidimensionales Kontinuum betrachtet. Um den Übergang aus dem ebenen Zustand in den gefalteten Zustand zu beschreiben, wird eine auf dem Kontinuum nach Cosserat basierende Schalentheorie verwendet. Die Lösung des nichtlinearen Randwertproblems erfolgt numerisch mit der Methode der finiten Elemente. Die detaillierte Beschreibung des Modells findet man in [6].

4. Numerische Beispiele

Als erstes wurden Falten simuliert, die häufig an der Ecke eines quadratischen Tisches entstehen, wenn man den Tisch mit einer quadratischen Tischdecke überzieht. Es wurde bei der Modellierung angenommen, daß sich im Bereich des Tisches kein Stoff befindet. Der Stoff ist vollständig am Rand der quadratischen, starren Tischfläche eingespannt.

Da die ganze Struktur zwei Symmetrieachsen besitzt, konnte man das FE-Modell auf ein Viertel reduzieren. Die frei hängende textile Fläche ist nur mit ihrem Eigengewicht belastet, was im Modell einer Flächenlast entspricht. Sie geht von der ebenen Ausgangskonfiguration in die in Abbildung 1 (linke Seite) dargestellte Endkonfiguration über. Da das Ziel dieser Untersuchung u.a. in dem Suchen einer Abhängigkeit zwischen dem Fallkoeffizienten und

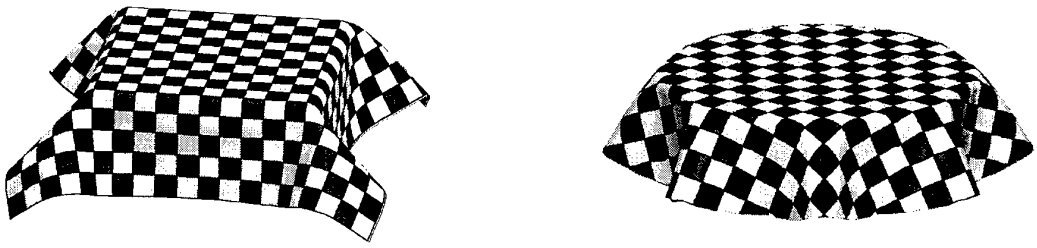


Abbildung 1: Simulierte textile Flächen

den Materialkennwerten besteht, wurde im nächsten Schritt der Fallversuch simuliert (Abbildung 1 rechte Seite). Genau wie beim ersten Beispiel wurden Annahmen bezüglich des Tisches, der Einspannung und der Belastung getroffen. Der Fallversuch stellt aus mathematischer Sicht ein Verzweigungsproblem dar, d.h. eine textile Probe kann mit einer unterschiedlichen Anzahl von Wellen die Endkonfiguration erreichen. Die numerische Behandlung des Verzweigungsproblems wurde mittels einer aufgebrachten, geometrischen Störung (gemäß der zu erwartenden Endkonfiguration) umgangen.

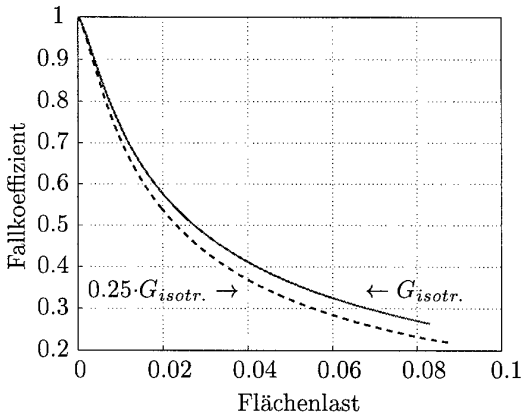


Abbildung 2: Abhängigkeit des Fallkoeffizienten von der Flächenlast und der Schubsteifigkeit in der Ebene

Die Abbildung 2 zeigt die Abhängigkeit des Fallkoeffizienten von der Flächenlast und der Schubsteifigkeit in der Ebene. Wie erwartet, nimmt der Fallkoeffizient mit wachsender Flächenlast monoton ab, wobei sich der Gradient des Fallkoeffizienten mit zunehmender Flächenlast verringert. Zusätzlich gibt es einen Grenzwert um 0.2, gegen den der Fallkoeffizient konvergiert. Diese Aussage stimmt mit der Feststellung der Arbeit [7] überein. Die obere Kurve der Abbildung 2 zeigt die Änderung des Fallkoeffizienten für den isotropen Fall bezüglich der Dehnsteifigkeit und Biegesteifigkeit, wobei die untere den Fall mit einer kubischen Symmetrie bezüglich der Dehnsteifigkeit und Isotropie bezüglich Biegesteifigkeit widerspiegelt. Der Einfluß der Schubsteifigkeit auf den Fallkoeffizienten bei der vierfachen Verkleinerung der Schubsteifigkeit ist speziell für größere Flächenlast nicht zu vernachlässigen. Das Phänomen kann mit der Bildung von Gebieten doppelter Krümmung erklärt werden. Sie können erst dann entstehen, wenn eine erhebliche Schubverzerrung zugelassen wird. Diese Gebiete entwickeln sich im Laufe der Deformation und spielen erst bei größeren Flächenlasten eine Rolle.

5. Literatur

1 Cusick, G.E.: The Resistance of Fabrics to Shearing Forces, Journal of the Textile Institute **52** (1961), 395–406 .
2 Chu, C.C.; Cummings, C. L.; Teixeira, N.A.: Mechanics of Elastic Performance of Textile Materials, Part V: A Study of the Factors Affecting the Drape of Fabrics - The Development of a Drape Meter, Textile Research Journal **20** (1950), 539–548 .
3 Cusick, G.E.: The Dependence of Fabric Drape on Bending and Shear Stiffness, Journal of the Textile Institute **56** (1965), 596–606 .
4 Hu, J.; Chan, Y.-F.: Effect of Fabric Mechanical Properties on Drape, Textile Research Journal **68**(1) (1998), 57–64 .
5 Kawabata, S.: Examination of Effect of Basic Mechanical Properties of Fabrics on Fabric Hand. In: Mechanics of Flexible Fibre Assemblies edited by J.W.S. Hearle; J.J. Thwaites; J. Amirbayat, Sijthoff & Noordhoff (1980) .
6 Jański, Ł.; Ulbricht V.: Numerical Simulation of Mechanical Behaviour of Textile Surfaces, erscheint in ZAMM .
7 Schenk, A.: Berechnung des Faltenwurfs textiler Flächengebilde, TU Dresden, Dissertation (1996) .

Anschrift: Łukasz Jański, Prof. Dr. Volker Ulbricht, Technische Universität Dresden,
Intitut für Festkörpermechanik, Mommsenstraße 13, 01062 Dresden, Deutschland
Email: janski@mfkrs1.mw.tu-dresden.de

KIENZLER, R.

On Consistent Higher–Order Plate and Shell Theories

Without recourse to any a priori assumptions (both feared and admired in engineering type of theories), consistent linear plate and shell theories up to a desired order are derived from the three-dimensional linear theory of elasticity.

1. Introduction

Plate and shell theories attempt to describe the three–dimensional state of deformation and stress in terms of the deformed and undeformed configurations of the middle surface. In this sense, plate and shell theories are inherently approximative. Regarding plates, two types of linear theories are well established, the Poisson–Kirchhoff, or classical plate theory and the Reissner–Mindlin, or extended plate theory. Both theories (and further more general theories not mentioned here) have in common, that they rely on sets of *a priori* assumptions concerning the distribution of displacements and stresses with respect to the thickness coordinate. Regarding shells, the situation is similar except that the variety of existing theories is even richer. In this paper, we will not use a priori assumptions. The only postulation of the proposed theory is that all field equations and boundary conditions are approximated uniformly. It turns out that not all of the parameters introduced are fixed by the field equations leaving the possibility to satisfy stress boundary conditions at the plate or shell faces *a posteriori*. The paper is restricted to the linear theory of elasticity.

2. Governing equations

Starting from the equations of linear elasticity (e.g., [1]), the procedure of deriving the theory is as follows. First, the displacements u_i are developed in thickness direction into a power series. Introducing a characteristic length h in thickness direction z, a characteristic in–plane length a and the dimensionless thickness coordinate $\zeta = \frac{z}{a}$ we have

$$u_i = a({}^0u_i + {}^1u_i\zeta + {}^2u_i\zeta^2 + \cdots) . \tag{1}$$

The strain–displacement relations deliver, simply by differentiation,

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = {}^0\epsilon_{ij} + {}^1\epsilon_{ij}\zeta + {}^2\epsilon_{ij}\zeta^2 + \cdots \tag{2}$$

After integration with respect to the thickness coordinate z, the strain–energy density W and the potential of external forces V are of the form

$$W = \frac{1}{2}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} E^{ijrs}\epsilon_{ij}\epsilon_{rs}dz = Gh[(\ )c^0 + (\ )c^2 + (\ )c^4 + \mathcal{O}(c^6)] \ , \tag{3}$$

$$V = -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} p^j u_j \, dz = pha[(\ )c^0 + (\ )c^2 + (\ )c^4 + \mathcal{O}(c^6)] \tag{4}$$

(elasticity tensor E^{ijrs}, shear modulus G, body forces p^j, shell or plate parameter $c^2 = \frac{h^2}{12a^2}$). In shell theory, the so–called shifter and its determinant are involved, additionally [2]. The application of the classical virtual work theorem delivers the equation of equilibrium (written either in terms of stress resultants or displacements) and the boundary conditions [3]. At this stage, one has to decide up to which power of c terms will be considered or neglected in the system of differential equations. The essential point of the proposed theory is that during the process of solving the equations (e.g., by elimination of unknowns), only terms up to this fixed order are retained. The zeroth–order approximation results in the classical disc and membran theories, the quadratic–order in the classical plate and shell bending theories and the biquadratic–order in bending theories that account for shear deformations. Due to lack of space, the procedure is illustrated only by application to a rectangular isotropic plate.

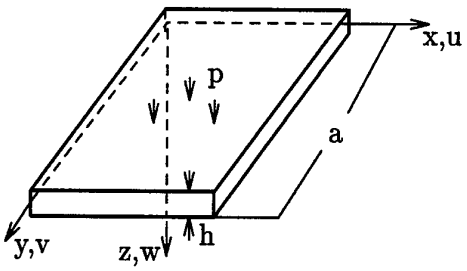


Fig.1 Rectangular Plate

3. Rectangular plates

Consider an isotropic rectangular plate embedded in a Cartesian coordinate system (x, y, z) with displacements (u, v, w) as shown in Fig. 1. The proper displacement–ansatz for a plate, according to (1), is given by

$$\begin{aligned} u &= a({}^1u\zeta + {}^3u\zeta^3 + {}^5u\zeta^5 + \cdots), \\ v &= a({}^1v\zeta + {}^3v\zeta^3 + {}^5v\zeta^5 + \cdots), \\ w &= a({}^0w\zeta + {}^2w\zeta^2 + {}^4w\zeta^4 + \cdots). \end{aligned} \tag{5}$$

If all terms up to the order of c^4 are considered in the analysis, the above mentioned equilibrium conditions result in a 9x9 system of differential equations.

Neglecting all terms multiplied by c^4 and solving for w, again neglecting all c^4 terms during this procedure, delivers the classical Poisson–Kirchhoff plate theory

$$\Delta\Delta w = \frac{pa^3}{K}, \quad K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \textit{Poisson's ratio } \nu, \tag{6}$$

including boundary conditions involving the ersatz–shear forces.

Retaining all terms up to the order of c^4 results in a slightly modified Reissner–Mindlin–plate equation

$$\Delta\Delta w + \kappa c^2 \Delta\Delta\Delta w = \frac{a^3}{K}\left(p - \frac{\nu}{10(1-\nu)}\Delta p\right), \qquad \kappa = \frac{12}{5(1-\nu)} \tag{7}$$

The equations for the stress resultants, i. e., bending moments and shear forces differ also slightly.

The solution process shows that the displacements have the form

$$\begin{aligned} &{}^1u = {}^1\overline{u} + c^2\,{}^1\hat{u} + c^4\,{}^1\tilde{u} + \mathcal{O}(c^6)\,,\ c^2\,{}^3u = c^2\,{}^3\overline{u} + c^4\,{}^3\hat{u} + \mathcal{O}(c^6)\,,\ c^4\,{}^5u = c^4\,{}^5\overline{u} + \mathcal{O}(c^6), \\ &\quad (\textit{same for } v), \\ &c^2\,{}^2w = c^2\,{}^2\overline{w} + c^4\,{}^2\hat{w} + \mathcal{O}(c^6)\,,\ {}^4c\,{}^4w = c^4\,{}^4\overline{w} + \mathcal{O}(c^6). \end{aligned} \tag{8}$$

All symbols introduced may be expressed by w and its derivatives. The system of differential equations, however, only fixes the linear combinations ${}^1\tilde{u} + 3\,{}^3\hat{u} + 9\,{}^5\overline{u}$ and ${}^2\hat{w} + 18\,{}^4\overline{w}/5$. Neither equation (7) nor the stress resultants are affected by the specific choice of ${}^3\hat{u}$, ${}^5\overline{u}$ and ${}^4\overline{w}$. These "free" parameters may be specified a posteriori to satisfy the boundary conditions at the plate faces $z = \pm\, h/2$.

Details of the sketched analysis and further results will be given in a forthcomming paper.

4. References

1 ESCHENAUER, H.; OLHOFF, N; SCHNELL, W.: Applied Structural Mechanics. Springer, Berlin 1992
2 NAGHDI, P. M.: Foundation of eastic shell theories. Progress in Solid Mechanics IV, North–Holland, Amsterdam 1963
3 KIENZLER, R.; GOLEBIEWSKA–HERRMANN, A.: Material conservation laws in higher–order shell theories. Int. J. Solids Structures 21 (1985) 1035–1045

Address: KIENZLER, R. University of Bremen, Fachbereich Produktionstechnik, IW3, Postfach 3304440, D–28334 Bremen

KOENEMANN, F.H.

Cauchy stress in mass distributions

The thermodynamic definition of pressure $P = \partial U/\partial V$ is one form of the principle that in a given state, the mass in V and potential are proportional. Subject of this communication is the significance of this principle for the understanding of Cauchy stress.

The stress theory as it is used today, was developed by Euler in 1776 and Cauchy in 1823. The following is a slightly edited quote of Truesdell [1].

p.164: Let **f** be pairwise equilibrated; let $-S$ denote the contact having the same underlying set as S but opposite orientation; then

$$\mathbf{t}_{-S} = -\mathbf{t}_S \tag{1}$$

p.170: Cauchy assumed that the tractions **t** on all like-oriented contacts with a common plane at **x** are the same at **x**, i.e. $\mathbf{t}_S$ at **x** is assumed to depend on S only through the normal **n** of S at **x**: $\mathbf{t}_S = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$. This statement is called the Cauchy postulate. S is oriented so that its normal **n** points out of $c(B)$ if S is a part of $\partial c(B)$. Thus $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$ is the traction at **x** on all surfaces **S** tangent to $\partial c(B)$ and forming parts of the boundaries of bodies in the exterior $c(B^e)$ of $c(B)$. In this sense $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ is the traction exerted upon B at **x** by the contiguous bodies outside it. As a trivial corollary of (1) follows Cauchy's fundamental lemma: $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$.

p.176: $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ are linearly independent. At a given place $\mathbf{x}_0$ the planes P_1 and P_2 normal to $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$, respectively, are distinct. We set $\mathbf{v}_3 = -(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ and consider the wedge **A** that is bounded by these two planes and the plane P_3 normal to $\mathbf{v}_3$ at the place $\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{v}_3$. We suppose ε small enough that **A** be the shape of some part of B, and we denote by $\partial_i\mathbf{A}$ the portion of the plane P_i that makes a part of the boundary of **A**. We let ε approach 0. If we write A_i for the area of $\partial_i\mathbf{A}$, we see that

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}_3|}A_3, \qquad A_2 = \frac{|\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_3|}A_3, \\ A_3 &= O(\varepsilon) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0, \\ V(\mathbf{A}) &= \frac{\varepsilon|\mathbf{v}_3|A_3}{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{If } \mathbf{c} = \frac{|\mathbf{v}_3|}{A_3}\int_{\partial\mathbf{A}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})\, dA, \tag{3}$$

from (2) and the assumption that $\mathbf{t}(\cdot, \mathbf{n})$ is continuous we see that

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{3} \frac{|\mathbf{v}_i|}{A_i}\int_{\partial_i\mathbf{A}} \mathbf{t}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}\right) dA + O(\varepsilon) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0. \tag{4}$$

Since **t** is a homogneous function of its second argument and a continuous function of its first argument,

$$\mathbf{c} \to \sum_{k=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_k) \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0. \tag{5}$$

On the other hand, we see that $\mathbf{c} \to \mathbf{0}$ as $\varepsilon \to 0$. Therefore, since the sum in (5) is independent of ε, it must vanish:

$$\sum_{k=1}^{3} \mathbf{t}(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_k) = \mathbf{0}. \text{ [End of quote]} \tag{6}$$

The key argument in the above text is: "*since* the sum in (5) is independent of ε". It is an *a priori* condition; behind this is the assumption that Newton's 3rd law (1) is the proper equilibrium condition for the problem, and the Newtonian understanding of pressure, $P = |\mathbf{f}|/A$ which is believed to be universally scale-independent. Pressure is a state function, and a pressure increase requires that work is done on a system of mass distributed in V; it is a change of state in the sense of the First Law. Pressure is defined as energy density,

$$P = \partial U/\partial V. \tag{7}$$

The question is then: how are $P = |\mathbf{f}|/A$ and $P = \partial U/\partial V$ mathematically related?

The thermodynamic definition of P is scale-independent, and an explicit statement of the proportionality of mass (measured in V the radius of which is $r = |\mathbf{r}|$) and potential U in a given state (Kellogg [2:80]). The thermodynamic equilibrium condition is

$$P_{surr} - P_{syst} = 0 \tag{8}$$

in scalar form. If both terms are thought to be caused by forces $\mathbf{f}$ [Newton] acting from either side on the surface of the system V the equilibrium condition is

$$\mathbf{f}_{surr} - \mathbf{f}_{syst} = 0; \tag{9}$$

for isotropic conditions (subsequently implied), both $\mathbf{f}$ are radial force fields. Since the system contains mass, and since it interacts with the surrounding through exchange of work, it acts as a source of forces; i.e. its source density $\varphi \neq 0$ in some statically loaded state. φ is always proportional to the mass in the system (Kellogg [2:45]); an existence theorem requires that if there is some function f of a point Q such that

$$\int f(Q)\, dV = \varphi, \tag{10}$$

both LHS and RHS must vanish with the maximum chord of V (Kellogg [2:147]). As with all of thermodynamics (Born [3]), the approach to stress must thus be based on a Poisson equation (Kellogg [2:156]). The equilibrium condition (8) thus can take the form

$$\varphi_{surr} - \varphi_{syst} = 0. \tag{11}$$

It is therefore of interest how the volume functions relate to the surface functions if the domain of interest V is changed in scale. In

$$\int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int \nabla \cdot \mathbf{f}\, dV = \varphi, \tag{12}$$

$\mathbf{f}$ may be either one of the LHS terms in (9). If mass is continuously distributed, $\varphi \propto V$, and $\nabla \cdot \mathbf{f}$ is a constant that is characteristic of the energetic state in which the system is. Hence in (12), LHS $\propto V$. Since $V \propto r^3$, but $A \propto r^2$, for LHS $\propto r^3$ to hold it follows that $|\mathbf{f}| \propto r$, or

$$\frac{|\mathbf{f}|}{|\mathbf{r}|} = const. \tag{13}$$

Thus as $V \to 0$, $|\mathbf{f}|/A \to \infty$, yet $\Delta U/\Delta V \to const.$ Both $\mathbf{f}_{syst}$ and $\mathbf{f}_{surr}$ vanish with $\mathbf{r}$; the condition in (10) is observed, stating that a system V with zero magnitude cannot do work on its surrounding, and vice versa.

ε (2-5) is an one-dimensional measure of the magnitude of the prism $\mathbf{A}$ (2), as is r for V in the subsequent discussion. It is to be taken into account that $P = |\mathbf{f}|/A$ is scale-independent if A is a free plane, yet both the surface of the prism $\mathbf{A}$ in (2) and the surface A in (12) are closed surfaces. The difference between (1) and (9) is that the latter distinguishes system and surrounding whereas the former does not. The thermodynamic system V represents a distributed source in the sense of potential theory (Kellogg [2:150 ff]). ε or r, respectively, is the zero potential distance (Kellogg [2:63]) which may have infinite length, or if it is finite it is set to have unit length by convention, but it cannot be zero or otherwise be let vanish.

References

1 TRUESDELL, C.A.: A first course in rational continuum mechanics. Academic Press, 1991.
2 KELLOGG, O.D.: Foundations of potential theory. Springer Verlag, 1929.
3 BORN, M.: Kritische Betrachtungen zur traditionellen Darstellung der Thermodynamik. Physik. Zeitschr., **22** (1921), 218-224, 249-254, 282-286.

Address: FALK H. KOENEMANN, Im Johannistal 36, 52064 Aachen, Germany; peregrine@t–online.de

KOLLING, S.; GROSS, D.

Rafting Behaviour of Nickel–based Superalloys

The microstructure in Ni–base superalloys is formed by second–phase coherent precipitates γ' in matrix material γ. Volume fraction, local distribution and shapes of the inclusions affect the excellent high temperature properties of these materials. Coherency–influenced and, due to an external load, strain–induced coarsening perpendicular or parallel to the load direction can also be observed. To describe this rafting called process, a model will be proposed taking into account arbitrary elastic anisotropy and isotropic interfacial energy. To simulate typical microstructures with several distributed inclusions, a 2D Monte Carlo–type finite element formulation is presented.

1. Basic Equations

Considered are N misfitting precipitates $\mathcal{B}_i^{in}$ with elasticity tensors $\mathbb{C}^{in}$ and lattice constants $a_{\gamma'}$ in a matrix domain $\mathcal{B}^{out}$ with elasticity tensor $\mathbb{C}^{out}$ and lattice constant a_γ. The difference in the lattice constants implies an eigenstrain $\varepsilon^0 = (a_{\gamma'} - a_\gamma)/a_\gamma \mathbf{1}$ of each precipitate, which is assumed to be purely dilatational. Breaking the two–phase structure into a large number of elementary particles n, the configurational free energy is given by $F = -k_B T ln(Z)$ with $Z = \sum_{r=1}^{n} exp(-\frac{\Phi_r}{k_B T})$. Here, Z is the configurational partial function, with Φ_r being the Hamiltonian for a particle state r, k_B is Boltzmann's constant and T is the absolute temperature for a n-particle system according to classical statistical mechanics. In the continuum formulation, the Hamiltonian Φ can be written as a sum of elastic energy, interfacial energy and the potential of external loads $\hat{\mathbf{t}}$:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_i^{in}} (\varepsilon - \varepsilon^0) : \mathbb{C}^{in} : (\varepsilon - \varepsilon^0)\, dA + \oint_{\partial \mathcal{B}_i^{in}} \gamma^0\, dS \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}^{out}} \varepsilon : \mathbb{C}^{out} : \varepsilon\, dA - \int_{\partial \mathcal{B}_\sigma^{out}} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u}\, dS. \tag{1}$$

Here, $\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T)$ is the total strain, $\boldsymbol{u}$ is the displacement, which is continuous for a coherent interface: $[\![\boldsymbol{u}]\!] = \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in \partial \mathcal{B}^{in}$ and γ^0 is the interfacial energy density. As a strategy for determining equilibrium shapes, a Monte Carlo step i in the energy difference $\Delta\Phi_i$

$$f(\Delta\Phi_i) = e^{-\frac{\Delta\Phi_i}{k_B T}} > z_i, \quad z_i \in (0,1) \tag{2}$$

after exchange of two elementary particles in comparison with random numbers z_i is used under the condition of a prescribed constant number of n (mass conservation).

2. Numerical Method

In classical finite element formulation the local field equations in a quadrilateral element Ω_e are approximated isoparametrically by bilinear shape functions $\boldsymbol{N} \in C^0$. Their derivatives are assembled under plane strain conditions in the matrix $\boldsymbol{B}$. This leads to the global residual

$$\bigcup_{e=1}^{n_{el}} \left\{ \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega - \int_{\partial \Omega_e^\sigma} \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{t}\, d\Gamma \right\} = \mathbf{0} \quad \text{with} \quad \int_{\Omega_e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega_e \approx \sum_{g=1}^{n_g} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{\sigma} det \boldsymbol{J}_e(\xi_g, \eta_g) w_g. \tag{3}$$

The occurring integrals are approximated by the Gaussian quadrature formula, where the index g designates a Gauss point, n_g the total number of integrating points per element, $\boldsymbol{J}_e$ the Jacobian and w_g the weight coefficients. Within the element Ω_e, material properties are assigned to the integrating points in dependence on their location:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \mathbb{C}^{in} (\boldsymbol{B}\hat{\mathbf{u}} - \varepsilon^0) & \forall\ (x_g, y_g) \in \mathcal{B}_i^{in} = \{(x,y) \,|\, (x - x_i^0)^p + \rho_i^p (y - y_i^0)^p \le a_i^p\},\ i = 1, \ldots, N \\ \mathbb{C}^{out} \boldsymbol{B}\hat{\mathbf{u}} & \forall\ (x_g, y_g) \in \mathcal{B}^{out} \end{cases} \tag{4}$$

This allows a simple and rapid generation of the mesh with n_{el} regular arranged elements with material discontinuities inside and by this the investigation of N inclusions with aspect ratio $\rho_i = a_i/b_i$ simultaneously. Furthermore, high

element distortion, which leads to a possible element instability is avoided consequently. For a suitable initial configuration, elliptical ($p = 2$) inclusions in isotropic and cubic inclusions ($p \to \infty$) in anisotropic materials are recommended. However, the described method usually requires more finite elements or, alternatively, more integrating points than the aligned approach for the same accuracy. For an ordinary number of finite elements, the 2×2 Gauss point integration has been proved to be sufficient. The equilibrium shape is obtained in analogy to inequality (2): Using statistical definition of entropy, an exchange of the local position of two Gauss points will be either accepted or rejected, depending on the difference of the Hamiltonian associated with this exchange. According to the Discrete Atom Method (DAM) [1,4], we call this generalized formulation the Gauss Point Method (GPM).

3. Results

For a physical interpretation of the simulation, it is useful to introduce the following parameters:

$$L = \frac{\bar{l}\bar{\mu}^{out}\bar{\varepsilon}^2}{\gamma^0}, \quad \bar{l} = \sqrt{A_{\mathcal{B}^{in}}}, \quad \bar{\varepsilon} = max\{\varepsilon^0_{ij}\}, \quad \bar{\nu} = \frac{\bar{\lambda}}{2(\bar{\lambda}+\bar{\mu})}, \quad \bar{E} = \frac{\bar{\mu}(3\bar{\lambda}+2\bar{\mu})}{\bar{\lambda}+\bar{\mu}}, \tag{5}$$

with the effective Lamé–constants $\bar{\mu} = \frac{1}{4}[C_{11} - C_{12} + 2C_{44}]$ and $\bar{\lambda} = \frac{1}{4}[C_{11} - 3C_{12} - 2C_{44}]$. As an example, a CMSX-6 nickelbase superalloy is considered with an area fraction of 40% γ', a dilatational eigenstrain $\bar{\varepsilon} = -0.38\%$ and an external load of $\sigma^\infty = \pm 250$ Mpa. As material parameters, an average Poisson's ratio of $\bar{\nu}^{in/out} = 0.28$ same for matrix and precipitate and an average Young's modulus $\bar{E}^{in} = 246$Gpa and $\bar{E}^{out} = 230$Gpa is taken from experiments [3]. The temporal evolution of the microstructure at a temperature of $T = 375$K is presented in Figure 1 in terms of Monte Carlo steps (MCS). Here, both size L and local position of the cubic inclusions are randomly distributed to mimic a realistic arrangement. Furthermore, periodical boundary conditions are used. At the early stage of the simulation up to 5000 MCS, a coherency–influenced coarsening process due to diffusive mass transport from small to large particles takes place. At the same time and at later stages, particles are elongated perpendicular to the load direction under tension. Contrary in the compressive case, the particles are elongated and coalescent in load direction. The simulation leads to typical rafting patterns, which are also observed in creep tests experimentally.

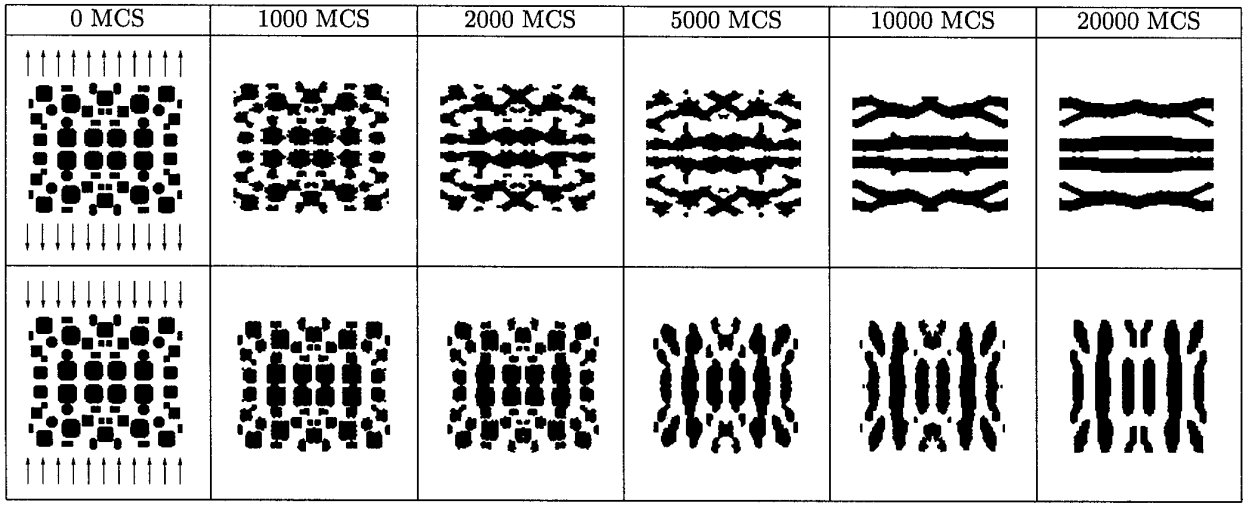


Fig. 1: Rafting process of a CMSX–6 Ni–based superalloy

4. References

1 LEE, J. K.: Coherency strain analysis via a discrete atom method. Scripta Metall. Mat. **32** (1995), 559–564
2 MURA, T.: Micromechanics of defects in solids. Martinus Nijhoff Publishers. (1987)
3 GÖKEN, M., KEMPF, M.: Microstructural properties of superalloys investigated by nanoindentations in an atomic force microscope. Acta Mater. **47** (1999), 1043–1052
4 KOLLING, S., GROSS, D.: Description of two–phase materials using discrete atom method. ZAMM **80** (2000), S385–S386

Addresses: PROF. DR.-ING. DIETMAR GROSS, DIPL.-ING. STEFAN KOLLING, Darmstadt University of Technology, Institute of Mechanics, Hochschulstr. 1, D–64289 Darmstadt, Germany.

BORIS KUSELJ, FRANC KOSEL

The Growth of Debonded Area in a Bonded Two-Layer Plate-Strip

Our paper treats the problem of debonding initiation and growth of debonded area in a bonded two-layer plate-strip loaded with external compressive force and bending moment after the buckling process of the weaker layer has been completed. The conditions and parameters at which the weaker layer can locally buckle are studied where the possibility is considered that the stress state in the layers could be in elastic-plastic domain. The mathematical model for the determination of deflection state after the local buckling process of the weaker layer is presented. While the external bending moment is growing at a constant external compressive force, the length of the debonded area and the deflections state are evaluated. Calculated critical values of external compressive force and bending moment for local buckling of the weaker layer are compared with those obtained by an experimental approach.

1. Introduction

A through-width delamination [1] is a defect of laminates which can appear due to external bending moment, external compressive axial force or both of them, acting on opposite edges of a laminate. Defects in laminates and multilayer or sandwich plates can occur in domains between layers where adhesion is imperfect or even there is no adhesion, [2]. Such initial defects especially in bonded multilayer plates can be one or more debonded areas with decreased adhesion or cause loss of the adhesion in the glue between layers. These domains are initial defects in the material and are very sensitive to layer local buckling.

2. Mathematical model for the determination of the deflection state

An ideally flat bonded two-layer plate-strip with the stiffness of layer 1 much greater than that of layer 2 is chosen. Layers are made of materials with an elastic-linear hardening rheological model and prior to loading are bonded along their entire length with a glue having a certain rheological property defined by the function $c_q = c_q(\varepsilon)$, Figure 1. The model of loading was chosen so that 90% of the local buckling force of layer 2 was achieved by the axial force F_0 while the remaining part of the local buckling force belonged to the bending moment M_0. At a given relation between the external loads and mechanical properties of the system, layer 1 bends but layer 2 locally buckles into a symmetrical shape so that only half of the system can be treated. The local buckling problem and deflection state are analyzed according to the second order theory suggested by Chwalla, [3]. In the mathematical model for the determination of deflections experimentally measured stress-strain relations for the glue are considered. These relations are uniform and non-linear in the whole strain range so that the *modulus of the glue* $c_q = \frac{\sigma_G}{\varepsilon_G}$ is introduced. Two differential equations for layers deflections in the debonded part immediately after buckling can be written and solved numerically, [4]. From these deflections the layers curvatures, the stress states and internal bending moments in the layers can be calculated. At an increase in the bending moment M_0 at a constant force F_0, new curvatures of the layers are calculated. From these curvatures the deflection state of the debonded part right after buckling can be obtained: $v_1(x) = \frac{1}{\kappa_1}\left[1-\sqrt{1-(\kappa_1 x)^2}\right]$, $v_2(x) = \frac{1}{\kappa_1}\left[1-\sqrt{1-\left(\kappa_1\frac{L_0}{2}\right)^2}\right] + \frac{1}{\kappa_2}\left[\sqrt{1-\left(\kappa_2\frac{L_0}{2}\right)^2}-\sqrt{1-(\kappa_2 x)^2}\right]$. The described procedure is repeated during the process of increasing bending moment M_0. For the deflection state of the bonded part C–T the following closed-form solution is obtained: $v(x) = -\frac{v_C'' x^2}{2} + C_1 x - C_2\frac{1}{\omega^2}cos\omega x - C_3\frac{1}{\omega}sin\omega x + C_4$. Here are $v_C'' = \frac{M_C}{T_{eq}I_{eq}}$, $\omega^2 = \frac{F_0}{T_{eq}I_{eq}}$, $I_{eq} = \frac{b}{12}(h_1+h_2)^3$ equivalent moment of inertia, T_{eq} equivalent Engesser's modulus, b width of the system, h_1 and h_2 thicknesses of the layers.

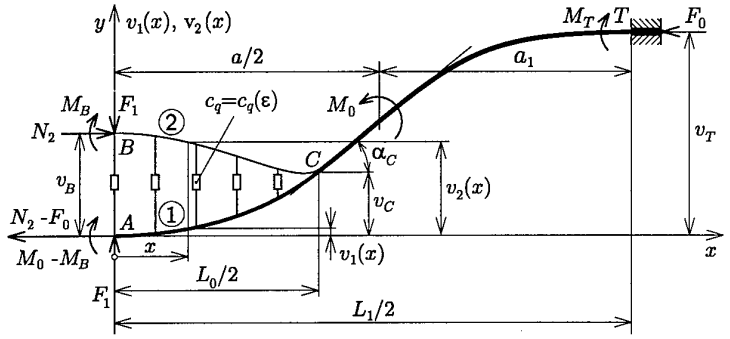


Figure 1: The right-hand part of the deformed plate-strip

3. The growth of the debonded area

Compressive preloading force F_0 induces a compressive axial force $N_2^{F_0}$ in layer 2 which is smaller than the critical force $N_{2,cr}$, [4]. The system is then loaded by an external bending moment M_0 which results in an axial force $N_2^{M_0}$. When the internal axial force reaches the critical value the conditions for the local buckling

are fulfilled. Beside the force F_0 the system must be loaded with the critical external bending moment to make layer 2 buckle locally. This moment can be obtained from equation $M_{0,cr} = -\frac{2T_{eq}I_{eq}}{bP_2}\left(N_{2,cr} - N_2^{F_0} + \sigma_{02}A_2\right)$, where $P_2 = P_2(E_2, E_{t2}, h_1, h_2)$, E_{t2} tangent modulus and σ_{02} yield strength of layer 2. Due to increasing external bending moment M_0 are increasing also tensile stresses in adhesive bonds that tear apart over a length L_0 when stresses exceed a certain critical value. Maximal length of the debonded area $L_{0,max}$ is reached at a limit bending moment $M_{0,lim}$ and can be computed from the equilibrium condition between bending moments $M_{G,int}$ and $M_{G,ext}$: $M_{G,int} - M_{G,ext} = 0$. The internal moment $M_{G,int} = M_{G,int}(b, L_0, c_q)$ is due to stiffness of the adhesive bonds, but the external moment $M_{G,ext} = M_{G,ext}(N_{2,B}, v_B, v_C)$ results in tearing of the adhesive bonds.

4. Experiments

Experimental work was performed using a universal testing machine [4]. Measured values of mechanical properties of layers and stress-strain relations for the chosen adhesive were applied to the numerical example. Test pieces of width b=24 mm were loaded by the calculated compressive force $F_0^{calc} = 1117.01$ N. Using a couple of weights, an additional constant bending moment was applied to the test pieces. The necessary weights $F_g^{exp} = 95.46$ N for the local buckling of layer 2 were measured and the critical bending moment $M_{0,cr}^{exp} = 2147.87$ Nmm was calculated.

5. Numerical example

As a numerical example the plate-strip of a width $b = 24\ mm$, thicknesses $h_1 = 2\ mm$ and $h_2 = 0.27\ mm$ was chosen. Layer 1 was made of aluminium and layer 2 of steel. Using the presented mathematical model the following results were calculated: critical buckling force $N_{2,cr}^{calc} = 3175.72$ N, preloading force $F_0^{calc} = 1117.01$ N, critical external moment $M_{0,cr}^{calc} = 1970.48$ Nmm and the necessary weight $F_g^{calc} = 87.58$ N for the local buckling of layer 2. Next, the deflections of the layers were computed for the case where the system was loaded with an increasing external moment M_0 in addition to the constant preloading force $F_0^{calc} = const.$ (Figure 2). In Figure 3 is presented the length of the debonded area L_0 in dependence on the increasing external bending moment M_0.

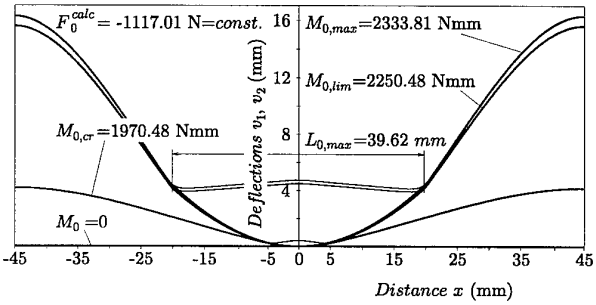


Figure 2: Deflections of layers

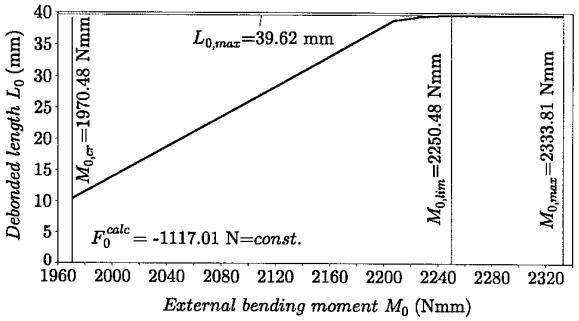


Figure 3: The length of the debonded area

From the graphs one can see that the debonded length is growing up with the increasing external bending moment up to a certain limit length but if the moment increases further the debonded length remains constant. On the other hand, the layers deflections are increasing even with further increasing of the bending moment.

6. Discussion of results and conclusions

On the basis of the experiments it can be concluded that the compressive preloading force should be slightly lower than the buckling force of the weaker layer. Instability and the local buckling process appears when an additional bending moment is applied to the system. This was also confirmed by the numerical model. We estimate that the 8.2% deviation between the bending moment calculated by the presented model and the measured value can more or less be explained by simplifications made in the mathematical model which were carried out because of the theory of the second order. We estimate that, using the theory of the second order, a sufficient accuracy of results for the critical bending moment and also for the layers deflection state after the local buckling was obtained.

7. References

1 J. D. Whitcomb, Mechanics of Instability-Related Delamination Growth, Composite Materials: Testing and Design, ASTM STP 1059, S. P. Garbo, Ed., Amer. Soc. for Testing and Materials, Philadelphia, (1990), 215-230.

2 D. Bruno, A. Grimaldi: Delamination failure of layered composite plates loaded in compression, Int. J. Solids Struct. **26** (1990), 313-330.

3 S. P. Timoshenko, J. M. Gere, Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill Book Company, New York, 1961.

4 F. Kosel, B. Kuselj: The Local Buckling Problem of a Two-Layer Plate-Strip with a Debonded Area, Z. Angew. Math. und Mech., **79** (1999), S2, 417-418.

Addresses: Asst. Boris Kuselj, MSc., Prof. Franc Kosel, PhD., University of Ljubljana, Faculty of Mechanical Engineering, Aškerčeva 6, SI-1000 Ljubljana, Slovenia.

MISHURIS, G. AND KUHN, G.

Special Modelling of the Interface Crack (Mode I and II)

For a crack lying between two dissimilar elastic materials, different models of the interphase zone depending on a mechanical feature of the interface can be considered to avoid such physically unrealistic phenomena appearing in the ideal interface model as stress oscillation and crack surface interpenetration [1,2]. The present paper deals with an interphase zone which is assumed to be of an infinitesimal thickness and is described by special interface boundary conditions along the joined materials. Various shapes of the zone are taken into account. Asymptotic behaviour of the displacement and stress fields near the crack tip under Mode I and II loading is found.

Our aim is to show that asymptotics of the elastic solution near the crack tip depend in an essential way on the interphase zone shape. We also present results concerning the main exponent of the stress singularity.

1. Formulation of the modelling problem

We shall investigate the modelling problem for an infinite interface crack into a bimaterial plane with a special nonideal interface to find asymptotics of the solution near the crack tip. The nonideal interface is situated on the crack line ahead ($y = 0$, $0 < x < \infty$ or what is equivalent $\theta = 0$) and is modelled by interfacial boundary conditions:

$$\left([\mathbf{u}] - r^{\alpha}\mathbf{\Lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}_n^{+}\right)_{|\theta=0} = \mathbf{0}, \quad [\boldsymbol{\sigma}_n]_{|\theta=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \tau_\theta & 0 \\ 0 & \tau_r \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Here $\boldsymbol{\sigma}_n^{\pm}$ is the vector of the stresses along the corresponding side of the intermediate zone, but $\tau_\theta, \tau_r, \alpha \geq 0$ are some known constants. By $[f]_\Gamma = (f^+ - f^-)_\Gamma$ we denote as usual the jump of a vector-function f along a surface Γ.

Along the crack surfaces ($\theta = \pm\pi$) balanced tractions are defined:

$$\sigma^{\pm}_{\theta\theta}{}_{|\theta=\pm\pi} = p_{\pm}(r), \quad \sigma^{\pm}_{r\theta}{}_{|\theta=\pm\pi} = q_{\pm}(r), \tag{2}$$

where the known functions $p_{\pm}(r)$ and $q_{\pm}(r)$ are of compact supports, so that the behaviour of any solutions of the modelling problem near singular points (the crack tip and infinity) has to be connected only with interior properties of the problem.

We shall seek for the regular solution of the problem in each of the half-planes ($y > 0$ and $y < 0$) satisfying the boundary conditions (1) - (2) and meeting additional conditions at the crack tip and at infinity:

$$\mathbf{u}^{\pm} = \begin{cases} \mathcal{O}(r^{\vartheta_0}), & r \to 0, \\ \mathcal{O}(r^{-\vartheta_\infty}), & r \to \infty, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\sigma}^{\pm} = \begin{cases} \mathcal{O}(r^{\gamma_0 - 1}), & r \to 0, \\ \mathcal{O}(r^{-\gamma_\infty - 1}), & r \to \infty, \end{cases} \tag{3}$$

for almost all values of the angular parameter $\theta \in [-\pi, \pi]$. Here $\boldsymbol{\sigma}^{\pm}$ is the stress tensor in the corresponding domain, $\vartheta_0, \vartheta_\infty \geq 0$, $\gamma_0, \gamma_\infty > 0$ ($\vartheta_0 + \vartheta_\infty > 0$) are some unknown constants which depend, in general, on the values of all elastic and interaction parameters and have to be found.

2. Solution to the problem

On the first step, using a line similar to the reasoning as in [3,4] for a crack perpendicular to the nonideal interface, the Mellin transform technique is applied to reduce the modelling problem to a system of functional equation (4). The solution of the system (vector-function $\mathbf{D}(s)$) has to be analytical into the strip $-\gamma_0 < \Re s < \gamma_\infty$. It also has to tend to zero at infinity and to satisfy an additional condition at zero point:

$$\mathbf{\Lambda}_*\cdot\mathbf{D}(s+\alpha-1) - \frac{1}{s\sin\pi s}\mathbf{\Phi}(s)\cdot\mathbf{D}(s) = \frac{1}{s\sin\pi s}\mathbf{F}(s), \quad \mathbf{D}(0) = -\mathbf{F}(0). \tag{4}$$

Here $\mathbf{\Phi}(s) = \cos\pi s\,\mathbf{I} + \eta\sin\pi s\,\mathbf{E}$; η is the so-called Dundur's parameter ($|\eta| < 1$); $\mathbf{I}$ - the unit matrix; $\mathbf{\Lambda}_*$ is some

normalization of the matrix $\mathbf{\Lambda}$; components e_{jl} of the matrix $\mathbf{E}$ are defined as follows: $e_{jj} = 0$, $e_{jl} = (-1)^l$, but the vector-function $\mathbf{F}(s)$ from the right-hand side of (4) depends on the loading applied and the material parameters. Let us underline here that only in the case $\eta = 0$ the system (4) is reduced to two independent equations. This means that in this and only in this case so-called Mode I and Mode II deformations can be investigated separately.

If $\alpha = 1$ system (4) is, in fact, a system of linear equations and its solution is found in a closed form. In the other cases $\alpha \neq 1$ we reduce the system of FEs to a system of singular integral equations on a half-axis of the form: $(I + \eta\mathcal{A} + \mathcal{B})\mathbf{U} = \mathbf{G}$, where $\mathcal{A}$ is a singular operator with moving (the Cauchy type) and fixed point singularities, but $\mathcal{B}$ has the only fixed singularities at zero and infinity points. Basing on the results from [5,6] we have completely investigated the solvability of the system of SIEs in an appropriate functional space with a special weight which takes into account the behaviour of the solution near zero and infinity points.

Basing on the asymptotic behaviour of the solution of the system of SIEs (and, hence, the solution of the system of FEs) we have found asymptotic behaviour of the modelling problem (1) - (3) near the crack tip and at infinity. Thus, the sought-for parameters from *a priori* estimates (3) are calculated as follows:

$$\begin{cases} \vartheta_0 = 0,\ \gamma_0 = 1 - \alpha,\ \vartheta_\infty = \gamma_\infty = 1/2 + i\epsilon, & 0 \leq \alpha < 1 \\ \vartheta_0 = \gamma_0 = \vartheta_\infty = \gamma_\infty = \omega(\eta, \tau_r, \tau_\theta), & \alpha = 1 \\ \vartheta_0 = \gamma_0 = 1/2 + i\epsilon,\ \vartheta_\infty = 0,\ \gamma_\infty = \alpha - 1, & 1 < \alpha < \infty \end{cases} \tag{5}$$

where the parameter $\epsilon = \pi^{-1} \tanh^{-1} \eta$, but ω is the nearest to the imaginary axis zero of the corresponding determinant of the system of linear equations appearing in the case $\alpha = 1$.

As it can be observed, the parameter γ_0 determining the behaviour of stresses near the crack tip has a jump at the point $\alpha = 1$. This should mean that the main singular stress terms have a gap at this point too. However, if the value of α is closed to the unit then additionaly singular terms of stresses appear. Moreover, as $\alpha \to 1$ the number of the singular terms approaches infinity! As another interesting fact we can mention the presence of nonvanishing terms in the asymptotic expansion of displacements near the crack tip. As a result, a displacement discontinuity can arise along the nonideal interface on the crack line ahead in the cases $0 \leq \alpha < 1$.

3. Conclusions

We are not able to present in this short paper all obtained results. It will be done in the full version. We only would like to note one very important fact for possible applications. Namely, if $\alpha = 1/2$ then only the classic stress singularity appears independently of the values of the other parameters. Moreover, the corresponding stress singular term near the crack tip is the unique one and is of the same form as it is for the crack situated in a homogeneous material. In the author's opinion, this allows to apply the classic fracture mechanics criteria in the fracture analysis of a bimaterial structure with the nonideal interface. Moreover, the arising displacement discontinuity along the interface can be involved in the analysis to predict a possible delamination of the structure.

Acknowledgements

G. MISHURIS *is very thankful to the Alexandrer von Humboldt Foundation for support of the research reported in this paper.*

4. References

1 WILLIAMS M.L.: The stress around a fault or cracks in dissimilar media; Bull. Seismol. Soc. Am. **49** (1959), 199-204.
2 RICE J.R.: Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks; Trans ASME, J. Appl. Mech. **55** (1988), 98-103.
3 MISHURIS G.S.: Asymptotics of elastic solution near the crack tip terminating at a nonideal bimaterial interface (Mode I and II) [in Russian]; Mech. Comp. Mat. **34** (1998), 621-642.
4 MISHURIS G.S.: Stress singularity at a crack tip for various intermediate zones in bimaterial structures (Mode III); Int. J. Solids Structures. **36** (1999), 999-1015.
5 MISHURIS G.S., OLESIAK Z.S.: On boundary problems in fracture of elastic composites; Euro. Jnl. Applied Mathematics. **6** (1995), 591-610.
6 PRÖSSDORF S., SILBERMANN B.: Numerical Analysis for integral and related operators equations; Berlin: Akademie-Verlag. Basel: Birkhäuser 1991

Address: PROF. DR. GENNADY MISHURIS*, PROF. DR. GÜNTHER KUHN:
Chair of Applied Mechanics, University of Erlangen-Nuremberg, Egerlandstr. 5, 91058, Erlangen, Germany
*Permanently: Dept of Math., Rzeszów University of Technology, W. Pola 2, 35-959, Rzeszów, Poland

MUELLER, R.; GROSS, D.

A constitutive model for materials with microstructure evolution

A material model is proposed which captures microstructural changes in two phase materials with phase transitions. Using a homogenization technique, macroscopic material properties are derived. A set of microstructural variables is chosen to describe the micro geometry. Approximating the second phase as an ellipsoidal inclusion with eigenstrain and interfacial energy the attempt is made to model the micro mechanics rather accurately. Results are shown for parameters that mimic Nickel base alloys.

1. Micromechanical model

Considered is a precipitate embedded in a surrounding matrix material. The two phases are assumed to be isotropic linear elastic. In the precipitate an inelastic eigenstrain ε^0 is introduced to model the lattice misfit between the two phases. The system is loaded by an external stress field $\boldsymbol{\sigma}^\infty$. In the absence of body forces the following set of equations needs to be solved:

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}\,, \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma}^\infty \quad \text{for} \quad |\boldsymbol{x}| \to \infty \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathrm{M}}\boldsymbol{\varepsilon} & \text{in the matrix phase,} \\ \mathbb{C}^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^0) & \text{in the precipitate phase.} \end{cases} \tag{1}$$

Assuming that the precipitate is an ellipsoid of revolution with the volume V^{P}, the geometry is described by two parameters, namely the aspect ratio $m = (a-b)/(a+b)$ of the principal axis a and b and a unit vector $\boldsymbol{n}$ along the axis of revolution. From Eshelby's work (see [1]) it is known that the stress inside an ellipsoidal inhomogeneity is constant and given by

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{(\mathbb{C}^{\mathrm{P}}\mathbb{G}^{-1}\mathbb{P}^{\mathrm{M}}\mathbb{C}^{\mathrm{M}-1} - \mathbb{1})}_{\mathbb{B}^0}\underbrace{\mathbb{C}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{\varepsilon}^0}_{\boldsymbol{\sigma}^0} + \underbrace{\mathbb{C}^{\mathrm{P}}\mathbb{G}^{-1}\mathbb{C}^{\mathrm{M}-1}}_{\mathbb{B}^\infty}\boldsymbol{\sigma}^\infty\,, \quad \text{where} \quad \mathbb{G} = \mathbb{1} + \mathbb{P}^{\mathrm{M}}(\mathbb{C}^{\mathrm{M}-1}\mathbb{C}^{\mathrm{P}} - \mathbb{1}). \tag{2}$$

The Eshelby tensor $\mathbb{P}^{\mathrm{M}}$ of the matrix material depends on the morphology and the Poisson's ratio ν^{M}.
The macroscopic material behaviour is calculated by a homogenization technique. Denoting the volume average in the entire cell by $\langle\cdot\rangle$ and the volume fraction of the precipitate phase by $f = V^{\mathrm{P}}/V$, the macroscopic stress-strain relation is calculated assuming that particle interaction can be neglected. Introducing the constant precipitate stress (2) together with the average stress theorem ($\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle = \boldsymbol{\sigma}^\infty$) results in a macroscopic linear elastic material behaviour ($\mathbb{C}^*$) with inelastic eigenstrains $\boldsymbol{e}^0$:

$$\begin{aligned} \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle &= \mathbb{C}^*(\langle\boldsymbol{\varepsilon}\rangle - \boldsymbol{e}^0)\,, \quad \text{where} \\ \mathbb{C}^{*-1} &= \mathbb{C}^{\mathrm{M}-1} + f(\mathbb{C}^{\mathrm{P}-1} - \mathbb{C}^{\mathrm{M}-1})\mathbb{B}^\infty \quad \text{and} \quad \boldsymbol{e}^0 = f\left[(\mathbb{C}^{\mathrm{P}-1} - \mathbb{C}^{\mathrm{M}-1})\mathbb{B}^0\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\varepsilon}^0\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

In order to derive evolution equations that are thermodynamicly admissible the total potential Ψ, consisting of interface energy E^{int}, elastic strain energy E^{el} and the potential of the external load E^{ext}, is calculated.

$$\begin{aligned} &\Psi(\boldsymbol{\sigma}^\infty, m, \boldsymbol{n}) = E^{\mathrm{int}} + E^{\mathrm{el}} + E^{\mathrm{ext}}\,, \quad \text{where} \\ &E^{\mathrm{int}} = \gamma A\,, \quad E^{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{el}}\, dV\,, \quad E^{\mathrm{ext}} = -\int_{\partial V} \boldsymbol{t}^\infty \cdot \boldsymbol{u}\, dA \end{aligned} \tag{4}$$

The average value $\langle\Psi\rangle$ then serves as a Gibbs function on the macro scale. For purely mechanical processes the dissipation inequality has to be satisfied. Proposing linear relations between the evolution of the morphology variables and their driving forces the dissipation inequality is satisfied if the the proportionality constants α and β are not negative.

$$\mathcal{D} = -\underbrace{\frac{\partial\langle\Psi\rangle}{\partial m}}_{\tau_m}\dot{m} - \underbrace{\frac{\partial\langle\Psi\rangle}{\partial \boldsymbol{n}}}_{\boldsymbol{\tau}_n}\cdot\dot{\boldsymbol{n}} \geq 0 \qquad \text{with} \quad \dot{m} = \alpha\tau_m\,, \quad \dot{\boldsymbol{n}} = \beta\boldsymbol{\tau}_n \qquad \rightsquigarrow \qquad \alpha \geq 0\,, \quad \beta \geq 0 \tag{5}$$

2. Results

In the following material parameters are considered that mimic the behaviour of Nickel base alloys. Considered is a soft precipitate, i.e the Lamé's constants are related by $\lambda^{\mathrm{P}} = 0.7\lambda^{\mathrm{M}}$ and $\mu^{\mathrm{P}} = 0.7\mu^{\mathrm{M}}$. In fig. 1a) a uniaxial loading is simulated, starting form a spherical micro geometry ($m = 0$). In the tensile case an oblate ($m < 0$) microstructure forms, while in compressive loading prolate ($m > 0$) morphologies occur. The macroscopic strain in the tensile case is depicted in fig. 1b). The strain $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ in the loading direction increases, because by the oblate shape more of the soft precipitate material is arranged in the plane perpendicular to the loading direction.

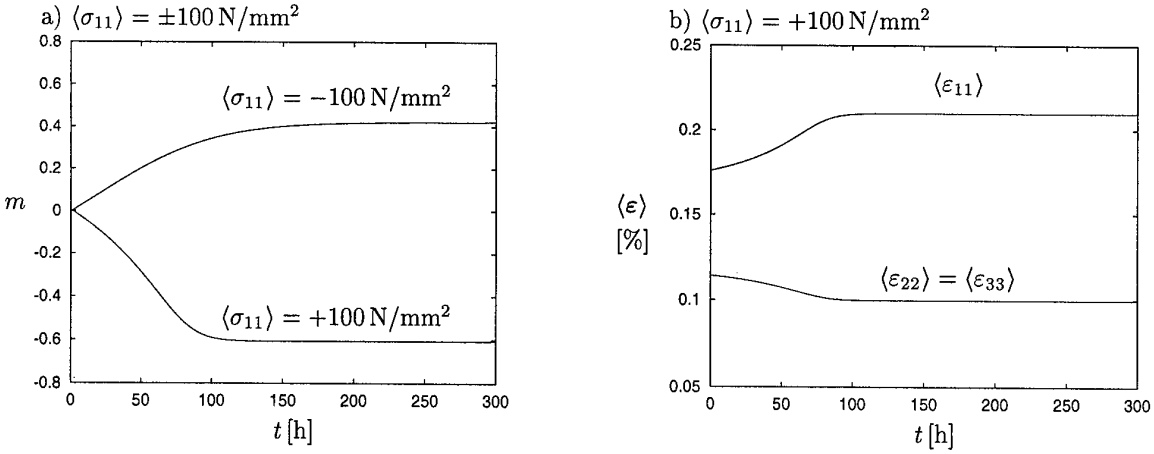


Figure 1: Evolution of a) aspect ratio m, b) macroscopic strain $\langle\varepsilon\rangle$ in uniaxial loading

It is well known from analytical and numerical calculations [2]-[3] and experimental observations, that a shape instability can occur for large precipitates. Fig. 2a) shows a calculation of this instability phenomenon. In the absence of external forces for large particles the sphere is no longer stable. It becomes a local maximum in the potential with respect to the aspect ratio m. Then the oblate shape is a stable micro morphology (absolute minimum of the potential), while the prolate geometry is a metastable state (local minimum of the potential). The application of an external load acts as an imperfection on the system, see also fig. 2a). On the macroscopic level this instability produces a hysteresis loop in the overall stress-strain response, see fig. 2b).

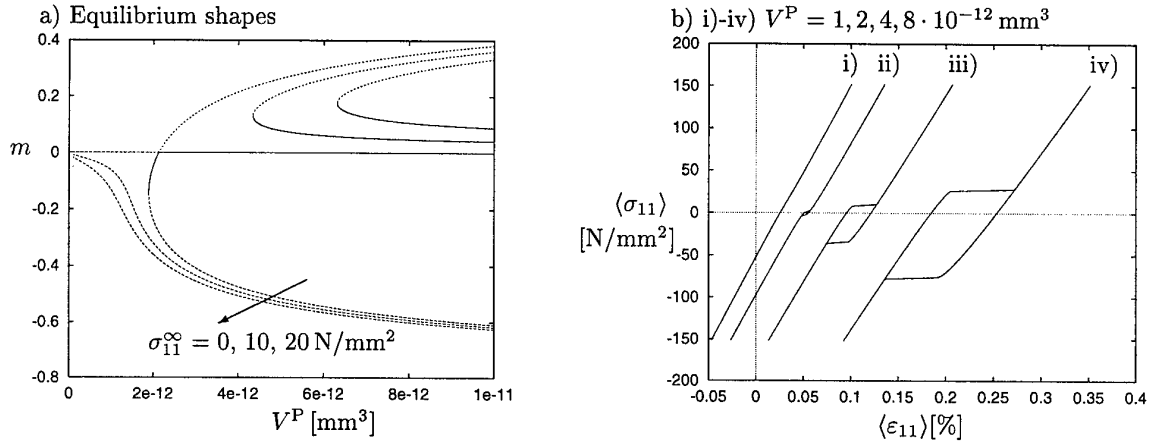


Figure 2: a) Shape instability on the micro level b) Stress strain hysteresis on the macro level

3. References

1 Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff Publishers (1987).
2 Johnson, W.C.; Cahn, J.W.: Elastically induced shape bifurcations of inclusions, Acta metall., **32**, 11 (1984), 1925–1933.
3 Mueller, R.; Gross, D.: 3D simulation of equilibrium morphologies of precipitates, Comp. Mat. Sci., **11** (1998), 35–44.

Addresses: Dipl.-Ing R. Mueller, Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross, Darmstadt University of Technology, Institute of Mechanics, Hochschulstr. 1, D-64289 Darmstadt, Germany

PETRIŠIČ JOŽE, KOSEL FRANC

Dynamic Model of a Free-falling Folded String

Our paper treats a special dynamic viscoelastoplastic uniaxial rheological element (URE), which enables us to study mechanical states in strings. To use this element the string has to be presented with a net of mass points which are connected with the UREs. As a special case we studied a motion of a vertically hanging folded string where one end of the string is fixed and the other one is let free so that it is in free falling condition due to the gravitational attraction. Numerical calculations, not considering the energy conservation of a falling string, have shown that the free end falls faster than a free-falling body, that the speed of the free falling end rises steeply, and that the time of falling is in very good agreement with the one known from theory.

1. Introduction

The problem of a folded inextensible string has been treated in[1]. Due to its weight the string has a fold. If one end is released, the free end starts falling. This interesting problem of mechanics has been solved analytically under the assumption of the energy conservation of the system[1]. Later[2] a chain has been applied as a model of a free falling folded string. Experiments have shown that the moving part falls definitely faster than a normal free falling body. Schagerl et al.[2] made a model of the chain and the experimental results have been confirmed numerically.

2. The equilibrium equations of the URE in dynamic state

In an arbitrary time t for the URE we can write two dynamic equilibrium equations, for the mass m_i and the mass m_j, as follows

$$\begin{aligned} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i &= -c_i\dot{\mathbf{r}}_i - d_{ij}(\dot{\mathbf{r}}_j - \dot{\mathbf{r}}_i, \mathbf{n}_{ij})\mathbf{n}_{ij} - \alpha_{ij}(\mid \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i \mid -l_{ij}^0 - \Delta l_{ij}^{pl})/l_{ij}^0\mathbf{n}_{ij} - \eta_{ij}\Delta\dot{l}_{ij}^{pl}\mathbf{n}_{ij} + \mathbf{f}_i \\ m_j\ddot{\mathbf{r}}_j &= -c_j\dot{\mathbf{r}}_j - d_{ij}(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_j, \mathbf{n}_{ji})\mathbf{n}_{ji} - \alpha_{ij}(\mid \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j \mid -l_{ij}^0 - \Delta l_{ij}^{pl})/l_{ij}^0\mathbf{n}_{ji} - \eta_{ij}\Delta\dot{l}_{ij}^{pl}\mathbf{n}_{ji} + \mathbf{f}_j \end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i, \ddot{\mathbf{r}}_i$ are position, velocity and acceleration of mass m_i, c_i is external damping, $\mathbf{f}_i$ is influence of the external loads on mass m_i and relative mechanical properties between masses m_i and m_j: d_{ij} is inner damping, p_{ij} sliding, α_{ij} elasticity, η_{ij} viscosity and final displacements between masses m_i and m_j: l_{ij}^0 is length of unloaded URE, l_{ij} is length of loaded URE, Δl_{ij}^{pl} is plastic displacement, $\Delta\dot{l}_{ij}^{pl}$ is velocity of plastic displacement, Δl_{ij}^{el} is elastic displacement of loaded URE. $\mathbf{n}_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$ is direction from mass m_i to mass m_j and $\alpha_{ij} = A_{ij}E$, where A_{ij} is a fictitious cross-section of URE and E is modulus of elasticity.

Equations (1) present differential equations which in a general case can be solved only using a numerical method. It means that we are solving these two differential equations step by step where we have to take into account the yield condition. First, we calculate the force between both masses $F\mid_{t+\Delta t} = \alpha_{ij}(l_{ij}\mid_{t+\Delta t} - l_{ij}^0 - \Delta l_{ij}^{pl}\mid_t$ and then determine the normal stress in the URE. In the case when the uniaxial normal stress in the URE is in elastic region $\sigma\mid_{t+\Delta t} < \sigma_Y$, then a plastic displacement is zero: $\Delta l_{ij}^{pl}\mid_{t+\Delta t} = \Delta l_{ij}^{pl}$, $\Delta\dot{l}_{ij}^{pl}\mid_{t+\Delta t} = 0$. In the case when the stress exceeds the yield stress, the plastic displacement is $\Delta l_{ij}^{pl}\mid_{t+\Delta t} = \Delta l_{ij}^{pl} + p_{ij}(l_{ij}\mid_{t+\Delta t} - l_{ij}\mid_t)$, $0 \le p_{ij} < 1$, and its velocity is $\Delta\dot{l}_{ij}^{pl}\mid_{t+\Delta t} = \frac{\Delta l_{ij}^{pl}\mid_{t+\Delta t} - \Delta l_{ij}^{pl}\mid_t}{\Delta t}$, and force between both masses in the URE is $F\mid_{t+\Delta t} = \alpha_{ij}(l_{ij}\mid_{t+\Delta t} - l_{ij}^0 - \Delta l^{pl_{ij}}\mid_{t+\Delta t})$. If the rheologic model depends on time t, the rheologic properties change after each step too.

By connecting N masses in the direction of the same axis with the UREs we get a model for studying a dynamic problem of a string. If the UREs have their axes oriented differently in space, this system of masses and UREs presents a space uniaxial dynamic model of string, in a special case of a free falling folded string. If we denote the influence of both UREs which are directly connected with mass m_i by $\mathbf{h}_i$, the equilibrium equation for the mass m_i in a shorter form is

$$m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = -c_i\dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{h}_i + \mathbf{f}_i, \quad i = 1, 2 \ldots, N \tag{2}$$

Using the system of ordinary differential equations we can solve a general dynamic problem of a space string made of a material with a viscoelastoplastic rheological model and the string can be placed in a damping medium.

The system of equations (2) was solved by the Runge-Kutta method of the fourth order. If we limit ourselves to a model with a constant elasticity α, which is the same for all UREs and if all masses are equal to m and the length of all UREs is equal to l^0, the Runge-Kutta method is absolutely stable, if $\Delta t < 0.5\sqrt{\frac{ml^0}{\alpha}}$. On the basis of numerous numerical tests we found that the method was stable also in the case of low internal or external damping. In the case of strong damping ($c >> 0$) or ($d >> 0$) we have to shorten the time increment to reach numerical stability.

3. The model of folded string

Schagerl et al.[2] describe an experiment with a folded chain of a length $L = 2.41m$ and a mass of $0.097kg$. One end of the chain was fixed while the other was left free to fall due to its weight. This challenged us to use the same string with a same length and mass. The following assumptions were made: 1) the string has a constant mass per unit of length, 2) there is no damping ($c = 0,\ d = 0$), and 3) the string is ideally elastic ($p = 0,\ \eta = 0$). In calculating the time t_k of falling of the string free end, the end of falling was considered to be the moment when the string end reached maximum speed. The ratio between the maximum speed of the free end v_k and gt_k was denoted as χ, $g = 9.80665m/s^2$. In establishing a suitable number of UREs for modeling the string, we chose one URE for modeling the fold and $\alpha = 1000N$ and it was found out that with increasing the number of UREs, the time of falling of the free end stabilizes at a value which is smaller than the time of falling of a free-falling body whereas the speed of falling is increasing steeply.

The study was continued on a model with 241 UREs and we were changing elasticity α and observing the time and speed of falling of the free end of the folded string. From Table 1 we can see that the free end of the string with a low elasticity is falling with the same speed as a free-falling body, which is quite logical. The free end of rigid strings, on the other hand, falls faster than a free-falling body. When a certain limit of rigidity is exceeded ($\alpha > 10^2N$), further increase in rigidity does not increase the speed significantly any longer.

α	$\tau = t_k\sqrt{g/\overline{L}}$	χ	$\overline{L}$
0.01	1.41	1.00	138.5
0.1	1.40	1.10	19.50
1.0	1.29	2.67	4.475
10	1.22	4.59	2.717
10^2	1.21	5.89	2.424
10^3	1.21	6.42	2.380
10^4	1.21	6.54	2.372

Table 1: The free end of rigid strings falls faster

Should, prior to falling, the two ends of the string hanging in the gravitational field be together or do we get a higher speed of falling of the free end if they are apart for a certain distance? We found out that for the studied phenomenon, the tip of the fold should have a finite dimension while its size is not important. The speed of the free end reaches maximum speed if the ends are separated by approximately 12 lengths of URE.

In the continuation, a mass M was added to the free end of the string to study how this affects the maximum speed of the falling free end. If a mass M is attached to the falling free end, we can clearly see from Table 2 that because of this the free end falls more slowly, which is somewhat surprising. In the last column of Table 2 are given the theoretically calculated[1] dimensionless times of falling of the free end of the inextensible string loaded by a mass M. If the second and the fourth columns are compared, we can see that the dimensionless times agree by approximately 0.3%.

M	$t_k\sqrt{g/\overline{L}}$	χ	$t_t\sqrt{g/L}$
0.0	1.202	7.47	1.19814
0.0015	1.216	4.35	1.21301
0.003	1.228	3.28	1.22497
0.006	1.247	2.47	1.24421
0.012	1.274	1.90	1.27184
1.0	1.409	1.01	1.40867

Table 2: The speed of the free end depends on the mass at the free end

In the experiment reported by Schagerl et al.[2] a styropore ball with a mass of $M = 0.0015kg$ was attached to the free end of the chain. The calculations with our model have shown that due to this load the time of falling of the chain is prolonged by approximately 0.025%. The additional mass attached to the end of the chain causes that the maximum speed of the free end of the chain in falling is approximately by 42% smaller than if there were no mass.

4. References

1 Hamel, G.: Theoretische Mechanik. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1967

2 Schagerl, M., Steiner, W., Steindl A., Troger, H.: On the paradox of the free falling folded chain. Acta Mechanica 125, 1997

Addresses: Prof. dr. Jožne Petrišič and prof. dr. Franc Kosel, Faculty of Mechanical Engineering, Aškerčeva 6, 1000 Ljubljana, Slovenia

RYSSEL, E.; BRUNN, P.O.

Strömung eines quasi-Newtonschen Fluids durch eine plötzliche Verengung

Das quasi-Newtonsche Fluid (QNF) ist ein inkompressibles, inelastisches Fluid ohne Gedächtniseffekte, bei dem der Tensor der Reibungsspannungen $\boldsymbol{\tau}$ direkt proportional dem Deformationsgeschwindigkeitstensor ist

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta\mathbf{D}. \tag{1}$$

Für stationäre, zwei-dimensionale (2-D) Strömungen wird für die Viskositätsfunktion η eine Abhängigkeit von der Dehnrate $\dot{\epsilon}$ und dem Betrag der relativen Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$, zugelassen. Die Dehnrate ist dabei über die zweite Grundinvariante von $\mathbf{D}$ definiert

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{-I_2(\mathbf{D})} = \sqrt{D_{11}^2 + D_{12}^2}. \tag{2}$$

Die relative Rotation eines Fluidteilchens ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\omega} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{u} - \boldsymbol{e_i} \times \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{e_i}}{\mathbf{dt}} \quad , \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \tag{3}$$

wobei der zweite Term die Rotation des Hauptachsensystems von $\mathbf{D}$ bedeutet mit den Achsrichtungen $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ und $\mathbf{e_3} = \mathbf{k}$. Die relative Winkelgeschwindigkeit ist unabhängig von der Wahl des Bezugssystems, d.h. $\boldsymbol{\omega}$ ist damit objektiv.

Die Rechtfertigung der Beziehung

$$\eta = \eta(\dot{\epsilon}, \omega) \tag{4}$$

stammt von Strömungen mit konstanter Verformungsgeschichte (SkV). Sind dies 2-D Strömungen, dann läßt sich die Viskositätsfunktion stets in Form von Gl. (4) angeben. Für andere Strömungen stellt die Beziehung 4 natürlich nur eine mögliche Näherung dar. In den Grenzfällen $\omega = 0$, d.h. planarer Dehnströmung, taucht die planare Dehnviskosität η_E auf

$$\eta_E = \frac{T_{11} - T_{33}}{\epsilon} = 4\eta(\dot{\epsilon}, 0), \tag{5}$$

während bei einer einfachen Scherströmung die Assoziation $\dot{\epsilon} = \omega = \frac{1}{2}\dot{\gamma}$ erfüllt sein muß, und es gilt

$$\eta_S(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \eta(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}) \quad , \quad \dot{\gamma} = 2\dot{\epsilon}. \tag{6}$$

Mit Hilfe des Klassifizierungsparameters

$$X = \frac{2\omega}{\dot{\epsilon} + \omega} \tag{7}$$

lassen sich 2D-Strömungen in schwach ($1 \leq X \leq 2$) und stark ($0 \leq X < 1$) einteilen. Mit einer Wichtungsfunktion $f(X)$ läßt sich eine Viskositätsfunktion angeben

$$\eta = [\eta_S(\dot{\gamma})]^{f(X)} \cdot \left[\tfrac{1}{4}\eta_E(\dot{\epsilon})\right]^{1-f(X)}, \tag{8}$$

die die Gln. (5) und (6) erfüllt, wenn man verlangt

$$f = 0 \quad \text{für X} = 0$$
$$f = 1 \quad \text{für X} = 1.$$

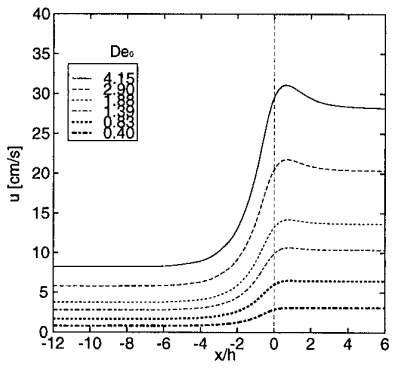
Üblicherweise wird $f = 1$ für sämtliche schwachen Strömungen gesetzt ($f = 1$ für $1 \leq \text{X} \leq 2$).

Um die Leistungsfähigkeit des QNF zu demonstrieren, werden die numerischen Berechnungen für ein Giesekus Fluid [1] und entsprechende experimentelle Daten [2] für die Strömung durch eine plötzliche 4:1-Verengung zum

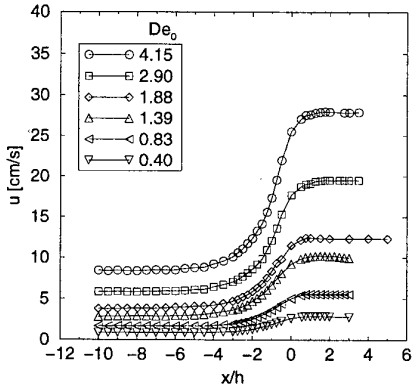
Vergleich herangezogen. Mit Hilfe der Ausdrücke von η_S und η_E eines Giesekus Fluids, der Modellparameter von [1] und der Wahl

$$f(X) = \frac{3sin^4\left(\frac{\pi}{2}X\right)}{\left[1+2\sin^4\left(\frac{\pi}{2}X\right)\right]}\ ,\ 0 \leq X < 1, \tag{9}$$

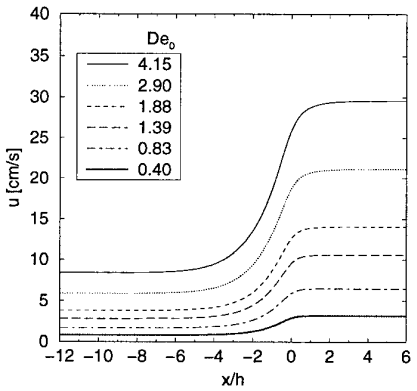
ergibt sich gute Übereinstimmung. Abbildung 1 demonstriert dies sehr deutlich.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 1: Symmetrieliniengeschwindigkeiten des (a) Giesekus-Modells [1], (b) Experiments [2], (c) QNF für verschiedene Strömungszustände

1. References

1 Azaiez, J., Guénette, R. and Aït-Kadi, A.: Numerical simulation of viscoelastic flow through a planar contraction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. **62** (1996), 253–277.

2 Quinzani, L.M., Armstrong, R.C. and Brown, R.A.: Birefringence and laser-Doppler velocimetry (LDV) studies of viscoelastic flow through a planar contraction. J. Non-Newtonian Fluid Mech. **52** (1994), 1–36

Addresses: Dr. Edna Ryssel, Prof. Dr. P.O. Brunn, Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Cauerstr. 4, 91058 Erlangen, Germany

SADIKI, A., HUTTER, K.

Electro-Thermomechanical balance equations for a non-material Interface in a deformable body with electric quadrupole

The present paper aims to show, how a non-material interface in a deformable body with electric quadrupole has to be described as a cosserat continuum. Such surface is thermodynamical activ and is bearing surfacial electromagnetic field quantities [1, 6]. Based on the macroscopical (nonrelativistic) results obtained in body for the ponderomotive forces, couples and energy various alternate expressions of the surface forces, couples and energy are given on the surface, so that the treatment, in a natural fashion, gives rise to the concept of surface stress moments. This result is a generalized case of various special results obtained in earlier investigations of electromagnetic interfaces [2, 3].

1. Introduction

Several sources review the state of the art for electrodynamical thermodynamics of interfaces [e.g.1, 2]. However, the interfaces were investigated often as non-polar materials with membrane characteristics even when the electromagnetics effects are considered. Actually, in chemical or electrodynamical thermodynamics, one deals with structured interfaces which need to be described as shell or as polar medium. The category forming by the works of Albano & Bedeaux [3] has been shown in [6] to be incapable of leading to a description of polar interfaces experimentally observed. In [1], a complete set of surfacial Maxwell's equations has been presented based on a full consideration of quadrupole moments. All through this work analogies or symmetries have been found between bulk and surface equations; however, some transversality conditions along with additional evolution equations emerge on the interface.

2. Preliminaries

The surfacial thermoelectromechanical balance laws including Maxwell's equations derived in [1] can be deduced in an elegant manner from a general form of balance relation on the interface. Following [4], it yields

$$\frac{d_w}{dt}\int_{\Sigma_t}\psi_s\,dS = -\int_{\partial\Sigma_t}\boldsymbol{\varphi}_s\cdot\boldsymbol{h}\,ds + \int_{\Sigma t}(\pi_s+\sigma_s)dS - \int_{\Sigma_t}\Big[\!\Big[\boldsymbol{\varphi}_v+\psi_v(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\Big]\!\Big]\cdot\boldsymbol{n}\,dS + \int_{\Sigma_t}\sigma_s^{el}dS \quad (1)$$

Here, ds denotes the differential arc length along $\partial\Sigma_t$, which is oriented counterclockwise around the surface normal $\boldsymbol{n}$. This curve is chosen to be material in the sense that it possesses the same tangential velocity as do material particles sitting instantaneously on the surface. The singular surface as a whole, however, is non-material, because matter may cross it. Moreover, dS is the area element on Σ_t, and d_w/dt denotes total time derivative following the velocity $\boldsymbol{w} = w_n\boldsymbol{n} + w^\alpha\boldsymbol{\tau}_\alpha$ of Σ_t in Euclidian space. $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ is the tangential vector on Σ_t. In (1), the field quantities π_s and σ_s denote mechanical surface production and supply of a physical quantity ψ, whilst ψ_s is the surface density of ψ; $\boldsymbol{\varphi}_v$ is the nonconvective bulk influx of ψ through the material surface of the bulk phase, which moves with velocity $\boldsymbol{v}$ in Euclidian space and $\boldsymbol{\varphi}_s$ the nonconvective influx rate of ψ through the boundary curve $\partial\Sigma_t$ which moves with the surface velocity whose (tangential) components are w^α. Lastly, the bulk density of ψ is denoted by ψ_v. The symbols $\big[\!\big[\cdots\big]\!\big]$ and $\langle\cdots\rangle$ indicate respectively the jump and the mean values of their enclosures on Σ_t. Allowing charges, currents, electric and magnetic polarizations to exist on the interface, the last term in equation (1) is new and expresses the electromagnetic contributions in the balance equations emerging as an additional supply term. To specify this term in form of surfacial ponderomotive force, couple and energy of electromagnetic forces in the momentum, momentum of momentum and energy equations, respectively, is the topic of the following section.

3. Expressions of the surfacial electromagnetic contributions

Here, the ponderomotive forces, couples and energy will be calculated on the basis of the theory of electrons following the results of De Groot & Suttorp [5], but remaining in the framework of the classical mechanics limited by the use of the Galilean invariance. Because the existence of the surfacial fields is now without doubt through their introduction in a consistent and rational way in reference [1], we can from now on use the singularity method [6] for localization. Let $\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{B}}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\mathcal{H}}, q, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\mathcal{J}}$ and $\boldsymbol{M}$ denote the electric field, the magnetic induction, the electric displacement, the magnetic field, the volume density of the free charges, the electric polarisation, the electric quadrupole moment, the total current and the magnetization per unit volume in a moving frame and q^{eff} and $\boldsymbol{\mathcal{J}}^{eff}$ the effective electric charge

and electric current. When physical or material quantities are attached to the singular surface, the corresponding fields are denoted as above by a subscript s. It is in the nature of the subject matter that the algebra required be long and tedious. Because of the lack of space, we give only the final results of the derivation. Some details can be found in [6].

As far as the momentum equation is concerned, the electromagnetic contribution σ_s^{el} expresses the surfacial ponderomotive forces. They are given by

$$\boldsymbol{F}_s^{el} = \boldsymbol{F}_s^{eff} + \nabla_s \cdot \boldsymbol{T}_s^{em} + \left[\!\left[\boldsymbol{T}_v^{em} \right]\!\right] \cdot \boldsymbol{n}\,, \quad \text{with} \quad \boldsymbol{T}_s^{em} \cdot \boldsymbol{n} = \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_v \rangle \, (\boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{n})\,, \quad \langle \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{n} \rangle \otimes \boldsymbol{\mathcal{E}}_s = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

prescribing the transversality condition for the electromagnetic stress tensor. $\boldsymbol{F}_s^{eff} = q_s^{eff} \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_v \rangle + \frac{1}{c} \boldsymbol{\mathcal{J}}_s^{eff} \times \langle \boldsymbol{B}_v \rangle + \langle q_v^{eff} \rangle \boldsymbol{\mathcal{E}}_s + \frac{1}{c} \left\langle \boldsymbol{\mathcal{J}}_v^{eff} \right\rangle \times \boldsymbol{B}_s$ is the surfacial effective electromagnetic force, $\boldsymbol{T}_v^{em}$ is the volumetric electromagnetic stress tensor and ∇_s is the surfacial gradient operator. Using the surfacial momentum of the electromagnetic field $\boldsymbol{G}_s$ an alternate expression for the ponderomotive force can be found as

$$\boldsymbol{F}_s^{eff} = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{G}_s + \nabla_s \cdot \boldsymbol{T}_s^{Max} + \left[\!\left[\boldsymbol{T}_v^{max} \right]\!\right] \cdot \boldsymbol{n} + w_n \left[\!\left[\boldsymbol{G}_v \right]\!\right], \text{ with } \boldsymbol{T}_s^{Max} \cdot \boldsymbol{n} = -w_n \boldsymbol{G}_s - \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_v \rangle \, (\boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{n}) \tag{3}$$

as transversality condition for the surfacial Maxwell stress tensor. $\boldsymbol{T}_v^{max}$ and $\boldsymbol{G}_v$ are volumetric contribution of the Maxwell stress tensor and momentum of the electromagnetic field.

Considering the momentum of momentum equation, the surfacial electromagnetic contribution expresses the couple of the electromagnetic forces $\sigma_s^{el} \equiv \boldsymbol{C}_s^{el}$. It is given by

$$\boldsymbol{C}_s^{el} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{F}_s^{eff} + \nabla_s \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}_s^{em} + \boldsymbol{M}_s^{em}) + \left[\!\left[\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}_v^{em} + \boldsymbol{M}_v^{em} \right]\!\right] \cdot \boldsymbol{n}\,. \tag{4}$$

The spin non-convective flux is given by $\boldsymbol{M}_s^{em} = \langle \boldsymbol{Q} \rangle \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_s$ and $\boldsymbol{M}_v^{em} = \boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{\mathcal{E}}_v$. It emerges in a natural way produced by the electric quadrupole moment. The relation, $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{T}_s^{em} + \boldsymbol{M}_s^{em}) \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{x} \times \Big((\boldsymbol{P}_s \cdot \boldsymbol{n}) \langle \boldsymbol{\mathcal{E}}_v \rangle \Big) - \langle \boldsymbol{Q} \rangle \times (\boldsymbol{n} \boldsymbol{\mathcal{E}}_s)$, expresses the transversality condition of the total surface stress moment (sum of the non-convective surfacial moment of the momentum flux and the surfacial spin non-convective flux).

Because the ponderomotive forces are not unequivocal defined (see Eq. (2) and (3)), it results that the electromagnetic contribution of the couple and the total contributions in the energy balance equation $\sigma_s^{el} = \mathcal{L}_s^{el}$ are also not unequivocal. Because of the lack of space, these expressions are not written down here (see [6]).

4. Conclusion

By considering at least the electric quadrupole moment, it results that an intrinsic surface stress moment $\boldsymbol{M}_s^{em}$ emerges, which necessarily leads to a non trivial balance equation of the spin. Therefore, the investigated interface has to be described as a polar medium and a Cosserat theory may be applied.

In exploiting the entropy inequality, it results the following observations. On the basis of the generalized Clausius-Duhem-Coleman-Noll approach in the framework of rational thermodynamics, the fact that the energy contributions are not unequivocal, leads to a non-unequivocal expression of the entropy flux and the supply of entropy in the entropy inequality. Therefore, it is recommended to use a general concept of entropy principle following the Liu & Müller approach, in which these quantities are constitutive quantities for which constitutive relations must be postulated.

5. References

1 Sadiki, A. and Hutter, K.(1996): Surfacial Electrodynamics, Part II: Electromagnetism on a non-material Interface in a deformable body with electric and magnetic quadrupoles, Int. J. appl. electr. and mech., 9.

2 Daher, N. and Maugin, G. A. (1987): Deformable semiconductors with interfaces: Basic continuum equations, Int. J. Engng. Sci. 25, 1093-1129.

3 Albano, A. M. and Bedeaux, D. (1987): Non-Equilibrium Electro-thermodynamics of polarizable multicomponent fluids with Interface, Physica 147A, 407-435

4 Dell'Isola, F. and Kosinski, W. (1993): Deduction of thermodynamic balance laws for bidimensional nonmaterial directed continua modelling interphase layers, Arch. mech., 45, 333-359

5 De Groot, S.R. and Suttorp, L.G. (1972): Foundations of Electrodynamics, Noth-Holland, Amsterdam

6 Sadiki, A. (1995): Elektrodynamik deformierbarer Phasengrenzflächen, Ph. D. Thesis, TU-Darmstadt.

Addresses: DR. HABIL. A. SADIKI, PROF. K. HUTTER, PH. D. Darmstadt University of Technology, Mechanical Engineering Department, Insitute of Mechanics, Petersenstr. 30, 64289 Darmstadt, Germany

SRPČIČ, S., SRPČIČ, J., TURK, G.

Deflections of Glulam Beams in Changing Humidity

Deformations of straight glulam beams loaded by the constant load at constant temperature and in cyclically changing relative humidity were studied. The deflections of the beam were predicted by numerical methods in which the water content distribution was estimated separately. Afterwards the deformation of the beam was evaluated using the water content distribution as the input data. The results of water content distribution as well as deflections of the beam were compared with experiments performed in January 2000 at the Slovenian National Building and Civil Engineering Institute.

1. Introduction

It is well known that wood which is exposed to moisture content changes exhibits larger deformation than the wood in constant moisture conditions. The simultaneous action of load and changing moisture content leads to mechano-sorptive effect, which has been studied by several authors who performed experiments and proposed computational models (see e.g. Toratti [1992]). The mechano-sorptive effect depends mainly on differences in levels of relative humidity, specimen size, direction of loading, type of loading and species and age of the wood.

2. Experiment

Long–term tests of straight glulam beams (size 5 by 10 by 180 cm) in different constant and changing climatic conditions were completed in January 2000. The specimens were made from European spruce (Abies alba Mill.) and glued with resorcyn–phenol–formaldehide type of glue. There were 7 laminations. Some control specimens were kept at constant humidity, others were exposed to changing humidity but were not loaded. The dimensions of the specimen and loading are shown in Fig. 1.

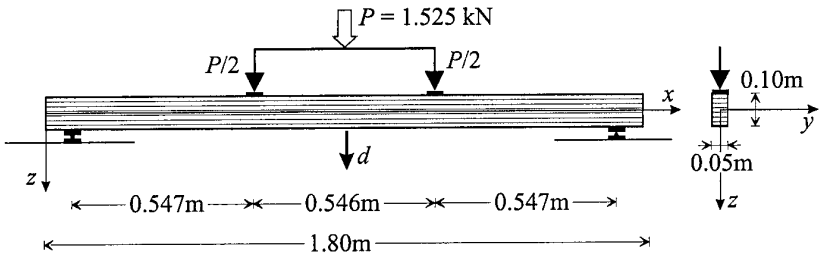


Fig. 1: Dimensions of the specimen

The relative humidity was set to 95% for the period of two weeks, then to 65% for another two weeks. This cycles were repeated four times. The deflection of the beam was measured during the experiment. In addition the specimens that were left unloaded in changing climatic conditions were periodically cut and the moisture content in the outer layer and in the core was measured by gravimetric method.

3. Computational model and numerical example

The moisture transfers through the porous media predominately by diffusion, therefore the distribution of the moisture content was estimated by solving the following differential equation which describes the transient moisture diffusion through the cross-section of the beam

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{1}$$

in which isotropy was assumed, w and D are moisture content (kg/m^3) and diffusion coefficient (In our calculation the diffusion coefficient was taken to be $D = 10^{-10}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.). A simple boundary condition is considered

$$D\frac{\partial w}{\partial y}e_{ny}+D\frac{\partial w}{\partial z}e_{nz}=S(w_A-w_S), \tag{2}$$

where S, surface emissivity, is taken to be $S = 2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/s}$, whereas w_A and w_S are equivalent ambient moisture content and moisture content on the surface, respectively. The equivalent ambient moisture content depends on the relative humidity of the sorrounding air and type of wood used in the experiment.

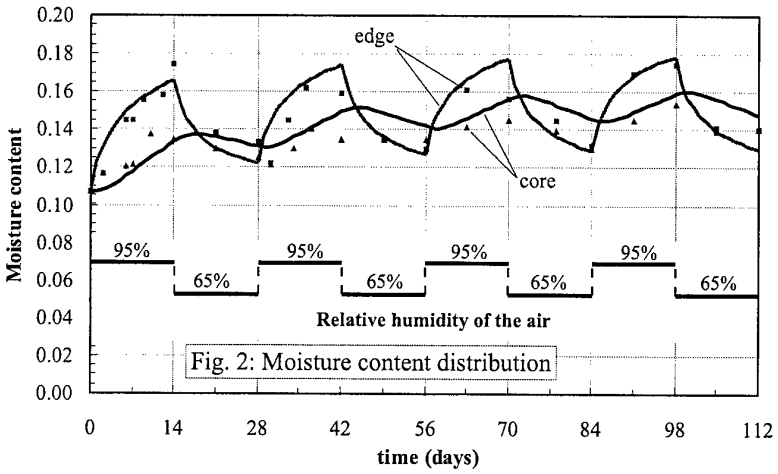


Fig. 2: Moisture content distribution

Generally, the differential equation (1) with corresponding boundary conditions (2) cannot be solved analytically, therefore the numerical solution employing finite element method is used. As it can be seen from Fig. 2, where computed values are presented by solid lines, the numerical results are very close to the measured values of moisture content. A few points where the discrepancy is more apparent can be explained by experimental error. Generally the difference is below 1%. The moisture content distribution is then used as the input data for deformation analysis.

The deflections of the beam are determined by the computer program NONWOOD based on highly accurate non–linear beam element. The constitutive relationship used in the program can in general be written by the following equation

$$d\sigma = d\sigma(\sigma_0, \varepsilon_0, w_0, d\varepsilon, dw, dt). \tag{3}$$

In numerical evaluation the infinitesimal stress and strain increments are replaced by the finite ones. The total strain increment $\Delta\varepsilon$ is composed of shrinkage $\Delta\varepsilon_s$, normal creep $\Delta\varepsilon_c$, mechano-sorptive deformations $\Delta\varepsilon_{ms}$, and mechanical deformation $\Delta\varepsilon_e$: $\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon_s + \Delta\varepsilon_c + \Delta\varepsilon_{ms} + \Delta\varepsilon_e$. The shrinkage and swelling deformations are assumed to be a linear function of change in moisture content $\Delta\varepsilon_s = \alpha_s \Delta w$.

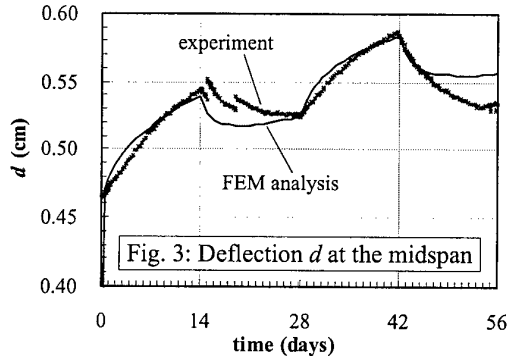


Fig. 3: Deflection d at the midspan

The normal creep depends on time only (the changes of moisture content have no effect on normal creep). Presently there are three normal creep models included in the program. The simplest model consisting of two elastic and one damping element can be represented by the following equation:

$$\Delta\varepsilon_c = \sigma_0\, a \left(e^{-b\,t_1} - e^{-b\,t_0}\right). \tag{4}$$

The mechano-sorptive deformation is expressed by

$$\Delta\varepsilon_{ms} = \sigma_0\, \Phi^{\infty} \left(e^{-c|\Delta w|}\right), \tag{5}$$

where c is generally different for sorption and desorption ($c^+ \neq c^-$). The mechanical part of the deformation consists of elastic part (plasticity effect is negligible)

$$\Delta\varepsilon_{mech} = \Delta\varepsilon_e = \Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_s - \Delta\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_{ms} = (\Delta\sigma - \Delta E\,\varepsilon_{e0})/E_1 \longrightarrow \Delta\sigma \longrightarrow \sigma_1 = \sigma_0 + \Delta\sigma, \tag{6}$$

where elastic modules depends on moisture content $E(w) = E_{ref}(1 - 1.06\,w)$.

4. Conclusions

The experimental results on relatively large specimens exhibits large variation. Thus, a large number of similar if not equal experiments should be performed to reliably estimate parameters involved in numerical models.

The numerical example shows that the behavior of timber structures in changing climatic conditions can be successfully simulated by appropriate shrinkage and creep idealization.

5. References

1 TORATTI, T.: Creep of different size wood specimens in varying environmental humidity, International Timber Engineering Conference, Proceedings, London (1991) 4.239–4.246.

Addresses: STANE SRPČIČ, GORAN TURK, University of Ljubljana, Faculty of Civil and Geodetic Engineering, Jamova 2, 1000 Ljubljana, Slovenia, e-mail: ssrpcic@fgg.uni-lj.si, gturk@fgg.uni-lj.si,
JELENA SRPČIČ, Slovenian National Building and Civil Engineering Institute, Dimičeva 12, 1000 Ljubljana, Slovenia, e-mail: jelena.srpcic@zag.si.

WAGNER, N.

Ein direktes Verfahren zur numerischen Lösung von Schwingungssystemen mit nachlassendem Gedächtnis

Systeme mit exponentiell nachlassendem Gedächtnis werden standardmäßig durch die Einführung innerer Variablen einer weiteren numerischen Behandlung zugänglich gemacht. Dabei wächst die Ordnung des beschreibenden Differentialgleichungssystems entsprechend der Anzahl der inneren Variablen an. Alternativ ist die numerische Lösung auf der Ebene der Integrodifferentialgleichung möglich. Dieser Zugang ist besonders dann effizient, wenn das Gedächtnisintegral wie z.B. bei fraktionalen Ableitungen nicht durch zusätzliche Differentialgleichungen ersetzt werden kann.

1. Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen in der Form [1]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\left[\mathbf{u} + \int_0^t \Gamma(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau\right] = \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \dot{\mathbf{u}}_0, \tag{1}$$

für die eine numerische Lösung im Zeitraum $0 < t < t_1$ gesucht ist. Durch die Definition innerer Variablen

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \int_0^t \dot{\Gamma}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \Gamma(0)\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

und nachfolgender Differentiation dieser Darstellung gelingt es für eine ganze Reihe von Kernen $\Gamma(t-\tau)$ [2] die Integrodifferentialgleichung durch eine äquivalente Form zu ersetzen; vielfach wird das nachlassende Gedächtnis durch eine Summe von Exponentialfunktionen $\sum a_i \exp(-\alpha_i(t-\tau))$ *Pronyreihe* beschrieben. Zu jedem Term dieser Reihe wird den im Zustandsraum dargestellten Bewegungsgleichungen eine Blockzeile hinzugefügt, die die Evolutionsgleichung enthält. Das resultierende Differentialgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{a_1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{y}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{0} & -\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{0} & \frac{\alpha_1}{a_1}\mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{f} \tag{3}$$

wird z.B. durch lineare Ansatzfunktionen für alle Zustandsgrößen und Integration in der Zeit gelöst

$$\left[\mathbf{A} - \frac{h}{2}\mathbf{B}\right]\mathbf{z}_{n+1} = \left[\mathbf{A} + \frac{h}{2}\mathbf{B}\right]\mathbf{z}_n + \frac{h}{2}\left[\mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_n\right]. \tag{4}$$

2. Direkter Zugang

Nachfolgend wird ein Zugang beschrieben, der direkt auf der Ebene der Bewegungsgleichung aufsetzt und insbesondere dann effizient ist, wenn das Konzept der inneren Variablen versagt. Dazu wird zunächst das Integral, das die Vorgeschichte berücksichtigt, gelöst. Bei diesem Prozeß ist eine Fallunterscheidung notwendig :

$$\textbf{Bereich} \quad [j < n] \qquad I_j = \int_{(j-1)h}^{jh} a\exp(-\alpha(t-\tau))\mathbf{u}(\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$\textbf{Bereich} \quad [j = n] \qquad I_n = \int_{(n-1)h}^{t} a\exp(-\alpha(t-\tau))\mathbf{u}(\tau)d\tau. \tag{6}$$

Diese Integrale werden nach der Wahl linearer Ansatzfunktionen für die Verschiebungen exakt gelöst; es verbleibt eine reine Differentialgleichung, die wiederum durch lineare Ansatzfunktionen im aktuellen Zeitintervall integriert

wird. Zur numerischen Lösung dient schließlich der Zeitschrittalgorithmus :

$$\left[\frac{2}{h}\mathbf{M}+\mathbf{D}+\frac{h}{2}\mathbf{K}+\mathbf{P}\right]\mathbf{u}_n=\left[\frac{2}{h}\mathbf{M}+\mathbf{D}-\frac{h}{2}\mathbf{K}+\mathbf{Q}\right]\mathbf{u}_{n-1}+2\mathbf{M}\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{i}_r+\mathbf{K}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{a_1}{\alpha_1^2}\left(q_{-n}-q_{-(n-1)}\right)\times$$

$$\left\{(-q_j+q_{j-1})\frac{\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_{j-1}}{\alpha_1 h}+q_j\mathbf{u}_j-q_{j-1}\mathbf{u}_{j-1}\right\},\quad \mathbf{v}_n=\frac{2}{h}\left[\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_{n-1}\right]-\mathbf{v}_{n-1},\quad q_j=\exp(\alpha_1 jh),$$

$$\mathbf{P}=\frac{a_1}{\alpha_1}\left[\frac{h}{2}-\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_1^2}\left(\exp(-\alpha_1 h)-1\right)\right]\mathbf{K},\mathbf{Q}=\frac{a_1}{\alpha_1}\left[-\frac{h}{2}-\frac{1}{\alpha_1}\exp(-\alpha_1 h)-\frac{1}{\alpha_1^2}\left(\exp(-\alpha_1 h)-1\right)\right]\mathbf{K}. \tag{7}$$

3. Fraktionale Differentialgleichungen

Entscheidend ist die Definition der fraktionalen Ableitung, die unmittelbar mit dem Startpunkt a der Integration verknüpft ist. Hier wird die Definition nach Liouville-Riemann [5] verwendet (a=0):

$${}_aD^{\alpha}\mathbf{u}(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_a^t\frac{\mathbf{u}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau. \tag{8}$$

Für lineare Ansatzfunktionen entsteht für die Bewegungsgleichungen $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}+\mathbf{C}D^{\alpha}\mathbf{u}+\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{r}$ [4] der Algorithmus

$$\left[\frac{2}{h}\mathbf{M}+\mathbf{D}+\frac{h}{2}\mathbf{K}+\frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{C}\right]\mathbf{u}_n=\left[\frac{2}{h}\mathbf{M}+\mathbf{D}-\frac{h}{2}\mathbf{K}+\frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{C}\right]\mathbf{u}_{n-1}$$

$$2\mathbf{M}\mathbf{v}_{n-1}+\mathbf{i}_r+\frac{h^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\mathbf{C}\left\{-(2-\alpha)\mathbf{u}_0\left(n^{1-\alpha}-(n-1)^{1-\alpha}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(\mathbf{u}_j-\mathbf{u}_{j-1}\right)\Delta\right\},$$

$$\mathbf{i}_r=\int_{(n-1)\,h}^{n\,h}\mathbf{r}(t)dt,\ \mathbf{v}_n=\frac{2}{h}\left(\mathbf{u}_n-\mathbf{u}_{n-1}\right)-\mathbf{v}_{n-1},\quad \Delta=\left[(n-j-1)^{2-\alpha}-2(n-j)^{2-\alpha}+(n-j+1)^{2-\alpha}\right]. \tag{9}$$

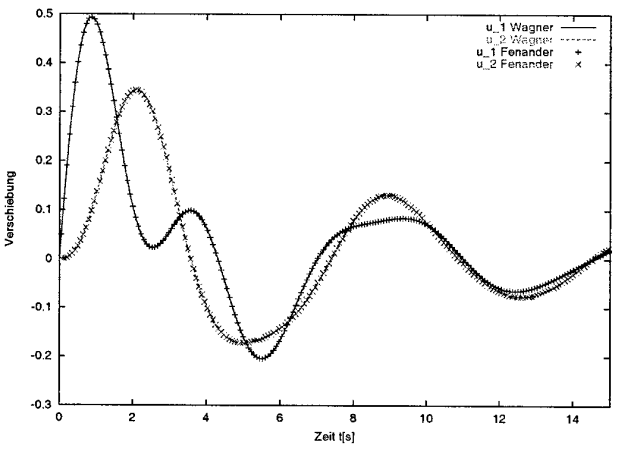
4. Zusammenfassung

Das direkte Verfahren ist universell einsetzbar; bei langen Zeiträumen und adaptiven Zeitschrittverfahren sollte nach Möglichkeit auf innere Variablen zurückgegriffen werden, da sowohl Rechenzeit als auch Speicherbedarf bei dem direkten Zeitschrittverfahren duch die Summe enorm anwachsen. Die Abbildung zeigt die Ergebnisse des direkten Verfahrens für ein System mit 2 Freiheitsgraden mit Daten nach [3]:

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_1+c_2 & -c_2\\ -c_2 & c_2+c_3\end{bmatrix},\alpha=\frac{2}{3}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{bmatrix}.$$



5. References

1 Muravyov, A.: Closed-form solutions and the eigenvalue problem for vibration of discrete viscoelastic systems, Journal of Applied Mechanics. **64** (1997), 684–691.

2 Patlashenko, I., Barbone, P., Givoli, D.: Numerical solution of systems of integro-differential equations, Technical report No. AM-99-008, Boston University (1999)

3 Fenander, A.: Modal synthesis when modeling damping by use of fractional derivatives, AIAA Journal, **34** (1996), 1051–1058

4 Ruge, P., Wagner, N.: Time-domain solutions for vibration systems with fading memory, ECCM (1999)

5 Podlubny, I.: Fractional differential equations, Academic Press (1999)

Addresses: Dipl.-Ing. Nils Wagner, Universität Stuttgart , Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Pfaffenwaldring 27, D-70569 Stuttgart, **nwagner@isd.uni-stuttgart.de**

H. ANDRÄ, O. HESEBECK, L. JUHÁSZ, E. SCHNACK

Simulation des thermomechanischen Verhaltens von Formgedächtnislegierungen unter mehrachsiger nichtproportionaler Belastung

The paper presents a mathematical description of polycrystalline shape memory alloys within the framework of continuum mechanics, where the spatially multidimensional case is considered. A new simple model is introduced, which correctly describes not only all well-studied shape memory effects (e.g. one-way-effect, pseudo-elasticity) but also the more complex behavior (e.g. reorientation of stress-induced martensite). The key idea is a new set of internal state variables, which are averaged values for a representative volume element of the polycrystalline material. A tensor-valued variable (transformation strain tensor) describes the state of orientation of martensite. The relative volume fraction of stress induced martensite is defined by choosing a certain tensor norm of this internal variable.

1. Einführung

Das charakteristische Materialverhalten von Formgedächtnislegierungen (FGL) bzw. der Einwegeffekt und die Pseudoelastizität können auf die martensitische Phasenumwandlung im Material zurückgeführt werden. Der unter mechanischer Belastung entstehende Martensit (*orientierter Martensit*) induziert eine makroskopische Deformation, die zusätzlich zur elastischen Verzerrung auftritt. Bei vollständiger mechanisch induzierter Martensitumwandlung tritt die maximal erreichbare Transformationsverzerrung auf. Im Modell muss folglich beachtet werden, dass die möglichen Transformationsverzerrungen beschränkt sind. Der den Transformationsverzerrungen entsprechende prozentuale Phasenanteil β^σ des Martensits muss kleiner oder gleich 100% sein. Der prozentuale Phasenanteil des Martensits und dessen Orientierung in einem materiellen Punkt hängen von Art und Geschichte der Belastung in diesem Punkt ab. Deshalb muss zur Modellierung die Theorie der Nichtgleichgewichtsthermodynamik eingesetzt werden. Insbesondere sollen innere Variablen definiert und deren Evolutionsgleichungen festgelegt werden. In dieser Arbeit wird ein neuer Satz von inneren Variablen gewählt, nämlich die durch Transformation induzierte Verzerrung ε^{tr} und der thermisch induzierte Martensitanteil β^T, der zu keinen Transformationsverzerrungen führt. Weitere Zustandsvariablen sind die elastische Verzerrung ε^e und die Temperatur T.

2. Grundgleichungen und Annahmen des thermodynamisch konsistenten Modells

Die gemessene maximale Transformationsdehnung unter einachsigem Zug sei k. Zuerst wird die Proportionalität

$$\beta^\sigma = \frac{1}{k}\varepsilon^{tr}_{eq} = \frac{1}{k}\sqrt{\varepsilon^{tr} : \varepsilon^{tr}} \tag{1}$$

angenommen, wie es in der Mechanik üblich ist, um komplizierte mehrachsige Experimente zu vermeiden. Andere Vergleichsverzerrungen ε^{tr}_{eq} sind einsetzbar. Die Phasenanteile der beiden Martensitklassen β^T, β^σ und des Austenits β^A müssen weiterhin den Bedingungen $\beta^\sigma \geq 0$, $\beta^T \geq 0$, $\beta^A \geq 0$, $\beta^\sigma + \beta^T + \beta^A = 1$ genügen. Einfachheitshalber seien die Verzerrungen und Rotationen hinreichend klein, so dass

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^{tr}_{ij} \tag{2}$$

angenommen werden kann. Schließlich wird in jeder Phase linear elastisches Materialverhalten $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} : \varepsilon^e$ vorausgesetzt, wobei $\boldsymbol{D}$ der Elastizitätstensor ist. Unter Beachtung dieser Beziehungen wird die freie Helmholtz-Energie konstruiert [4], wobei Ansätze vorangehender Arbeiten [2, 5, 3] erweitert werden:

$$\begin{aligned}
\Phi(\varepsilon^e, T, \varepsilon^{tr}, \beta^T) &= \Phi_0 + \sum_{i=\sigma,T,A} \Theta_i\, \beta^i + \sum_{i=\sigma,T,A} \Pi_i\, (\beta^i)^2 + \Delta\Phi + \kappa\, I_{\mathcal{K}}(\beta^\sigma, \beta_T)\,, \quad \text{wobei} \\
\Phi_0 &= \frac{1}{2}\varepsilon^e : \boldsymbol{D} : \varepsilon^e + \gamma\, \varepsilon^e (T - T_0) + c_V \left\{ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right\}, \quad \Theta_i = u^i_0 - T s^i_0, \\
\Delta\Phi &= \beta^T \beta^\sigma \Phi^{MM} + \beta^M \beta^A \Phi^{MA}, \\
\mathcal{K} &= \left\{ (\beta^\sigma, \beta^T) \in R^2 : 0 \leq \beta^\sigma, 0 \leq \beta^T,\ \beta^\sigma + \beta^T \leq 1 \right\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Hierbei bezeichnen u_i die spezifische innere Energie, s_i die spezifische Entropie der Phasen β^i $(i = \sigma, T, A)$. Der Tensor γ enthält die thermischen Ausdehnungskoeffizienten, und c_V ist die spezifische Wärmekapazität. Der letzte Summand in der freien Helmholtz-Energie ist die Indikatorfunktion I_K der konvexen Menge K multipliziert mit einem Hilfskoeffizienten κ. Die Größen Φ^{MM}, Φ^{MA} und Π_i sind Materialparameter. In [4] wird gezeigt, dass diese Materialparameter durch einfache, gut definier- und messbare Kenngrößen der FGL (wie z.B. M_{s0}, A_{s0}) ausdrückbar sind. Aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik bzw. aus der Clausius-Duhem-Ungleichung folgt für die Dissipation D die Bedingung

$$D = \boldsymbol{X}_\sigma : \dot{\varepsilon}^{tr} + X_T \dot{\beta}^T \geq 0\,, \tag{4}$$

wobei die thermodynamischen Kräfte $\boldsymbol{X}_\sigma, X_T$ standardmäßig direkt aus der Helmholtz-Energie (3) bestimmbar sind:

$$\boldsymbol{X}_\sigma \in \sigma - \left[\Delta u - \Delta s\, T + \left(\beta^\sigma \Pi_\sigma - \beta^A \Pi_A\right) T + \Phi^{MM} \beta^T + \left(\beta^A - \beta^M\right) \Phi^{MA} - \partial_{\beta^\sigma} I_K(\beta^\sigma, \beta^T)\right] \frac{\varepsilon^{tr}}{k^2 \beta^\sigma},$$

$$X_T \in -\left[\Delta u - \Delta s\, T + \left(\beta^T \Pi_T - \beta^A \Pi_A\right) T + \Phi^{MM} \beta^\sigma + \left(\beta^A - \beta^M\right) \Phi^{MA} - \partial_{\beta^T} I_K(\beta^\sigma, \beta^T)\right].$$

Diese thermodynamischen Kräfte sind die treibenden Kräfte für die Phasenumwandlungen, d. h. die Ursache für die Änderung der Phasenanteile bzw. der inneren Variablen $\varepsilon^{tr}, \beta^T$. Schließlich müssen noch Evolutionsgleichungen definiert werden, die sich *nicht* aus den Hauptsätzen ergeben. Als sehr einfache (aber allgemeine) Variante werden hier die Evolutionsgleichungen

$$\dot{\varepsilon}^{tr} = \boldsymbol{X}_\sigma \left(\frac{\|\boldsymbol{X}_\sigma\|}{K_1}\right)^{k_1}, \qquad \dot{\beta}^T = X_T \left(\frac{|X_T|}{K_2}\right)^{k_2} \tag{5}$$

vorgeschlagen, wobei $K_1, K_2, k_1, k_2 \in R^+$ Materialparameter sind, die die Transformationscharakteristik beeinflussen. Diese Evolutionsgleichungen sind ähnlich zu den Gleichungen der Viskoplastizität.

3. Zusammenfassung

In [4] werden die Umwandlungsbedingungen und insbesondere der (verallgemeinerte) Winkel zwischen der thermodynamischen Kraft $\boldsymbol{X}_\sigma$ und der wirkenden Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ analysiert. Die Umwandlungsbedingungen stimmen mit denen überein, die bei Experimenten beobachtet wurden [1]. So müssen keine weiteren zusätzlichen Nebenbedingungen für die Phasenumwandlung in den Evolutionsgleichungen berücksichtigt werden. Deswegen ist auch aus (5) sofort offensichtlich, dass der zweite Hauptsatz (4) in jedem Punkt des Zustandsraums erfüllt ist. Die verwendete Erweiterung der freien Energie ermöglicht es, dass die Umwandlungsbedingungen die temperaturabhängigen Effekte von FGL (Einwegeffekt bei tiefen Temperaturen und Pseudoelastizität mit reduzierter Hysterese bei hohen Temperaturen) gleichzeitig beschreiben können . In diesem Modell wurde der Transformationsverzerrungstensor konsequent als innere Variable betrachtet und die zugehörige tensorwertige thermodynamische Kraft bestimmt. Diese Wahl von inneren Variablen ermöglicht es, die Reorientierung von Martensitschichten unter mehrachsiger nichtproportionaler Belastung zu beschreiben. Die thermodynamische Kraft $\boldsymbol{X}_\sigma$ bestimmt die „Richtung", in die sich die Orientierung ändert. Praktisch gesprochen verändert sich die Orientierungsrichtung so, dass sich die Spannungen im betrachteten Punkt verringern. Folge ist eine Spannungs umverteilung im ganzen Bauteil. Durchgeführte FEM-Simulationen mit dem beschriebenen Modell zeigen Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen.

4. References

1 L. C. Brinson. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: Thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 4:229–242, 1993.

2 F. Falk. Model free energy, mechanics, and thermodynamics of shape memory alloys. *Acta Metall.*, 28:1773–1780, 1980.

3 Y. Gillet, E. Patoor, and M. Berveiller. Modélistation numérique des alliages à mémoire de forme. *Revue européenne des éléments finis*, 7(8):137–164, 1998.

4 L. Juhász, H. Andrä, and O. Hesebeck. Simulation of the thermomechanical behavior of shape memory alloys under multi-axial non-proportional loading. In *Active Materials: Behavior and Mechanics*. SPIE, 2000 (to appear).

5 S. Leclerq and C. Lexcellent. A general macroscopic description of thermomechanical behavior of shape memory alloys. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(6):953–980, 1996.

6 M. A. Qidwai and D. C. Lagoudas. Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 47:1123–1168, 2000.

Address: DIPL. MATH.-TECHN. L. JUHÁSZ, Institut für Technische Mechanik/Festigkeitslehre, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstr. 12, D-76128 Karlsruhe, Deutschland

SIMONE BERGER, MICHAEL BRÜNIG, HANS OBRECHT

Numerische Simulation großer elastisch-plastischer Deformationen druckabhängiger Metalle

Da aus experimentellen Untersuchungen bekannt ist, dass auch Metalle eine Abhängigkeit vom hydrostatischen Spannungszustand und eine Volumendilatation aufweisen können, wird das elastisch-plastische Deformations- und Lokalisierungsverhalten dieser Metalle numerisch simuliert. Abweichend von der klassischen Metallplastizität wird eine $I_1 - J_2 - J_3$ Fließbedingung und ein nichtassoziiertes Fließgesetz verwendet.

1. Einleitung

Die von SPITZIG ET AL. [1, 2] durchgeführten Zug- und Druckversuche bei hochfesten eisenhaltigen Metallen zeigen, dass die Fließspannung, bei gleichem hydrostatischen Spannungszustand, im Druckversuch wesentlich größer ist als im Zugversuch. Die Größe dieses Effektes selbst ist dabei unabhängig von der Größe des hydrostatischen Drucks, die Größe der Fließspannung hingegen hängt nahezu linear von dem hydrostatischen Spannungszustand ab.

2. Konstitutive Gleichungen

Um das vom hydrostatischen Spannungszustand abhängige isotrope plastische Materialverhalten beschreiben zu können, wird eine Fließbedingung benutzt, die neben J_2 zusätzlich noch die Invarianten I_1 und J_3 enthält

$$f^{pl}(I_1, J_2, J_3) = \sqrt{J_2} - c\,(1 - \frac{a}{c} I_1 - \frac{b}{c} \sqrt[3]{J_3}) = 0\ . \tag{1}$$

Die gewählte Fließbedingung wurde von SPITZIG ET AL. [1] aus experimentellen Untersuchungen für Aluminium und hochfeste Stähle entwickelt. Dabei sind $I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{T}$, $J_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{dev}\mathbf{T} \cdot \mathrm{dev}\mathbf{T}$ und $J_3 = \det(\mathrm{dev}\mathbf{T})$ die Invarianten des Spannungstensors $\mathbf{T}$. Der Materialparameter a beschreibt den Einfluss des hydrostatischen Spannungszustandes, b die Abweichung vom von-Mises-Kreis in der Deviatorebene und c die Fließspannung.

Um die ebenfalls im Experiment [1, 2] beobachtete plastische Dilatation beschreiben zu können, wird eine plastische Potentialfunktion benutzt, die ebenfalls zusätzlich noch von den Invarianten I_1 und J_3 abhängt

$$g^{pl}(I_1, J_2, J_3) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} + \beta \sqrt[3]{J_3}\ . \tag{2}$$

Sowohl die konstitutiven als auch die kinematischen Parameter in (1) bzw. (2) werden aus experimentellen Kurven bestimmt. Da bei metallischen Werkstoffen α und β wesentlich kleiner sind als die konstitutiven Parameter, ergibt sich ein nichtassoziiertes Fließgesetz

$$\dot{\mathbf{H}}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial g^{pl}}{\partial \mathbf{T}} = \dot{\lambda} \left[\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\, \mathrm{dev}\mathbf{T} + \beta \frac{1}{3 {J_3}^{2/3}}\, \mathrm{dev}\,(\mathrm{dev}\mathbf{T}\,\mathrm{dev}\mathbf{T}) + \alpha \mathbf{1} \right]\ , \tag{3}$$

und damit eine Abweichung von der Normalenregel.

Ausgehend von der Konsistenzbedingung $\dot{f}^{pl} = 0$ und Einarbeitung der benötigten Grundgleichungen erhält man die skalare Grundgleichung

$$(1 - \frac{a}{c} I_1 - \frac{b}{c} \sqrt[3]{J_3})\, \dot{c} = \sqrt{2}\, \mu\, (\dot{\epsilon} - \dot{\gamma})\ , \tag{4}$$

die das elastisch-plastische Materialverhalten charakterisiert. Die skalare Gesamtverzerrungsrate $\dot{\epsilon}$ und die skalare plastische Verzerrungsrate $\dot{\gamma}$ sind relativ aufwendige Funktionen der Invarianten des Spannungsdeviators J_2 und J_3 sowie diverser elastischer und plastischer Materialparameter [4].

Für die Integration der konstitutiven Gleichungen wird das Verfahren des plastischen Prediktors [3] verwendet.

Dazu wird im plastischen Prediktorschritt das Inkrement der plastischen Verzerrungen gleich dem Inkrement der Gesamtverzerrungen gesetzt

$$\Delta\gamma^{pr} = \Delta\epsilon\,. \tag{5}$$

Der dadurch gemachte Fehler muß anschließend noch korrigiert werden. Das Inkrement des elastischen Korrektors

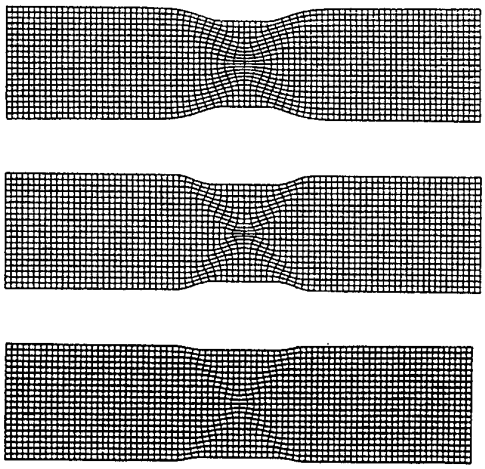
$$\Delta_{er}\gamma = \left[\frac{\sqrt{2}\,\mu}{1 - \frac{a}{c}I_1 - \frac{b}{c}\sqrt[3]{J_3}} + \frac{\partial c}{\partial\gamma}\right]^{-1} \left(c^{pr}(t+\Delta t) - c(t)\right) \tag{6}$$

erhält man aus der Integration von (4) und einer Fehlerabschätzung mittels Taylorreihenentwicklung. Damit ergibt sich das Inkrement der plastischen Vergleichsdehnung zu $\Delta\gamma = \Delta\gamma^{pr} - \Delta_{er}\gamma$, womit die zugehörigen tensoriellen Größen errechnet werden können.

3. Numerische Simulation

Für die numerische Simulation wird eine eingespannte Rechteckprobe unter ebenem Verzerrungszustand betrachtet. Die Zugprobe besteht aus Stahl, der ein ausgeprägtes Sättigungsverhalten aufweist, siehe [2]. Das Deformations- und Lokalisierungsverhalten für eine reine J_2 Fließbedingung ($a/c = b/c = 0$), eine $I_1 - J_2$ Fließbedingung ($b/c = 0$) und eine $I_1 - J_2 - J_3$ Fließbedingung ist in Abb. 1a–c zu sehen. Bei den druckabhängigen Fließbedingungen setzt der Lokalisierungsbeginn wesentlich früher ein, und bei einer Belastung über den Lokalisierungsbeginn hinaus entwickeln sich stärker ausgeprägte, schmale Scherbänder. Bei der J_2 Fließbedingung ist dagegen nur ein relativ breites Scherband mit einer überlagerten leichten Einschnürung vorhanden.

Es hat sich gezeigt, dass die kritische Verzerrung, also die Verzerrung, bei der die Lokalisierung eintritt, mit zunehmender Größe von a/c abnimmt. Somit führt der wachsende I_1–Einfluss zu einem früheren Verlust der Duktilität. Der zusätzliche Einfluß von b/c und damit der zusätzliche J_3–Einfluss auf den Lokalisierungsbeginn ist eher gering, da sich die Größe der kritischen Verzerrung, ausgehend von $b/c = 0$, kaum mit zunehmendem b/c ändert.



Verformte Konfigurationen

4. Literaturverzeichnis

1 SPITZIG, W.A., SOBER, R.J., RICHMOND, O.: Pressure dependence of yielding and associated volume expansion in tempered martensite; Acta Metall. **23** (1975), 885–893.

2 SPITZIG, W.A., SOBER, R.J., RICHMOND, O.: The effect of hydrostatic pressure on the deformation behavior of maraging and HY-80 steels and its implications for plasticity theory; Metall. Trans. A. **7A** (1976), 1703–1710.

3 NEMAT-NASSER: Rate-independent finite-deformation elastoplasticity: A new explicit constitutive algorithm; Mech. Mater. **11** (1991), 235–249.

4 BRÜNIG, M., BERGER, S., OBRECHT, H.: Numerical simulation of the localization bahavior of hydrostatic-stress-sensitive metals; Int. J. of Mech. Science (im Druck).

Adresse: DIPL.-ING. S. BERGER – Lehrstuhl für Baumechanik-Statik, Universität Dortmund, D–44221 Dortmund

T. Böhlke, A. Bertram

Bounds for the Geometric Mean of 4th-Order Elasticity Tensors with Cubic Symmetry

Aggregates of cubic linear elastic crystals with arbitrary crystal orientation distribution are considered with respect to their effective elastic properties. It is shown that the effective elastic strain energy corresponding to a geometric averaging is bounded by the energies implied by the Voigt and Reuss estimates.

1. Simple Estimates of Effective Elastic Properties of Polycrystals

Based on the crystallite orientation distribution function $f(g)$ with $g \in SO(3)$, different orientational averages of elasticity tensors can be introduced. The function f specifies the volume of crystals having an orientation between g and $g + \mathrm{d}g$, i.e. $\mathrm{d}V/V = f(g)\,\mathrm{d}g$. As a result, volume averages can be transformed into averages over $SO(3)$. The most common mean values are the arithmetic and harmonic mean of the local stiffness tensors, which where first suggested by Voigt and Reuss

$$\mathbb{C}^V = \int_g f(g)\mathbb{C}(g)\,\mathrm{d}g, \qquad \mathbb{S}^R = \int_g f(g)\mathbb{S}(g)\,\mathrm{d}g \neq \mathbb{C}^{V\,-1}. \tag{1}$$

$\mathbb{C}$ and $\mathbb{S}$ denote the single crystal stiffness and compliance, respectively. These approaches give upper and lower bounds for the strain energy density. An approach that focuses on a homogenization resulting in unique effective properties was given in [1,5]. Here, the geometric mean of the local elastic moduli is used

$$\mathbb{C}^A = \exp\left(\int_g f(g)\ln(\mathbb{C}(g))\,\mathrm{d}g\right), \qquad \mathbb{S}^A = \exp\left(\int_g f(g)\ln(\mathbb{S}(g))\,\mathrm{d}g\right) \equiv \mathbb{C}^{A\,-1}. \tag{2}$$

For a uniform distribution of crystal orientations $f(g) = 1$ holds for all $g \in SO(3)$. In this case, the integrals (1) and (2) can be expressed solely in terms of the single crystal constants.

For aggregates of cubic crystals the following decomposition holds [3]

$$\mathbb{C}^V = \mathbb{C}^{VI} + \zeta^V \mathbb{A}', \qquad \ln(\mathbb{C}^A) = \ln(\mathbb{C}^{AI}) + \zeta^A \mathbb{A}', \qquad \mathbb{S}^R = \mathbb{S}^{RI} + \zeta^R \mathbb{A}', \tag{3}$$

where $\mathbb{C}^{VI}$, $\mathbb{C}^{AI}$, and $\mathbb{S}^{RI}$ represent the elasticity tensors which are obtained for a uniform orientation distribution. These isotropic parts allow for the classical projector decomposition into a dilatational and a distorsional deformation mode, e.g., $\mathbb{C}^{VI} = \lambda_1^{VI}\mathbb{P}_1^I + \lambda_2^{VI}\mathbb{P}_2^I$ with $\mathbb{P}_1^I = \mathbf{I}\otimes\mathbf{I}/3$ and $\mathbb{P}_2^I = \mathbb{I} - \mathbb{P}_1^I$. $\mathbf{I}$ denotes the 2nd-order identity tensor and $\mathbb{I}$ the identity on symmetric 2nd-order tensors. The scalar factors in equations (3) are given by

$$\zeta^V = \sqrt{\tfrac{6}{5}}\,(\lambda_3 - \lambda_2), \qquad \zeta^A = \sqrt{\tfrac{6}{5}}\,(\ln(\lambda_3) - \ln(\lambda_2)), \qquad \zeta^R = \sqrt{\tfrac{6}{5}}\left(\frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_2}\right). \tag{4}$$

The eigenvalues λ_2 and λ_3 refer to the anisotropic projectors of a elasticity tensor of a cubic single crystal with the lattice vectors $\{\mathbf{g}_i\}$: $\mathbb{P}_2^C = \sum_{k=1}^3 \mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_k\otimes\mathbf{g}_k - \mathbb{P}_1^I$, $\mathbb{P}_3^C = \mathbb{I} - \mathbb{P}_2^C - \mathbb{P}_1^I$. The tensor $\mathbb{A}'$ depends only on the distribution of crystal lattice vectors $\{\mathbf{g}_i\}$ and is given by [3]

$$\mathbb{A}' = \frac{\sqrt{30}}{30}\left(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I} + 2\mathbb{I} - 5\int_g \sum_{k=1}^{3} f(g)\;\mathbf{g}_k(g)\otimes\mathbf{g}_k(g)\otimes\mathbf{g}_k(g)\otimes\mathbf{g}_k(g)\,\mathrm{d}g\right). \tag{5}$$

2. Bounds for the Eigenvalues of the Geometric Mean

The question arises whether the elastic energy of the geometric mean is bounded by those of the arithmetic and the harmonic mean for arbitrary crystal orientation distributions. Here, the question is answered for aggregates of cubic

crystals. The starting point is a projector decomposition (e.g., [2]) of the three different averages

$$\mathbb{C}^V = \sum_{\gamma=1}^{\beta^V} \lambda_\gamma^V \mathbb{P}_\gamma^V = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \lambda_\alpha \bar{\mathbb{P}}_\alpha, \quad \ln(\mathbb{C}^A) = \sum_{\gamma=1}^{\beta^A} \ln(\lambda_\gamma^A)\mathbb{P}_\gamma^A = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \ln(\lambda_\alpha)\bar{\mathbb{P}}_\alpha, \quad \mathbb{S}^R = \sum_{\gamma=1}^{\beta^R} \frac{1}{\lambda_\gamma^R}\mathbb{P}_\gamma^R = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \frac{1}{\lambda_\alpha}\bar{\mathbb{P}}_\alpha, \tag{6}$$

where β^V, β^A, and β^R denote the number of distinct eigenvalues of the different averages. β is the number of distinct eigenvalues of the cubic single crystal, i.e., $\beta = 3$. $\bar{\mathbb{P}}_\alpha$ represents the mean value of the projector $\mathbb{P}_\alpha$, i.e. $\bar{\mathbb{P}}_\alpha = \int_g f(g)\mathbb{P}_\alpha(g)\,\mathrm{d}g$. From the decomposition (6) and the orthogonality of the corresponding projectors, one concludes that the eigenvalues of the three averages can be written in terms of weights

$$\lambda_\gamma^V = \sum_{\alpha=1}^{\beta} W_{\gamma\alpha}^V \lambda_\alpha, \qquad \lambda_\gamma^A = \prod_{\alpha=1}^{\beta} \lambda_\alpha^{W_{\gamma\alpha}^A}, \qquad \frac{1}{\lambda_\gamma^R} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} W_{\gamma\alpha}^R \frac{1}{\lambda_\alpha}, \qquad (\gamma = 1 \ldots \beta^{V,A,R}) \tag{7}$$

with

$$W_{\gamma\alpha}^V = \frac{\mathbb{P}_\gamma^V}{\|\mathbb{P}_\gamma^V\|^2} \cdot \bar{\mathbb{P}}_\alpha, \qquad W_{\gamma\alpha}^A = \frac{\mathbb{P}_\gamma^A}{\|\mathbb{P}_\gamma^A\|^2} \cdot \bar{\mathbb{P}}_\alpha, \qquad W_{\gamma\alpha}^R = \frac{\mathbb{P}_\gamma^R}{\|\mathbb{P}_\gamma^R\|^2} \cdot \bar{\mathbb{P}}_\alpha. \tag{8}$$

For all of the three averages the dilatational and distorsional deformation modes are decoupled as it is the case for singlecrystalline elasticity tensors with a cubic symmetry. The eigentensors corresponding to the dilatational deformation mode are the same for all three averages and are given by $\mathbf{I}/\sqrt{3}$. In what follows we assume $\lambda_2 \neq \lambda_3$, i.e. $\zeta^V \neq 0$. Since $\mathbb{P}_2^I$ represents the identity on 2nd-order traceless tensors, the eigenvalue problem corresponding to distorsional deformation modes reads

$$\mathbf{0} = (\mathbb{C}^V - \lambda^V \mathbb{P}_2^I)[\hat{\mathbf{E}}'] = (\lambda_2^{VI}\mathbb{P}_2^I + \zeta^V \mathbb{A}' - \lambda^V \mathbb{P}_2^I)[\hat{\mathbf{E}}'] = \zeta^V (\mathbb{A}' - \frac{\lambda^V - \lambda_2^{VI}}{\zeta^V}\mathbb{P}_2^I)[\hat{\mathbf{E}}']. \tag{9}$$

One concludes that a deviatoric eigentensor $\hat{\mathbf{E}}'$ of $\mathbb{C}^V$ is also an eigentensor of $\mathbb{A}'$, and vice versa. The same statement is true for the two other averages. If the eigentensors of $\mathbb{C}^V$, $\mathbb{C}^A$, and $\mathbb{S}^R$ coincide with those of $\mathbb{A}'$, then the eigentensors of the arithmetic, geometric, and harmonic mean are identical in the case of aggregates of cubic crystals. This statement holds independently of the crystal orientation distribution in the aggregate. From the identity of the eigentensors one concludes those of the projectors and of the weights in (8)

$$\mathbb{P}_\gamma^V = \mathbb{P}_\gamma^A = \mathbb{P}_\gamma^R, \qquad W_{\gamma\alpha}^V = W_{\gamma\alpha}^A = W_{\gamma\alpha}^R, \qquad (\gamma = 1, \ldots, \bar{\beta} = \beta^V = \beta^A = \beta^R;\ \alpha = 1, \ldots, \beta). \tag{10}$$

Now, the eigenvalues (7) can be written as

$$\lambda_\gamma^V = \sum_{\alpha=1}^{\beta} W_{\gamma\alpha} \lambda_\alpha, \qquad \lambda_\gamma^A = \prod_{\alpha=1}^{\beta} \lambda_\alpha^{W_{\gamma\alpha}}, \qquad \frac{1}{\lambda_\gamma^R} = \sum_{\alpha=1}^{\beta} W_{\gamma\alpha} \frac{1}{\lambda_\alpha}, \qquad W_{\gamma\alpha} = W_{\gamma\alpha}^V = W_{\gamma\alpha}^A = W_{\gamma\alpha}^R \tag{11}$$

$(\gamma = 1 \ldots \bar{\beta})$. Based on Jensen's inequality [4, p.50], one concludes from (11) that the eigenvalues λ_γ^A of $\mathbb{C}^A$ are bounded by the eigenvalues of the Voigt and Reuss estimates

$$\lambda_\gamma^V \geq \lambda_\gamma^A \geq \lambda_\gamma^R, \qquad (\gamma = 1 \ldots \bar{\beta}). \tag{12}$$

From eqns (10) and (12) it follows that the elastic energy predicted the geometric mean is bounded by the energies implied by the arithmetic and the harmonic mean. This statement holds for arbitrary crystal orientation distributions in the polycrystal.

3. References

1 K.S. Aleksandrov and L.A. Aisenberg: A method of calculating the physical constants of polycrystalline materials. Soviet Physics - Doklady. **11** (1966) 323–325.

2 A. Bertram and J. Olschewski: Zur Formulierung anisotroper linear anelastischer Stoffgleichungen mit Hilfe einer Projektionsmethode. Z. angew. Math. Mech., **79** (1999) S2:T401-T403.

3 T. Böhlke and A. Bertram: An isotropy condition for discrete sets of cubic single crystals. Z. angew. Math. Mech. **79** (1999) S2:S447–S448.

4 J.C. Cloud and B.C. Drachman: Inequalities: with Applications to Engineering. Springer, 1998.

5 S. Matthies and M. Humbert: On the principle of a geometric mean of even-rank symmetric tensors for textured polycrystals. J. Appl. Cryst. **28** (1995) 254–266.

Addresses: T. Böhlke, A. Bertram, Otto-v.-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Mechanik, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg

EHLERS W., DIEBELS S., MICHELITSCH T.

Microscopic Investigation of Cosserat Continua

The physics of granular matter is described on the scale of discrete single particles. The Eulerian-Newtonian equations of motion are implemented into a moleculardynamics simulation. Special emphasis is given to localization phenomena and to the influence of rotational degrees of freedom on shear banding. The observation from numerical experiments indicates that shear banding can be modelled by employing only simple contact laws. We assume the normal contact forces being caused by damped elastic springs and tangential contact forces of Coulomb type friction.

1. Introduction

Granular material is characterized by non-uniform disordered solid particles (grains) with finite extensions. So far, the physics of granular materials is not yet completely developed [1]. A characteristic property of granular matter is the appearance of localization phenomena, for instance shear banding under the influence of gravity. The goal of this contribution is to show the importance of rotational degrees of freedom of the particles for the appearance of localization phenomena as shear banding. The finite dimensions of the particles play a crucial role for the transfer of moments of momentum between the particles. By this transfer of moments of momentum, rotational degrees of freedom affect the overall dynamics of a granular material system.

2. Equations of motion and basic assumptions

There are two scales of description of granular materials: The microscopic description which is physically motivated and based on the solution of the *Newton*ian equations of motion for each particle [1] and the macroscopic description based on continuum theories. The transition from the microscopic to the macroscopic level is defined trough a homogenization procedure smearing out the microscopic properties of the particles over a representative elementary volume.

In this contribution, the physics of an assembly is described on the scale of the discrete single particles. For implemtation into a moleculardynamics simulation, we set up the *Euler*ian-*Newton*ian equations (EN equations) of motion which take into account both the balances of momentum and of moment of momentum. The *Newton*ian equations connect the balance of moment with the dynamics of the translational degrees of freedom, whereas the *Euler*ian equations connect the balance of angular momentum with the rotational motion of the particles.

In our simulation, we integrate the resulting system of EN equations for an assemply of $N = 400$ rigid particles subjected to gravity with given initial conditions. In this section, we formulate the EN equations of motion for a system of N rigid particles for D dimensions where $D = 2, 3$. The simulation is performed for $D = 2$.

The motion of a particle is uniquely determined by the translation $\mathbf{x}(t)$ of its center of mass and by its rotation vector $\boldsymbol{\varphi}(t) = \varphi(t)\,\mathbf{e}(t)$ (t indicates the time coordinate). Therein, $\varphi(t)$ is the rotation angle, whereas $\mathbf{e}(t)$ characterizes the rotation axis. The EN equations of motion for a particle can then be written in the form (particle indices are omitted)

$$m\ddot{\mathbf{x}} \;=\; \mathbf{k}(\boldsymbol{\varphi},\,\dot{\boldsymbol{\varphi}},\,\mathbf{x},\,\dot{\mathbf{x}}), \qquad \boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{M}}\,\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + 2\,(\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{M}})_{\mathrm{sym}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} \;=\; \mathbf{m}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{\varphi},\,\dot{\boldsymbol{\varphi}},\,\mathbf{x},\,\dot{\mathbf{x}}), \tag{1}$$

where m and $\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{M}}$ denote the mass and tensor of inertia with respect to the center of mass, respectively. $\mathbf{k}$ and $\mathbf{m}_{\mathrm{M}}$ stand for the forces and moments affecting a particle. In eq. $(1)_2$, the expressions

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathrm{M}} = 2\,(\boldsymbol{\Omega}\,\boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{M}})_{\mathrm{sym}}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = -\overset{3}{\mathbf{E}}\,\dot{\boldsymbol{\varphi}} \tag{2}$$

represent the time derivative $\dot{\boldsymbol{\Theta}}_{\mathrm{M}}$ of the tensor of inertia for a rigid particle rotating with angular velocity $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$. Equations (1) are the microscopic analogue of the balances of momentum and of moment of momentum which govern the macroscopic *Cosserat* theory [2, 3, 4, 5]. The right hand sides of (1) imply coupling of translational and rotational degrees of freedom and their first time derivatives. The latter introduce frictional effects into the dynamics.

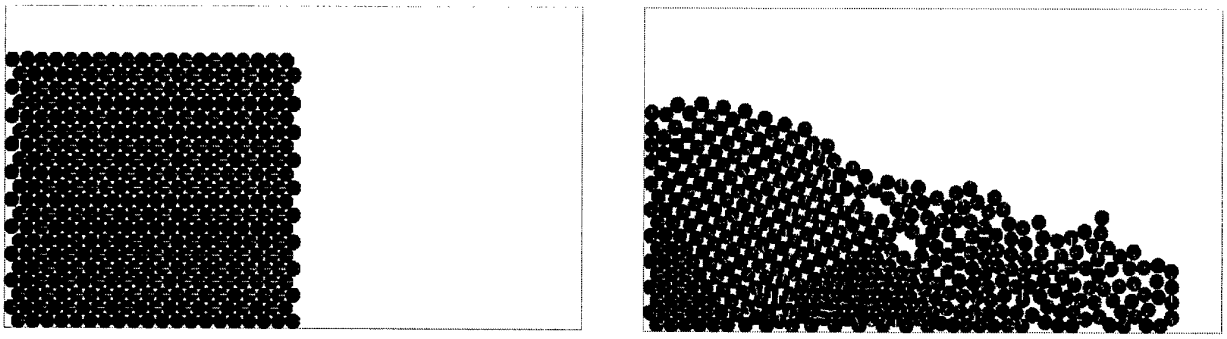
3. Simulation and example

An assembly consisting of 400 plain circular discs subjected to gravity has been simulated (see figures below): The right boundary of the assembly is a rigid wall uniformly moving rightwards. The figures show the intial condition of the assembly and a state of the assembly at a time when localization occurs in the form of shear banding. The transition zones between these two parts of the assembly are strongly localized and can be identified as shear bands.

The physical intepretation is as follows: The coupling of translational and rotational degrees of freedom allows the generation of collective rolling modes of one part of the assembly with respect to the other part. As a consequence thereof, the number of particle contacts in the localization zone is reduced in such a way that frictional interactions between the particles are minimized. Furthermore, dilatancy may also be observed in the shear band.

We emphasize that in this simulation only simple contact laws have been employed. The observations from these simulation indicate that the coupling of particle rotations and translations induced by *Coulomb* type friction between the particles is one of the essential sources responsible for the generation of localization phenomena as shear bands in granular materials and should therefore be taken into account in a macroscopic theory. As a consequence, to model overall physical properties, granular matter must be conceived as a *Cosserat* continuum on a macroscopic scale.

In this simulation, we have assumed uniform particle diameters. New simulations, currently perfomed by the authors, show that the width of the particle diameter distribution may be a further crucial parameter that affects characteristic lengths and shapes of shear bands.



Assembly with 400 particles subjected to gravity, right boundary uniformly moving rightwards. The arrows on the particles indicate their director orientations characterized by angles $\varphi(t)$.

Acknowledgements

This work has been performed within the research group "Modelling of Cohesive-Frictional Materials". The financial support by the Deutsche Forschungsgemeinschaft is gratefully acknowledged.

4. References

1 P. A. Cundall, O. D. L. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* **29**, pp. 47-65 (1979).
2 E. Cosserat, F. Cosserat, *Theorie de Corps Deformable.* A Herman, Paris (1909).
3 W. Ehlers, W. Volk, On shear band localization phenomena of liquid saturated granular elasto-plastic porous solids accounting for fluid viscisity and micropolar solid rotations, *Mech. Cohesive-frictional Mater.* **2**, pp. 301-320 (1997).
4 W. Ehlers, W. Volk, On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar solid materials, *Int. J. Solids Stuctures* **35**, pp. 4597-4616 (1998).
5 A. C. Eringen and C. B. Kafadar, Polar field Theories, in A.C. Eringen (ed.), *Continuum Physics IV*, Academic Press, New York, pp. 1-73 (1976).

Address: Prof. Dr.-Ing. W. EHLERS, Dr.-Ing. S. DIEBELS, Dr. rer. nat. T. MICHELITSCH, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II Pfaffenwaldring 7, 70569 Stuttgart, Germany.

GERSTMAYR, J.; IRSCHIK, H.

The Elasto-Plastic Pendulum with Geometric Stiffening

The present contribution is devoted to the dynamics of elasto-plastic structures with rigid-body degrees-of-freedom. As a benchmark problem, computational strategies and results for an elasto-plastic pendulum are presented. A beam-type pendulum with distributed mass and stiffness is considered within the range of small strains. Geometric stiffening is taken into account utilizing the second order theory of structures. A non-linear system of differential algebraic equations (DAEs) is derived from the field equations. The DAE system is numerically solved by means of an implicit Runge-Kutta method, which is implemented in C++. Plasticity is taken into account by additionally applying an eigenstrain loading to the flexural beam. The eigenstrains are computed in an iterative, return-mapping type procedure such that the constitutive equations are satisfied in a sufficiently large number of points within the plastic zone. As a result, the influence of geometric stiffening is demonstrated numerically.

1. Derivation of Differential equations

According to the classical Bernoulli-Euler beam theory, the strain in a fiber with distance Z form the beam axis, relative to a co-rotated reference configuration is

$$\varepsilon_{xx} = u' - Zw'' \,, \tag{1}$$

see Fig. 1. Splitting the strain into elastic and plastic parts, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon^e_{xx} + \varepsilon^p_{xx}$, we define the stress as

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon^e_{xx} = E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon^p_{xx}) \tag{2}$$

We calculate the normal force by integration of the normal stress over the cross-section with the plastic mean strain $\overline{\varepsilon}^p_{xx}$

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA = EA(u' - \overline{\varepsilon}^p_{xx}) \tag{3}$$

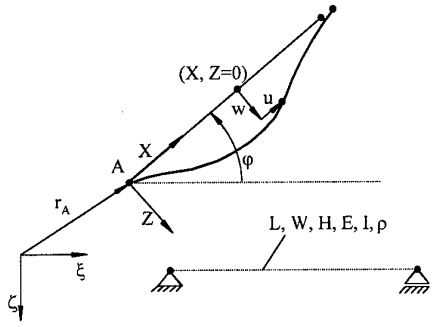


Figure 1: Reference beam, rigid body degree of freedom and coordinate systems.

With equs (1),(2) and (3) we get the total strain and the moment by introducing the plastic curvature κ^p

$$\varepsilon_{xx} = \frac{N}{EA} + \overline{\varepsilon}^p_{xx} - Zw'', \quad M = \int_A \sigma_{xx} Z dA = -EI(w'' + \kappa^p) \tag{4}$$

According to the second order theory, we distinguish between the transverse shear force normal to the deformed beam axis $Q = M'$ and the transverse shear force normal to the undeformed beam axis, which is $R = Q + Nw'$. This takes into account the effect of stiffening in the case of small deflections.
To include dynamics, we consider a point at the beam axis at $(X, Z = 0)$ in its deformed position. The absolute acceleration of this point, projected onto the local coordinates X and Z, becomes

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi)\ddot{\xi}_A - sin(\varphi)\ddot{\zeta}_A + \ddot{u} - (X+u)\dot{\varphi}^2 + w\ddot{\varphi} + 2\dot{w}\dot{\varphi} \\ \sin(\varphi)\ddot{\xi}_A + cos(\varphi)\ddot{\zeta}_A + \ddot{w} - w\dot{\varphi}^2 - (X+u)\ddot{\varphi} - 2\dot{u}\dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Balance of momentum gives the two differential equations, compare with the elastic case [1]

$$D_N = \rho A\,(a_x + g\sin(\varphi)) - N' = 0, \quad D_R = \rho A\,(a_z - g\cos(\varphi)) - R' = 0 \tag{6}$$

We use polynomial shape functions. In the current implementation Legrendre polynomials are used. The approxi-

mated solutions (*) for u and w are

$$w^*(X,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) P_i(X),\ u^*(X,t) = \sum_{i=0}^{m} b_i(t) P_i(X) \tag{7}$$

Inserting into the Galerkin procedure and applying partial integration, we get a system of $n+m$ nonlinear ordinary differential equations

$$\int_L \rho A \left(a_z - g\cos(\varphi)\right) P_i \, dX - R^* P_i|_0^L + M^* P_i'|_0^L + \int_L \left(-M^* P_i'' + N^* w^{*\prime} P_i'\right) dX = 0,\ i = 1..n \tag{8}$$

$$\int_L \rho A \left(a_x + g\sin(\varphi)\right) P_i \, dX - N^* P_i|_0^L + \int_L N^* P_i' \, dX = 0,\ i = 1..m \tag{9}$$

We add the boundary conditions $w(X=0)=0$, $w(X=L)=0$, $u(X=0)=0$ and set the following forces and displacements for the special case of the pendulum to zero

$$M^*(0) = 0,\ M^*(L) = 0,\ R^*(L) = 0\ N^*(L) = 0,\ \xi_A = 0,\ \zeta_A = 0 \tag{10}$$

Assuming the plastic strains to be known, the remaining unknowns are $R^*(0)$, $N^*(0)$, φ, b_i, a_i which can be solved by a system of DAEs from equations (8),(9) and the boundary conditions, see e.g. [3]. The plastic strains have to be calculated iteratively with a return mapping scheme from an approximation of the total strain ε_{xx} and the plastic strain of the last step $\varepsilon_{xx}^{p,last}$ with a certain function C_{plast}, depending on the flow-rule, see also [2],

$$\varepsilon_{xx}^{p} = C_{plast}\left(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xx}^{p,last}\right). \tag{11}$$

2. Numerical example

We study a pendulum with height $H = 5mm$, width $W = 5mm$, length $L = 1m$, distributed mass, $\rho = 7800\frac{kg}{m^3}$, Young's modul $E = 210\ 000\frac{N}{mm^2}$, $\sigma_{yield} = 4\frac{N}{mm^2}$. The yield stress and Youngs modulus are assumed to be reduced due to high temperature. The plastic sources of eigenstrain, see equ. (2), are approximated with constant values within a discretisation of 120 strips over height and 120 elements over length, ideal elasto-plasticity is used. The degrees of our polynomial ansatz functions are $n = 7$ and $m = 3$. The pendulum is released form rest in horizontal position. Figure 2 shows the purely elastic case with and without stiffening, where higher frequency and lower deflection for the case with stiffening takes place. In the plastic case a damping of the deflection takes place, which leads to a decay of the rigid body angle φ for a long-time simulation.

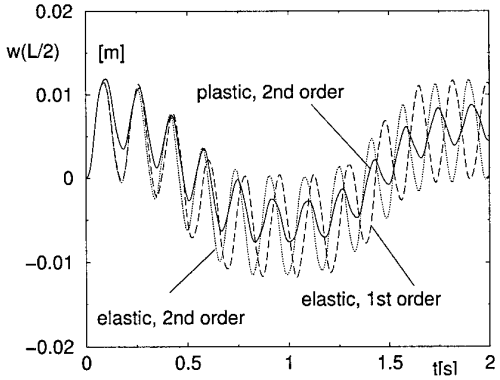


Figure 2: Mid-span deflection, first and second order elastic, second order plastic theory.

Acknowledgements

Support of the author J. Gerstmayr by a grant of the FWF within the SFB013, project F 1311, is gratefully acknowledged.

3. References

1 Simo, J.C. and Vu-Quoc,L.: The Role of Nonlinear Theories in the Dynamics Analysis of Rotating Structures. Univ. Calif., Berkeley (1986).

2 Brunner, W., Irschik, H.: Vibrations of Multi-Layered Composite Elasto-Viscoplastic Beams Using Second-Order Theory. Non-Linear Dynamics **6** (1994), 37–48.

3 Hairer, E., Wanner, G.: Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991).

Addresses: DI Johannes Gerstmayr, O.Univ.Prof.DI Dr.Hans Irschik, University of Linz, Institute of Mechanics and Machine Design, Division of Technical Mechanics, 4040 Linz, AUSTRIA

HELM, D.; HAUPT, P.

Geometrisch nichtlineare Modellierung und numerische Simulation von Formgedächtnislegierungen

In dieser Arbeit wird ein Materialmodell für Formgedächtnislegierungen vorgeschlagen, welches die Einflüsse der geometrischen Nichtlinearität angemessen berücksichtigt. Das gesamte Konstitutivgleichungssystem, bestehend aus einer Freien Energie und Evolutionsgleichungen für Innere Variable, erfüllt den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im Sinne der CLAUSIUS–DUHEM*-Ungleichung. Die gewählten Modellgleichungen beschreiben den Ein- und Zweiwegeffekt sowie die Pseudoelastizität und die Pseudoplastizität.*

1. Multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten

In dem hier vorgeschlagenen Modell wird von der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F}$ in einen elastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{e}$ und einen inelastischen Anteil $\mathbf{F}_\mathrm{i}$ ausgegangen: $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{e}\mathbf{F}_\mathrm{i}$. Hierdurch wird in dem Modell eine Zwischenkonfiguration eingeführt, auf der die Vortransformation des GREENschen Verzerrungstensors in natürlicher Weise in einen rein elastischen und einen inelastischen Anteil zerlegbar ist:

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \mathbf{F}_\mathrm{i}^{-\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{F}_\mathrm{i}^{-1} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e} - \mathbf{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{B}}_\mathrm{i}^{-1}\right) = \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{e} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{i} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e} = \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{e}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{F}}_\mathrm{e} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{B}}_\mathrm{i} = \mathbf{F}_\mathrm{i}\mathbf{F}_\mathrm{i}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

2. Konstitutivgleichungen: Freie Energie und Evolutionsgleichungen

Die Beschreibung der Energiespeicherung in der Struktur des Materials erfolgt durch die Freie Energie:

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2\rho_\mathrm{R}}\kappa\left(\ln\left[\left(\det\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)^2 + \frac{1}{2\rho_\mathrm{R}}\mu\left(\mathrm{Sp}\left[\left(\det\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right] - 3\right) \\ &- \frac{3}{\rho_\mathrm{R}}\kappa\alpha\,(\theta-\theta_0)\ln\left[\left(\det\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + c_\mathrm{d}\,(\theta-\theta_0) + u_0^\mathrm{A} + z\Delta u_0 - \theta\left[c_\mathrm{d}\ln\frac{\theta}{\theta_0} + \eta_0^\mathrm{A} + z\Delta\eta_0\right]\end{aligned} \tag{2}$$

Darin modelliert die erste Zeile der Freien Energie die Elastizitätseigenschaften mit Hilfe eines modifizierten SIMO–PISTER–Ansatzes [1]. Der erste Term der zweiten Zeile beschreibt dagegen den thermoelastischen Kopplungseffekt in einer auf finite Deformationen erweiterten Form. Die letzten Terme stellen die kalorischen Effekte dar, in der infolge der Betrachtung als Zweiphasenmaterial die Strukturvariable $z \in [0,1]$ den Martensitanteil angibt. Von besonderer Bedeutung sind darin noch die beiden Materialparameter Δu_0 und $\Delta\eta_0$, wobei Δu_0 die Innere Energiedifferenz und $\Delta\eta_0$ die Entropiedifferenz zwischen der Austenit- und Martensitphase im Ausgangszustand darstellt.

Die Kombination der Freien Energie mit der CLAUSIUS–DUHEM–Ungleichung in Form der Dissipationsungleichung, $\rho_\mathrm{R}\delta = -\rho_\mathrm{R}\dot{\psi} - \rho_\mathrm{R}\eta\dot{\theta} + \hat{\mathbf{S}}\cdot\overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}} \geq 0$, impliziert eine Potentialbeziehung für den Spannungstensor,

$$\hat{\mathbf{S}} = \rho_\mathrm{R}\frac{\partial\psi}{\partial\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{e}} = \kappa\left(\ln\left[\left(\det\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right)^{\frac{1}{2}}\right] - 3\alpha\,(\theta-\theta_0)\right)\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}^{-1} + \mu\left(\det\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}^{\mathrm{D}}\hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}^{-1}, \tag{3}$$

und die hier nicht näher angegebene Entropie, $\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$.

Aufgrund der weiteren Betrachtung der Restungleichung

$$\delta = -\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z}\dot{z} + \frac{1}{\rho_\mathrm{R}}\hat{\mathbf{P}}\cdot\overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}}_\mathrm{i} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \overset{\triangle}{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}}_\mathrm{i} = \dot{\hat{\boldsymbol{\Gamma}}}_\mathrm{i} + \hat{\mathbf{L}}_\mathrm{i}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{i} + \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{i}\hat{\mathbf{L}}_\mathrm{i}, \quad \hat{\mathbf{L}}_\mathrm{i} = \dot{\mathbf{F}}_\mathrm{i}\mathbf{F}_\mathrm{i}^{-1}, \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{C}}_\mathrm{e}\hat{\mathbf{S}} \tag{4}$$

werden für den inelastischen Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_\mathrm{i}$ und den Martensitanteil z, für den die additive Zerlegung in einen spannugsinduzierten Anteil z_SIM und einen temperaturinduzierten Anteil postuliert wird ($z = z_\mathrm{SIM} + z_\mathrm{TIM}$), die folgenden Evolutionsgleichungen gewählt (mit der Def.: $\Delta\psi(\theta) = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z} = \Delta u_0 - \theta\Delta\eta_0$):

$$\overset{\triangle}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\eta_{\mathrm{d}}}\left(\dfrac{f^{\mathrm{M}\to\vec{\mathrm{M}}}}{r}\right)^{m}\dfrac{\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}}{\|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}\|} & \text{für } \theta \le \dfrac{\Delta u_0}{\Delta\eta_0},\ f^{\mathrm{M}\to\vec{\mathrm{M}}} > 0 \text{ und } g < 0 \\ \dfrac{1}{\eta_{\mathrm{d}}}\left(\dfrac{f^{\mathrm{A}\to\vec{\mathrm{M}}}}{r}\right)^{m}\dfrac{\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}}}{\|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}}\|} & \text{für } \theta > \dfrac{\Delta u_0}{\Delta\eta_0},\ f^{\mathrm{A}\to\vec{\mathrm{M}}} > 0,\ \tau_{\mathrm{eff}} > \dfrac{\rho\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}} \text{ und } z < 1 \\ \dfrac{1}{\eta_{\mathrm{d}}}\left(\dfrac{f^{\vec{\mathrm{M}}\to\mathrm{A}}}{r}\right)^{m}\dfrac{\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}}}{\|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}}\|} & \text{für } \theta < \dfrac{\Delta u_0}{\Delta\eta_0},\ f^{\vec{\mathrm{M}}\to\mathrm{A}} > 0,\ \tau_{\mathrm{eff}} < \dfrac{\rho\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}} \text{ und } z > 0 \\ \mathbf{0} & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

$$\dot{z}_{\mathrm{TIM}} = \begin{cases} -\dfrac{|\dot{\theta}|}{M_{\mathrm{s}} - M_{\mathrm{f}}}\dfrac{\Delta u_0 - \theta\Delta\eta_0}{|\Delta u_0 - \theta\Delta\eta_0|} & \text{für } \dot{z}_{\mathrm{SIM}} = 0,\ \dot{\theta} < 0,\ \theta \le M_{\mathrm{s}}(\tau_{\mathrm{eff}}) \text{ und } z < 1 \\ -\dfrac{|\dot{\theta}|}{A_{\mathrm{f}} - A_{\mathrm{s}}}\dfrac{\Delta u_0 - \theta\Delta\eta_0}{|\Delta u_0 - \theta\Delta\eta_0|} & \text{für } \dot{z}_{\mathrm{SIM}} = 0,\ \dot{\theta} > 0,\ \theta \ge A_{\mathrm{s}}(\tau_{\mathrm{eff}}) \text{ und } z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

$$\dot{z}_{\mathrm{SIM}} = \begin{cases} \dfrac{\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} \cdot \overset{\triangle}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}\|\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}} & \text{für } \theta > \dfrac{\Delta u_0}{\Delta\eta_0},\ f^{\mathrm{A}\to\vec{\mathrm{M}}} > 0,\ \tau_{\mathrm{eff}} > \dfrac{\rho\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}} \text{ und } z < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}}\dfrac{\left(\det\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{D}} \cdot \overset{\triangle}{\hat{\mathbf{\Gamma}}}_{\mathrm{i}}}{\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\left(\det\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right] - 3}} & \text{für } \theta > \dfrac{\Delta u_0}{\Delta\eta_0},\ f^{\vec{\mathrm{M}}\to\mathrm{A}} > 0,\ \tau_{\mathrm{eff}} < \dfrac{\rho\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}} \text{ und } z > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

Die elastischen Bereiche werden durch die gewählten Fließ- und Phasenumwandlungsfunktionen

$$f^{\mathrm{M}\to\vec{\mathrm{M}}} = \tau_{\mathrm{eff}} - \sqrt{\frac{2}{3}}k^{\mathrm{M}\to\vec{\mathrm{M}}}(\theta) \qquad \text{mit} \qquad \tau_{\mathrm{eff}} = \|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}\| \tag{8}$$

$$f^{\mathrm{A}\to\vec{\mathrm{M}}} = \|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \mathbf{X}_{\theta}^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}(\theta) = \tau_{\mathrm{eff}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(k^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}} + \frac{\rho\Delta\psi(\theta)}{\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}}\right) \tag{9}$$

$$f^{\vec{\mathrm{M}}\to\mathrm{A}} = \|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}} - \mathbf{X}_{\theta}^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}k^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}(\theta) \tag{10}$$

begrenzt. Im Gegensatz dazu limitiert die Grenzfunktion im Fall der Pseudoplastizität

$$g(\mathbf{C}_{\mathrm{i}}) = \sqrt{\mathrm{Sp}\left[(\det\mathbf{C}_{\mathrm{i}})^{-\frac{1}{3}}\mathbf{C}_{\mathrm{i}}\right] - 3} - \sqrt{3}\gamma^{\mathrm{M}\to\vec{\mathrm{M}}} \tag{11}$$

die inelastischen Deformationen. Die temperaturabhängige Verschiebung der Phasenumwandlungsgrenzen wird in dem Modell durch die beiden Spannungstensoren dargestellt:

$$\hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{A}\to\mathrm{M}} = \frac{\rho_{\mathrm{R}}\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{\frac{3}{2}}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}}\frac{\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}}{\|\hat{\mathbf{P}}^{\mathrm{D}}\|} \qquad \hat{\mathbf{X}}_{\theta}^{\mathrm{M}\to\mathrm{A}} = \frac{\rho_{\mathrm{R}}\Delta\psi(\theta)}{\sqrt{3}\gamma^{\mathrm{A}\leftrightarrow\mathrm{M}}}\frac{\left(\det\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{D}}}{\sqrt{\mathrm{Sp}\left[\left(\det\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right)^{-\frac{1}{3}}\hat{\mathbf{B}}_{\mathrm{i}}\right] - 3}} \tag{12}$$

Danksagung

Wir danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft für ihre Unterstützung.

3. Literatur

1 Simo, J.C., Pister, K.S.: Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems**46** (1984), 201–215.

Addresses: Dipl.–Ing. D. Helm und Prof. Dr.–Ing P. Haupt, Institut für Mechanik, Universität Gesamthochschule Kassel, Mönchbergstr. 7, 34109 Kassel

HOHN, B.; ROTHERT, H.

Modellierung des nichtlinearen Verhaltens der Fugen von Verbundbauteilen

Für die Finite-Elemente-Berechnung von Stahl/Stahlbeton-Verbundbauteilen ist eine möglichst realitätsnahe und effiziente Simulation der Verbundfuge erforderlich. Eine diskrete Modellierung jedes einzelnen Verbindungsmittels, wie z.B. der Kopfbolzendübel oder Blockdübel, ist aufgrund des damit verbundenen numerischen Aufwandes für Untersuchungen an komplexen Strukturen nicht möglich. In der vorliegenden Arbeit wird die nichtlineare Last-Verschiebungs-Charakteristik der Verbindungsmittel durch ein Link-Element abgebildet. Als Ausgangspunkt hierfür wird ein elasto-plastisches Materialgesetz auf der Basis des generalisierten Prandtl-Elements verwendet. Abschließend werden Berechnungen mit realen Push-out-Versuchen verglichen.

1. Einleitung

Bei der Berechnung von Verbundbauteilen spielen verschiedene Komponenten eine wesentliche Rolle. So kann z.B. das Stahlbetonverhalten oder das Verhalten in der Verbundfuge genauer untersucht werden. Darüber hinaus gibt es für solche Simulationen ganz unterschiedliche Zielsetzungen. Zum einen kann man mikroskopische Untersuchungen an kleinen Teilstrukturen mit Hilfe von z.B. bruchmechanischen Ansätzen durchführen. Hierbei würde man jeden Dübel mit einer großen Anzahl von Elementen diskretisieren und könnte lokale Effekte wie die Betonzerstörung im Bereich des Dübelkopfes berechnen. Dieses Vorgehen ist für Untersuchungen an Gesamtstrukturen zu aufwendig und soll aus diesem Grund hier nicht weiter verfolgt werden. Zielsetzung dieser Arbeit ist vielmehr, die auftretenden makroskopischen Erscheinungen möglichst effizient zu simulieren. Hierzu wird ein Link-Element eingeführt, welches in Abbildung 1 dargestellt ist. Diesem Linkelement wird in Fugenlängsrichtung die gleiche Last-Verschiebungs-Charakteristik wie der realen Verbundfuge zugeordnet, wodurch sich das makroskopische Verformungsverhalten sehr gut wiedergeben läßt.

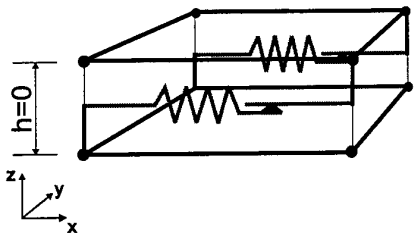


Abbildung 1: Link-Element

2. Theorie

Ausgangspunkt für das Link-Element ist ein isoparametrisches 8-Knoten-Kontinuumselement. Wie in Abbildung 1 zu erkennen, werden die Knoten der oberen und unteren Schicht durch Federn gekoppelt. Hierbei handelt es sich jedoch nicht um Einzelfedern, sondern um eine Summe von beliebig vielen Feder-Reiber-Elementen. Das Link-Element besitzt in vertikaler Richtung keine Höhe und wird im Bereich des Kontaktes zwischen Stahl und Stahlbeton in des FE-Netz eingebaut. Die Freiheitsgrade der übereinander liegenden Knoten werden in z-Richtung gekoppelt. Diese Vorgehensweise ist zulässig, da die Verschiebungen in Fugenlängsrichtung klein sind. In der y-Richtung (quer zur Fugenlängsrichtung) kann entweder keine Kopplung erfolgen, oder es können ebenfalls Federn angeordnet werden, was jedoch bei einachsiger Biegebeanspruchung nicht erforderlich ist. Für die Kopplung in Fugenlängsrichtung wird ein generalisiertes Prandtl-Element verwendet. Dieses ist in Abbildung 2 als rheologisches Modell dargestellt und besteht aus der Parallelschaltung einer Feder mit n Feder-Reiber-Kombinationen. Mit Hilfe dieses Modells lassen sich verschiedenste nichtlineare Kraft-Verschiebungs-Kurven simulieren.

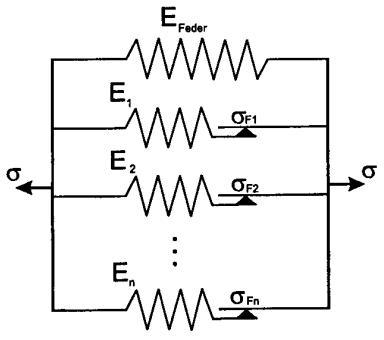


Abbildung 2: Rheologisches Modell des generalisierten Prandtl-Elements

Die einzelnen Feder-Reiber-Elemente stellen, für sich betrachtet, eine linear elastische, ideal plastische Formulierung dar. Für die FEM-Implementation dieses plastischen Materialgesetzes sind die üblichen Modellgleichungen, wie unten angegeben, zu verwenden. Zuerst werden die Dehnungen ϵ in einen plastischen und einen elastischen Anteil additiv

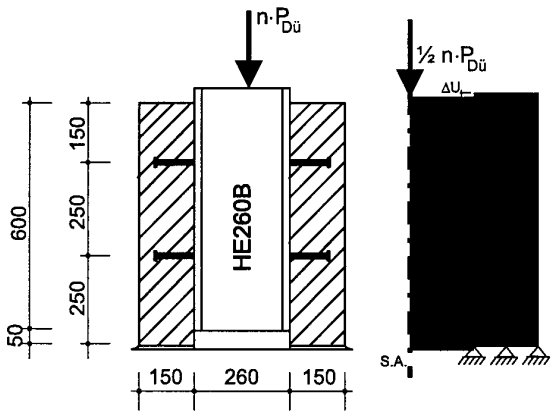


Abbildung 3: Versuchsaufbau und FE-Modell

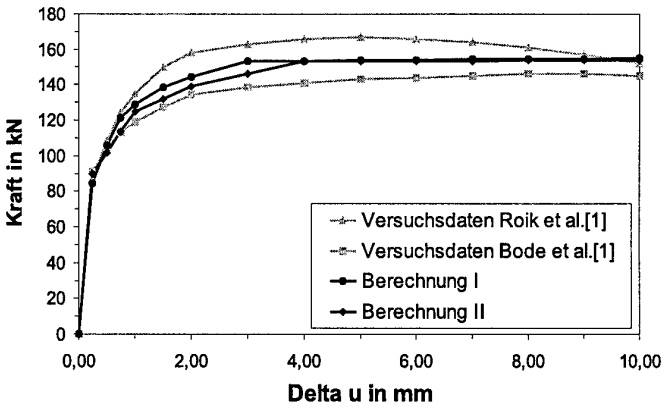


Abbildung 4: Kennlinie für Kopfbolzendübel ø22

gesplittet sowie eine Freie Energiefunktion ψ und ein Fließkriterium ϕ gewählt:

$$\epsilon = \epsilon^{\mathrm{el}} + \epsilon^{\mathrm{pl}} \quad ; \quad \psi = \psi(\epsilon^{\mathrm{el}}) \quad ; \quad \phi = \phi(\sigma).$$

Mit Hilfe der Clausius-Planck-Ungleichung und dem Prinzip der maximalen Dissipation ergeben sich die angegebenen Beziehungen für die Spannungen σ, die interne Dissipation D^{pl} und für die Rate der plastischen Verzerrungen $\dot{\epsilon}^{\mathrm{pl}}$ sowie die Be- und Entlastungsbedingungen.

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon^e} \quad ; \quad D^{\mathrm{pl}} = \sigma \cdot \dot{\epsilon}^{\mathrm{pl}} \geq 0 \quad ; \quad \dot{\epsilon}^{\mathrm{pl}} = \lambda \cdot \frac{\partial \phi(\sigma)}{\partial \sigma} \quad ; \quad \phi\lambda = 0, \phi \leq 0, \lambda \geq 0.$$

Diese Gleichungen wurden aufbereitet und im Rahmen einer globalen Newton-Raphson Iteration in das instituseigene FE-Programm ProTech implementiert.

3. Beispiel

Zur Verdeutlichung der Funktionsweise des Link-Elementes wird der in Abbildung 3 dargestellte Versuchsaufbau berechnet. Hierbei handelt es sich um den typischen Push-out-Versuch, der durchgeführt wird, um die Dübelkennlinie zu bestimmen. In der rechten Hälfte der Abbildung ist das verwendete FE-Modell dargestellt. Aufgrund der Symmetriebedingungen des Versuchsaufbaus wird nur das halbe System diskretisiert. Die Ergebnisse dieser Berechnung sind als Last-Verschiebungs-Kurven des Lastangriffspunktes in Abbildung 4 dargestellt. Die beiden grauen Kurven sind Versuchsergebnisse, wie sie für Kopfbolzendübel ø22 von Bode bzw. Roik et al. gemessen wurden. Die relativ großen Unterschiede sind vor allem mit verschiedenen Versuchsgeschwindigkeiten zu erklären. Zwischen den Versuchskurven liegen, schwarz dargestellt, zwei exemplarisch ausgewählte Berechnungsergebnisse. Es wurden hier vier Prandtl-Elemente und eine lineare Feder verwendet. Für die beiden Berechnungen wurden die Federsteifigkeiten leicht variiert, um zu zeigen, daß man sie an verschiedenste Versuchsverläufe anpassen kann. Insgesamt läßt sich festhalten, daß der angepeilte Mittelwert der beiden Versuchskurven sehr gut simuliert werden kann.

4. Ausblick

Für die zukünftige Arbeit ist geplant, das angegebene Link-Element für mehrachsige Belastung zu erweitern, um eine Interaktion des Tragverhaltens berücksichtigen zu können. Darüber hinaus ist es denkbar, die Steifigkeit der Federn in Abhängigkeit der Auflast zu variieren.

5. Literatur

1 Menrath, H.; Haufe, A.; Ramm, E.: Ein nichtlineares Materialmodell für FE-Analysen von Stahlverbundträgern. Der Stahlbau 68 (1999) Heft 9, S.703-712.

Adresse: Dipl.-Ing. B. Hohn, Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. H. Rothert
Institut für Statik, Universität Hannover, Appelstraße 9a, 30167 Hannover

KERSTEN, TH. UND HAUPT, P.

Zur Modellierung von anisotropem Materialverhalten in der Viskoplastizität

Die kristalline Struktur metallischer Festkörper verursacht ein anisotropes Materialverhalten im elastischen Bereich. Basierend auf einem Ansatz für die Freie Energie wird ein Materialmodell der Viskoplastizität vorgeschlagen. Der elastische Anteil der Freien Energie hängt von einem Satz von Invarianten des elastischen Verzerrungstensors ab, die man mit Hilfe bekannter Darstellungssätze für die entsprechende Symmetriegruppe erhält. Zur Beschreibung der Orts- und Zeitabhängigkeit der einzelnen Kristallorientierungen wird eine orthogonal-tensorwertige innere Variable eingeführt und ihr zeitlicher Verlauf durch eine einfache Evolutionsgleichung beschrieben. Die inelastischen Anteile der Freien Energie sowie Fliessregeln und Verfestigungsmodelle werden auf den Gleitsystemebenen formuliert. Das Materialmodell ist thermodynamisch konsistent im Sinne der CLAUSIUS-DUHEM*-Ungleichung.*

1. Einleitung und Motivation

Bei der Anisotropie kristalliner Bauteile können zwei Ursachen unterschieden werden. Hier sind einerseits die einkristallinen Metalle zu nennen, welche von Natur aus anisotrop sind, sowie andererseits die induziert-anisotropen Polykristalle, welche aufgrund eines Deformationsprozesses eine ausgebildete Textur haben. Die vorliegende Arbeit beschränkt sich auf Betrachtungen am Einkristall, wobei ausschließlich auf die wichtigsten Vertreter der Metalle mit kubisch-flächenzentrierter (kfz) Kristallstruktur eingegangen wird. Die Kristallstruktur, d.h. die periodische Anordnung der Atome in den verschiedenen Richtungen des Raumes, begründet das anisotrope Materialverhalten.

Beobachtungen am Einkristall haben ergeben, dass sich durch inelastische Deformationen, welche ihre Ursache in Abgleitvorgängen auf Gleitsystemebene haben, Orientierungsänderungen ergeben. Dabei wurde qualitativ festgestellt, dass sich bei Zugbelastung und unter der Voraussetzung dass ein Gleitsystem aktiv ist, die Gleitrichtung in die Beanspruchungsrichtung dreht und unter Druckbelastung eine Ausrichtung des Normalenvektors der Gleitebene in die Druckrichtung erfolgt. Diese Beschreibung der Orientierungsänderung muss im Materialmodell ebenfalls beschrieben werden.

2. Freie Energie

Die Formulierung des Materialmodells basiert auf einer additiven Zerlegung der Freien Energie $\psi(t)$ in einen elastischen Anteil $\psi_e(t)$ und einen inelastischen Anteil $\psi_i(t)$. Darüber hinaus wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e\mathbf{F}_i$ benutzt, wobei der inelastische Anteil $\mathbf{F}_i$ die sogenannte Zwischenkonfiguration definiert. Der Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration, welcher in einen rein elastischen und einen rein inelastischen Anteil zerfällt, $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{F}}_e^T\hat{\mathbf{F}}_e - \mathbf{1}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{1} - \mathbf{F}_i^{T-1}\mathbf{F}_i^{-1}\right) = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_i$, ergibt sich aus der Vortransformation des GREEN'schen Verzerrungstensors $\mathbf{E}$ ($\hat{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_i^{T-1}\mathbf{E}\mathbf{F}_i^{-1}$).

Die Nichteindeutigkeit der multipliativen Zerlegung $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}_e\mathbf{F}_i = \hat{\mathbf{F}}_e\bar{\mathbf{Q}}^T\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{F}_i$ motiviert die Vorgehensweise, eine tensorwertige innere Variable $\mathbf{\Phi}$ zur Beschreibung der Orientierungsänderungen zu verwenden, anstelle der konventionell benutzten orthogonalen Anteile $\hat{\mathbf{R}}_e$, bzw. $\mathbf{R}_i$ aus der polaren Zerlegung.

Dem Vorschlag von TSAKMAKIS [1] folgend, wird die innere Variable $\mathbf{\Phi}$ in den elastischen Anteil der Freien Energie eingeführt,

$$\psi_e = \varphi\left(\hat{\mathbf{F}}_e, \mathbf{\Phi}\right). \tag{1}$$

Werden für das Materialmodell volle Invarianzanforderungen gemäß CASEY und NAGHDI [2] gestellt, so lässt sich zeigen, dass man zu einer reduzierten Form

$$\psi_e = \hat{\varphi}\left(\mathbf{\Phi}^T\hat{\mathbf{\Gamma}}_e\mathbf{\Phi}\right) \tag{2}$$

für den elastischen Anteil der Freien Energie gelangt. Die Formänderungsenergie lässt sich demnach als Funktion der Invarianten des elastischen Anteils des Verzerrungstensors der Zwischenkonfiguration darstellen, welcher nun mit der inneren Variablen $\mathbf{\Phi}$ gedreht worden ist; diese Drehung entspricht der Orientierung der Anisotropieachsen.

3. Evolutionsgleichungen und thermomechanische Konsistenz

Da eine Formulierung des Materialmodells erwünscht ist, welche a priori thermodynamisch konsistent ist, wird der 2. Hauptsatz der Thermodynamik in Form der CLAUSIUS-DUHEM-Ungleichung für isotherme Prozesse ausgewertet:

$$\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} - \rho_R \dot{\psi}(t) \geq 0 \tag{3}$$

Verwendet man die gefundene reduzierte Form für den elastischen Anteil der Freien Energie und formuliert man die Spannungsleistung $\tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}}$ nach dem Konzept der Dualen Variablen mit Größen der Zwischenkonfiguration, so erhält man die hyperelastische Spannungsbeziehung

$$\hat{\mathbf{S}} = \rho_R \frac{\partial \hat{\varphi}\left(\boldsymbol{\Phi}^T \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_e \boldsymbol{\Phi}\right)}{\partial \hat{\boldsymbol{\Gamma}}_e} \tag{4}$$

und die noch zu erfüllende Restungleichung:

$$-\hat{\mathbf{P}} \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T\right) + \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{L}}_i - \rho_R \dot{\psi}_i \geq 0 \qquad \left(\hat{\mathbf{P}} = \left(\hat{\mathbf{F}}_e^T \hat{\mathbf{F}}_e\right) \hat{\mathbf{S}}\right) \tag{5}$$

Bei der Fließregel $(6)_1$ wird die in der Kristallplastizität übliche Form der Superposition der Schergeschwindigkeiten $\dot{\kappa}_\alpha$ auf den Gleitsystemebenen verwendet, während für den inelastischen Anteil der Freien Energie $(6)_2$ ein einfacher, quadratischer Ansatz gemacht wird, welcher die Materialparameter c_α enthält und innere Variablen y_α vom Verzerrungstyp, die zur Definition der kinematischen Rückspannungen $x_\alpha = c_\alpha (\kappa_\alpha - y_\alpha)$ dienen.

$$\hat{\mathbf{L}}_i = \sum_{\alpha=1}^{12} \dot{\kappa}_\alpha \boldsymbol{s}_\alpha^0 \otimes \boldsymbol{n}_\alpha^0 \qquad \rho_R \psi_i = \sum_{\alpha=1}^{12} \frac{1}{2} c_\alpha (\kappa_\alpha - y_\alpha)^2 \tag{6}$$

Die damit modifizierte Restungleichung,

$$-\hat{\mathbf{P}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T + \sum_{\alpha=1}^{12} (\tau_\alpha - x_\alpha) \underbrace{\dot{\kappa}_\alpha}_{\sim (\tau_\alpha - x_\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{12} x_\alpha \underbrace{\left(\dot{\kappa}_\alpha - \frac{1}{c_\alpha} \dot{x}_\alpha\right)}_{\sim x_\alpha} \geq 0, \tag{7}$$

gibt letzendlich, durch die dargestellten Proportionalitäten, Anlass zur Formulierung von thermodynamisch konsistenten Evolutionsgleichungen für die viskoplastische Gleitrate $\dot{\kappa}_\alpha$, die kinematische Verfestigung x_α und die innere Variable $\boldsymbol{\Phi}$:

$$\dot{\kappa}_\alpha = \frac{1}{\eta} \langle |\tau_\alpha - x_\alpha| - \tau_{cr} \rangle^m \frac{\tau_\alpha - x_\alpha}{|\tau_\alpha - x_\alpha|} \qquad \dot{x}_\alpha = c_\alpha \dot{\kappa}_\alpha - b_\alpha |\dot{\kappa}_\alpha| x_\alpha \qquad \dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T - \hat{\mathbf{W}}_i = -\gamma \, \hat{\mathbf{P}}_A \tag{8}$$

Die Schiefsymmetrie des Drehgeschwindigkeitstensors der Anisotropieachsen $\dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T$ in $(8)_3$ verlangt eine Proportionalität zum schiefsymmetrischen Anteil des MANDELschen Spannungstensors, wobei bei seiner alleinigen Verwendung die volle Invarianz verletzt wäre. Wird hingegen die Differenz aus dem Spintensor $\dot{\boldsymbol{\Phi}} \boldsymbol{\Phi}^T$ und dem Wirbeltensor $\hat{\mathbf{W}}_i$ verwendet, so werden die vollen Invarianzanforderungen erfüllt. Dies erfordert im weiteren aber eine nochmalige Untersuchung der Restungleichung, was zu einer erfüllbaren Einschränkung an die Elastizitätsbeziehung führt.

Abschliessend sei bemerkt, dass die numerische Integration der Materialgleichungen für die Zugbeanspruchung eine qualitativ gute Übereinstimmung mit den eingangs beschriebenen Orientierungsänderungen liefert.

4. Literatur

1 TSAKMAKIS, CH.: Description of Plastic Anisotropy Effects at Large Deformations. Part I: Restrictions Imposed by the Second Law and the Postulate of Il'iushin.; zur Veröffentlichung eingereicht (1999)

2 CASEY, J., NAGHDI, P.M.: A Remark on the Use of the Decomposition $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ in Plasticity; Journal of Applied Mechanics, **47** (1980), 672–675.

Anschrift:

DIPL.-ING. THOMAS KERSTEN, PROF. DR.-ING. PETER HAUPT, Institut für Mechanik, Universität Kassel, Mönchebergstr. 7, D-34109 Kassel, Germany

MATTHIAS KRÖGER

Biegung eines rechteckigen Querträgers beim mittigen Pfahlaufprall eines Fahrzeuges

Beim Pfahl- oder Baumaufprall eines Fahrzeuges wird der Querträger der Stoßstange hauptsächlich auf Biegung beansprucht. Der Querträger hält diesen Belastungen meist nicht stand und knickt bei niedrigem Kraftniveau ein. Dadurch werden die Crashbereiche der Längsträger nicht aktiviert und bis zum Kontakt des Hindernisses mit dem Motor wird nur wenig Energie dissipiert. Der Kraftverlauf eines Rechteckträgers bei der Dreipunktbiegung wird in dieser Arbeit analytisch berechnet und experimentell untersucht. Dabei werden die Einflüsse der Geometrie und des Materials auf das Deformationsverhalten bestimmt. Der experimentelle Vergleich mit zylindrischen Trägern zeigt grundlegend andere Versagensmechanismen.

1. Einleitung

Der Pfahl- oder Baumaufprall eines Fahrzeuges stellt die Fahrzeugfront vor große Probleme. Die meisten Stoßfängerquerträger können der Belastung kaum standhalten und verformen unter niedriger Energieaufnahme, siehe [2]. Erst der Kontakt des Hindernisses mit dem Motor erhöht den Widerstand des Fahrzeugs gegen das Eindringen und der Motor schiebt sich in die Fahrgastzelle. Besonders in schwächer besiedelten Regionen hat der Aufprall auf einen Baum einen erheblichen Anteil an der Zahl der im Verkehr getöteten Personen. Im folgenden wird eine analytische Auslegung vorgestellt und experimentell verifiziert. Weiterhin soll der Einfluss des Kontakts bei den Versuchen aufgezeigt werden.

2. Modellierung des Pfahlaufpralls

Die Modellierung des Pfahlaufpralls kann auf die Dreipunktbiegung zurückgeführt werden. Für einen Rechteckträger hat Kecman [1] das Deformationsverhalten anhand eines Fließgelenkmodells sehr gut beschrieben. Diese Beschreibung mündet in einer Vielzahl von Energiegleichungen für die einzelnen Fließgelenke. Zusätzlich sind die Biegewinkel an den einzelnen Fließgelenken aus der Kinematik in Abhängigkeit des Einknickwinkels φ zu bestimmen. Außerdem tritt eine rollende Biegung auf, bei der der Rollradius erheblichen Einfluss hat. Dieser wurde von Kecman empirisch in Abhängigkeit des Einknickwinkels bestimmt. Leitet man die Gesamtenergie nach dem Eindringweg s ab, so ergibt sich die Kraft am Hindernis. Die Kraft am Auflager bzw. Längsträger beträgt die Hälfte. Eine gute Näherung für die Anfangskraft F_{cr} liefert für hinreichend dickwandige Rechteckprofile der Breite C, Höhe B und Wandstärke t das vollplastische Biegemoment

$$F_{cr} = R_e\, t\, \frac{C(B-t) + 0.5(B-2t)^2}{a/2}. \tag{1}$$

Der Kraftverlauf wird durch die analytische Beschreibung von Kecman für größere Winkel sehr gut beschrieben. Durch eine Gerade beginnend bei der Anfangskraft F_{cr}, die tangential in die Lösung von Kecman übergeht, lässt sich der Übergangsbereich gut beschreiben, siehe Abbildung 1 links.

Die Kraft am Längsträger hängt durch den Hebelarm stark von der Länge des Querträgers ab. In Versuchen wurde die Querträgerlänge a und der Pfahldurchmesser D_I variiert. Wird das aus der Kraft errechnete Biegemoment über dem aus dem Weg errechneten Biegewinkel aufgetragen, zeigt sich für alle durchgeführten Varianten eine gute Übereinstimmung. Der Verlauf hängt nur noch von dem Querschnitt und dem Material des Profiles ab. Zylindrische Profile zeigen im Gegensatz dazu eine Abhängigkeit des Deformationsmechanismusses von der Trägerlänge.

3. Berücksichtigung des Kontakts

Beim Eindringen des Baumes verlagert sich der Kraftangriffspunkt und der Hebelarm h ändert sich von $a/2$ auf $a/2/\cos\varphi - D_I/2\tan\varphi$, siehe Abbildung 1 rechts. Bei einem Einknickwinkel von 20^o ergibt dies bei $a = 950\,mm$ und $D_I = 100\,mm$ ohne Reibung eine 2,6% niedrigere Kraft und bei einem Baum mit $D_I = 305\ \ mm$ eine 5,3% höhere Kraft am Auflager.

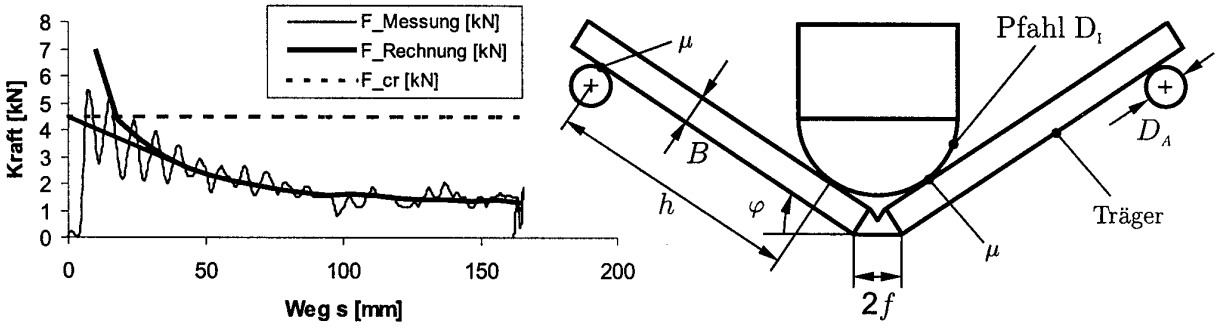


Abbildung 1: Messergebnis eines Profils 60x60x2-AlMgSi0.5 ($a = 950\,mm$, $D_I = 100\,mm$); Lage der Kontaktpunkte

Am Kontakt zum Auflager tritt eine Verschiebung Δl_A des Querträgers auf. Diese verursacht Reibung und dadurch eine zusätzlich dissipierte Energie W_A. Vernachlässigt man den Durchmesser des Auflagers D_A, erhält man für die Energie bei konstantem Reibwert μ

$$W_A \approx 2\mu F_{A,m} \Delta l_A, \tag{2}$$

mit der mittleren Kraft $F_{A,m} = 2,1\,kN$. Die Verschiebung ergibt sich mit der Länge der Deformationszone $2f$ zu

$$\Delta l_A = (\frac{a}{2} - f)(\frac{1}{\cos\varphi} - 1). \tag{3}$$

Die gleiche Problematik tritt am Kontakt zum Pfahl auf. Hier überlagert sich die Relativgeschwindigkeit mit einer Abrollbewegung am Pfahl. Es ergibt sich mit der mittleren Kraft $F_{I,m}$ am Pfahl

$$W_I \approx \mu F_{I,m} \Delta l_I \quad \text{mit} \quad \Delta l_I = D_I/2\,(\tan\varphi - \varphi) + B\tan\varphi + f\left(1 - \frac{1}{\cos\varphi}\right). \tag{4}$$

Der Anteil der Reibung an der gesamten dissipierten Energie $W_{ges} = 337\,J$ bei einem Biegewinkel von $\varphi = 20^o$ ergibt sich für einen Reibwert $\mu = 0,2$ zu $W_A = 24\,J$ am Auflager und $W_I = 17\,J$ am Pfahl. Der Anteil der Reibung an der dissipierten Energie beträgt 12%.

4. Zusammenfassung

Der Baumaufprall besitzt ein hohes Gefahrenpotential, da die Fahrzeuge hierfür nur unzureichend ausgelegt sind und meist hohe Aufprallgeschwindigkeiten vorliegen. Zur Berechnung von Rechteckprofilen wurde auf die analytischen Berechnungen von Kecman zurückgegriffen und diese durch eigene Versuche validiert. Die Berücksichtigung der Reibung im Kontakt beim Versuch erweitert das Modell und hat etwa 12% Anteil an der dissipierten Energie.

Die untersuchten serienmäßigen Fahrzeugstrukturen weisen eine Anfangskraft am Längsträger um $15\,kN$ beim Pfahlaufprall auf. Zum Auslösen der Deformation des Längsträgers wird meist eine Kraft zwischen $50\,kN$ und $80\,kN$ benötigt. Könnte der Querträger diese Kraft ohne Einknicken übertragen, würde die Deformation beim Baumaufprall identisch mit einem Wandaufprall mit 100% Überdeckung sein und das Risiko erheblich sinken. Ein derartiger Querträger ergibt sich aus der analytischen Berechnung der Anfangskraft z.B. zu 80x100x3 aus einem hochfesten Stahl mit einer Streckgrenze $R_e = 1000\,N/mm^2$. Die Kraft am Längsträger würde dann $66\,kN$ betragen. Dies zeigt auf, dass es realistische Möglichkeiten zur Auslegung eines Querträgers gibt.

5. References

1 KECMAN, D.: Bending Collapse of Recktangular and Square Section Tubes, Int. J. Mech. Sci. Vol. **25** (1983), No. 9-10, S. 623-636.

2 KRÖGER, M.: Crashverhalten des Trägersystems im Stoßfängermodul, Stoßfängersysteme von Kraftfahrzeugen, Haus der Technik, Essen 2000.

Addresses: MATTHIAS KRÖGER, Institut für Mechanik, Universität Hannover, Appelstraße 11, 30167 Hannover, Germany, email: kroeger@ifm.uni-hannover.de

LAMBRECHT, M. / MIEHE, C.

Aspects of the Pre– and Postcritical Localization Analysis of Solids

The paper discusses aspects of the pre– and postcritical localization analysis for a general class of isotropic non–associative elastoplasticity models at finite strains. In order to detect the onset of bifurcation and the critical localization orientation an accompanying localization analysis is performed. As the simulation within standard formulations of localized failure yields the typical mesh–dependent postcritical results, we apply a new regularuzation technique based on the introduction of a micro–structure at each Gauss–point which bifurcates in the form of an assumed fluctuation field.

1. The Macroscopic and Microscopic Conception

Let $\varphi : \boldsymbol{X} \mapsto \boldsymbol{x}$ the nonlinear deformation map at time $t \in \mathbf{R}_+$ of an elastic body undergoing finite strains. φ maps points $\boldsymbol{X} \in \mathcal{B}$ of the reference configuration $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^3$ onto points $\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{X}; t) \in \mathcal{S}$ of the current configuration $\mathcal{S} \subset \mathbf{R}^3$. Let $\boldsymbol{F} := \nabla\varphi(\boldsymbol{X}; t)$ denote the deformation gradient. The macroscopic boundary value problem is governed for the quasistatic case by the field equation $\mathrm{div}\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\gamma} = \boldsymbol{0}$ in $\bar{\mathcal{B}}$. Here, $\bar{\boldsymbol{P}}$ denotes the first Piola Kirchhoff stress tensor and $\bar{\gamma}$ a given body force field. The macroscopic stresses $\bar{\boldsymbol{P}}$ are assumed to be defined by the volume average

$$\bar{\boldsymbol{P}} := \frac{1}{V}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{P}\, dV \quad \text{in } \bar{\mathcal{B}} \tag{1}$$

of the associated microscopic nominal stress $\boldsymbol{P}$ defined at $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}$ of a representative micro–structure $\mathcal{B}$ attached to the point $\bar{\boldsymbol{x}} \in \bar{\mathcal{B}}$ of the macro–continuum $\bar{\mathcal{B}}$ as visualized in Figure 1a. The micro–structure consists of three parts where the middle one represents a possibly localized band with band width δ, see Figure 1b.

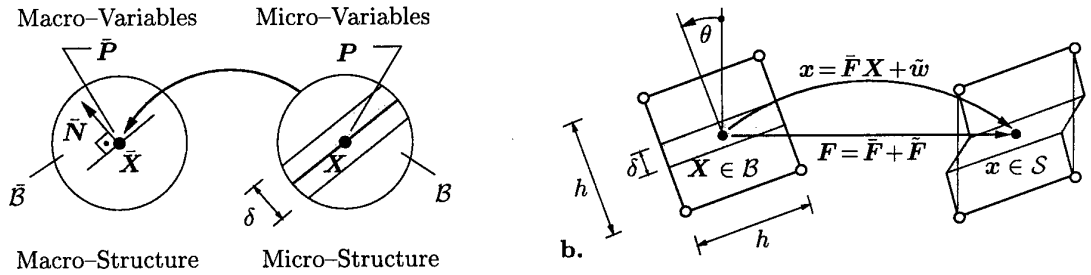


Figure 1: a.) Continuum with micro–structure, b.) Bifurcation of the cube–shaped micro–structure.

The deformation of the micro—structure is assumed to be linked to the local values of the macro–continuum via

$$\bar{\boldsymbol{x}} := \bar{\boldsymbol{F}}\bar{\boldsymbol{X}} + \tilde{\boldsymbol{w}} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{F} := \bar{\boldsymbol{F}} + \tilde{\boldsymbol{F}}\,. \tag{2}$$

The fluctuation field $\tilde{\boldsymbol{w}}$ and the associated deformation gradient $\tilde{\boldsymbol{F}}$ are considered as primary deformation variables on the micro–structure.

2. The Proposed Finite Element Localization Analysis

The key–steps are performed as follows. We apply the stress updates $\bar{\boldsymbol{P}}$ on the elastoplastic macro–continuum at Gauss points $\bar{\boldsymbol{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ and perform the local macroscopic accompanying localization analysis. After localization has occured we introduce at $\bar{\boldsymbol{X}} \in \bar{\mathcal{B}}$ an inhomogeneous micro–structure $\mathcal{B}$ with $\mathrm{vol}(\mathcal{B}) \approx \mathrm{vol}(\textit{element})$ consisting of a localized elastoplastic band of width δ embedded into an elastic matrix which is visualized in Figure 1b. Then we apply the stress updates $\boldsymbol{P}$ on the elastoplastic micro–continuum at $\boldsymbol{X} \in \mathcal{B}$ and compute the local discontinuities as fluctuations for the local equilibrium state of $\mathcal{B}$.

3. Isotropic Non–Associative Strain–Softening Elastoplasticity

As a model problem for the nonlinear inelastic stress response of the composite phases on the micro–structure we consider a non–associative elastoplastic strain–softening model. The continuous form of the model is governed by the yield criterion ϕ and the plastic potential χ

$$\phi = \hat{\gamma}_\phi \, \|\mathrm{dev}[\boldsymbol{CS}]\| - \hat{\beta}_\phi \quad \text{and} \quad \chi = \hat{\gamma}_\chi \, \|\mathrm{dev}[\boldsymbol{CS}]\| - \hat{\beta}_\chi \tag{3}$$

where $\boldsymbol{CS}$ represents the Mandel stress tensor and β_I and γ_I with $I = \{\phi, \chi\}$ are decoupled spheric–deviatoric material functions which depend on the conjugate internal variable $B = hA$. A represents the equivalent plastic strain and $h < 0$ the softening modulus.

4. Numerical Example

The example analyses the elastoplastic strain–softening response under plane strain conditions and points out the very good performance of the proposed regularization technique for curved shear bands. We consider a specimen with a rigid plate at the upper bound which rotates around the left support. The specimen has been discretized by four different mesh–sizes.

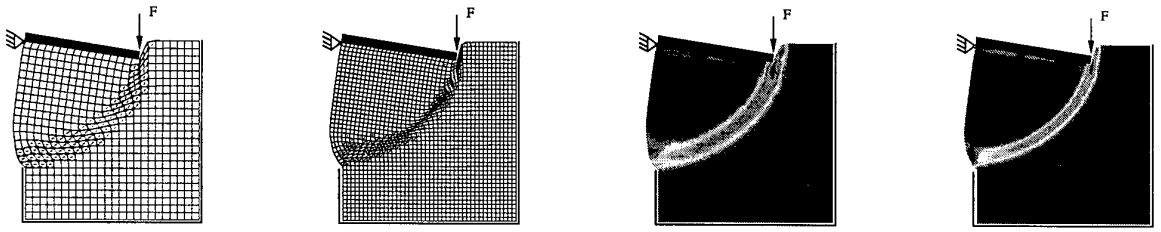


Figure 2: a.), b.) Deformed meshes with localization directions, c.), d.) distribution of equivalent plastic strains for the 24 × 24 and 42 × 42 meshes, respectively.

Figure 2a and 2b depict the deformed meshes and the distribution and the orientation of the relevant localization directions. The distribution of the equivalent plastic strains are visualized in Figure 2c and 2d.

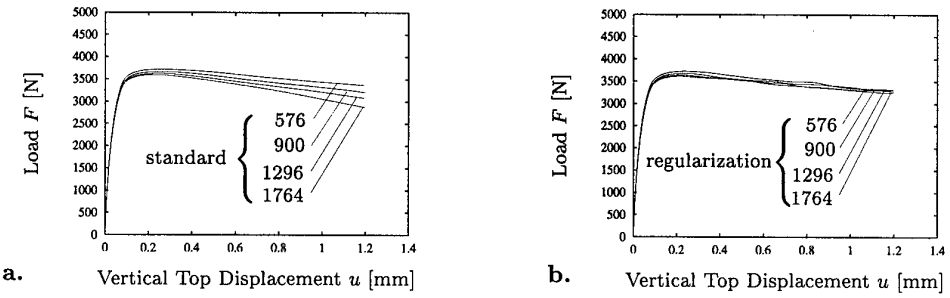


Figure 3: Load displacement curves with a.) standard formulation, b.) proposed regularization technique.

Figure 3a depicts the mesh–dependent load–displacement paths of the standard formulation. Figure 3b shows the quasi mesh–invariant curves of the proposed regularization technique.

5. References

1 MIEHE, C.; LAMBRECHT, M.: Finite Element Analysis of Localization Failure in Strain–Softening Solids based on an Assumed Fluctuation Mode on a Micro–Structure, to appear in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
2 MIEHE, C.; SCHRÖDER, J.: Post–critical Discontinuous Localization Analysis of Small–strain Softening Elastoplastic Solids; Archive of Applied Mechanics, **64** (1994), pp. 267–285.

Address: DIPL.-ING. MATTHIAS LAMBRECHT and PROF. DR.-ING. CHRISTIAN MIEHE, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I, Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart, Germany.

W.G. LITVINOV, B. KRÖPLIN, J. SCHÖCK, K. HESSENBERGER

Problem on plastic flow at great deformations in the presence of ultrasonic vibrations

We consider the following two-stages process. At the first stage a body vibrates and by the dissipation of energy it is heated. At the second stage a slowly varying in time mechanical load is superimposed on the vibrating body. This load creates great plastic deformations. The first stage is modeled by a coupled system of equations of forced vibration of a viscoelastic body and the heat equation. In the analysis of the second stage we apply the model of plastic flow under great deformations which was introduced and studied in [1].

1. Problem on forced vibration and heating of a viscoelastic body

We take the following constitutive equation:

$$\sigma_{ij} = \lambda[\varepsilon(u) - \alpha(\Theta)\Theta]\delta_{ij} + 2G(\Theta)\varepsilon_{ij}(u) + 2\mu(\Theta)\frac{\partial \varepsilon_{ij}(u)}{\partial t}. \tag{1}$$

Here σ_{ij} are components of the stress tensor, $u = (u_1, ..., u_n)$ is the vector function of displacement, $n = 2$ or 3, $\Theta = T_1 - T_0$ with T_1 the temperature, T_0 the temperature in undeformed state, $\varepsilon(u)$ =div$u$, $\varepsilon_{ij}(u)$ are components of the strain tensor

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, ..., n \ , \tag{2}$$

δ_{ij} are components of the unit tensor, λ is the compression modulus, $\alpha(\Theta)$ the coefficient of the thermal volume expansion, $G(\Theta)$ the shear modulus, $\mu(\Theta)$ the viscosity and t time. We denote by Ω a bounded domain in R^n occupied by a body under consideration and by S the boundary of Ω. The balance equations are defined by

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i \quad in \quad \Omega \times (0, T), \quad i = 1, ..., n \ , \tag{3}$$

where ρ is the density, f_i are components of the vector function of volume forces, T is an arbitrary positive constant. The heat equation is defined by

$$c_v\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \chi(\Theta)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i^2} - 2\mu(\Theta)\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}(u)}{\partial t}\right)^2 + \beta(\Theta)\frac{\partial \varepsilon(u)}{\partial t} = 0 \quad in \quad \Omega \times (0, T), \tag{4}$$

where c_v is the specific heat, $\beta(\Theta)$ the coefficient of heat absorption, $\chi(\Theta)$ the thermal conductivity. In the following we suppose that the dissipation of energy is defined by

$$2\mu(\Theta)\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}(\Re u)}{\partial t}\right)^2, \tag{5}$$

where $\Re$ is an operator of regularization (an operator of average) with respect to the space variable x. From the physical viewpoint the relation (5) denotes that the dissipation of energy in a point x depends on the values of the rate of strain tensor in a small vicinity of the point x, i.e. the model in nonlocal. This is natural from the physical standpoint. For the function of temperature Θ we take in the following boundary conditions

$$\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \nu} + a\Theta\right)\Big|_{S\times(0,T)} = g, \tag{6}$$

where a is the coefficient of heat transfer, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ the unit outward normal to S, $g = a(T_2 - T_0)$, T_2 being the temperature of surrounding. Let S_1 and S_2 be two open subsets of S such that $\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. We prescribe the function of displacement u on S_1 and surface forces on S_2, thus we take the following boundary conditions

$$u\Big|_{S_1\times(0,T)} = A\sin\omega t, \qquad \sigma_{ij}\nu_j\Big|_{S_2\times(0,T)} = 0, \quad i = 1,...,n \quad , \tag{7}$$

where $A = (A_1,...,A_n)$ is the vector of amplitude, ω the frequency of vibration. The initial conditions for u and Θ are the following

$$u(x,0) = \check{u}(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \hat{u}(x), \qquad \Theta(x,0) = \Theta_0, \quad x \in \Omega \quad , \tag{8}$$

where $\check{u}$, $\hat{u}$, Θ_0 are given functions. Next we introduce the notation of a generalized solution of this coupled problem. For some assumptions natural from the physical standpoint we prove by using the known approaches (see for example [2], [3]), that there exists a solution of the coupled problem such that $u \in C([0,T];H^1(\Omega)^n)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;H^1(\Omega)^n)$, $\Theta \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$. In this case the approximate solutions which are constructed by the Galerkin method converge to the exact solution.

2. Coupled problem for the function of velocity of plastic flow and for the function of vibration in a variable domain

For the plastic flow we take the following constitutive equation, see [1]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\varphi(J(v), I(v), I_1(u))\varepsilon_{ij}(v). \tag{9}$$

Here $v = (v_1,...,v_n)$ is the velocity of plastic flow, p the pressure,

$$\varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{10}$$

φ is the viscosity of plastic flow which depends on $J(v)$, $I(v)$,$I_1(u)$, where $J(v)$ is the second invariant of the tensor of strain accumulated at plastic flow, $I(v)$ the second invariant of the rate of strain tensor, $I_1(u)$ the function of influence of the vibration on the viscosity of plastic flow, $u = (u_1,...u_n)$ being the function of vibration. The vibrations shake loose the structure of a material and decrease the viscosity of plastic flow. We formulate and research a coupled problem for the function of plastic flow v and the function of vibration u. In this case because of large deformations the shape of the domain of plastic flow is a function of time, and so the domain of plastic flow $\Omega_v(t)$ should be defined at each moment of time t, and a coupled problem should be solved in an unknown domain

$$Q_v = \{(x,t)|x \in \Omega_v(t), t \in [0,T]\}. \tag{11}$$

At some assumptions we prove the existence of a solution of the coupled problem which is considered in the Lagrange coordinate system, and we apply the lag time for approximate solution of this problem.

Acknowledgements

The present work is funded by the German Science Foundation (DFG) within the Collaborative Research Center SFB 543 ("Ultraschallbeeinflusstes Umformen metallischer Werkstoffe"), which is gratefully acknowledged.

3. References

1 W.G. Litvinov: A model and a general problem on plastic flow under great deformations. Sonderforschungsbereich 404, report no. 99/07, pages 1–31, 1999.

2 J.-L. Lions: Quelques Méthodes de Résolution des Probèmes aux Limites non Linéaires. Dunod; 1969.

3 H. Gajewski, K. Groeger, Zacharias K.: Nichtlineare Operatorengleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag, Berlin, 1974.

Addresses: Institute for Statics and Dynamics of Aerospace Structures, University of Stuttgart, Pfaffenwaldring 27, D-70569 Stuttgart, Germany

MACK, W.; PLÖCHL, M.; GAMER, U.

Auswirkungen eines Temperaturzyklus auf einen rotierenden elastisch-plastischen Querpreßverband mit vollem Einschluß

Unter Zugrundelegung der Trescaschen Fließbedingung nebst zugeordneter Fließregel sowie eines ebenen Spannungszustandes wird die Änderung der Spannungsverteilung in einem rotierenden elastisch-plastischen Querpreßverband mit vollem Innenteil zufolge Erwärmung und nachfolgender Abkühlung diskutiert.

1. Problemstellung

Die durch hohe Betriebstemperatur einer Maschine bewirkte Abnahme der Fließspannung kann auch in ursprünglich rein elastisch ausgelegten Querpreßverbänden zu Plastizierung und einer dadurch bewirkten Reduktion des Fugendrucks führen. Zur Untersuchung dieses Phänomens ist abhängig vom Verhältnis zwischen der Länge des Querpreßverbandes und dem Fugendurchmesser eine Behandlung als ebenes Spannungsproblem (z.B. [1-3]) oder als ebenes Verzerrungsproblem [4] angemessen. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Auswirkungen eines Temperaturzyklus auf einen dünnen Querpreßverband mit vollem Einschluß zu diskutieren (siehe [5]) und insbesondere den Einfluß von Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit zu studieren.

2. Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnung

Es wird ein anfänglich rein elastischer Querpreßverband mit $\sigma_z = 0$ betrachtet, bei dem Einschluß ($0 \le r \le a$) und Nabe ($a \le r \le b$) aus dem gleichen Material mit linearer Temperaturabhängigkeit der Fließspannung und linearer Verfestigung bestehen, d.h. $\sigma_F = \sigma_0(1 - \gamma T + \eta\varepsilon_V^{pl})$; es kommt die Trescasche Fließbedingung nebst zugeordneter Fließregel zur Anwendung. Für nicht extrem hohe Winkelgeschwindigkeiten und Maximaltemperaturen T_m ist dann bei monotoner, homogener Erwärmung und Abkühlung [1] folgendes Verhalten typisch: das Innenteil bleibt elastisch, während sich mit zunehmender Temperatur in der Nabe ein plastischer Bereich mit $\sigma_\varphi - \sigma_r = \sigma_F$ von der Fuge her ausbreitet. Dieser erreicht bei T_m seine maximale Ausdehnung; nach Beginn der Abkühlung ändern sich (der homogenen Temperaturverteilung wegen) die Spannungen nicht mehr. Folgende Beziehungen gelten im gesamten Querpreßverband:

$$\sigma_r = C - \frac{K}{r^2} + E\left(-\alpha\frac{T}{2} + \int \frac{\varepsilon_r^{pl}}{r}dr\right) - \frac{3+\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2, \tag{1}$$

$$\sigma_\varphi = C + \frac{K}{r^2} + E\left(-\alpha\frac{T}{2} + \int \frac{\varepsilon_r^{pl}}{r}dr + \varepsilon_r^{pl}\right) - \frac{1+3\nu}{8}\varrho\omega^2 r^2, \tag{2}$$

$$u = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\sigma_r r + \frac{2K}{r} + \frac{1-\nu}{4}\varrho\omega^2 r^3\right] + \alpha T r. \tag{3}$$

Die für Einschluß und Nabe unterschiedlichen Integrationskonstanten C und K ergeben sich aus den Bedingungen $u(0) = 0$, $\sigma_{r,E}(a) = \sigma_{r,N}(a)$, $u_N(a) - u_E(a) = d$ mit dem Übermaß d, sowie $\sigma_r(b) = 0$.

Anfänglich ist überall $\varepsilon_r^{pl} = 0$. Hat die Temperatur den Wert

$$T_f = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{Ed}{\sigma_0 a} - \frac{1-\nu}{4}\frac{\varrho\omega^2 a^2}{\sigma_0}\right) \tag{4}$$

überschritten, so findet man unter Berücksichtigung der aus dem plastischen Arbeitsinkrement folgenden Beziehung $\varepsilon_V^{pl} = -\varepsilon_r^{pl}$ für den plastischen Bereich ($a \le r \le r_p$)

$$\varepsilon_r^{pl} = \frac{1}{1+\frac{\sigma_0}{E}\eta}\left[\frac{\sigma_0}{E}(1-\gamma T) - \frac{ad}{r^2} - \frac{1-\nu}{4}\frac{\varrho\omega^2 r^2}{E}\right]; \tag{5}$$

der plastisch-elastische Grenzradius r_p folgt aus $\varepsilon_r^{pl}(r_p) = 0$. Mit Abkühlungsbeginn wird die bei T_m auftretende plastische Dehnung zur permanenten Dehnung, $\varepsilon_r^{pl}(T_m) = \varepsilon_r^{pl,per}$.

3. Numerische Ergebnisse

Zur numerischen Auswertung der Gleichungen ist es vorteilhaft, die dimensionslosen Größen $d^* = Ed/(\sigma_o b), q = a/b, x = r/b, T^* = T/T_m, \eta^* = \eta\sigma_0/E, \vartheta = \gamma T_m, \sigma_i^* = \sigma_i/\sigma_0$ und $\Omega^2 = \varrho\omega^2 b^2/\sigma_0$ einzuführen; der Parameter ϑ stellt ein Maß für die maximale thermische Belastung dar.

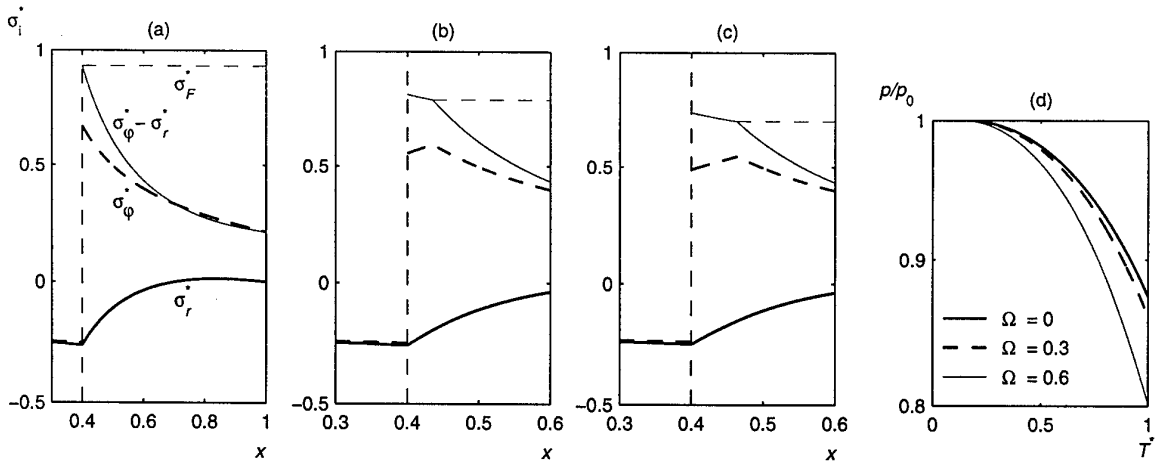


Bild 1: Spannungsverteilung bei (a) $T^* = T_f^* = 0.2251$, (b) $T^* = 0.7$ und (c) $T^* = T_m^* = 1$ für $\vartheta = 0.3$ und $\Omega = 0.6$; (d) Änderung des Fugendrucks mit zunehmender Temperatur für $\vartheta = 0.5$. Weitere Parameterwerte bei (a) - (d): $d^* = d_{m,th}^* = 0.3690$, $q = 0.4$, $\eta^* = 0.2$, $\nu = 0.3$

Bilder 1(a) - (c) stellen die Entwicklung plastischer Deformation in der Nabe dar, wobei die jeweilige Grenze des plastischen Bereichs am Verlauf der Umfangsspannung deutlich zu erkennen ist. Zum Vergleich sind sowohl die Fließspannung als auch die Differenz $\sigma_\varphi^* - \sigma_r^*$ in der Nabe eingezeichnet. Das gewählte Übermaß $d_{m,th}^*$ ist jenes, bei dem bei thermischem Fügen durch Erhitzen der Nabe [6] gerade noch keine Plastizierung auftritt (siehe [5]); das maximale Übermaß für anfänglich elastisches Verhalten bei einem rein mechanisch gefügten Querpreßverband ergibt sich aus (4) für $T_f = 0$. Die Spannungsverteilung auf Bild 1(c) ist jene, die auch nach Ende des Temperaturzyklus verbleibt.

Bild 1(d) zeigt die Änderung des (auf den jeweiligen Anfangswert bezogenen) Fugendrucks, $p = -\sigma_r^*(q)$, mit zunehmender Temperatur für drei verschiedene Werte von Ω. Wie man erkennt, bewirkt die Rotation eine stärkere Abnahme des Fugendrucks und damit des übertragbaren Moments. Ist dieser Effekt bei $\Omega = 0.3$ (z.B. für Stahl mit $\sigma_0 = 330$ N/mm^2 und $b = 80$ mm einer Drehzahl von 7352 1/min entsprechend) noch nicht sehr ausgeprägt, so verstärkt er sich bei höheren Winkelgeschwindigkeiten deutlich: bei $\Omega = 0.6$ etwa beträgt die bleibende Reduktion des Fugendrucks bereits rund 20%.

4. Literatur

1 Lippmann, H.: The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit. Int. J. Plasticity **8** (1992), 567–582.

2 Kovács, Á.: Thermal stresses in a shrink fit due to an inhomogeneous temperature distribution. Acta Mech. **105** (1994), 173–187.

3 Kovács, Á.: Thermoelastic-plastic deformations of shrink fits. ZAMM **74** (1994), T310-T312.

4 Mack, W., Plöchl, M.: Transient heating of a rotating elastic-plastic shrink fit. Int. J. Engng Sci. **38** (2000), 921–938.

5 Mack, W., Plöchl, M., Gamer, U.: Effects of a temperature cycle on an elastic-plastic shrink fit with solid inclusion. The Chinese J. Mech. **16** (2000), 23-30.

6 Mack, W., Bengeri, M.: Thermal assembly of an elastic-plastic shrink fit with solid inclusion. Int. J. Mech. Sci. **36** (1994), 699–705.

Anschrift: Werner Mack, Manfred Plöchl und Udo Gamer, Institut für Mechanik, Technische Universität Wien, Wiedner Hauptstraße 8–10, A–1040 Wien, Österreich

MAHRENHOLTZ O., BONTCHEVA N., IANKOV R.

Nonlocal friction during metal forming processes

Influence of surface roughness on friction is considered. Non-linear non-local friction law is applied. Different 2-D models and 3-D models on micro-level are considered, and deformation of asperities is simulated. Anisotropy of friction, as well as influence of tangential tool movement on the normal compliance law is investigated. It is shown that the character of the surface roughness has an influence on the normal compliance law.

1. Introduction

Real metal surfaces are not smooth; asperities of different kind and different distribution exist, building the roughness of the surface. This has an influence on the friction properties at contact surfaces during metal forming processes, especially at the beginning of the process, till all asperities are flattened. During the forming process asperities plough into each other, and thus a small sliding always exists. Since at the beginning of the process the tool is in contact just with the peaks of the asperities, the friction properties depend on the distribution of asperities, on their height and on their deformation during the process, e.g. on the roughness of the contact surface. A nonlinear non-local friction law will be applied here on microlevel in order to obtain the influence of the surface roughness on the normal compliance law.

2. Mechanical model

Oden et al. [1] proposed a nonlinear, non-local friction law for describing the influence of surface roughness on friction. According to that law, the friction stress at a given point of the contact surface depends not only on the normal pressure at that point (the local pressure), but on the normal pressure in a neighbourhood, surrounding the point under consideration (non-local pressure): $\sigma_t = -\mu_0 S_\rho \Phi_\epsilon \frac{\mathbf{u_t}}{|\mathbf{u_t}|}$, The function Φ_ϵ takes usually the form $\Phi_\epsilon = \frac{2}{\pi} arctan \frac{|\mathbf{v_t}|}{\epsilon}$, where $\mathbf{v_t}$ denotes the relative sliding velocity of contact surfaces and ϵ is a prescribed parameter. The mollifying operator S_ρ is given by the relation

$$S_\rho(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_C} \omega_\rho (|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) (-\sigma_\mathbf{n} (\mathbf{u}(\mathbf{y}))) \, \mathbf{dy} \,, \tag{1}$$

where $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are points on the contact surface Γ_C and $\omega_\rho(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{\rho^2}{x^2-\rho^2}\right), & |x| \leq \rho \\ 0 & |x| \geq \rho. \end{cases}$ μ_0 is the prescribed friction coefficient. The parameter ρ defines the region around the point $\mathbf{x}$ under consideration, having influence on the friction at that point. According to [1] $\rho = const.$

The movement of the tool during the forming process leads very often to anisotropy of surface properties. The anisotropic friction coefficient μ_α for any sliding direction α is given by $\mu_\alpha = \left({\mu_1}^2 \cos\alpha^2 + {\mu_2}^2 \sin\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$, where μ_1 and μ_2 are friction coefficients in the main sliding direction and normal to that direction. But if anisotropy of friction should be considered, the region influencing non-local friction at a given point should be no more defined by a constant parameter ρ. We assume that this region has the form of an ellipse and the parameter ρ is given with $\rho = \left({\rho_1}^2 \cos\alpha^2 + {\rho_2}^2 \sin\alpha^2\right)^{\frac{1}{2}}$, where ρ_1 and ρ_2 define the region of influence. The angle $0 \leq \alpha \leq \pi$ is measured from the main sliding direction.

In the classical case the tool is not allowed to penetrate into the workpiece and this is achieved in the Finite Element Method by means of the relation $\sigma_n = -K(u_n - g)$, where g is the gap and K is a penalty constant, to which large values are prescribed ($K \to \infty$). Oden et al. [1] applied the isotropic non-linear, non-local friction law to the problem of free forging of rectangular blocks. They used the value $K = 10^8$ for the penalty constant. Considering the existence of asperities, Klarbring et al. [2] applied the following relation instead: $\sigma_n = -c(u_n - g)^m$, where c and m are material constants. This is known as the normal compliance law. One and the same function is proposed

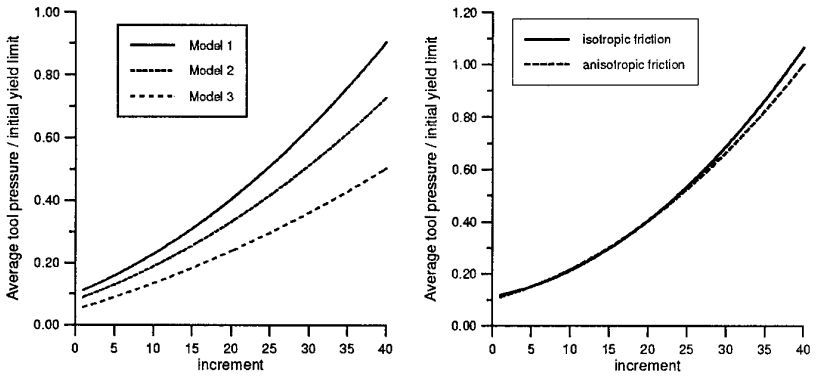


Figure 1: Influence of anisotropic friction and asperities density on the normal compliance law

for all kinds of materials, and only c and m are to be obtained experimentally. As the nonlinear non-local friction law considers the existence of asperities, we apply it here on micro-level, simulating the deformation of asperities. The normal compliance law will be obtained from the numerical results.

It is assumed that asperities on micro-level are periodically distributed. This is experimentally observed [3]. It enables us to consider a representative part of the whole surface, applying symmetry conditions on the sides. The tool is assumed to be smooth, moving with a constant velocity. Dry friction is considered. The material of the workpiece is assumed to be rigid-plastic and workhardening. This corresponds to the large plastic strains developing during the deformation. The initial yield stress is taken equal to unity, so that all stresses obtained from the numerical procedure are related to the initial yield stress of the material.

3. Numerical simulation

The commercial FE package MARC is used for the calculations, and user subroutines are created in order to take into consideration the isotropic and anisotropic non-local friction laws. The friction coefficient at each nodal point is calculated by means of the values of the normal nodal forces from the previous time increment in a neighbourhood determined by a circle/elipse with radius ρ . 3-D models with different density of asperities were considered (model 1, model 2 and model 3). The numerical calculations showed that the density of asperities has an influence on the relation between tool pressure and tool displacement. These expressions correspond in fact to the normal compliance law. The expressions obtained showed that the normal compliance law is different for the different models considered.

Acknowledgements

The investigations presented in this paper were sponsored by NATO Linkage Grant LG970300 and by Project MM-903/99 of the National Science Fund, Bulgaria.

4. References

1 ODEN J. T., PIRES E. B.: Algorithms and numerical results for finite element approximations of contact problems with non-local friction laws; Computers & Structures, **16** (1984), 137–147.

2 KLARBRING A., MIKELIC A., SHILLOR M.: Frictional contact problems with normal compliance; Int. J. Engng. Sci. **26** (1988), 811–832.

3 BÜNTEN R., SREINHOFF K., RASP W., LOOP R., PAWELSKI O.: Development of a fem-model for the simulation of the transfer of surface structure in cold-rolling processes; J. Materials Processing Technology **60** (1998), 369–376.

Address: PROF. O. MAHRENHOLTZ, AB Meerestechnik II–Strukturmechanik, Technische Universität Hamburg-Harburg, Eißendorferstr. 42, D–21073 Hamburg, Germany
PROF. N. BONTCHEVA, ASS. PROF. R. IANKOV, Inst. of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences, Acad. G. Bontchev St., Bl. 4, BG–1113 Sofia, Bulgaria

PETHŐ, Á.

Constitutive modeling of shape memory alloys at finite strain

A new model which is able to reproduce the basic responses of shape memory materials on both micro- and macrostructural aspects is presented. The model is based on a local finite strain continuum description and uses a multiplicative decomposition of the total deformation gradient which involves elastic, plastic and microstructurally given phase transitional parts. For the elastic behavior of the material a coupled hyper-hypoelastic model is used based on a recently developed logarithmic rate. A complex constitutive equation is presented which consists of the kinetics of phase change process given by thermodynamical basis. Finally a simple one dimensional example is also shown.

1. Theoretical Description

A unique decomposition of the total deformation gradient [2] is extended to describe the martensitic phase transition process, the basic reason of the shape memory effects. This a new phase transitional part $\mathbf{F}^t$, which must be a plane invariant transformation (a simple shear along the habit plane and a pure deformation orthogonal to habit plane) [1] is inserted between the elastic deformation gradient $\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}$ and the symmetric plastic right stretch tensor $\mathbf{U}^p$ [5]:

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}\mathbf{U}^p \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^t\mathbf{U}^p\,, \quad \text{where} \quad \mathbf{F}^t = \boldsymbol{\delta} + \xi_i\,\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{n}_i\,. \tag{1}$$

Here tensor product is denoted by $\otimes$, $\boldsymbol{\delta}$ is the second order unit tensor, $\mathbf{n}_i$ is the outward unit normal vector of the realized habit plane, $\mathbf{k}_i$ is the displacement vector due to transformation in this habit plane, which are known from experimental observations on a given material for all the habit planes ($i_{max} = 24$), and ξ_i is a dimensionless internal variable, which varies between 0 and 1, indicating locally the amount of the martensite variants [4]. The additive decomposition of the velocity gradient, based on (1.2) forms

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\bar{\mathbf{F}}}^{\mathrm{e}}\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}-1} + \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}\dot{\mathbf{F}}^t\mathbf{F}^{t-1}\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}-1} + \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^t\dot{\mathbf{U}}^p\mathbf{U}^{p-1}\mathbf{F}^{t-1}\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^t + \mathbf{L}^p\,. \tag{2}$$

This gives also an additive decomposition for the symmetric and antisymmetric part of $\mathbf{L}$: $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^t + \mathbf{d}^p$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}^e + \mathbf{w}^t + \mathbf{w}^p$. Using (1.3), (2) and Sherman-Morrison's inverse formulation, it can be written that

$$\mathbf{d}^t = \dot{\xi}_i\bar{\mathbf{d}}^t_i\,, \quad \mathbf{w}^t = \dot{\xi}_i\bar{\mathbf{w}}^t_i\,, \quad \text{with} \quad \bar{\mathbf{L}}^t_i = \bar{\mathbf{d}}^t_i + \bar{\mathbf{w}}^t_i = \frac{1}{1+\xi_i\,\mathbf{n}_i\,\mathbf{k}_i}\left(\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}(\mathbf{k}_i \otimes \mathbf{n}_i)\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}-1}\right). \tag{3}$$

The advantage of the chosen decomposition (1.1) is that $\mathbf{w}^p$ can be expressed as the function of $\mathbf{d}^p$: $\mathbf{w}^p = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{U}}^{\mathrm{p}}) : \mathbf{d}^p$ where $\bar{\mathbf{U}}^{\mathrm{p}} = \bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}}\mathbf{F}^t\mathbf{U}^p\mathbf{F}^{t^T}\bar{\mathbf{F}}^{\mathrm{e}T}$ [6].
Two corotational objective derivatives are used for the description of rate type equations. The first is the recently developed logarithmic rate [3], the second is its modification namely the elastic logarithmic rate [6]. The logarithmic derivative of the Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ and the main property of this derivative can be expressed by [3]:

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{log} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\Omega}^{log} - \boldsymbol{\Omega}^{log}\boldsymbol{\tau}\,, \quad \boldsymbol{\Omega}^{log} = \mathbf{w} + \mathbf{A}(\mathbf{V}) : \mathbf{d}\,, \quad \text{where} \quad (\ln \overset{\circ}{\mathbf{V}})^{log} = \mathbf{d}\,. \tag{4}$$

For the elastic logarithmic rate the same formulas are valid with changing $\mathbf{V}$, $\mathbf{d}$ and $\mathbf{w}$ to $\mathbf{V}^e$, $\mathbf{d}^e$ and $\mathbf{w}^e$ respectively. Here $\mathbf{V}$ and $\mathbf{V}^e$ are the total and elastic left stretch tensors and $\ln \mathbf{V}$ is the Hencky- or logarithmic strain tensor.
The second law of thermodynamics in the form of the local Planck inequality is as follows:

$$\rho_0\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0\dot{\psi} - \rho_0 s\dot{\vartheta} \geq 0\,, \tag{5}$$

where ρ_0 is the mass density in the reference configuration, $\mathcal{D}$ is the rate of dissipation per unit mass, ψ is the specific Helmholtz free energy per unit mass, s is the entropy and ϑ is the temperature. It is assumed that $\psi = \psi\,(\ln \mathbf{V}^e, \vartheta, \xi_i)$. Inserting the total derivative of this to (5), then using the additivity of the rate of deformation and the property (4.3) for the elastic rate, finally applying that $\mathbf{d}^e$ and $\dot{\vartheta}$ can be both positive and negative, the rate of dissipation with the dissipative thermodynamical forces get the following form:

$$\mathcal{D} = \mathbf{X}^p : \mathbf{d}^p + X^{\xi_i}\dot{\xi}_i \geq 0\,, \quad \mathbf{X}^p = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\tau}\,, \quad X^{\xi_i} = \frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\tau} : \bar{\mathbf{d}}^t_i - \frac{\partial\psi}{\partial\xi_i}\,. \tag{6}$$

Here the conjugated forces X^{ξ_i} drive the phase transition process. The evolution equations for the rates d^p and $\dot{\xi}_i$ give a flow rule and a phase kinetical equation. The simplest assumption for $\dot{\xi}_i$ is the linear dependence on X_{ξ_i} [5]:

$$\dot{\xi}_i = \langle \dot{X}^{\xi_i} \rangle \langle 1 - \xi_i \rangle \left(1 - \langle k_{\mathrm{AM}} - X^{\xi_i} \rangle\right) C_{\mathrm{AM}} X^{\xi_i} + \langle -\dot{X}^{\xi_i} \rangle \langle \xi_i \rangle \left(1 - \langle X^{\xi_i} - k_{\mathrm{MA}} \rangle\right) C_{\mathrm{MA}} X^{\xi_i} , \tag{7}$$

where $k_{\mathrm{AM}} = k_{\mathrm{AM}}(\vartheta, \mathrm{d}^p) > 0$ and $k_{\mathrm{MA}} = k_{\mathrm{MA}}(\vartheta, \mathrm{d}^p) < 0$ are experimentally given material functions that give the threshold values for forces X^{ξ_i} for the forward and reverse transformation. C_{AM} and C_{MA} are positive constants and $\langle . \rangle$ is the Macaulay bracket: $\langle x \rangle = (x + |x|)/2$, where $|.|$ is the absolute value. The mentioned facts for the thermal and elastic processes give the expression for entropy: $s = -\partial\psi/\partial\vartheta$ and the hyperelasticity law, which can be also expressed with the fourth-order constant elastic stiffness tensor $\mathbf{D}^e$ using the classical form for ψ [5]. The main reason of using the elastic logarithmic rate is that applying it for the hyperelastic law, it gives directly the hypoelastic law, considering the property (4.3) for it:

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial(\ln \mathbf{V}^e)} = \mathbf{D}^e : \ln \mathbf{V}^e \quad \longrightarrow \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{log\text{-}e} = \mathbf{D}^e : \mathrm{d}^e \quad \text{where} \quad \mathbf{D}^e = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \delta \otimes \delta \, . \tag{8}$$

Let assume isotropic hardening with non-associated flow law. Then the yield function and the plastic potential depend on the Kirchhoff stress tensor $\boldsymbol{\tau}$, on the hardening parameter κ and on the internal variable ξ_i: $F(\boldsymbol{\tau}, \kappa, \xi_i) \leq 0$, $f(\boldsymbol{\tau}, \kappa, \xi_i)$. Expressing the plastic rate of deformation with the unit gradient of the plastic potential $\mathbf{Q}$: $\mathbf{d}^p = \lambda \mathbf{Q}$ and using a general form of the rate of the hardening parameter: $\dot{\kappa} = \lambda a$, in which the plastic multiplier λ can be expressed with together the consistency condition, the final form of the constitutive equation (8.2) can be found

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}{}^{log} = \left[\mathbf{D}^e + \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{D}^e - \mathbf{C}) : \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P} : (\mathbf{D}^e + \mathbf{B})}{\mathrm{H} + \mathbf{P} : (\mathbf{D}^e - \mathbf{C}) : \mathbf{Q}}\right] : \mathbf{d} - \left[\mathbf{e}_i + \frac{(\mathbf{P} : \mathbf{e}_i + \mathrm{L}_i)\,(\mathbf{D}^e - \mathbf{C}) : \mathbf{Q}}{\mathrm{H} + \mathbf{P} : (\mathbf{D}^e - \mathbf{C}) : \mathbf{Q}}\right] \dot{\xi}_i \, , \tag{9}$$

where $\mathbf{P}$ is the normalized gradient of the yield function, $\mathbf{e}_i = \mathbf{D}^e : \bar{\mathbf{d}}_i^t - \boldsymbol{\tau}(\bar{\mathbf{w}}_i^t + \mathbf{A}^e : \bar{\mathbf{d}}_i^t) + (\bar{\mathbf{w}}_i^t + \mathbf{A}^e : \bar{\mathbf{d}}_i^t)\boldsymbol{\tau}$ and $B_{ijkl} = \tau_{in}(A_{njkl} - A^e_{njkl}) - (A_{imkl} - A^e_{imkl})\tau_{mj}$, $C_{ijkl} = \tau_{in}(H_{njkl} + A^e_{njkl}) - (H_{imkl} + A^e_{imkl})\tau_{mj}$, while the plastic hardening modulus $\mathrm{H} = -\mathrm{a}\, \partial \mathrm{F}/\partial\kappa \, \|\partial \mathrm{F}/\partial \boldsymbol{\tau}\|^{-1}$ and $\mathrm{L}_i = \partial F/\partial \xi_i \, \|\partial F/\partial \boldsymbol{\tau}\|^{-1}$. The constitutive equation (9) together with the phase kinetical equation (7) can be used directly to solve a single crystal problem.

2. Example

A simple one dimensional tension is numerically investigated assuming only elastic and phase transition processes. In elastic case the stress components can be derived from (8.1). The projection of $\mathbf{k}$ to the habit plane and to $\mathbf{n}$ following [1] are 0.2 and 0.026. The angle between the realizable habit plane, which has the highest value of thermodynamical force, and the load direction is 45 degree. The temperature was chosen to simulate pseudoelastic behavior. The dimensionless nominal stress for a complete loading-unloading cycle as a function of the elongation α is illustrated in Figure 1., which shows the experimentally well-known hysteresis loop.

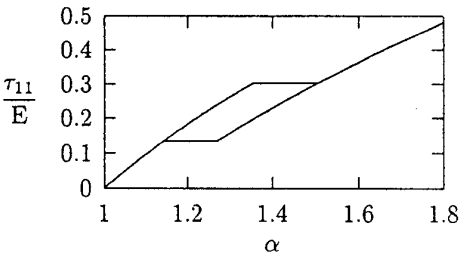


Figure 1.: Hysteresis loop of the pseudoelastic effect.

3. References

1 Nishiyama, Z.: Martensitic transformation, Academic Press, New York 1978.

2 Obata, M., Goto, Y. and Matsuura, S.: Micromechanical consideration on the theory of elasto-plasticity at finite deformations; Int. J. Engng. Sci. 28 (1990), 241-252.

3 Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A.: Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate; Acta Mechanica 124 (1997), 89-105.

4 Levitas, V.I.: Thermomechanical theory of martensitic phase transformations in inelastic materials; Int. J. Solids Struct. 35 (1998), 889-940.

5 Pethő, Á.: Constitutive modeling of shape memory alloys based on a finite strain description; Periodica Polytechnica (2000) (in press)

6 Pethő, Á., Szabó, L.: A finite strain elasto-plastic model based on logarithmic rate and plastic spin; Int. J. Plasticity (2000) (in preparation)

Address: Árpád Pethő, Technical University of Budapest, Department of Applied Mechanics, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp 5., Hungary,

SABINE RICCI, MICHAEL BRÜNIG, HANS OBRECHT

Simulation des lokalisierten Deformationsverhaltens von Metallen mit Hilfe gradientenabhängiger Materialmodelle

In der lokalen Betrachtungsweise der klassischen Plastizitätstheorie kann das Problem auftreten, dass die zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungen ihre Elliptizität verlieren, so dass die Ergebnisse nicht mehr physikalisch sinnvoll sind, was sich beispielsweise in einer Netzabhängigkeit der Ergebnisse äußern kann. Um dieses Problem zu vermeiden, wurden in der Vergangenheit verschiedene Regularisierungsmethoden entwickelt, wobei sich vor allem solche als besonders effektiv erwiesen haben, die als nichtlokale Verfahren einen Längenparameter in die Materialbeschreibung einführen. Eine dieser Methoden ist die gradientenabhängige Plastizitätstheorie [1], die durch ihre Abhängigkeit von diesem Längenparameter auch eine Aussage über die Breite der Lokalisierungszone ermöglicht.

1. Konstitutive Gleichungen

Das plastische Materialverhalten wird hier durch eine nichtlokale von-Mises-Fließbedingung

$$f^{pl} = \sqrt{J_2} - c(\gamma, \nabla^2\gamma) = 0 \tag{1}$$

beschrieben. Die Fließspannung c ist dabei abhängig vom skalaren plastischen Verzerrungsmaß γ und von dessen zweiten Gradienten, um als nichtlokalen Effekt auch das Verhalten der jeweils benachbarten Punkte zu berücksichtigen. Zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens betrachtet man die Konsistenzbedingung

$$\dot{f}^{pl} = \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \mathrm{dev}\mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \dot{c} = 0, \tag{2}$$

die durch die Einführung eines deviatorischen Spannungsrichtungstensors [2] die folgende skalare Grundgleichung liefert:

$$\dot{c} = \sqrt{2}\mu(\dot{\epsilon} - \dot{\gamma}), \tag{3}$$

wobei $\dot{\epsilon}$ die skalare Gesamtverzerrungsrate bezeichnet.

2. Integration der konstitutiven Gleichungen

Basierend auf einem Verfahren nach Nemat-Nasser [3] erfolgt die Integration der skalaren Grundgleichung in zwei Schritten. Zunächst nimmt man im plastischen Prediktorschritt an, dass das gesamte Verzerrungsinkrement plastisch ist:

$$\Delta\gamma^{pr} = \Delta\epsilon. \tag{4}$$

In der gradientenabhängigen Plastizitätstheorie erkennt man nun, dass die Prediktorfließspannung am Inkrementende nicht, wie in der klassischen Plastizitätstheorie, nur von dem inkrementellen plastischen Verzerrungsmaß, sondern auch von dessen zweiten Gradienten abhängt:

$$c^{pr}(t + \Delta t) = c(t) + \frac{\partial c}{\partial \gamma}\Delta\gamma^{pr} + \frac{\partial c}{\partial \nabla^2\gamma}\nabla^2(\Delta\gamma^{pr}). \tag{5}$$

Da die Gradiententheorie ein Spezialfall der nichtlokalen Theorie [4] ist, erhält man durch Taylorreihenentwicklung und anschließenden Koeffizientenvergleich eine Beziehung zwischen der Ableitung der Fließspannung nach γ und der Ableitung nach dem zweiten Gradienten. Abhängig von der betrachteten Dimension erhält man unterschiedliche Faktoren:

$$\text{1D}: \qquad \frac{\partial c}{\partial \nabla^2\gamma} = \frac{\partial c}{\partial \gamma}\frac{l^2}{4\pi}, \tag{6}$$

$$\text{2D}: \quad \frac{\partial c}{\partial \nabla^2 \gamma} = \frac{\partial c}{\partial \gamma} \frac{l^2}{16}, \tag{7}$$

$$\text{3D}: \quad \frac{\partial c}{\partial \nabla^2 \gamma} = \frac{\partial c}{\partial \gamma} \frac{l^2}{4\sqrt[3]{36\pi}}. \tag{8}$$

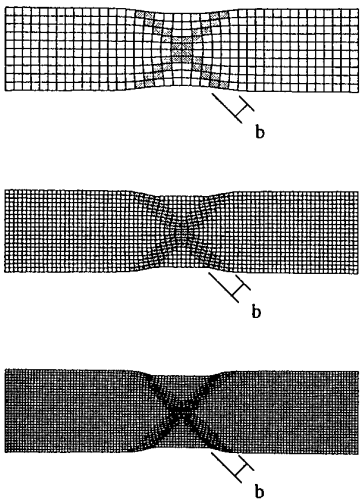
Der Parameter l bezeichnet den für die Gradiententheorie charakteristischen materialabhängigen Längenparameter. Der im elastischen Korrektorschritt zu behebende Fehler in der Fließspannung wird mit Hilfe einer Taylorreihenentwicklung abgeschätzt, die dann auf die folgende elliptische partielle Differentialgleichung führt:

$$\frac{\partial c}{\partial \nabla^2 \gamma} \nabla^2 (\Delta_{er} \gamma) + (\sqrt{2}\mu + \frac{\partial c}{\partial \gamma}) \Delta_{er} \gamma = \Delta c^{pr}. \tag{9}$$

Während in der klassischen Plastizitätstheorie die entsprechende lokale Gleichung einfach nach $\Delta_{er}\gamma$ aufgelöst werden könnte, muss hier zunächst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung numerisch ermittelt werden, was in diesem Fall mit Hilfe eines Differenzenverfahrens geschieht. Dazu werden die Funktionswerte des betrachteten sowie die der vier benachbarten Integrationspunkte mit Faktoren gewichtet, die sich aus den Abständen der beteiligten Punkte berechnen lassen, so dass auch die Behandlung der Randpunkte in analoger Weise berücksichtigt werden kann.

3. Numerische Simulation

Zur numerischen Simulation betrachtet man einen Zugversuch mit einer eingespannten Rechteckprobe aus Stahl. Die Verschiebungsfiguren für verschiedene Diskretisierungen mit 400, 1600 und 3600 Elementen zeigen, dass die jeweils grau unterlegten Lokalisierungszonen dieselbe Breite b haben, die dem 2π-fachen des materialabhängigen Längenparameters l entspricht. Man erkennt somit, dass das vorgestellte Verfahren physikalisch sinnvolle Ergebnisse liefert, die keine Netzabhängigkeit aufweisen.



Verschiebungsfiguren für Diskretisierungen mit 400, 1600 und 3600 Elementen

4. Literaturverzeichnis

1 R. DE BORST, H.-B. MÜHLHAUS: Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects, Int. J. Numer. Meth. Eng. **35**, 521-539 (1992).

2 M. BRÜNIG: Large strain elastic-plastic theory and nonlinear finite element analysis based on metric transformation tensors; Comput. Mech. **24**, 187-196 (1999).

3 S. NEMAT-NASSER: Rate-independent finite-deformation elastoplasticity: A new explicit constitutive algorithm; Mech. Mater. **11**, 235-249 (1991).

4 M. BRÜNIG, S. RICCI, H. OBRECHT: Nonlocal large deformation and localization behavior of metals; Comput. Struct., zur Veröffentlichung eingereicht.

Adresse: DIPL.-MATH. S. RICCI, Lehrstuhl für Baumechanik-Statik, Universität Dortmund, D-44221 Dortmund

MARTIN SCHMIDT-BALDASSARI, KLAUS HACKL

Aspekte der numerischen Behandlung idealer Kristallplastizität

1. Einleitung

In der Literatur bekannte Implementierungen des Schmid-Gesetzes (vgl. z.B. [3,4,5]) basieren zum einen auf Lagrange-Multiplikator-Formulierungen mit verallgemeinerten Inversen oder auf ratenabhängigen Modellen (i.e. Penalty-Formulierungen). In ersteren Modellen ist insbesondere die Bestimmung des Satzes der aktiven Gleitsysteme problematisch. In der zweiten Gruppe wird häufig versucht, ratenunabhängiges Verhalten durch entsprechende Wahl des Penalty-Faktors anzunähern, was zu schlecht konditionierten Algorithmen führt.

Durch eine neuartige Formulierung, basierend auf einem Augmented-Lagrange Schema, werden die beiden Varianten kombiniert. Dabei beheben wir die beschriebenen Probleme, indem Ungleichungen aus der Formulierung eliminiert und die Fließbedingungen unabhängig von der Wahl des Penalty-Faktors exakt erfüllt werden.

2. Mehrflächen-Plastizitätsmodell und Schmid-Gesetz

Betrachtet wird ein Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, der einer elasto-plastischen Deformation $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit einem Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \partial_{\mathbf{X}} \varphi(\mathbf{x})$ unterworfen wird. Wir gehen davon aus, daß sich $\mathbf{F}$ multiplikativ in einen elastischen und plastischen Anteil aufspalten läßt: $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}}$.
Das elastische Teilstoffgesetz ist durch Angabe der freien Energie $\Psi = \Psi(\mathbf{C}^{\mathrm{e}})$ vollständig charakterisiert, wobei mit $\mathbf{C}^{\mathrm{e}}$ der auf die Zwischenkonfiguration bezogene elastische Cauchy-Green'sche Verzerrungstensor bezeichnet wird. Der zu $\mathbf{C}^{\mathrm{e}}$ thermodynamisch konjugierte Spannungstensor wird durch die Relation $\mathbf{S}^{\mathrm{e}} = 2\,\partial_{\mathbf{C}^{\mathrm{e}}} \Psi$ bestimmt. Zurückziehen von $\mathbf{S}^{\mathrm{e}}$ auf die Referenzkonfiguration liefert den zweiten Piola-Kirchhoff'schen Spannungstensor.
Den Ausgangspunkt für die Formulierung des plastischen Materialverhaltens bildet der gemischtvariante Spannungstensor $\mathbf{T} := \mathrm{Dev}(\mathbf{C}^{\mathrm{e}} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{e}})$ (i.e. der Mandel'sche Spannungstensor auf der Zwischenkonfiguration), wobei das (konvexe) Gebiet aller zulässigen Spannungszustände durch n Fließbedingungen $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(\mathbf{T}) \leq 0$ begrenzt wird. Die Evolution des internen Parameters $\mathbf{F}^{\mathrm{p}}$ wird aus dem Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation ermittelt. Damit ergibt sich ein Optimierungsproblem der Form:

$$\max_{\mathbf{T}} [-\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1})], \qquad \Phi_\alpha(\mathbf{T}) \leq 0, \ \forall \alpha \in \{1 \dots n\}. \tag{1}$$

Das Schmid-Gesetz der Kristallplastizität [1] kann nun als Spezialisierung obiger Formulierung mit $\Phi_\alpha = |\mathbf{T} : \mathbf{N}_\alpha| - Y$, $\alpha \in \{1 \dots n\}$ auf den n Gleitsystemen des Kristalles angesehen werden. Die Projektionstensoren $\mathbf{N}_\alpha := \mathbf{s}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$ dienen dabei zur Charakterisierung dieser Gleitsysteme durch Gleitrichtung $\mathbf{s}_\alpha$ und Normalenrichtung auf die Gleitebene $\mathbf{n}_\alpha$; beides konstante und zueinander orthogonale Einheitsvektoren in der Zwischenkonfiguration.

3. Formulierung des Optimierungsproblemes

Offensichtlich ist $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn $\{\hat{\mathbf{T}}, \hat{z}_\alpha\}$ eine Lösung des Optimierungsproblemes

$$\max_{\mathbf{T}} [-\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1})] \qquad \Phi_\alpha + z_\alpha^2 = 0 \tag{2}$$

ist. Damit wird durch Einführen der Schlupfvariablen z_α eine zu (1) äquivalente Optimierungsaufgabe formuliert, die jedoch keine Ungleichungen enthält und somit besser als Ausgangspunkt der numerischen Umsetzung geeignet ist. Für (2) läßt sich mit dem Penalty-Faktor η eine Augmented-Lagrange Formulierung (vgl. z.B. [2]) in der Form

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{T}, \lambda_\alpha, z_\alpha) = -\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1}) + \sum_\alpha \left\{ \lambda_\alpha (\Phi_\alpha(\mathbf{T}) + z_\alpha^2) + \frac{1}{2} \eta (\Phi_\alpha(\mathbf{T}) + z_\alpha^2)^2 \right\}. \tag{3}$$

angeben. Die Schlupfvariablen können durch maximieren von $\mathcal{L}_a$ bezüglich z_α bei festgehaltenen Werten $\mathbf{T}$ und λ_α vorab eliminiert werden. Man erhält ein reduziertes Lagrange-Funktional der Form

$$\mathcal{L}_r(\mathbf{T}, \lambda_\alpha) = -\mathbf{T} : (\dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1}) + \frac{1}{2\eta} \sum_\alpha \left\{ \max[0, \lambda_\alpha + \eta\, \Phi_\alpha(\mathbf{T})]^2 - \lambda_\alpha^2 \right\}. \tag{4}$$

Daraus lassen sich nun Konsistenzbedingungen und Fließgesetz durch Ableiten nach $\mathbf{T}$ und λ_α bestimmen. In der Formulierung treten keine weiteren Bedingungen vom Kuhn-Tucker-Typ auf.

$$\lambda_\alpha = \max[0, \lambda_\alpha + \eta\, \Phi_\alpha(\mathbf{T})] \qquad \dot{\mathbf{F}}^{\mathrm{p}} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1} = \sum_\alpha \lambda_\alpha\, \mathbf{N}_\alpha \tag{5}$$

4. Inkrementelle Formulierung

Zur Lösung der Konsistenzbedingungen (5.a) bietet sich eine Fixpunktiteration an, die mit einer Backward-Euler Diskretisierung des Fließgesetzes (5.b) kombiniert wird. Damit ergibt sich das Iterationsschema

$$\lambda_\alpha^{i+1} = \max[0, \lambda_\alpha^i + \eta\, \Phi_\alpha^i] \qquad \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1^i} - \mathbf{F}_n^{\mathrm{p}\,-1} + \sum_\alpha \max[0, \lambda_\alpha^i + \eta\, \Phi_\alpha^i]\, \mathbf{F}_n^{\mathrm{p}\,-1} \cdot \mathbf{N}_\alpha = 0 \tag{6}$$

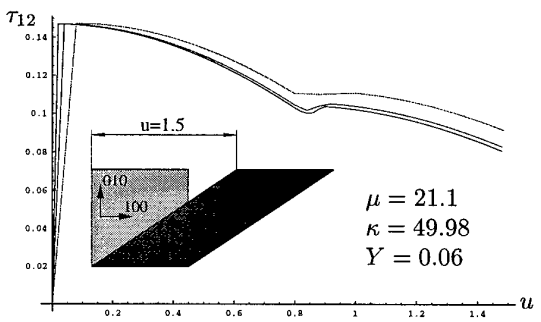
mit $\Phi_\alpha^i := \Phi_\alpha(\mathbf{T}(\mathbf{C}, \mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1^i}))$ und $\lambda_\alpha^0 = 0$. Mit (6.a) wird insbesondere die Art und Weise der Aufteilung der Gleitungen auf die verschiedenen Gleitsysteme, wie sie in ratenabhängigen Modellen geschieht, in diese ratenunabhängige Formulierung übernommen. Die Iterationen im Fixpunktschema können als schrittweises Relaxieren der Spannungen in Richtung der Fließgrenze aufgefaßt werden. Wesentlich ist, daß im numerischen Schema die Fließgrenze unabhängig von der Wahl des Penalty-Faktors η beliebig genau angenähert wird.
Die Gleichung (6.b) besitzt keine stetigen Ableitungen, ein gewöhnliches Newton-Raphson Verfahren ist daher nicht geeignet Nullstellen zu bestimmen. Wir schlagen deshalb vor, einen Satz von aktiven Gleitsystemen $\mathcal{A}$ a priori anzunehmen und (6.b) durch

$$\mathbf{F}^{\mathrm{p}\,-1^i} - \mathbf{F}_n^{\mathrm{p}\,-1} + \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} (\lambda_\alpha^i + \eta\, \Phi_\alpha^i)\, \mathbf{F}_n^{\mathrm{p}\,-1} \cdot \mathbf{N}_\alpha = 0 \tag{7}$$

zu ersetzen. Mit der Wahl $\mathcal{A} = \{\alpha \,|\, \lambda_{\alpha\, n} > 0\}$ gehen wir vorerst davon aus, daß genau jene Gleitsysteme aktiv sind, die im vorangegangenen Zeitschritt aktiv waren. Damit wird ein größtmögliches Maß an Stetigkeit in der Aktivität der Gleitsysteme gesichert. Wesentlich für die Stabilität des Iterationsschemas ist, daß mit diesem Startwert für die Iteration nur sinnvolle Kombinationen von Gleitsystemen (d.h. Kombinationen für die $\Phi_\alpha = 0$ simultan für alle $\alpha \in \mathcal{A}$ erfüllt werden kann) zugelassen sind. Dies ist insbesondere bei der Wahl von $\mathcal{A} = \{\alpha \,|\, \Phi_\alpha(\mathbf{T}(\mathbf{C}, \mathbf{F}_n^{\mathrm{p}\,-1})) > 0\}$ (vgl. [3,4]) nicht gesichert. Mit der Lösung des stetig differenzierbaren Gleichungssystemes (7) wird (6.b) getestet und eventuell $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A}' = \{\alpha \,|\, (\lambda_\alpha^i + \eta\, \Phi_\alpha^i) > 0\}$ ersetzt.

5. Numerische Ergebnisse

Die Abbildung zeigt (Kirchhoff-)Schubspannungen, aufgezeichnet in einem Scherversuch an einem kubisch flächenzentrierten Einkristall. Das elastische Materialverhalten ist durch $\Psi(\mathbf{C}^{\mathrm{e}}) = \frac{1}{2}\kappa \ln(J^{\mathrm{e}}) + \frac{1}{2}\mu\, J^{\mathrm{e}\,-\frac{2}{3}} \mathrm{tr}\mathbf{C}^{\mathrm{e}}$ gegeben.
Mit der Wahl von $\eta = 1000$ wird eine gute Kondition des Algorithmus und eine geringe Anzahl von Iterationen im Fixpunktschema (im Durchschnitt 2) kombiniert. Die Spannungen bleiben von der Wahl von η unberührt.
Die drei Kurven entsprechen Berechnungen mit 76, 38 und 19 Schritten. Damit zeigt der vorgestellte Algorithmus gute Konvergenzeigenschaften bei ausgezeichneter Stabilität.



6. References

1 Asaro, R.J.: Crystal Plasticity. J. Appl. Mech. **50** (1983), 921–934.
2 Bertsekas, D.P.: Constrained Optimization and Lagrange Multipliers. Academic Press, New York, (1982).
3 Miehe, C.: Multisurface Thermoplasticity for Single Crystals at Large Strains in Terms of Eulerian Vector Updates. Int. J. Solids Structures. **33** (1996), 3103–3130.
4 Anand, L., Kothari, M.: A Computational Procedure for Rate-Independent Crystal Plasticity. J. Mech. Phys. Solids. **44** (1996), 525–558.
5 Steinmann, P., Stein, E.: On the numerical treatment and analysis of finite deformation ductile single crystal plasticity. Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. **129** (1996), 235–254.

Addresses: Martin Schmidt-Baldassari, Klaus Hackl, Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, Ruhr Universität Bochum, 44780 Bochum, BRD.

SCHOTTE, J.; MIEHE, C.; SCHRÖDER, J.

Texturbildung in Schalenstrukturen aus polykristallinen Metallen

Diskutiert wird ein Rechenmodell zur Simulation von Tiefziehprozessen. Auf Seite der Strukturmechanik wird ein kürzlich entwickeltes finites Schalenelement benutzt, das eine allgemeine Schnittstelle zu dreidimensionalen Materialmodellen besitzt. Auf der Seite der Materialmodellierung betrachten wir ein algorithmisches Modell zur finiten Kristallplastizität, welches auf einer Variationsformulierung basiert. Die Zusammenführung dieser beiden Modelle gestattet die Simulation von komplexen Anisotropieeffekten, wie der Zipfelbildung beim Tiefziehen gewalzter Bleche.

1. Variationsformulierung zur finiten Kristallplastizität

Wir betrachten ein einfaches Modell zur finiten Einkristallplastizität, siehe [3]. Die numerische Implementation dieses Modells basiert auf Anwendung eines Zeitintegrationsalgorithmus mit Exponentialcharakter in $[t_n, t_{n+1}]$

$$\boldsymbol{F}^p_{n+1}[\gamma^\alpha_{n+1}] = \exp[\textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}(\gamma^\alpha_{n+1} - \gamma^\alpha_n)\boldsymbol{M}^\alpha]\boldsymbol{F}^p_n\,, \tag{1}$$

der exakt die geometrische Struktur der unimodularen plastischen Deformationsabbildung $\boldsymbol{F}^p \in SL(3)$ erhält. Wir betrachten die inkrementelle totale Arbeit bezogen auf das Referenzvolumen

$$\Psi := \textstyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathcal{P}\,dt \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} = \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \tag{2}$$

als Potentialfunktion im Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ mit der geschlossenen Lösung

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{F}_{n+1}, \gamma^\alpha_{n+1}) = \hat{\psi}(\boldsymbol{F}_{n+1}\boldsymbol{F}^{p-1}_{n+1}[\gamma^\alpha_{n+1}]) - \psi_n \; + \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\tau_c(\gamma^\alpha_{n+1} - \gamma^\alpha_n) \tag{3}$$

bei eingefrorenem aktiven Satz $\mathcal{A}$ von Gleitsystemen. Einen Minimierungspfad für die totale Deformation erhalten wir, wenn (3) bezüglich der plastischen Parameter $\gamma^\alpha_{n+1} \in \mathcal{A}$ minimiert wird. Damit ergibt sich ein Spannungsaufdatierungsalgorithmus in dem betrachteten Zeitintervall formal aus der hyperelastischen Konstitutivgleichung

$$\boldsymbol{P}_{n+1} = \partial_{\boldsymbol{F}_{n+1}}\hat{\Psi}_{red} \quad \text{mit} \quad \hat{\Psi}_{red}(\boldsymbol{F}_{n+1}) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{F}_{n+1}, \gamma^{\alpha*}_{n+1}) \tag{4}$$

Dies verallgemeinert die in MIEHE [2] herausgestellte Elastizitätsstruktur von Algorithmen finiter Inelastizität auf Potentialform. Die konsistenten Tangentenmoduli ergeben sich zu

$$\mathbb{C}_{n+1} = \partial^2_{\boldsymbol{F}_{n+1}\boldsymbol{F}_{n+1}}\hat{\Psi} - \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{A}}\sum_{\beta\in\mathcal{A}} G^{\alpha\beta-1}\partial^2_{\boldsymbol{F}_{n+1}\gamma^\alpha_{n+1}}\hat{\Psi} \otimes \partial^2_{\gamma^\beta_{n+1}\boldsymbol{F}_{n+1}}\hat{\Psi} \tag{5}$$

mit der Abkürzung $G^{\alpha\beta} := \partial^2\hat{\Psi}/\partial\gamma^\alpha_{n+1}\partial\gamma^\beta_{n+1}$. Man beachte, dass die vorgeschlagene Aufdatierungsprozedur symmetrische algorithmische Moduli $\mathbb{C}_{n+1}$ liefert und somit eine effiziente numerische Umsetzung ermöglicht.

Auf Formulierungen zur finiten Polykristall-Plastizität wird hier nicht eingegangen, Informationen zu deren Theorie und Numerik finden sich z.B. in MIEHE, SCHOTTE & SCHRÖDER [4] sowie MIEHE, SCHRÖDER & SCHOTTE [5].

Auf Seite der Strukturmechanik gelangt ein kürzlich in MIEHE [1] entwickeltes, gemischtes 8-knotiges Schalenelement mit variabler Dicke zum Einsatz. Die Bezeichnung SQ1E5A8 spiegelt die verwendeten Ansätze wieder. Ausgehend von trilinearer Interpolation der Verschiebungen wird ein enhanced-strain-Ansatz mit fünf internen Parametern verwendet, um die Näherung der Membran- und Dickenverzerrungen zu verbessern. Zur Vermeidung von locking-Effekten gelangen assumed-strain-Ansätze für die Querschubverzerrungen und die Dickenverzerrungen mit insgesamt acht Kollokationspunkten zur Anwendung. Die Schnittstelle zu allgemeinen dreidimensional formulierten Materialmodellen ergibt sich in der Form

$$\boldsymbol{F} = \tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}\,\tilde{\tilde{\boldsymbol{J}}}^{-1} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{p-1}\,, \tag{6}$$

wobei $\tilde{\tilde{\boldsymbol{J}}}$ und $\tilde{\tilde{\boldsymbol{j}}}$ die modifizierten Jacobi-Abbildungen vom Parameterraum der Schale in die Lagrangesche bzw. Eulersche Konfiguration bezeichnen. Die verwendeten Ansätze und deren numerische Umsetzung sind ausführlich in MIEHE [1] und den dort angegebenen Referenzen erläutert.

2. Numerisches Beispiel: Zipfelbildung beim Tiefziehen

Nach Implementierung von Schalen- und Material-Modell in das FE-Paket ABAQUS Standard, soll nun deren Leistungsfähigkeit aufgezeigt werden. Es wird die sogenannte Zipfelbildung als typisches Phänomen des Tiefziehens anisotroper Bleche simuliert, die experimentelle Anordnung ist in Abbildung 1a) schematisch dargestellt. Wir betrachten hier zwei Fälle einkristalliner Kupferbleche, bei denen die Auswirkung der plastischen Anisotropien besonders anschaulich wird. Dies sind Bleche, deren Einkristalle so orientiert sind, daß ihre [111]- bzw. [100]-Richtung senkrecht zur Blechebene stehen. Die zugehörige Lage der [111]-Gleitebene ist ebenfalls in Abbildung 1 angegeben. Bei dieser Anordnung enstehen während des Umformprozesses aufgrund der speziellen Symmetrie von Belastung und Materialverhalten vier bzw. sechs Zipfel am oberen freien Blechrand. Dieser Effekt wird auch von unserem Modell vorausgesagt, siehe Abbildung 1b) und 1c). Dargestellt ist für beide Orientierungsfälle die Höhe der äquivalenten plastischen Verzerrungen. Zusätzlich erfolgt in den Diagrammen 2a) und 2b) ein Vergleich mit experimentellen Ergebnissen, welche von TUCKER [6] für die entsprechende Umformung von Aluminium angegeben wurden.

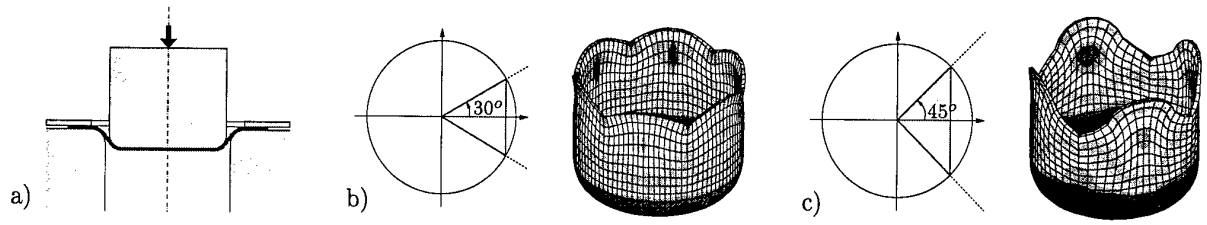


Abbildung 1: a) Experimentelle Anordnung. b) Lage der [111]-Gleitebene im Blech und äquivalente plastische Verzerrung bei [111]-Orientierung. c) Gleitebene und äquivalente plastische Verzerrung bei [100]-Orientierung.

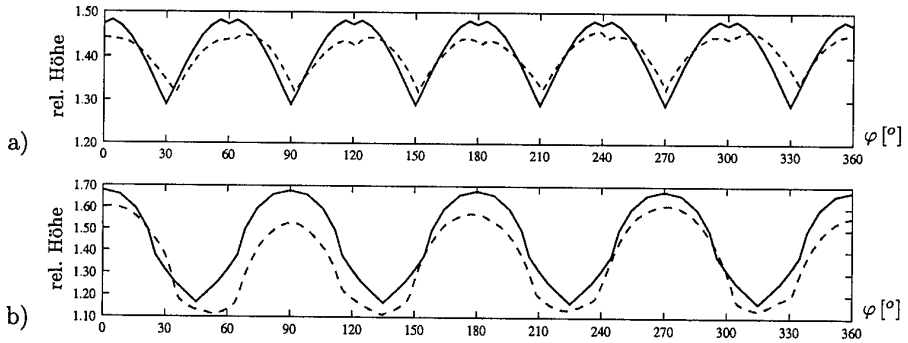


Abbildung 2: Vergleich von Simulation (—) und Experimenten mit Aluminium (- - -). Dargestellt ist eine normierte Höhe des oberen Randes über den Umfangswinkel φ. a) Blech mit [111]-Orientierung. b) Blech mit [100]-Orientierung.

Danksagung

Unterstützung für diese Arbeit wurde gewährt durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) in dem Projekt SFB 404-A8.

3. Literatur

1 MIEHE, C.: A theoretical and computational model for isotropic elastoplastic stress analysis in shells at large strains. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **155** (1998), 193–233.
2 MIEHE, C.: Numerical computation of algorithmic (consistent) tangent moduli in large-strain computational inelasticity. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **134** (1996), 223–240.
3 MIEHE, C.; SCHOTTE, J.: A two-scale micro–macro–approach to anisotropic finite plasticity of polycrystals. Tagungsband SFB–404 Konferenz, Springer, in press.
4 MIEHE, C.; SCHOTTE, J.; SCHRÖDER, J.: Computational micro–macro–transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. Computational Materials Science **16** (1999), 372–382.
5 MIEHE, C.; SCHRÖDER, J.; SCHOTTE, J.: Computational homogenization analysis in finite plasticity. Simulation of texture development in polycrystalline materials. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **171** (1999), 387–418.
6 TUCKER, G.E.G.: Texture and earing in deep drawing of aluminium. Acta Metallurgica **9** (1961), 275–286.

Adresse: DIPL.–ING. JAN SCHOTTE, PROF. DR.–ING. CHRISTIAN MIEHE, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Pfaffenwaldring 7, D–70550 Stuttgart

SCHWABE, F.; HACHEMI, A.; WEICHERT, D.

Optimierung von Verbundwerkstoffen mit Hilfe der Einspielanalyse

Für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur und duktiler Matrix wird die optimale Form der verstärkenden Verbundkomponenten ermittelt. Dazu wird ihre Kontur mit einer Formfunktion beschrieben und so optimiert, daß der gesamte Werkstoff einen möglichst großen Sicherheitsfaktor gegenüber Versagen für ein bestimmtes Lastkollektiv hat. Dieser Faktor wird mit einer Einspielanalyse an einem repräsentativen Volumenelement bestimmt. Mit Hilfe der Homogenisierungstechnik wird der Übergang von der Mikro- zur Makrostruktur hergestellt.

1. Einleitung

Für einen Verbundwerkstoff unter der Wirkung veränderlicher Lasten ist nur die konvexe Hülle aller möglichen Lastkombinationen gegeben, die exakte Lastgeschichte ist unbekannt. Die Einspielanalyse bietet hier die Möglichkeit, eine Aussage darüber zu treffen, ob die plastische Dissipationsarbeit beschränkt bleibt und sich der Werkstoff ab einem bestimmten Zeitpunkt rein elastisch verhält. Man spricht in diesem Fall vom „Einspielen" bzw. „Shakedown" [1]. Falls sich die Geometrie des Verbundes mit Design-Parametern $\boldsymbol{\beta}$ beschreiben läßt, können mit Hilfe eines Optimierungsverfahrens diese so verändert werden, daß der sichere Lastraum für Einspielen maximal wird. Für Verbundwerkstoffe mit periodischer Mikrostruktur lassen sich diese Untersuchungen an einem repräsentativen Volumenelement (RVE) durchführen [2]. Die Ergebnisse werden mit Hilfe der Homogenisierungstechnik von der Mikro- auf die Makroebene übertragen [3].

2. Statisches Einspiel-Theorem

Ein Verbundwerkstoff spielt ein, falls ein Sicherheitsfaktor $\alpha > 1$, ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}$ und ein elastischer Kernbereich $\overline{\mathcal{P}}^{m}$ für die makroskopische Spannung $\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$ und Dehnung $\overline{\boldsymbol{E}}$ derart existieren, daß

$$\overline{\mathcal{P}}^{m} = \left\{ \overline{\boldsymbol{\Sigma}} \mid \overline{\boldsymbol{\Sigma}} = <\overline{\boldsymbol{\sigma}}> = \frac{1}{V} \int_{(V)} \overline{\boldsymbol{\sigma}}\, dV \,,\ \overline{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{y}) \in \mathcal{P}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) \,,\ \forall\, \boldsymbol{y} \in V \right\} \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{P}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}) = \left\{ \overline{\boldsymbol{\sigma}} \mid \mathcal{F}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \sigma_F) = \sqrt{\frac{3}{2}\, \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{D} : \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{D}} - \sigma_F < 0 \right\} \quad \text{und} \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha\, \boldsymbol{\sigma}^{(E)} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)} \tag{2}$$

gilt [2]. Hier wird die Fließbedingung nach VON MISES verwendet, wobei sich die Spannungen $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ aus einem mit Hilfe eines rein elastischen Referenz-Volumenelementes ($\text{RVE}^{(E)}$) ermittelten elastischen Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}^{(E)}$ und einem zeitunabhängigen Eigenspannungsfeld $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}$ zusammensetzen. Der Zusammenhang zwischen makro- und mikroskopischen Größen wird mittels der Homogenisierungstechnik hergestellt. $\boldsymbol{L}$ ist der Elastizitätstensor.

$$\begin{array}{lllll}
\boldsymbol{u}^{(E)} = \overline{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{y} & \text{auf } \partial V, & \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(E)} = \boldsymbol{0} \text{ in } V, & <\boldsymbol{\sigma}^{(E)}> = \overline{\boldsymbol{\Sigma}}, \\
\boldsymbol{\varepsilon}^{(E)} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad} \boldsymbol{u}^{(E)} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{u}^{(E)})^{T}\right) & \text{in } V, & \operatorname{div} \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)} = \boldsymbol{0} \text{ in } V, & <\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}> = \boldsymbol{0}, \\
\boldsymbol{\sigma}^{(E)} = \boldsymbol{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(E)} & \text{in } V, & \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} \text{ auf } \partial V. &
\end{array} \tag{3}$$

3. Finite-Elemente-Diskretisierung

Die elastische Referenzlösung $\boldsymbol{\sigma}^{(E)}$ wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit bestimmt. Analog wird das zeitunabhängige Eigenspannungsfeld $\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}$ definiert. Das statische Einspiel-Theorem läßt sich dann als geschachteltes Optimierungsproblem darstellen, wobei $[\boldsymbol{C}]$ eine konstante Rechteckmatrix ist [2].

$$\begin{array}{l}
\alpha_{\text{opt}} = \sup\limits_{\beta} \alpha_{\text{SD}} \\
\alpha_{\text{SD}} = \max\limits_{\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}} \alpha
\end{array} \quad \text{mit} \left\{ \begin{array}{l}
[\boldsymbol{C}]\{\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}\} = \{0\} \\
\mathcal{F}\left(\alpha\, \boldsymbol{\sigma}^{(E)} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)} \,,\ \sigma_F\right) < 0
\end{array} \right. \quad \text{wobei} \quad \overline{\boldsymbol{\Sigma}} = \alpha\ <\boldsymbol{\sigma}^{(E)}> + <\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{(R)}> . \tag{4}$$

Für die Einspielanalyse wird ein numerisches Optimierungsverfahren für nichtlineare Problemstellungen eingesetzt [4]. Das äußere Optimierungsproblem wird mit einem Verfahren gelöst, das eine Erweiterung des bekannten Bisektionsverfahrens darstellt und ohne Kenntnis von Ableitungen auskommt [5].

4. Beispiel

Für einen Verbundwerkstoff mit periodischer Mikrostruktur (Abb. 1) wird die Form der verstärkenden Faser verändert, so daß der Einspielfaktor α_{SD} für einen vorgegebenen Lastraum maximiert wird ($D/L = 0.2$). Der elastisch – ideal plastische Matrixwerkstoff besteht aus Al ($E = 70$ GPa, $\sigma_F = 80$ MPa, $\nu = 0.3$), der rein elastische Faserwerkstoff ist Al_2O_3 ($E = 370$ GPa, $\nu = 0.3$). Die Form der Fasern wird durch eine Ellipsengleichung modelliert, wobei das Volumenverhältnis von Fasern zur Matrix konstant bleibt. Auf den Seiten des $\mathrm{RVE}^{(\mathrm{E})}$ werden Verschiebungen aufgebracht und die Einspielanalyse als ebener Dehnungszustand durchgeführt. In dem überlagerten Optimierungsverfahren wird der Design-Parameter $\beta \mathrel{\widehat{=}} D_1$ verändert. Mit Hilfe der Einspielanalyse wird der durch die Verschiebungen aufgespannte Lastraum untersucht ($u_1 = \alpha_{\mathrm{SD}}\,\mu_1\,u_1^*$, $u_2 = \alpha_{\mathrm{SD}}\,\mu_2\,u_2^*$ mit $0 \le \mu_1 \le 1$ und $0 \le \mu_2 \le 1$). Für das vorgegebene Verhältnis $\varphi = \arctan u_2^*/u_1^* = 22.5°$ ergibt sich $D_1 = 0.096\,L$ und $D_2 = 0.417\,L$ (Abb. 2). Die Abb. 3 und 4 zeigen die maximal möglichen Lasträume für den Verbund mit kreisförmigen und mit elliptischen Fasern für die Elastizitäts- (1), Traglast- (2) und Einspiellösung (3). Die linken Diagramme zeigen die Verschiebungslasträume, während die rechten Diagramme die zugehörigen maximalen makroskopischen Spannungen zeigen.

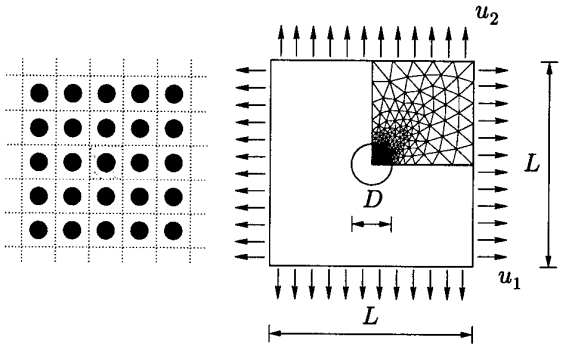


Abbildung 1: Verbund mit kreisförmige Fasern

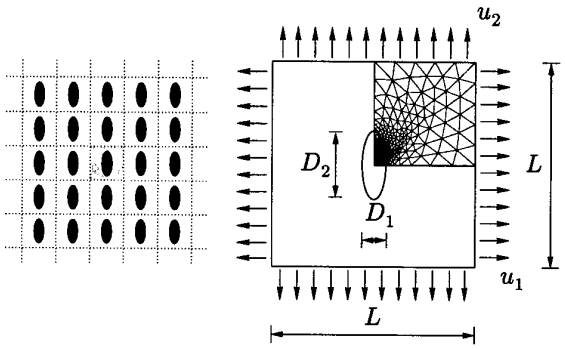


Abbildung 2: Verbund mit elliptischen Fasern

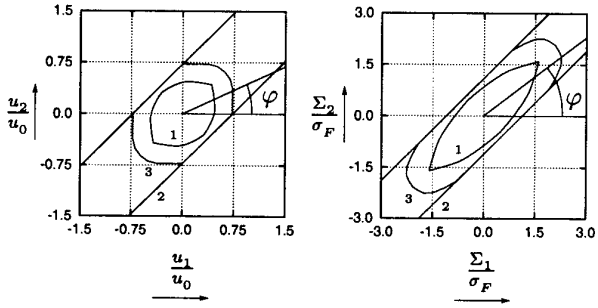


Abbildung 3: Lasträume (kreisförmige Fasern)

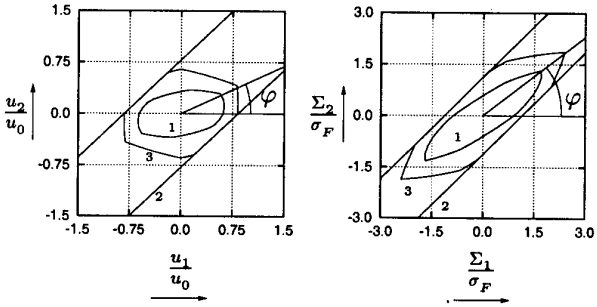


Abbildung 4: Lasträume (elliptische Fasern)

5. Literatur

1 Melan, E.: *Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal-plastischem Baustoff.* Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien, Abteilung IIa, **145**, 195-218, 1936.

2 Weichert, D.; Hachemi, A.; Schwabe, F.: *Application of shakedown analysis to the plastic design of composites.* Archive of Applied Mechanics, **69**, 623-633, 1999.

3 Suquet, P.: *Analyse limite et homogénéisation.* C.R. Acad. Sci., **296**, 1355-1358, 1983.

4 Conn, A.R.; Gould, N.I.M.; Toint, Ph.L.: *LANCELOT: A fortran package for large-scale nonlinear optimization (Release A).* Springer Verlag Berlin, 1992.

5 Torczon, V.J.: *Multi-Directional Search: A direct search algorithm for parallel machines.* Dissertation, Rice University, Houston, Texas, 1989.

Anschrift: Dipl.-Ing. Frank Schwabe, Dr.-Ing. Abdelkader Hachemi, Prof. Dr.-Ing. Dieter Weichert, Institut für Allgemeine Mechanik, RWTH Aachen, Templergraben 64, 52056 Aachen.

ZHUK, Y.

Generalization of thermodynamically consistent isothermal Bodner-Partom's model

Simplified thermodynamically consistent model of viscoplastic behavior of the material is elaborated. The model takes into account the current values of temperature and external variables influence onto the internal state parameters.

1. Structure of evolution equation

Thermodynamic state of a body is described at each material point by the values of observed or external variables such as deformation and temperature $\Lambda = (\Lambda_j)$, $j = \overline{1, J}$ and of "hidden" or internal variables q_α, $\alpha = \overline{1, N}$. In general case, the rates of the internal variables have to be the functions of general thermodynamic state [1]

$$\dot{q}_\alpha = f_\alpha(\Lambda, q_\beta), \quad q_\alpha(0) = q_\alpha^0, \tag{1}$$

where q_α^0 are the initial values. It is shown that simplest form of the rate equations that has an invariance under transformation to a new set of internal variables is one in which the $\dot{q}_\alpha$ depend linearly on $\dot{\Lambda}(t)$

$$\dot{q}_\alpha = f_\alpha(\Lambda, q_\beta) + F_\alpha(\Lambda, q_\beta) \cdot \dot{\Lambda}, \tag{2}$$

where $F_\alpha = (F_{\alpha j})$ is a set of vector functions, "$\cdot$" denotes scalar multiplication. The main difference between (1) and (2) lies in the presence of rate terms. These terms govern the instantaneous reversible response of internal variables. Formulation (2) and correspondent to it variables q_α are called dissipative ones. Introducing equations (2) into generalized thermodynamic framework (see [1], [3]) leads to complicate structure of constitutive equations of the model. For simplification of the model equations, a special approach was developed. The essence of it lies in the reduction of rate equations of the form (2), by a transformation to the new set of internal variables

$$q'_\alpha = q'_\alpha(\Lambda, q_\beta), \tag{3}$$

to a system of the form (1)(i.e. a dissipative form). Conditions for the reducibility were obtained in [1]. If $F_{\alpha j}$ are the functions only of the set of external variables $F_{\alpha j} = F_{\alpha j}(\Lambda)$, then conditions are reduced to the existence of vector-function $\vec{\chi}(\Lambda) = (\chi_\alpha(\Lambda))$, so that $F_{\alpha i} = \partial\chi_\alpha / \partial\Lambda_i$. Then one can obtain

$$q'_\alpha = q_\alpha - \chi_\alpha(\Lambda), \quad \dot{q}_\alpha = f_\alpha\left(\Lambda,\, q'_\beta + \chi_\beta(\Lambda)\right). \tag{4}$$

By this means equations (2) are reduced to the dissipative form (1). In this situation dependence upon external variables is transferred into flow equation.

2. Constitutive equations of Bodner-Partom's model. Model generalisation.

The main aim of method mentioned application is to take into account the effects of instantaneous temperature variation into the internal parameters of viscoplastic state of material. Numerous publications are devoted to the equations of Bodner-Partom model (see for instance [2]). The formulation uses decomposition of the strain into elastic, inelastic and thermal components $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^\theta$. Elastic response is given by Hook's Law $s = 2G(e - \varepsilon_p)$, $\operatorname{tr}\sigma = 3K_V(e - \varepsilon_\theta)$, where s and e are the deviators of stress and strain tensors, G and K_V are shear and bulk moduli. Flow law with the incompressibility condition, evolution equations of parameters of isotropic K and kinematic β hardening are taken in the form

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{D_0}{\sqrt{J_2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z^2}{3J_2}\right)^2\right] s, \quad \operatorname{tr}\dot{\varepsilon}^p = 0, \tag{5}$$

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\,\dot{W}_p - R_K(\theta, K), \quad K(0) = K_0, \tag{6}$$

$$\dot{\beta} = m_2(D_1\,u - \beta)\,\dot{W}_p - R_\beta(\theta, K), \quad \beta(0) = 0. \tag{7}$$

Functions R_K and R_β characterize the thermal recovery. D_0, K_0, K_1, K_2, D_1, m_1, m_2, A_K, A_D, n, r_K and r_D are parameters of model, $J_2 = s : s/2$, $\dot{W}_p = \sigma : \dot{\varepsilon}^p$, $u = s/(s : s)^{1/2}$, $V = \beta/(\beta : \beta)^{1/2}$, $D = \beta : u$. The quantity Z in the model (5)-(7) governs the permanent yield limit σ_{02}^*, whereas K_0 specifies the initial yield limit σ_{02}. It is clear from the physical point of view that Z can significantly depend on temperature and in so doing $\sigma_{02}(\theta_2) < \sigma_{02}(\theta_1)$, $\theta_2 > \theta_2$. Unfortunately, this effect is disregarded by the formulation (5)-(7). Consider the model response to the tension with constant velocity $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-3}$ sec^{-1}. During elastic stage of deformation the temperature changes linearly from θ_1 =273 K to θ_2 =373 K, θ_3 =473 K, θ_4 =573 K, θ_5 =673 K and θ_6 =773 K then when the plastic deformation occurs, temperature remains constant. These histories of temperature evolution are depicted in Fig.1. Line 1 corresponds to the isothermal behavior $\theta \equiv \theta_1$. To refine the effect assume that parameter K_0 is temperature dependent and all other ones are temperature independent. Calculations by means of the model (5)-(7) show identical stress responses for all histories of temperature. Behavior of parameter K is analogous (line 6 in Fig.2). Insensitivity of such kind is explained by the isothermal formulation of model. To take into account of this aspect the equation of evolution for K with accordance to (2) must be written in a form

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K)\, \dot{W}_p + \varphi(\theta, K) - R_K(\theta, K), \quad K(0) = K_0, \quad K(0) = K_0(\theta(0)). \tag{8}$$

Changes in the elastic region of deformation can be easily accounted by the choice $\varphi(\theta, K) = d\,K_0(\theta)/d\,\theta$. It is assumed that this dependence remains true for plastic stage when $K \neq K_0$. If there are several external parameters that affect the yield limit (for example pressure $p = 1/3\,\mathrm{tr}\,\sigma$) then evolution equation should be modified as follows

$$\dot{K} = m_1 (K_1 - K)\, \dot{W}_p + \frac{\partial K_0(\theta,p)}{\partial p}\,\dot{p} + \frac{\partial K_0(\theta,p)}{\partial \theta}\,\dot{\theta} - R_K(\theta, K), \quad K(0) = K_0, \tag{9}$$

$$K(0) = K_0(\theta(0),\, p(0)). \tag{10}$$

With accordance to the technique (4) let us introduce new internal variable $K' = K - K_0(\theta, p)$. Then equation (9) can be reduced to the dissipative form; flow equation (5) is modified with correspondence to (4)

$$\dot{K}' = m_1 (K_1' - K')\, \dot{W}_p - A_K K_1 \left[(K' - K_2')/K_1\right]^{r_K}, \quad K'(0) = K_0, \tag{11}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{D_0}{\sqrt{J_2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{K_0(\theta,p) + Z'}{\sqrt{3J_2}}\right)^{2n}\right] s, \tag{12}$$

where $Z' = K' + D$, $K_1' = K_1 - K_0$, $K_2' = K_2 - K_0$. New variable K' is determined now by the histories of inelastic deformation and temperature. Effects of instantaneous variations of θ and p are taken into account by means of resistance to plastic flow $Z = K_0 + Z'$. It is determined that very reliable approximation for transition from (5)-(7) to (11)-(12) is $K' \approx K_1 - \langle K_0(\theta,p)\rangle_{\theta,p} = \mathrm{const}$, $K_2' \equiv 0$. Other parameters are not changed. Line 7 in Fig.2 demonstrates evolution of parameter K'.

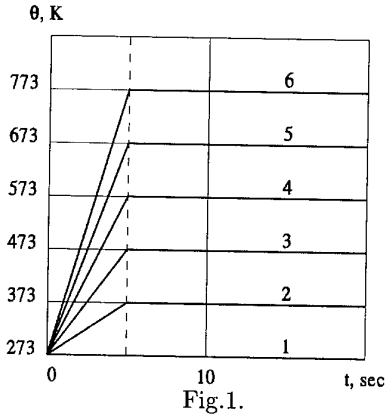


Fig.1.

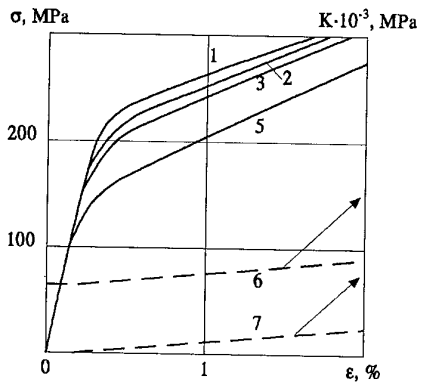


Fig.2.

3. References

1 Lubliner, J.: On the structure of the rate equations of materials with internal variables. Acta Mechanica **17**(1–2) (1973), 109–119.

2 Bodner, S. and Partom Y.: Constitutive equations for elastoviscoplastic strain hardening material. Trans. of ASME. J. Appl. Mech. **42** (1975), 385–389.

3 Zhuk, Y, and Senchenkov, I.: Concentration of stresses and strains in a notched cylinder of a viscoplastic material under harmonic loading. Int. Appl. Mech. **35**(2) 1999, 120–127.

Address: Dr. Y. Zhuk, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Aeronautics, Prince Consort Road, London SW7 2BY, UK.

N. APEL, M. LAMBRECHT, C. MIEHE

Ein Mehrskalenmodell zur Beschreibung des Bruchversagens von Betonstrukturen

Zur Beschreibung des Bruchversagens von Betonstrukturen wird ein Mehrskalenmodell diskutiert. In einem ersten Schritt wird zur Beschreibung des mikroskopischen Bruchverhaltens des Betons als Mikrostruktur eine Kugel betrachtet, auf deren Oberfläche punktweise Materialgleichungen für entfestigendes Materialverhalten definiert werden. In einem zweiten Schritt wird der makroskopische Bruchmechanismus durch eine weitere, speziell angenommene Mikrostruktur modelliert, die den jeweiligen Versagenszustand abbildet. Das Modell gestattet Simulationen von Bruchmechanismen in entfestigenden Betonstrukturen auf der Basis von regulären Finite–Elemente Diskretisierungen.

1. Motivation und Überblick

Um das Bruchverhalten von Beton zu beschreiben, schlagen wir ein Mehrskalenmodell vor. Es besteht aus einer Makro- und zwei Mikroskalen, siehe Abbildung 1. Jedem Punkt $\bar{x}$ des Körpers $\bar{\mathcal{B}}$ wird eine Mikrostruktur $\mathcal{S}$ (Skale 1) zugeordnet, in der basierend auf einem anisotropen Orientierungsfeld $\boldsymbol{n}$ Bruchversagen modelliert wird. Die

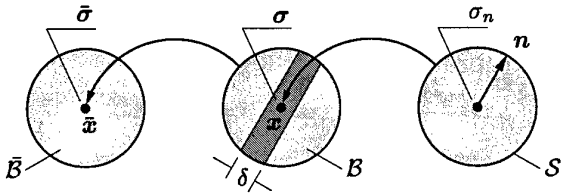


Abbildung 1: Mehrskalenmodell, bestehend aus Makrostruktur $\bar{\mathcal{B}}$, Mikroskale 2 $\mathcal{B}$ und Mikroskale 1 $\mathcal{S}$.

makroskopischen Spannungen und Moduli ergeben sich durch Homogenisierung. Begleitend zu dem Belastungsprozess wird eine algorithmische Lokalisierungsanalyse durchgeführt, die bei Indikation einer materiellen Instabilität eine weitere Mikrostruktur $\mathcal{B}$ (Skale 2) aktiviert. Diese dient der Regularisierung postkritischen Verhaltens und gewährleistet die Netzunabhängigkeit der Lösung.

2. Mikromechanisches Modell zur Beschreibung von Bruch

CAUCHY [1] untersuchte 1828 ein System von Molekülen, die zentrale Kräfte aufeinander ausüben. Die Größe der Kraft zwischen zwei betrachteten Molekülen ist proportional zu deren Abstand, die Auslenkung der Moleküle ist klein im Verhältnis zu deren Abstand. Die durch Deformation gespeicherte Energie in einem solchen System ergibt sich zu $\hat{\Psi} = \sum_\alpha \mu_\alpha W_\alpha(\Delta r_\alpha)$. Dabei bezeichnet r_α den Molekülabstand, W_α die gespeicherte Energie infolge Abstandsänderung und μ_α die Anzahl der Molekülpaare mit dem Abstand r_α. Die Spannungen ergeben sich durch Differentiation zu $\hat{\sigma} = \sum_\alpha \mu_\alpha \partial_{\Delta r_\alpha} W_a$.
Im folgenden wird Cauchys Elastizitätsmodell kontinuierlich formuliert und um eine Bruchbeschreibung erweitert. Die Mikrostruktur $\mathcal{S}$ repräsentiert die durch den Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ parametrisierte Einheitssphäre. Interpretiert man die Sphäre als Endpunkte eines Faserspektrums und bezeichnet mit ϵ_n die Verlängerung der Faser $\boldsymbol{n}$, so ergibt sich die makroskopische Freie Energie zu $\hat{\Psi}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{S}} \hat{\psi}(\epsilon_n; \boldsymbol{n})\, dA$. Die mikroskopische Freie Energie wird analog zur linearen Elastizitätstheorie gewählt, $\hat{\psi}(\epsilon_n; \boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\mu_n \epsilon_n^2$. Sie ist eine Funktion der Orientierung $\boldsymbol{n}$ und der Normalverzerrung $\epsilon_n = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})$. $\mu_n = \hat{\mu}(\boldsymbol{n})$ ist eine anisotrope Orientierungsfunktion. Der Bruch von Fasern auf der Mikroskale 1 wird durch ein kohäsives Bruchmodell beschrieben. Dabei ergibt sich für einen Punkt in der Rißflanke ein Spannungsverlauf gemäß einer Funktion vom Needleman–Typ (Abb. 2), $\sigma(\epsilon_n) = \frac{\sigma_t}{\epsilon_t} \exp[1 - \frac{\epsilon_n}{\epsilon_t}]\, E\epsilon_n$ für $\epsilon_n \geq 0$. Setzt man $\sigma_t = E\epsilon_t / \exp[1]$, so läßt sich das Bruchmodell in eine anisotrope Schädigungstheorie einbetten. Der Gleichungssatz des Materialmodells ist in Abbildung 2 dargestellt. Es sei angemerkt, daß das Modell in der angegebenen Darstellungen eine feste Querkontraktion $\nu = 0.25$ impliziert. Eine Erweiterung auf den Bereich $0 \leq \nu \leq 0.5$ wird durch eine volumetrisch–isochore Zerlegung des makroskopischen Verzerrungstensors möglich. Das Materialmodell weist Ähnlichkeiten zu Microplane Formulierungen auf, siehe z.B. [4], jedoch ist der Zugang über eine anisotrope Orientierungsfunktion grundlegend unterschiedlich.

1. Makro Verzerrungen (Skale 2): $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{sym}[\nabla \boldsymbol{u}]$
2. Mikro Verzerrungen: $\epsilon_n = \boldsymbol{\varepsilon} : (\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n})$
3. lokale freie Energie: $\Psi_n = (1 - d_n)\Psi_0 \; ; \quad \Psi_0 = \frac{1}{2}\mu_n \epsilon_n^2$
4. Mikro Spannung: $\sigma_n = (1 - d_n)\partial_{\epsilon_n}\Psi_n$
5. Mikro Schädigungsevolution: $\dot{d}_n = \lambda$
6. Be- und Entlastungs-bedingungen: $\lambda \geq 0 \; ; \quad [\omega(\epsilon_n) - d_n] \leq 0 \; ;$ $\lambda[\omega(\epsilon_n) - d_n] = 0$
7. Makro Spannungen (Skale 2): $\boldsymbol{\sigma} = \int_{\mathcal{S}} \sigma_n \boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \, dA$

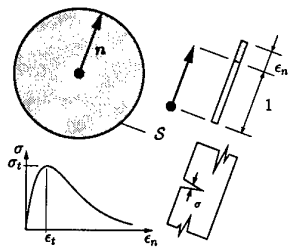


Abbildung 2: Konstitutiver Gleichungssatz der kontinuierlichen Cauchy–Typ Elastizität mit kohäsivem Bruchmodell, Faserbruch auf Skale 2 mit Spannungsverlauf vom Needleman–Typ in der Rißflanke.

3. Mikromechanisches Modell zur Relaxierung Postkritischen Verhaltens

Treten im makroskopischen Punkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ von $\bar{\mathcal{B}}$ materielle Instabilitäten auf, die durch eine begleitende algorithmische Lokalisierungsanalyse angezeigt werden, so weist die Lösung bei weiterer Belastung ein netzabhängiges Verhalten auf, was in dem Verlust der Elliptizität der zugrundeliegenden Differentialgleichungen begründet ist. Um objektive Lösungen zu erhalten, wird eine zweite Mikrostruktur eingeführt. Diese besteht aus zwei Bereichen (Abb. 1), einem Band der Breite δ, in dem sich bei weiterer Belastung die Schädigung akkumuliert und einem äußeren elastischen Bereich. Die Mikrostruktur $\mathcal{B}$ regularisiert mit Hilfe von Fluktuationsfeldern die auftretenden Diskontinuitäten, die mit einem Mode–I bzw. Mode–II–Riß assoziert werden können. Durch Kopplung der Banddicke δ an die Abmessungen des Finiten Elementes erreicht man die Objektivität der Lösung. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [3].

4. Numerische Beispiele

Anhand eines Beispiels sollen die Charakteristiken des Modells veranschaulicht werden. Hierzu wird eine symmetrische, gekerbte Probe einer einachsigen Zugbelastung unterworfen (Abb. 3a). Bei einer Rechnung ohne die regularisierende Mikroskale $\mathcal{B}$ erhält man im postkritischen Bereich unterschiedliche Lösungen bei verschiedenen Diskretisierungen, hier 20×10 und 44×22 Elemente. Bei vorhandener Mikroskale 2 werden Mikrostrukturen in den lokalisierten

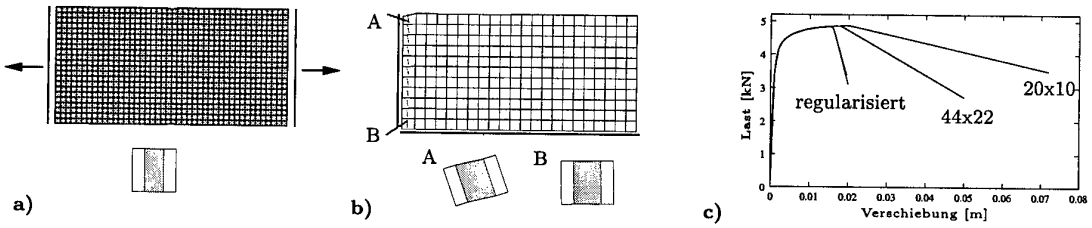


Abbildung 3: a) Gekerbte Probe unter uniaxialem Zug mit „undeformierter" Mikrostruktur $\mathcal{B}$, **b)** deformierte Struktur mit Lokalisierungsrichtungen und Mikrostukturen $\mathcal{B}$, **c)** Lastverschiebungsdiagramm für unterschiedliche Diskretisierungen.

Bereichen aktiv. Die undeformierte Mikrostruktur $\mathcal{B}$ ist ebenfalls in Abb. 3a dargestellt. Abb. 3b zeigt ein Viertel der diskretisierten Struktur. Die Lage der singulären Flächen ist durch Striche gekennzeichnet. Für die Elemente A und B sind die deformierten Mikrostrukturen der Skale 2 dargestellt. Aufgrund der geometrischen makroskopischen Imperfektion durch die Kerbe, tritt in A neben einer Mode-I eine leichte Mode-II Diskontinuität auf. In B liegt eine reine Mode-I Diskontinuität vor. Die Unabhängigkeit der Lösung von den dargestellten Diskretisierungen ist dem Lastverschiebungsdiagramm (Abb. 3c) zu entnehmen.

5. References

1 A.L. Cauchy: *De la pression ou tension dans un système de points matériels*, Exercices de mathématiques, 3, 1828, 213–256
2 K. Hackl: *Anisotrope Elastizität und Gruppentheorie oder: „Hatte Cauchy doch recht?"*, ZAMM 78, Suppl. 2, 1998, 447–450
3 C. Miehe & M. Lambrecht: *Finite Element Analysis of Localized Failure in Strain–Softening Solids based on an Assumed Fluctuation Mode on a Microstructure*, submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
4 E. Kuhl, *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 32 (2000)

Addresses: Dipl.–Ing. N. Apel, Dipl.–Ing. M. Lambrecht, Prof. Dr.–Ing. C. Miehe, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart

DRESCHER, J., KESSLER, H., BALKE, H.

Numerical Simulation of Repolarization in Ferroelectrics

Fracture of piezoelectric ceramics is influenced by polarization switching. For certain conditions, ferroelectric switching involves only a local rotation of the remanent polarization vector (repolarization). We present an incremental constitutive law for repolarization, and a finite element model of switching in the process zone of conducting cracks.

1. Introduction

The background for this paper are investigations on the fracture behavior of polycrystalline piezoelectric lead-zirconate-titanate ceramics [1]. Standard 4-point-bending-specimens were homogeneously poled by electrodes on the top- and bottom surfaces. After poling, the crack was introduced perpendicular to the top surface and connected to the electric potential of the upper electrode by a filled-in electrolyte. The fracture load was measured as a function of crack length and voltage between top and bottom electrode.
During fracture, ferroelectric/ferroelastic domain switching was induced in the process zone near the crack tip by high electric fields and mechanical stresses. A preliminary micromechanical switching model was applied to the 4-point-bending-configuration in [2]. For certain conditions, it indicated repolarization in the plane perpendicular to the crack and electrodes – a pure rotation of the local remanent polarization vector (P_i^r) and permittivity (ε_{ij}). The necessary conditions for repolarization are: (i) The material is fully poled in the corresponding plane already in the initial state. (ii) The angle between the local remanent polarization vector and the electric field should not exceed 90°. Below, we consider only the partial problem of ferroelectric switching by an applied electric field (E_{app}) in a material without piezoelectric coupling, with E_{app} defined as applied voltage divided by the electrode distance.

2. The model

The field equation of a ferroelectric material free of extrinsic charges, and the constitutive relation between electric displacements (D_i), electric field (E_i) and remanent polarization (P_i^r) are given by

$$D_{i,i} = 0 \qquad \text{and} \qquad D_i = \varepsilon_{ij}(\theta)E_j + P_i^r(\theta) \tag{1}$$

θ denotes the angle between the remanent polarization (or the corresponding principal direction of the permittivity tensor) and the global x-axis. Repolarization is initiated when the associated energy release density (J) per increment $\mathrm{d}\theta$ exceeds a materials specific energy barrier (J_c). Taking into account the change of remanent polarization (P_i^r) and permittivity (ε_{ij}) due to repolarization, the switching criterion can be written as [3]

$$J = E_i\frac{\mathrm{d}P_i^r}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{2}E_iE_j\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}\theta} \geq J_c. \tag{2}$$

Usually, the permittivity term in eq. (2) is small. It becomes essential, however, when the angle between remanent polarization (P_i^r) and electric field (E_i) is 90°. In this case, without account of the transversally anisotropic permittivity tensor (ε_{ij}), the tangent permittivity (ε_{ij}^T) would be diverging, see eqs. (8) and (11) below. For a rotation by θ, the corresponding changes of remanent polarization and permittivity are determined by

$$\frac{\mathrm{d}P_x^r}{\mathrm{d}\theta} = -P_y^r; \qquad \frac{\mathrm{d}P_y^r}{\mathrm{d}\theta} = P_x^r; \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xx}}{\mathrm{d}\theta} = -2\varepsilon_{xy}; \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{yy}}{\mathrm{d}\theta} = 2\varepsilon_{xy}; \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xy}}{\mathrm{d}\theta} = \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}. \tag{3}$$

Substituting eq. (4) into (3), the switching criterion is reformulated as

$$J = -E_xP_y^r + E_yP_x^r + (E_y^2 - E_x^2)\varepsilon_{xy} + E_xE_y(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \geq J_c. \tag{4}$$

Consistency requires the switching citerion to be satisfied in every loadstep increment, leading to

$$\mathrm{d}J = \frac{\partial J}{\partial E_i}\mathrm{d}E_i + \frac{\partial J}{\partial P_i^r}\frac{\mathrm{d}P_i^r}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{ij}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{d}\theta = 0. \tag{5}$$

Therefore, the increment of the repolarization angle ($\mathrm{d}\theta$) is

$$\mathrm{d}\theta = \frac{\mathcal{Z}_\mathrm{x}\,\mathrm{d}E_\mathrm{x} + \mathcal{Z}_\mathrm{y}\,\mathrm{d}E_\mathrm{y}}{\mathcal{N}}. \tag{6}$$

The numerator coefficients, $\mathcal{Z}_\mathrm{x}$ and $\mathcal{Z}_\mathrm{y}$, and the denominator, $\mathcal{N}$, have the form

$$\mathcal{Z}_\mathrm{x} = \frac{\partial J}{\partial E_\mathrm{x}} = -P_\mathrm{y}^\mathrm{r} - 2\varepsilon_{\mathrm{xy}}E_\mathrm{x} + (\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \varepsilon_{\mathrm{yy}})E_\mathrm{y}; \qquad \mathcal{Z}_\mathrm{y} = \frac{\partial J}{\partial E_\mathrm{y}} = P_\mathrm{x}^\mathrm{r} + 2\varepsilon_{\mathrm{xy}}E_\mathrm{y} + (\varepsilon_{\mathrm{xx}} - \varepsilon_{\mathrm{yy}})E_\mathrm{x}; \tag{7}$$

$$\mathcal{N} = -\frac{\partial J}{\partial P_\mathrm{i}^\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}P_\mathrm{i}^\mathrm{r}}{\mathrm{d}\theta} - \frac{\partial J}{\partial \varepsilon_{\mathrm{ij}}}\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}}{\mathrm{d}\theta} = E_\mathrm{x}P_\mathrm{x}^\mathrm{r} + E_\mathrm{y}P_\mathrm{y}^\mathrm{r} + (E_\mathrm{y}^2 - E_\mathrm{x}^2)(\varepsilon_{\mathrm{yy}} - \varepsilon_{\mathrm{xx}}) + 4\varepsilon_{\mathrm{xy}}E_\mathrm{x}E_\mathrm{y}. \tag{8}$$

Combination of the constitutive law (1) and the switching criterion (2) leads to

$$\mathrm{d}D_\mathrm{i} = \begin{cases} \varepsilon_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}E_\mathrm{j} & \text{for} \quad J < J_\mathrm{c} \\ \mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{ij}}E_\mathrm{j} + \varepsilon_{\mathrm{ij}}\mathrm{d}E_\mathrm{j} + \mathrm{d}P_\mathrm{i}^\mathrm{r} & \text{for} \quad J \geq J_\mathrm{c}. \end{cases} \tag{9}$$

With (3), (6), (7) and (8), the incremental ferroelectric constitutive law follows as

$$\mathrm{d}D_\mathrm{i} = \varepsilon_{\mathrm{ij}}^\mathrm{T}\mathrm{d}E_\mathrm{j}, \tag{10}$$

where the tangent permittivity, $\varepsilon_{\mathrm{ij}}^\mathrm{T}$, is given by

$$\varepsilon_{\mathrm{ij}}^\mathrm{T} = \varepsilon_{\mathrm{ij}} + \begin{cases} 0 & \text{for} \quad J < J_\mathrm{c} \\ \frac{1}{\mathcal{N}}\begin{pmatrix} \mathcal{Z}_\mathrm{x}^2 & \mathcal{Z}_\mathrm{x}\mathcal{Z}_\mathrm{y} \\ \mathcal{Z}_\mathrm{x}\mathcal{Z}_\mathrm{y} & \mathcal{Z}_\mathrm{y}^2 \end{pmatrix} & \text{for} \quad J \geq J_\mathrm{c}. \end{cases} \tag{11}$$

Using an incremental Euler-algorithm, the constitutive law, eq. (10), was realized in the finite element code ANSYS (Rev. 5.5.2). At the beginning of the simulation, the ferroelectric material was assumed as homogeneously poled parallel to the conducting crack. The crack itself was modeled as a notch with a finite notch radius. The local electric field is always perpendicular to conducting surface of the notch; therefore, the necessary condition for repolarization can be satisfied already in the initial state. Fig. 1 plots the local repolarization angle (θ) in the process zone for 3 applied electric fields (E_app). The size of the process zone for $E_\mathrm{app} = 0.25\,\mathrm{kV/mm}$ is approximately equal to the notch radius. With increasing E_app, the zone size grows. For $E_\mathrm{app} = 1\,\mathrm{kV/mm}$, the maximum repolarization angle, $\theta_\mathrm{max} = 32.6°$, is located at the surface near the notch tip.

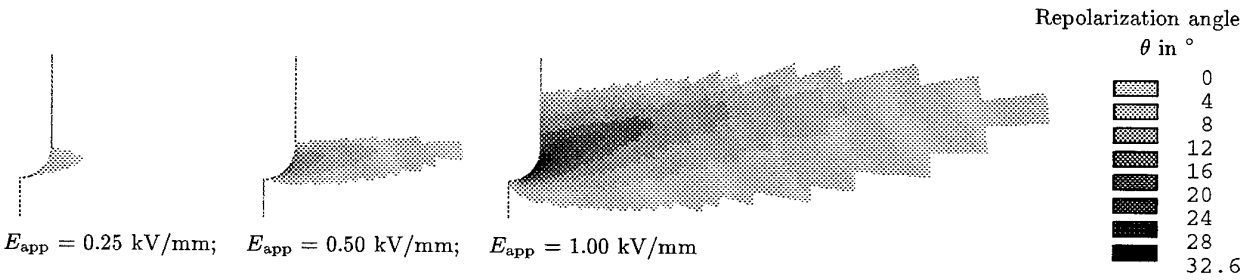


Figure 1: Process zones

3. References

1 HEYER, V., SCHNEIDER, G. A., BALKE, H., DRESCHER, J., BAHR, H.-A: A fracture criterion for conducting cracks in homogeneously poled piezoelectric PZT-PIC 151 ceramics; Acta mater. **46** (1998), 6615-6622

2 KESSLER, H., BALKE, H.: Modeling of polarization switching near a crack in a ferroelectric material; Euromech Colloquium 402 "Micromechanics of Fracture Processes" (1999), 45-46

3 KESSLER, H., BALKE, H.: On the Local Energy Release and Stability of Polarization Switching, and Analogies to Fracture Mechanics; submitted to J. Mech. Phys. of Solids.

Address: J. DRESCHER, Inst. f. Festkoerpermechanik, TU Dresden, D–01062 Dresden, Germany, drescher@mfkrs1.mw.tu-dresden.de

KASHTALYAN, M., SOUTIS, C.

Stress Analysis of Angle-Ply Laminates with Matrix Cracks

Symmetric angle-ply $[\pm\theta]_s$ laminates subjected to in-plane axial tension and containing uniformly spaced matrix cracks in the central layer are analysed. The in-plane stress field in a region between two cracks is calculated using a 2-D shear-lag approach. A system of two coupled second-order ordinary differential equations is arrived at, with stress-free crack surfaces yielding necessary boundary conditions for it. Obtained stresses are then averaged across the crack spacing and used to evaluate the effective elastic properties of the damaged laminate.

1. Stress Analysis

Matrix cracks parallel to the fibres in off-axis plies are the first damage mode observed in multidirectional composite laminates subjected to in-plane tensile or thermal loading. They significantly reduce the laminate stiffness and trigger development of other harmful resin-dominated damage modes such as delaminations. The present paper is concerned with stress analysis of symmetric angle-ply $[\pm\theta]_s$ laminates with matrix cracks in the central layer. It forms a part of a wider study of concurrent matrix cracking in more general laminates, containing damage in adjacent off-axis plies.

A symmetric angle-ply $[\pm\theta]_s$ laminate consists of four plies, two outer with the fibre orientation θ and two inner with the fibre orientation $-\theta$ with respect to the x-axis of the laminate co-ordinate system xyz. The central two-ply layer contains matrix cracks, which run parallel to the fibres perpendicularly to the interface. It is assumed that they span the whole thickness of the layer and width of the laminate. Crack spacing is assumed to be uniform and is denoted as $2s$. Due to the uniformity of crack spacing, a representative segment defined by two neighbouring cracks, needs to be considered. The representative segment, of the length $2s$, is referred to the local co-ordinate system $x_1x_2x_3$, with the x_1-axis directed along the fibres in the cracked ply and the origin in the center of the segment. In the local co-ordinate system, the cracked layer (c) is orthotropic and the outer plies (o) are specially orthotropic. Their properties can be easily calculated using well-known formulae [1].

Let $\sigma_{ij}^{(c)}$ and $\epsilon_{ij}^{(c)}$ denote respectively the in-plane microstresses and microstrains in the cracked layer, averaged across the layer thickness. The equilibrium equations in terms of microstresses take the form

$$\frac{d}{dx_2}\sigma_{j2}^{(c)} - \frac{\tau_j}{t} = 0, \qquad j = 1,2 \tag{1}$$

Here t is the single ply thickness. By averaging the out-of-plane constitutive equations, the interface shear stresses τ_j in Eqs. (1) are expressed in terms of the in-plane displacements $u_{ij}^{(c)}$ and $u_{ij}^{(o)}$, averaged across the thickness of respectively the inner and outer layers, so that

$$\tau_j = K_{j1}(u_1^{(o)} - u_1^{(c)}) + K_{j2}(u_2^{(o)} - u_2^{(c)}), \qquad j = 1,2 \tag{2}$$

Shear lag parameters K_{11}, K_{22} and $K_{12} = K_{21}$ are determined on the assumption that the out-of-plane shear stresses in each ply vary linearly with x_3. Substitution of Eqs. (2) into Eqs. (1) and subsequent differentiation with respect to x_2 lead to the equilibrium equations in terms of in-plane microstresses and microstrains. To exclude the latter, constitutive equations for both layers, equations of the global equilibrium of the laminate as well as the generalised plane strain conditions are employed. Details of the derivation are published elsewhere [2]. Finally, a system of coupled second order ordinary differential equations is arrived at

$$\frac{d^2\sigma_{j2}^{(c)}}{dx_2^2} - N_{1j}\sigma_{12}^{(c)} - N_{2j}\sigma_{22}^{(c)} - \Delta_j P_x = 0, \qquad j = 1,2 \tag{3}$$

Here P_x is applied tensile load, N_{kj}, $k = 1,2$ and Δ_j are constants depending on the stiffness properties of the inner and outer layers $Q_{ij}^{(c)}$, $Q_{ij}^{(o)}$, shear lag parameters K_{11}, K_{22}, K_{12} and angle θ. Equations (3) can be uncoupled at the expense of increasing the order of differentiation, resulting in a fourth order non-homogeneous ordinary differential equation, with boundary conditions prescribed at the stress-free crack surfaces as $\sigma_{22}^{(c)}|_{x_2=\pm s} = 0$, $\sigma_{12}^{(c)}|_{x_2=\pm s} = 0$.

The in-plane microstresses in the cracked ply are then found as

$$\sigma_{j2}^{(c)} = (A_j \frac{\cosh \lambda_1 x_2}{\cosh \lambda_1 s} + B_j \frac{\cosh \lambda_2 x_2}{\cosh \lambda_2 s} + C_j) P_x \qquad j = 1,2 \tag{4}$$

Here λ_j are the roots of the characteristic equation and A_j, B_j and C_j are constants depending on N_{kj} and Δ_j.

2. Application to Prediction of Damage-Induced Changes in Stiffness Properties

The in-plane microstresses in the cracked layer can be used to evaluate the effect of matrix cracking on the stiffness properties of the laminate. First, the cracked layer is replaced with an equivalent homogeneous one, with the constitutive equations in the form $\{\bar{\sigma}^{(c)}\} = [\bar{Q}^{(c)}]\{\bar{\varepsilon}^{(c)}\}$. The laminate macrostresses $\{\sigma^{(c)}\}$ are obtained by averaging microstresses, Eqs.(4), across the length of the representative segment as

$$\bar{\sigma}_{j2}^{(c)} = (A_j \frac{1}{\lambda_1 s} \tanh \lambda_1 s + B_j \frac{1}{\lambda_2 s} \tanh \lambda_2 s + C_j) P_x \qquad j = 1,2 \tag{5}$$

The macrostrains $\{\bar{\varepsilon}^{(c)}\}$ in the equivalent plies are assumed to be equal to those in the undamaged outer plies, as well as to the applied laminate strain, and are calculated from the constitutive equations for the outer plies. Once the reduced stiffness properties $[\bar{Q}^{(c)}]$ of the equivalent layer are known, stiffness properties of the laminate can be calculated using the laminated plate theory.

Table 1 shows degradation of stiffness properties in a $[\pm 55]_s$ angle-ply laminate made of epoxy resin reinforced by glass fibres. Properties of the unidirectional E-glass/epoxy system are as follows: axial modulus E_A=40 GPa, transverse modulus E_T=10 GPa, in-plane shear modulus G_A=5 GPa, out-of-plane shear modulus G_T=3.52 GPa, Poisson's ratio ν=0.3, ply thickness t=0.155 mm. Laminate engineering properties, that is the axial modulus E_x, transverse modulus E_y, shear modulus G_{xy}, Poisson's ratio ν_{xy} as well as shear-extension coupling coefficients $\eta_{xy,x}$ and $\eta_{xy,y}$ are given as functions of the crack density $C = (2s)^{-1}$ in the inner $(-\theta)$ layer.

It may be seen that in a symmetric angle-ply laminate matrix cracking results in significant reduction in the laminate elastic moduli. At 35 cracks/cm, the axial modulus is reduced by almost 40%, transverse modulus by almost 25 % and shear modulus by almost 10 %. In angle-ply laminates, matrix cracking may lead to an increase in the Poisson's ratio. It also introduces coupling between extension and shear - a phenomenon, not observed in cross-ply $[0_m/90_n]_s$ laminates.

Table 1.

C(cracks/cm)	E_x (GPa)	E_y (GPa)	G_{xy} (GPa)	ν_{xy}	$\eta_{xy,x}$	$\eta_{xy,y}$
0	11.88	20.32	10.52	0.346	0	0
5	10.86	19.37	10.36	0.351	0.002	0.023
10	9.914	18.47	10.19	0.356	0.005	0.043
15	9.097	17.65	10.04	0.338	0.008	0.044
20	8.444	16.94	9.923	0.362	0.008	0.060
25	7.944	16.34	9.835	0.367	0.006	0.073
30	7.565	15.86	9.771	0.372	0.003	0.093
35	7.279	15.47	9.724	0.377	0.000	0.099

Acknowledgements

Financial support of this research by EPSRC (GR/L51348) and the British Ministry of Defense is gratefully acknowledged.

3. References

1 JONES, R.M.: Mechanics of Composite Materials (2nd edition). Taylor & Francis, Philadelphia PA, 1999.

2 KASHTALYAN, M., SOUTIS, C. : Modelling matrix cracking in angle-ply composite laminates. In: Proceedings of ECCM9, 4-7 June 2000, Brighton, UK.

Addresses: DR. MARIA KASHTALYAN, DR. COSTAS SOUTIS, Department of Aeronautics, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Prince Consort Road,London SW7 2BY, U.K.

LOBODA V.V., HERRMANN K.P.

A contact zone approach for a crack between anisotropic materials under three-axial remote loading

An exact analytical solution for a crack with an artificial contact zone situated between two anisotropic semi-infinite spaces is found. The stress intensity factors and the energy release rates for different interface crack models are found in a clear analytical form. The numerical algorithm for the determination of the fracture mechanical parameters of an interface crack in a finite sized anisotropic bimaterial is suggested.

1. Introduction

Contact zone approach for an interface crack between two anisotropic materials was developed in a numerical way in the papers [1,2] and an analytical investigation of an artificial contact zone model has been performed in [3]. In this contribution the approach developed in [3] is generalized for an interface crack in an anisotropic bimaterial under three-axial loading.

2. An analytical investigation of different interface crack models

Consider an interface crack $c \le x_1 \le b$, $x_2 = 0$ between two semi-infinite spaces $x_2 > 0$ and $x_2 < 0$ having the elastic moduli $C^{(1)}_{ijkl}$ and $C^{(2)}_{ijkl}$ respectively. Assuming that all fields are independent on the coordinate x_3, the following presentation of the jumps of the displacement vector $[\boldsymbol{u}] = \boldsymbol{u}^+ - \boldsymbol{u}^-$ with $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$, and stresses $\boldsymbol{t}^{(1)} = [\sigma^{(1)}_{12}, \sigma^{(1)}_{22}, \sigma^{(1)}_{32}]$ has been obtained in [3].

$$[\mathbf{u}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad \mathbf{t}^{(1)}(x_1,0) = \mathbf{G}\,\mathbf{W}^+(x_1) - \overline{\mathbf{G}}\ \mathbf{W}^-(x_1), \tag{1}$$

where $\mathbf{G}$ is a 3*3 – components matrix defined by elastic constants and $\mathbf{W}(z)$ is a 3-component vector-function analytic in the whole plane with a cut along $(-\infty, \infty)\backslash[c,b]$

Further one assumes that the interface crack has an artificial contact zone $a<x_1<b$ at the right crack tip with the interface conditions $[u_2]=0$, $\sigma^{\pm}_{12} = \sigma^{\pm}_{13} = 0$, $[\sigma_{22}] = 0$ in this zone, and the position of the point a is arbitrarily chosen for the time being. The spaces are loaded at infinity with uniform three-axial stresses $\sigma^{(m)}_{22} = \sigma, \sigma^{(m)}_{12} = \tau, \sigma^{(m)}_{32} = \tau_3, \sigma^{(m)}_{11} = \sigma^{\infty}_{xxm}$ which satisfy the continuity conditions at the interface.

By using the equations (1) the following presentations are found

$$\boldsymbol{S}_j \boldsymbol{t}^{(1)} = F^+_j(x_1) + \gamma_j F^-_j(x_1), \ \boldsymbol{Y}_j[\boldsymbol{u}'(x_1)] = F^+_j(x_1) - F^-_j(x_1), \tag{2}$$

where $\boldsymbol{F}(z) = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{W}(z)$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3]^T$, $\boldsymbol{S}_j = [S_{j1}, S_{j2}, S_{j3}]$ and γ_j and $\boldsymbol{S}^T_j$ are an eigenvalue and an eigenvector of the problem $(\overline{\boldsymbol{G}}^T + \gamma_j \boldsymbol{G}^T)\boldsymbol{S}^T_j = 0$.

The success of the following analysis essentially depends on the properties of the matrices **G**, **S**, **Y** and the eigenvalues γ_j. For orthotropic semi-infinitive spaces with the main directions of orthotropy co-directed with x_1, x_2, x_3 the appearance of **S** and **Y** shows that the plane and antiplane problems are independent. Satisfying the boundary conditions at the crack faces leads to the following combined Dirichlet - Riemann problem

$$F^+_j(x_1) + \gamma_j F^-_j(x_1) = 0 \ \text{ for } x_1 \in (c,a), \ \ \mathrm{Im} F^{\pm}_j(x_1) = 0 \ \text{ for } x_1 \in (a,b), F_j(z)|_{z\to\infty} = \tilde{\sigma}_1 + i\tilde{\tau}_1 \tag{3}$$

and to the Hilbert problem

$$F^+_3(x_1) + F^-_3(x_1) = 0 \ \text{ for } x_1 \in (c,b), \ \ F_3(z)|_{z\to\infty} = 0.5 S_{33}\tau_3, \tag{4}$$

where $\tilde{\sigma}_1$ and $\tilde{\tau}_1$ are defined via σ and τ. An exact analytical solution of the problem (3) has been found [3] and the stress intensity factors (SIFs) $k_1 = \lim\limits_{x_1 \to a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)}\,\sigma_{22}(x_1,0)$, $k_2 = \lim\limits_{x_1 \to b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)}\,\sigma_{12}(x_1,0)$ are obtained in a clear analytical form. The correspondent energy release rates (ERRs) can be written in the form

$$G^c_1 = \alpha_1 k^2_1, \ \ G^c_2 = \alpha_2 k^2_2. \tag{5}$$

Using an exact analytical solution of the problem (4) the SIF $k_3 = \lim\limits_{x \to b+0} \sqrt{2\pi(x - b)}\,\sigma_{23}(x,0)$ and the correspondent ERR can be written in the form

$$k_3 = \sqrt{\pi d/2}\,\tau_3, \ \ G_3 = \alpha_3 k^2_3. \tag{6}$$

As a particular case of the obtained solution called an artificial contact zone model (ACZM) the contact zone solution (CZS) in the Comninou sense can be found. Imposing the condition $k_1 = 0$ one arrives to the equation $g(\lambda,\gamma,\tau/\sigma) = 0$ with respect to the relative contact zone length $\lambda = (b-a)/(b-c)$. A root λ_0 of this equation defines the real contact zone length $a_0 = b - \lambda_0(b-c)$. In this case the only SIF $k_{20} = k_2|_{\lambda=\lambda_0}$ is not equal to 0, and the correspondent ERR is the following $G_0^c = \alpha_2 k_{20}^2$.

Another important particular case of the ACZM is the classical or oscillating model (OM) which can be obtained for a=0. The fracture parameters of this model are the SIFs K_1, K_2 and K_3 or the correspondent ERRs.

It is shown that a similar analysis can be performed for the orthotropic upper and lower materials with the main directions of orthotropy rotating around the axis x_3. In these cases the plane and antiplane problems are independent as well and they are defined by combined Dirichlet – Riemann (3) and Hilbert (4) problems, respectively. It is worth to note that for such bimaterials the real contact zone length a_0 for an essential shear field and specific orientations of the main directions of orthotropy can exceed one half of the crack length.

3. Relations between the fracture mechanical parameters of different models and the prospects of the investigation of finite sized composites

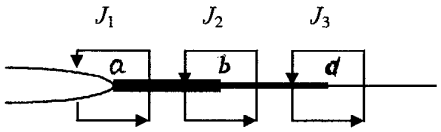
On the base of the obtained solutions the exact analytical relations between the fracture mechanical parameters are found as following [3]:

$$f_1(\lambda,\gamma,k_2/k_1) = 0\,,\quad k_{20} = f_2(\lambda,\lambda_0,\gamma,k_2/k_1) \tag{7}$$

$$K_i = \varphi_i(\lambda,\gamma,k_1,k_2)\ (i=1,2), \tag{8}$$

where f_i and φ_i are rather simple analytical functions. The equations (7), (8) define the contact zone length λ_0 and the correspondent SIF k_{20} as well as the SIFs of the oscillating model in terms of the SIFs of the ACZM. These equations are exact for an infinite bimaterial compound, but they can be approximately used for a finite sized bimaterial providing $\lambda \ll 1$ and $\lambda_0 \ll 1$. Due to this fact an artificial contact zone for a considered interface crack in a finite sized bimaterial can be introduced and the fracture mechanical parameters of the correspondent boundary value problem can be found numerically (it can be done easier than for OM or CZS). Further, the fracture mechanical parameters of OM and CZM can be approximately determined from the relations (7), (8).

For the determination of fracture mechanical parameters in case of ACZM the following modification of this model displayed in the figure is suggested. It means that an artificial zone [b, d] with [u_1]=0, [u_2]=0 and [u_3]≠0 is introduced additionally to the zone [a, b]. It can be easily shown that the correspondent SIF and the ERR are:



$$k_3^d = \sqrt{\pi(d-c)/2}\,\tau_3\,,\quad G_3^d = \alpha_3(k_3^d)^2 \tag{9}$$

and $k_3 = \sqrt{(b-c)/(d-c)}\,k_3^d$. For this model the J-integrals related to the singular points a, b, d can be calculated by means of FEM or BEM. Using that $J_1 = G_1^c$, $J_2 = G_2^c$, $J_3 = G_3^d$ and applying the formulas (5), (9) and (7), (8) all needed fracture mechanical parameters can be found.

Finally taking into account that for a crack with a curvilinear front the gradients of all fields in a plane (x_1, x_2) orthogonal to the crack front are essentially larger than in the direction of the crack front (x_3) the local near crack tip field can be considered as independent on x_3. It means that for any point of the crack front the above considered approach based upon the introduction of the artificial zones [a, b] and [c, d] can be used.

4. References

1. Wang S.S. and Choi I., The interface crack between dissimilar anisotropic composite materials. *J. Appl. Mech.*, 50, 169-178, (1983)
2. Wu K.C., On the contact zone model for an interface crack. *J. Appl. Mech.*, 59, 92-94, (1992)
3. Herrmann K.P. and Loboda V.V., On interface crack models with contact zones situated in an anisotropic bimaterial. *Archive of Applied Mechanics*, 69, 317-335, (1999).

Addresses: Prof. Dr. V.V. Loboda Dept. of Theoretical and Appl. Mechanics, State University, Naukovy line 13, Dnepropetrovsk, 320625 Ukraine
Prof. Dr. K.P. Herrmann Laboratorium fuer Technische Mechanik, Paderborn University, Pohlweg 47-49, 33098 Paderborn, Germany

MECKING, K.; BALLMANN, J.

Numerical Investigation of Dynamic Crack Propagation along a Bi-Material Interface

Using an explicit two-step Godunov type method a numerical simulation of a drop-weight-tower experiment with a bi-material specimen is presented. In order to validate the numerical results the numerically calculated and the measured energy release rate and phase angle of the complex stress intensity factor are compared.

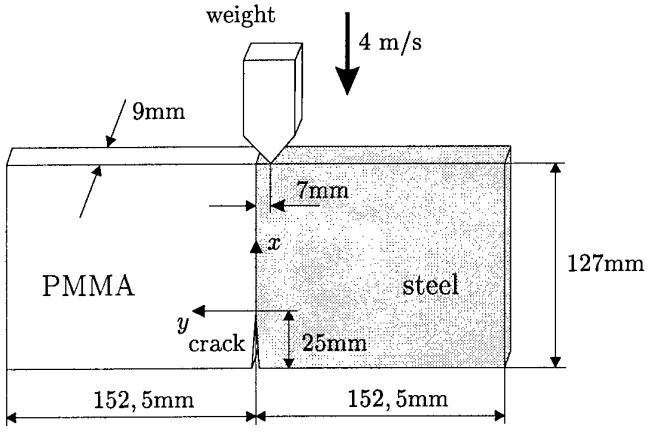
1. Experimental Setup

Lambros and Rosakis [1] have carried out different drop-weight-tower experiments to analyze fast running interface cracks, and for one special experiment they calculated the energy release rate $\mathcal{G}$ and the phase angle between the real part K_I and the imaginary part K_{II} of the complex stress intensity factor, i.e. so-called mixity Φ. Within the scope of linear-elastic fracture mechanics the energy release rate and mixity are defined as

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2), \qquad \Phi = \arctan(\frac{K_{II}}{K_I}). \tag{1}$$

E is the Youngs Modulus. The optical method which is used in the experiments is Coherent Gradient Sensing (CGS). It is used in transmission mode. The evaluation of CGS is described in detail in Liu et al. [2]. It follows the analysis for non-uniform running interface cracks by Yang et al. [3]. Under the assumption of a singular, two-dimensional and tip-fixed steady-state stress field they found the Rayleigh wave of the more compliant material as an upper limit of the crack propagation speed.

In the experiments the falling hammer hits the pre-notched steel-PMMA specimen with a velocity of 4 m/s a few millimeters beside the interface on the steel part at the opposite side of the notch (see Fig. 1) . The bonding itself has approximately the same properties as PMMA. Therefore no special treatment is necessary for the bonding layer. Caused by stress waves, short time after the impact the crack begins to propagate dynamically along the interface.



material properties		
property	steel	PMMA
ρ	$7830kg/m^3$	$1190kg/m^3$
E	208 GPa	3.24 GPa
ν	0.33	0.35
c_L	$5970m/s$	$2080m/s$
c_L^*	$5400m/s$	$1760m/s$
c_S	$3190m/s$	$1000m/s$

* plane stress

Figure 1: experimental setup and physical properties of bi-material specimen

2. Results

The dynamic equations for a linear-elastic solid forming a hyperbolic system of first order PDE's are solved numerically using a finite volume discretization and an explicit in time two-step Godunov type method [4]. According to the different characteristic speeds in both materials we introduce two appropriate meshes on either side whereas the bounded or unbounded coupling at the interface is realized by a master-slave technique. In order to restrict the computational domain an absorbing layer on the PMMA side is used, because during the observation period no reflected waves from the PMMA boundary of the probe arrived at the crack tip. Following the experimental evaluation procedure [5], the energy release rate $\mathcal{G}$ and mixity Φ are calculated from the stress field in a small

domain surrounding the crack tip. The measured crack tip velocity from the experiment has been taken for the computation. After initiation at a time between $t = 0\mu s$ and $t = 4\mu s$ it nearly reaches the Rayleigh wave speed of the more compliant material.

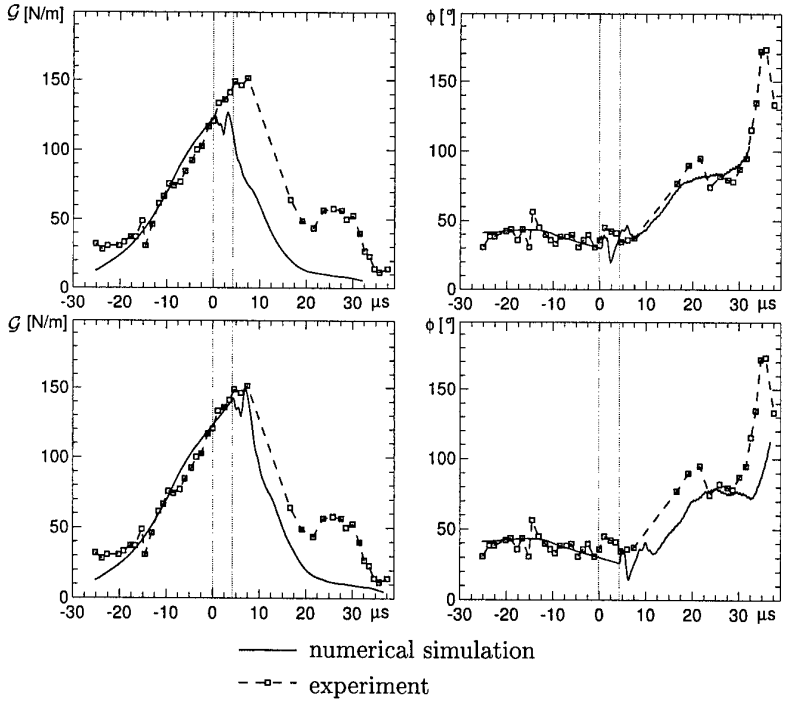


Figure 2: Variation of the energy release rate $\mathcal{G}$ and mixity Φ with time, supposed crack initiation $t = 0\mu s$ (at the top) and $t = 4\mu s$ (at the bottom)

Because of an a experimental uncertainty of about $4\mu s$ in the initiation of crack growth figure 2 shows the time history of the energy release rate and the mixity for two different initial times, one at the lower and one at the upper limit of the uncertainty interval. For an initiation at $0\mu s$ the results show a good agreement of the numerically determined energy release rate before the crack initiation. After the crack is running it drops too fast. The mixity is overall good. On the other hand we find a better agreement for the energy release rate and a time delay of the mixity for the assumed crack initiation at $4\mu s$. It seems that the experimental results show temporal mean values. Additional observation of the ratio of the crack tip opening displacements in x- and y-direction in the experiment and the numerical simulation showed good agreement while the crack is running with uniform speed [6]. This ratio could be possibly used as a criterion for the calculation of the crack tip velocity from the computational data in the future.

Acknowledgements

This paper has been partly sponsored by the Deutsche Forschungsgemeinschaft, project Ba 661/12

3. References

1 LAMBROS, J., ROSAKIS, A.J.:Development of a Dynamic Decohesion Criterion for Subsonic fracture o the Interface Between two Dissimilar Materials. Proc. R. Soc. Lond. **A451** (1995), 711-736

2 LIU, C., LAMBROS, J., ROSAKIS, A.J.: Highly Transient Elastodynamic Crack Growth in a Bimaterial Interface: Higher Order Asymptotic Analysis and Experiments. J. Mech. Phys. Solids **41**(12) (1993), 1887-1954

3 YANG, W., SUO, Z., SHIH, C. F.: Mechanics of Debonding. Proc. R. Soc. Lond. **A433** (1991), 679-697

4 LIN, X., BALLMANN, J.: Numerical Method for Elastic-Plastic Waves in Cracked Solids, Part 1: Anti Plane Shear Problem, Part 2: Plane Strain Problem. Arch. Appl. Mech. **63** (1993), 261-295

5 MECKING, K., BALLMANN, J.: Stress Waves in Linear-Elastic Solids with Interfaces and Cracks. ZAMM **80** (2000), 751-752

6 MECKING, K.: Godunov-Typ Verfahren zur Analyse dynamischer Rißspitzenfelder in elastisch-plastischen Festkörpern mit Materialgrenzen. Dr.-Ing. dissertation, submitted at RWTH Aachen, (2000)

Addresses: DIPL.-ING. KLAUS MECKING, PROF. DR.-ING. JOSEF BALLMANN, RWTH Aachen, Lehr- und Forschungsgebiet für Mechanik, Templergraben 64, D-52062 Aachen

QUENT TH.; BRUHNS, O.T.

Contribution to anisotropic modeling of damaged ductile materials

A micro-mechanically motivated phenomenological model for the description of the elastic-plastic behavior of anisotropic damaged metals containing oriented microvoids at finite deformations is presented.
The model is derived in the framework presented by XIAO, BRUHNS AND MEYERS *with the property of exact integrability. As the damage-measure the coefficients of a tensor-valued Fourier-series are used and interpreted for ellipsoidal voids. From energetic considerations on an elementary material cell, the qualitative dependence of the elastic constants on the aspect-ratios of the voids can be shown. The anisotropic effect of damage is taken into account phenomenologically within the scope of an effective stress concept by means of an isotropic tensor-valued function for the elastic compliances.*

1. Kinematic aspects of finite deformations

Mechanical processes including material damage often occur at large deformations. For this reason the kinematic framework recently elaborated by XIAO, BRUHNS & MEYERS (in [1], etc.) for the description of finite deformations is used. The logarithmic strain in the EULERIAN configuration can be expressed in terms of the eigenvalues and their subordinate eigenprojectors of the left CAUCHY-GREEN-tensor:

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}\ln \boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{m} \ln \chi_\sigma \boldsymbol{B}_\sigma \quad . \tag{1}$$

The constitutive equations have to fulfill the objectivity requirement, objective time-rates have to be used. Throughout this work the GREEN-NAGHDI-rate, for which the chain rule applies, and the logarithmic rate are used. The logarithmic rate of the logarithmic strain yields the deformation rate $\boldsymbol{D}$. Thus it has the property of exact integrability. The work conjugate stress $\boldsymbol{\pi}$ to $\boldsymbol{h}$ with regard to the logarithmic rate can be given in a basisfree expression in terms of the KIRCHHOFF-stress and the left CAUCHY-GREEN-tensor. It will be used in the constitutive formulation.

$$\rho_0 \dot{w} = \boldsymbol{\pi} : \mathring{\boldsymbol{h}}^{log} \quad \text{, with} \quad \boldsymbol{\pi} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{m} \sqrt{\chi_\sigma^{-1}\chi_\tau^{-1}}\, \frac{\chi_\sigma - \chi_\tau}{\ln \chi_\sigma - \ln \chi_\tau} \boldsymbol{B}_\sigma \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{B}_\tau \quad . \tag{2}$$

2. Description of the damage state

The representation of the void volume at grain boundaries related to the area of the unit sphere with a tensorial FOURIER series was first introduced by ONAT & LECKIE (in [2]). Truncation of this series to second order terms leads to the description of orthotropic damage states.

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2\pi}\omega + f_{ij}(\boldsymbol{n})\mathcal{D}_{ij} + \ldots \qquad \text{with volume fraction: } \omega \quad \text{, Fourier coefficients: } \mathcal{D}_{ij} \tag{3}$$

The extension to ellipsoidal cavities is accomplished by considering an elementary cell. The void volume density in the direction $\boldsymbol{n}_i$ is the weighted projection area perpendicular to $\boldsymbol{n}_i$:

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{n}_i) = \frac{A_i}{\overline{A}} V_v \quad \text{with: } \overline{A} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} A_i \;,\; V_v = \frac{4\pi}{3}\sqrt{a_1 a_2 a_3} \quad , \tag{4}$$

this yields the eigenvalues of the FOURIER coefficients, their eigenvectors coincide with the semiaxes of the ellipsoid. The introduction of the weighted semiaxes tensor $\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i}{r} \boldsymbol{n}_i \otimes \boldsymbol{n}_i$ leads to an unique relation between $\mathcal{D}(\boldsymbol{n})$ and the defect configuration of the ellipsoidal cavities, stated here for the first eigenvalue of the FOURIER coefficients

$$\mathcal{D}_1 = \frac{\omega}{2\pi}\left(\frac{2\xi_2\xi_3 - \xi_1(\xi_2+\xi_3)}{\xi_2\xi_3 + \xi_1(\xi_2+\xi_3)}\right) \quad . \tag{5}$$

3. Effective elastic compliances

For the estimation of the effective elastic compliances a micromechanical approach with ESHELBY's equivalent inclusion method is made (see [3],[4]). A consideration of the elastic energy stored in an infinitely extended elementary cell containing one void with $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ on the boundary yields the effective elastic compliances.

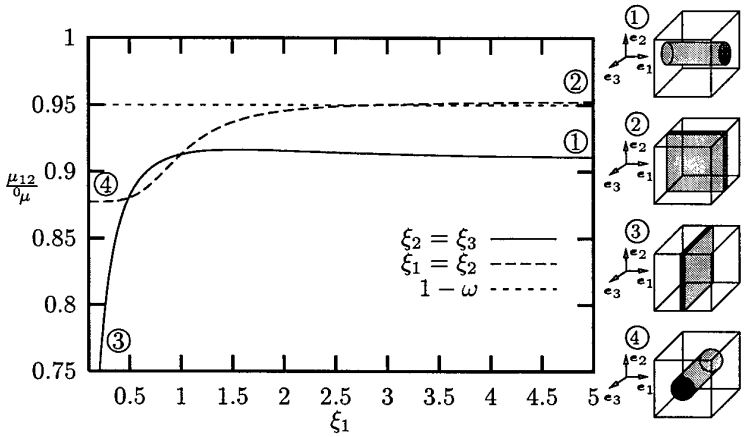


Figure 1: Eshelby estimation for the shear moduli

The analytical solutions for the shear moduli shown in Fig. 1 are obtained for transversally isotropic ellipsoids in an isotropic matrix. The defect configurations for points 1-4 are illustrated. From the slope of this elastic constants, characteristic values can be identified depending only on the properties of the undamaged material and ω: $\mu, {}^{\perp c}\mu, {}^{c}\mu, E, {}^{c}E, {}^{z}E$. Based on the estimation, a constitutive approach for the effective elastic compliances is made. Starting from the specific elastic strain energy an isotropic tensor function is derived for the effective elastic compliance tensor.

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl} &= a_1\delta_{ij}\delta_{kl} + a_2\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right) + a_3\left(\delta_{ij}\tilde{\mathcal{D}}_{kl}+\delta_{kl}\tilde{\mathcal{D}}_{ij}\right) + a_4\left(\delta_{ik}\tilde{\mathcal{D}}_{jl}+\delta_{il}\tilde{\mathcal{D}}_{jk}+\delta_{jk}\tilde{\mathcal{D}}_{il}+\delta_{jl}\tilde{\mathcal{D}}_{ik}\right) \quad (6)\\
&+ a_5\tilde{\mathcal{D}}_{ij}\tilde{\mathcal{D}}_{kl} + a_6\left(\delta_{ij}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{kl}+\delta_{kl}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{ij}\right) + a_7\left(\delta_{ik}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{jl}+\delta_{il}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{jk}+\delta_{jk}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{il}+\delta_{jl}(\tilde{\mathcal{D}}^2)_{ik}\right)
\end{aligned}
$$

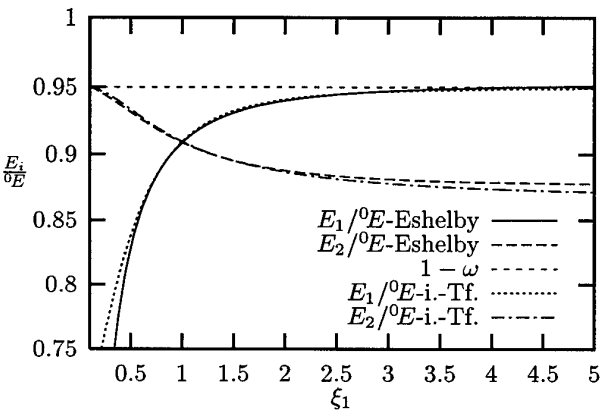


Figure 2: Comparison of the effective Youngs moduli

In (6), the FOURIER coefficients are weighted to separate the isotropic and anisotropic effects of damage $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/\omega$. The coefficients can be expressed in terms of the characteristic values $a_i = a_i(\mu, {}^{\perp c}\mu, {}^{c}\mu, E, {}^{c}E, {}^{z}E)$. Here, based on the assumption of a dilute distribution of voids the characteristic values are calculated with ESHELBY's method. They can also be considered as material functions. In Fig. 2, the results of the isotropic tensor function are compared to the ESHELBY estimation for $\omega = 5\%$. A very good agreement for the whole range of aspect ratios can be observed for the Youngs moduli. The deviation of the curve for E_1 for $\xi_1 \to 0$ is due to the nature of the micromechanical model. The same good agreement for the approximation holds for all components of the elastic compliance tensor.

4. Macroscopic constitutive equations

The deformation rate is split into a reversible, a plastic and a damage induced part. The effect of damage in the reversible strain is taken into account by using the tensor function for the effective elastic compliances:

$$
\underset{(r)}{\boldsymbol{h}} = (1-\omega)\underline{\boldsymbol{C}}^{(4)} : \boldsymbol{\pi} \quad , \quad \boldsymbol{D}_{(r)} = \frac{\partial \underset{(r)}{\boldsymbol{h}}}{\partial\omega}\dot{\omega} + \frac{\partial \underset{(r)}{\boldsymbol{h}}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}} : \overset{\circ}{\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}}{}^{P} + \frac{\partial \underset{(r)}{\boldsymbol{h}}}{\partial\boldsymbol{\pi}} : \overset{\circ}{\boldsymbol{\pi}}{}^{P} + \underset{(r)}{\boldsymbol{h}}\,\boldsymbol{\Omega}^{LR} - \boldsymbol{\Omega}^{LR}\,\underset{(r)}{\boldsymbol{h}} \quad . \tag{7}
$$

A general von Mises yield surface is employed that accounts for isotropic and anisotropic damage effects.

$$
f = \pi_{eq} - m(\omega)(\pi_y + R(\kappa)) \le 0 \quad \text{with: } \pi_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\pi}^D - \boldsymbol{X}) : \underline{\boldsymbol{M}}^{(4)}(\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}) : (\boldsymbol{\pi}^D - \boldsymbol{X})} \tag{8}
$$

The evolution equations for ω and $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{D}}}$ are expressed in terms of their thermodynamical conjugated forces, which ensures the fulfillment of the second law of thermodynamics. The proposed model has the property of exact integrability of the kinematic equations.

5. References

1 XIAO, H., BRUHNS, O.T., MEYERS, A.: A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient, International Journal of Plasticity 16:143-177, (2000).

2 ONAT, E.T., LECKIE, F.A.: Representation of mechanical behaviour in the presence of internal damage, Journal of Applied Mechanics, 55: 1-10, (1988).

3 ESHELBY, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proceedings of the Royal Society of London / Series A, 241: 376-396, (1957)

4 MURA, T.: Micromechanics of defects in solids, 2nd ed., Kluwer academic publishers, (1993).

Addresses: THORSTEN QUENT AND PROF. DR.-ING. OTTO T. BRUHNS, Lehrstuhl für Technische Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, 44780 Bochum, quent@tm.bi.ruhr-uni-bochum.de

SCHÜTTE, H.; BRUHNS, O.T.

An anisotropic damage evolution model based on the maximum energy release rate

We derive the evolution of the anisotropic properties of a material damaged by microcracks. The evolution of the crack shall be governed by the maximum energy release rate, which was recently shown by to be a direct consequence of the variational principle of a body with a crack (Le, Schütte & Stumpf, Arch.Appl.Mech. 69:(5) 337-344,1999). From this we get the path of the growing crack and its influence on the bodies elastic properties. This evolution law will be embedded in a finite deformation framework based on a multiplicative decomposition in elastic and damage parts. As a consequence of this we can present the anisotropic damaged elasticity tensor with the help of push and pull operations.

1. Kinematics and Thermodynamics

We want to derive a model for a material undergoing brittle damage, which is triggered only by elastic stresses with no plastic macro-deformation. The framework we want to use here is in analogy to the one for finite elastoplasticity presented by LE & STUMPF[2]. When the body undergoes the deformation $\mathbf{F}$, a certain part of this will be elastically recoverable, and another part can be induced through damage. For a process which involves no further damaging the total deformation is described by the process from the damaged configuration to the actual configuration., but with the damaged elastic properties. This leads to our basic assumption, the multiplicative decomposition

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^d. \tag{1}$$

From push and pull operations on the metric tensors of the three configurations we can then construct the deformation measures and the corresponding strain measures [2]. We postulate that the free energy density per unit volume of the intermediate configuration should only depend on the elastic deformation and the metric it is referred to. In accordance with the *principle of material frame indifference*, we have

$$\bar{\psi} = \hat{\bar{\psi}}(\bar{\mathbf{c}}^e, \bar{\mathbf{g}}). \tag{2}$$

By using the Clausius-Duhem inequality for an isothermal process and a procedure due to COLEMAN & NOLL[3], we get the stress strain relation and the remaining dissipation inequality

$$\bar{\mathbf{s}} = 2\rho_0 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{\mathbf{c}}^e}; \quad \bar{\mathfrak{D}}^d = (\bar{\mathbf{g}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\mu}}) : \bar{\mathbf{d}}^d \leq 0, \quad \text{with} \quad \bar{\boldsymbol{\mu}} = -\bar{\rho}\bar{\psi}\bar{\mathbf{1}} + \bar{\mathbf{c}}^e\bar{\mathbf{s}}, \quad \bar{\mathbf{d}}^d = \frac{1}{2}\bar{\mathfrak{L}}\bar{\mathbf{g}}, \tag{3}$$

with $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ the Eshelby tensor of the intermediate configuration.

2. Damage evolution law

The damage deformation rate $\bar{\mathbf{d}}^d$ shall be derived from a damage potential $\bar{\phi}^d$ constructed with the help of crack growth equations based on [1], where they are derived from the variational principle of a body containing a crack. We assume the equality the dissipation produced by growth of a single crack, in the unit cell of area A and thickness t, and the macroscopic dissipation rate

$$\frac{G^\star}{A} \cdot \frac{\dot{a}}{t} = (\bar{\mathbf{g}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\mu}}) : \bar{\mathbf{d}}^d, \tag{4}$$

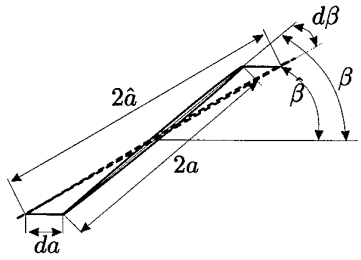
where $G^\star$ denotes the maximum energy release rate of the kinking crack. Damage evolves only orthogonal to the direction of crack extension and the conjugate forces for damaging and cracking have to be identical

$$\bar{\mathbf{d}}^d = \bar{d}_{n^\star n^\star} \cdot (\mathbf{n}^\star \otimes \mathbf{n}^\star); \quad (\bar{\mathbf{g}}^{-1}\bar{\boldsymbol{\mu}})_{n^\star n^\star} = -\frac{G^\star}{A}, \tag{5}$$

with $\mathbf{n}^\star$ the normal vector onto the new developing crack surfaces. The minus sign is necessary for decreasing stiffness by increasing crack length. This results in the following damage evolution law

$$\bar{\mathbf{d}}^d = -\frac{\dot{a}}{t}(\mathbf{n}^\star \otimes \mathbf{n}^\star). \tag{6}$$

The resulting damage potential is essentially the equilibrium equation for crack growth, namely the maximum energy release rate principle. With the help of the same principle, the direction $\mathbf{n}^\star$ can easily be calculated for a straight crack inclined at an angle β to the coordinate system ([1],[4]). To take advantage of this, we replace each kinked crack by a thermodynamical equivalent straight crack to get an evolution equation for β (the hat denotes the quantities of the replacement crack):



$$\frac{d\beta}{da} = 2(G^\star - \hat{J}_{\mathbf{t}^\star})/(\frac{\partial \hat{\bar{\psi}}^{crack}}{\partial \beta}), \tag{7}$$

where $\mathbf{t}^\star$ is the crack growth direction.

3. Influence of damage on elasticity

We assume the elasticity tensor of the reference configuration to be isotropic, with λ and μ Lamé's constants. If we push this forward with $\mathbf{F}^d$ we obtain the damaged elasticity tensor

$$(\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = (\mathbf{F}^d)_\triangleright\,(\mathbf{C}_0^e) = (\mathbf{F}^d)_\triangleright\left(\lambda\, G^{AB}G^{CD} + \mu(G^{AC}G^{BD} + G^{AD}G^{BC})\right), \tag{8}$$

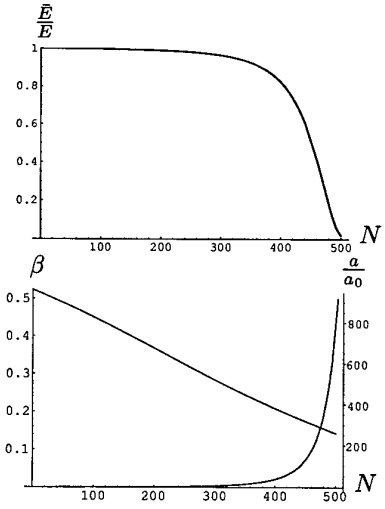
$$(\bar{\mathbb{C}}^e)^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda(\bar{b}^d)^{\alpha\beta}(\bar{b}^d)^{\gamma\delta} + \mu\left((\bar{b}^d)^{\alpha\gamma}(\bar{b}^d)^{\beta\delta} + (\bar{b}^d)^{\alpha\delta}(\bar{b}^d)^{\beta\gamma}\right); \quad \bar{\mathbf{b}}^d = \mathbf{F}^d_\triangleright(\mathbf{G}^{-1}) = \mathbf{F}^{dT}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{F}^d, \tag{9}$$

which means $\bar{\mathbf{b}}^d$ takes the role of a second order damage tensor.

When in a further deformation no damage occurs $\bar{\mathbf{b}}^d$ replaces the reference metric for the elastic (in this case also total) deformation. With the help of [5], we can calculate the eigenvalues of $[\bar{\mathbb{C}}^e]$. The simplest case is when $\bar{\mathbf{b}}^d$ boils down to a spherical tensor (One can show that this is the only possibility to get an eigenvalue of multiplicity five). Then we have isotropic symmetry with the eigenvalues

$$\lambda^1_{\bar{\mathbb{C}}^e} = 2\mu b_1^2; \quad \lambda^2_{\bar{\mathbb{C}}^e} = (3\lambda + 2\mu)b_1^2, \tag{10}$$

which are, save the factor ${b_1}^2$, just the eigenvalues of $\mathbb{C}_0^e$. This coincides with the damaged elasticity in the widely used isotropic damage case, which is obtained by multiplying the free energy density by a scalar factor.
The results of a uniaxial multicycle fatigue test are shown to the right. The starting inclination β was 30 degrees.



Acknowledgements

The Authors gratefully acknowledge the financial support of the DFG within the SFB 398, project A4

References

1 Le, Schütte & Stumpf: Arch. Appl. Mech. **69** (1999) 337-344.
2 Le & Stumpf: Act. Mech. **100** (1993), 155-170.
3 Coleman & Noll: Arch. Rat. Mech. Anal. **83** (1963), 167-278.
4 Irwin: J. Appl. Mech. **24** (1957), 361–364
5 Mehrabadi & Cowin: Q. Jl. Mech. appl. Math. **43** (1990), 15–41.

Addresses: H. Schütte, O.T. Bruhns,
Lehrstuhl für Technische Mechanik, Ruhr-Universität Bochum,
Universitätsstr. 150, D-44780 Bochum, Germany

WANG, Y. S.; GROSS, D.

Resonance of a Layered Half–Space with Periodic Cracks Subjected to SH Waves

Propagation of SH waves in a layered half-space with periodic cracks is investigated. Fourier series technique is applied to formulate the mixed boundary–value problem in terms of a HILBERT *singular integral equation. The dynamic stress intensity factors (DSIFs) are presented. The resonance characteristics of the DSIF are discussed.*

1. Problem Formulation

The geometry (including coordinates) and material combination of the problem are shown in Fig.1. The incident wave is assumed to have the typical harmonic form $w^{(i)} = Ae^{iK_{T1}(x\sin\theta_0+y\cos\theta_0)}$ (the time harmonic term is omitted), where K_{T1} is the shear wave number, θ_0 the incident angle and A the amplitude. The total wave fields may be expressed by the superposition of the fields without cracks, $\{w^{(0)}, \tau^{(0)}\}$, and those due to the scattering of the cracks, $\{w^{(s)}, \tau^{(s)}\}$. $\{w^{(0)}, \tau^{(0)}\}$ may be found in [1]. This paper is to look for the solution of $\{w^{(s)}, \tau^{(s)}\}$. On the crack faces we have $\tau_{yz}^{(s)}|_{y=h} = -\tau_{yz}^{(0)}$. Other boundary conditions include the continuity of the displacement and traction along the interface, the traction free condition on the free surface and the SOMMERFELD radiation conditions.

Denote the displacement discontinuity along the crack plane, $y = h$, as $\Delta w(x)$, which is equal to the crack opening displacement in the crack regions and to zero outside the cracks. Because of the periodicity of the geometry and loading of the system, $\Delta w(x)$ (as well as other quantities) can be expressed as the FOURIER series, i.e.

$$\Delta w(x) = \Delta W(x)e^{iK_{T1}x\sin\theta_0} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\bar{w}(n)e^{-in\pi x/L}\right) e^{iK_{T1}x\sin\theta_0}, \tag{1}$$

which allows us to solve the problem in one representative period, say $|x| \le L$. Introducing an auxiliary function $\phi(x) = \mathrm{d}\big(\Delta W(x)\big)/\,\mathrm{d}x$ and considering the boundary conditions, we obtain a HILBERT singular integral equation,

$$-\frac{\gamma}{2L}\int_{-c}^{c} \phi(u)\cot\left(\frac{u-x}{2L/\pi}\right)\mathrm{d}u + \int_{-c}^{c}\phi(u)P(u,x)\,\mathrm{d}u = -\tau_{yz}^{(0)}(x,h)e^{-iK_{T1}x\sin\theta_0}, \qquad |x| < c, \tag{2}$$

where $\gamma = -\mu_2/2$ for $h > 0$ or $-\mu_1\mu_2/(\mu_1+\mu_2)$ for $h = 0$, and

$$P(u,x) = -\frac{u}{2L}M(0) + \frac{i}{2L}\sum_{|n|=1}^{\infty}\big((n\pi/L)^{-1}M(n) - \mathrm{sign}(n)\gamma\big)e^{in\pi(u-x)/L},$$

$$M(n) = -\frac{\mu_2\beta_2\big((\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)(1-e^{-2\beta_2 H}) + (\mu_1\beta_1-\mu_2\beta_2)(e^{-2\beta_2 h}-e^{-2\beta_2 H})\big)}{2\big((\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)+(\mu_1\beta_1-\mu_2\beta_2)e^{-2\beta_2 H}\big)},$$

with $\beta_j = (s^2 - K_{Tj}^2)^{1/2}$ for $|s| \ge K_{Tj}$ or $-i(K_{Tj}^2 - s^2)^{1/2}$ for $|s| < K_{Tj}$ where $s = n\pi/L - K_{T1}\sin\theta_0$. If $m(n)$ is infinite for some integer values of n which are denoted as n_α $(\alpha = 1,\ldots,m)$, equation (2) should be replaced by

$$\begin{aligned} &-\frac{\gamma}{2L}\int_{-c}^{c}\phi(u)\cot\left(\frac{u-x}{2L/\pi}\right)\mathrm{d}u + \int_{-c}^{c}\phi(u)\bar{P}(u,x)\,\mathrm{d}u + \sum_{\alpha=1}^{m} b_\alpha e^{-in_\alpha\pi x/L} = -\tau_{yz}^{(0)}(x,h)e^{-iK_{T1}x\sin\theta_0}, \\ &\int_{-c}^{c}\phi(u)e^{in_\alpha\pi u/L}\,\mathrm{d}u = 0, \qquad \alpha = 1,\ldots,m, \end{aligned} \tag{3}$$

where $\bar{P}(u,x)$ is $P(u,x)$ with the terms of $n = n_\alpha$ being dropped from the summation. In addition, the integral of $\phi(x)$ from $-c$ to c should be zero to ensure that the single-valued condition of the displacement is satisfied.

2. Numerical Results and Discussion

Solving (2) or (3) numerically by following the method developed by ERDOGAN and GUPTA [2], we calculate the DSIFs for the case of $h = 0$. The results are shown in Fig.2 for $\theta_0 = 0°$, $H/c = 0.5$ and $L/c = 2.5$. The DSIF is normalized by $\tau_0\sqrt{c}$ with $\tau_0 = \mu_1 A K_{T1}$. The dashed and dotted lines are for $\mu_1/\mu_2 = 1.2$ and 0.8 respectively; the solid line gives the results for the case of a single crack (i.e. $L/c = \infty$) with $\mu_1/\mu_2 = 1.2$. It is noted that sharp dips and peaks are observed near $K_{T1}c = 1.25$ and 2.47 on the dashed line ($L/c = 2.5$,$\mu_1/\mu_2 = 1.2$) besides the expected resonance peak near $K_{T1}c = 1$. That is, the DSIF drops to a very small value (almost to zero) and then rises rapidly to a high value in a surprisingly narrow frequency region. Why does the DSIF behave in such a manner? We examine the special case that $M(n)$ has integer poles and find that the dips and/or peaks appear exactly near the frequencies at which $M(n)$ has integer poles, see the circles shown in Fig.2. It is known that the poles of $M(n)$ correspond to the various modes of Love waves propagating in the layer [1]. Therefore the dips and peaks are caused by certain modes of Love waves. For the case of $\mu_1/\mu_2 = 0.8$ (the dotted line), no such rapid change of the DSIF can be seen although a sharp resonance peak occur near $K_{T1}c = 1.25$. This is because no Love waves propagate in the layer [1]. Again no dips and peaks are observed for a single crack (the solid line). This can be explained by the fact that the Love waves generated by the scattering of cracks are dominant in the far field but not near the cracks. Thus, for a single crack, the interaction of the Love waves with the crack is negligible. But for periodically distributed cracks, the interaction between the Love waves and cracks is pronounced because there are cracks in the far field. When certain conditions are satisfied, the Love waves will cause rapid oscillation of the DSIF, and therefore sharp peaks and dips appear in the DSIF—frequency curves. In some situations, the resonance peaks acused by Love waves may reach a surprisingly high level, which should be worthy of notice in practical cases.

Generally, we can conclude that Love waves play an important role in the scattering of SH-waves by periodic cracks in layered materials and thus should receive considerable attention.

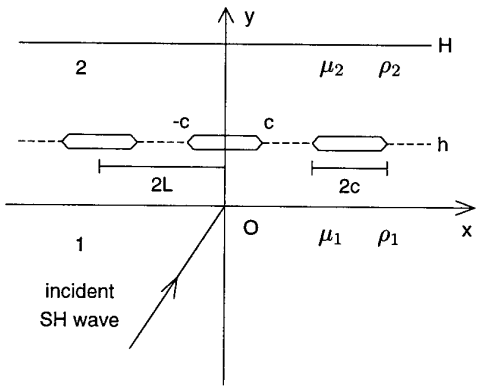


Figure 1: Periodic cracks in a layered half-space

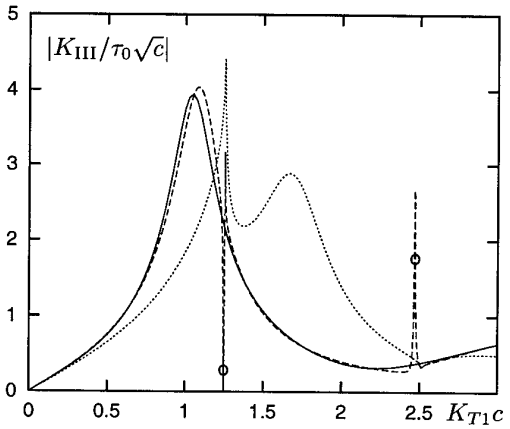


Figure 2: Normalized DSIF versus $K_{T1}c$

Acknowledgements

The first author gratefully acknowledges the ALEXANDER VON HUMBOLDT *Foundation for awarding a research fellowship.*

3. References

1 ACHENBACH, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Amsterdam 1973.
2 ERDOGAN, F., GUPTA, G. D.: On the numerical solution of singular integral equations; Q. J. Appl. Math. **29** (1972), 525–539.

Address: PROF. DR. Y. S. WANG, Northern Jiaotong University, Institute of Mechanics, 100044 Beijing China
PROF. DR. D. GROSS, TU Darmstadt, Institute of Mechanics, D-64289 Darmstadt Germany

ZHUK, Y.; GUZ, I. AND SOUTIS, C.

Failure Analysis of a Stiffened Composite Plate with a Hole under Compression

One possible mechanism of failure is studied. The mechanism is based on the fact that damage initiates by fibre microbuckling in the 0° plies at the edge of the hole. The Soutis-Fleck fracture model is used in conjunction with finite elements to predict the critical compressive load for a stiffened composite panel with impact damage.

1. Soutis–Fleck fracture model

This paper examines the in-plane compressive behaviour of thin-skin stiffened composite panels with low velocity impact damage. The finite element method together with a fracture mechanics model is used to predict their failure load. Within the model the damage is replaced with an equivalent circular or elliptical hole. The mechanism of in-plane failure of carbon fibre-epoxy multidirectional laminates with a hole subjected to uniaxial compression is well established (see [1], [2]). Local microbuckling in the 0° plies surrounded by delamination grows laterally from the hole as the applied load is increased. The damage zone continues to grow, first in short discrete increments and then rapidly at failure load. Similar damage pattern was observed in plates with impact damage under uniaxial compression [2]. The fibre microbuckling region is simulated by a through-the-thickness crack in the analysis. The model is based on the following two assumptions:

Stable crack growth: It is postulated that microbuckling occurs over distance ℓ from the hole when the average stress over this distance reaches the critical stress of the unnotched laminate,

$$\sigma_{un} = \frac{1}{\ell}\int_{R}^{R+\ell} \sigma_{xx}\,(0,y)\,dy, \tag{1}$$

where for a stiffened panel with a hole of radius R the stress distribution $\sigma_{xx}\,(0,y)$ is found using the finite element method. Thus, the remote applied stress σ_{xx}^{∞} is obtained as a function of the undamaged strength σ_{un}, hole radius R, damage length ℓ and the stiffness matrix of the laminate A_{ij}

$$\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_{un} f\,(R,\,\ell,\,A_{ij})\,. \tag{2}$$

Experiments [2] show that the unnotched strength, σ_{un}, in eqn (2) could be replaced by the strength of the 0° ply, σ_c^0, i.e.,

$$\sigma_{xx}^{\infty} = \sigma_c^0 g\,(R,\,\ell,\,A_{ij})\,, \tag{3}$$

Unstable crack growth: The microbuckled zone at the edge of the hole is assumed to behave as a crack of the same length, with no traction on the crack surfaces. Then the in-plane stress intensity factor (SIF) at the tip of the crack (Mode I) is expressed as

$$K_I = \sigma_{xx}^{\infty}\sqrt{\pi\,(R+\ell)}Y\,(R,\,\ell,\,A_{ij})\,, \tag{4}$$

where Y is a function of geometry and orthotropy which can be obtained numerically. The model assumes that unstable crack growth occurs when the stress intensity factor at the crack tip is equal to the laminate in-plane fracture toughness K_{IC} and, therefore,

$$\sigma_{xx}^{\infty} = K_{IC}/\sqrt{\pi\,(R+\ell)}Y\,(R,\,\ell,\,A_{ij})\,. \tag{5}$$

2. FE technique of SIF calculation and critical load prediction

In order to determine the SIF given by eqn (4), the J-integral is evaluated over a predetermined region at the hole edge that includes the crack. For an elastic body, J is identical to the elastic strain energy release rate G, i.e.

$G = J = -\partial U/\partial \ell$. A very fine mesh was used to provide reliable results. For an orthotropic laminate the energy release rate G is related to the stress intensity factor K_I by $G = cK_I^2$, where for the plane stress state, c is the laminate compliance obtained from the following expression

$$c = \left(\frac{a_{11}a_{22}}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^2 + \frac{2a_{12}+a_{33}}{2a_{11}}\right]^{1/2}, \quad a_{11} = 1/E_{11}, \quad a_{12} = -\nu_{12}/E_{22}, \quad a_{22} = 1/E_{22}, \quad a_{33} = 1/\mu_{11},$$

where E and μ are the laminate extension and shear moduli respectively, and ν is the Poisson's ratio. In order to investigate the accuracy of the finite element model the SIFs for a quasi-isotropic $[45°/-45°/0°/90°]_{3S}$ plate with a circular hole and cracks growing symmetrically from the hole edges were compared to those obtained from the analytical solution for an isotropic material. Comparison of the numerical and analytical results for the unstiffened plate with circular hole reveals that the difference between the two approaches is less than 2%. The presence of stiffeners does not affect this result until the crack grows beneath the stiffener. The same procedure was implemented for the SIF at the tip of the crack in a stiffened panel containing an elliptical cut-out. Detailed description of panels geometry can be found in [3]. Geometry parameters of the panel and stiffeners as well as half-axes a and b of the elliptical holes for three configurations investigated are listed in Table I. Following the procedure described above, SIFs were calculated and the ratio $\sigma_{xx}^{\infty}/\sigma_{un}$ given by eqns (2-3) and (5) was plotted against crack length ℓ (see Fig.1). Then the failure stress of the laminate as well as the critical buckled length, ℓ_{cr}, were obtained from the point where the two curves intersect. Results are given in Table II. Once the critical remote stress in the skin is obtained, the critical load of the stiffened panel can be determined,

$$P_{cr} = \sigma_{cr}^{skin}\left(W\,t + N\,A\,E_1^{str}/E_1\right), \tag{6}$$

where t is the thickness of the skin, A is the cross-section area of the stiffener, N is the number of stiffeners, E_1^{str} is the effective longitudinal Young's modulus for the stiffener. Predictions of the critical load and deviations from experimental data [3] are shown in Table II.

Table I. Geometry of stiffened panel (for all panel types L=300mm).

Panel	a, mm	b, mm	t, mm	S, mm	W, mm
Type 1	28.45	24.75	4	120	360
Type 2	16.90	14.30	4	148	444
Type 3	13.75	13.85	3	120	360

Table II. Critical values for panels.

Panel	ℓ_{cr}, mm	$\sigma_{cr}^{\infty}/\sigma_{un}$	P_{cr}, kN	Deviation from experiment
Type 1	1.15	0.351	-511.0 (-529)	-3.4%
Type 2	1.35	0.324	-538.0 (-734)	-26%
Type 3	1.39	0.372	-456.5 (-460)	<-1%

Notes: $\sigma_{un} = 596$ Mpa, $(\cdot)$ experimental value.

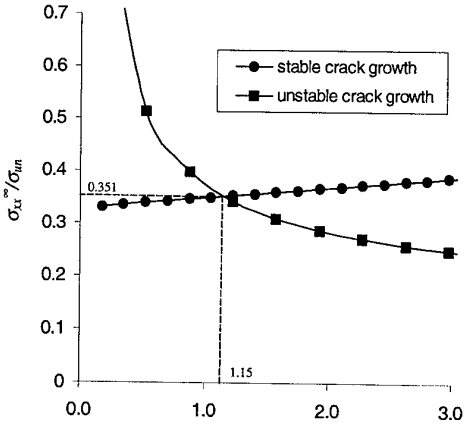


Fig.1.

The theoretical results are very close to measurements for panels type 1 and 3 (difference <4%). The model underestimates the failure load for panel type 2 suggesting that the effect of the impact damage is not as sever as that of an open hole. A region with reduced stiffness properties (a soft inclusion) could give a better correlation with the data.

Acknowledgements

The authors are grateful to The Royal Society, NATO and DERA(Farnborouh, UK) for financial support.

3. References

1 Soutis, C. and Fleck, N.: Static compression failure of carbon fibre T800/924C composite plate with a single hole. J. Comp. Mat. **24**(5) (1990), 536–558.

2 Soutis, C.: Damage tolerance of open-hole CFRP laminates loaded in compression. Comp. Engrg. **4**(3) (1994), 317–327.

3 Greenhalgh, E., Singh, S., Hughes, D. and Roberts, D.: Impact damage resistance tolerance of stringer stiffened composite structures. Plast., Rubber and Comp. **28**(5) (1999), 228–251.

Address: Dr. C. Soutis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Department of Aeronautics, Prince Consort Road, London SW7 2BY, UK.

BAYREUTHER, C. / MIEHE, C. / SCHRÖDER, J.

Alternative Mehrgitter–Transferoperatoren für heterogene Strukturen

Die Lösung großer Gleichungssysteme infolge der FE–Diskretisierung heterogener Materialien mit Mehrgitterverfahren kann nur mittels geeigneter Transfer– und Grobgitteroperatoren effizient erfolgen. Es wird ein neues, physikalisch motiviertes Modell zur Konstruktion der erforderlichen Operatoren vorgestellt. Wesentlich Aspekt ist die Verknüpfung mit einem Homogenisierungskonzept für lineare Randwertprobleme basierend auf einer Diskretisierung der Mikrostruktur mit einem Ansatz für die Fluktuationen des Verschiebungsfeldes. Diese Methode wird anhand eines repräsentativen Modellproblems mit herkömmlichen, in der Literatur bekannten Verfahren verglichen.

1. Grundlegendes Mehrgitterkonzept

Wir betrachten ein Makrokontinuum mit linear elastischer Mikrostruktur $\mathcal{B} \subset \mathbf{R}^3$. Die Auflösung der Heterogenitäten auf der feinsten Skale liefert mit der Finite–Elemente–Approximation der Verschiebungsfelder $\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}\,\boldsymbol{d}^e$ und $\delta\boldsymbol{u}^h = \boldsymbol{N}\,\delta\boldsymbol{d}^e$ und der Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^h = \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{d}^e$ und $\delta\boldsymbol{\varepsilon}^h = \boldsymbol{B}\,\delta\boldsymbol{d}^e$ im Elementgebiet $\bar{\mathcal{B}}^e \subset \bar{\mathcal{B}}$ das Feingitterproblem $\boldsymbol{K}^f\boldsymbol{d}^f = \boldsymbol{f}^f$. Es bezeichnen $\boldsymbol{K}^f \in \mathbf{R}^{n_f \times n_f}$ die Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{f}^f \in \mathbf{R}^{n_f}$ den Kraftvektor auf der feinsten Skale und $\boldsymbol{d}^f \in \mathbf{R}^{n_f}$ den zugehörigen Verschiebungsvektor. Für die Grobgitterkorrektur sind Transferoperatoren erforderlich. Durch den Prolongationsoperator $\boldsymbol{P}^f{}_C \in \mathbf{R}^{n_f \times n_C}$ und den Restriktionsoperator $\boldsymbol{R}^C{}_f \in \mathbf{R}^{n_C \times n_f}$ werden die Abbildungen $\boldsymbol{P}^f{}_C : \mathcal{S}^C \to \mathcal{S}^f$ und $\boldsymbol{R}^C{}_f : \mathcal{S}^f \to \mathcal{S}^C$ definiert, wobei $\mathcal{S}^C \subset \mathcal{S}^f$ den Grob– und Feingitteransatzraum darstellen. Die Approximation $\boldsymbol{v}^f \in \mathbf{R}^{n_f}$ des Lösungsvektors $\boldsymbol{d}^f \in \mathbf{R}^{n_f}$ wird auf dem feinen Gitter geglättet und in jedem Zweigitterzyklus durch eine Grobgitterkorrektur aktualisiert. Basierend auf einer Variationsformulierung bezüglich der Testfunktion des groben Gitters erhält man das restringierte Grobgitterproblem $\boldsymbol{K}^C\boldsymbol{d}^C = \boldsymbol{f}^C$, wobei $\boldsymbol{K}^C \in \mathbf{R}^{n_C \times n_C}$ den Grobgitteroperator in der Galerkin–Form $\boldsymbol{K}^C = \boldsymbol{R}^C{}_f\boldsymbol{K}^f\boldsymbol{P}^f{}_C$ und $\boldsymbol{f}^C$ den restringierten Defekt $\boldsymbol{r}^f = \boldsymbol{f}^f - \boldsymbol{K}^f\boldsymbol{v}^f$ darstellen. Zur näherungsweisen Lösung des Grobgitterproblems kann wieder ein Zweigitterverfahren verwandt werden und erhalten einen Dreigitterzyklus. Rekursiv gelangen wir so zu einem Mehrgitterzyklus.

2. Homogenisierungsanalyse

Im Rahmen einer Zweiskalenmodellierung wurde von MIEHE ET AL. [3] ein numerisches Homogenisierungskonzept für elastische mikroheterogene Materialien entwickelt. Eine explizite Parametrisierung der Fluktuationen des Verschiebungsfeldes auf der Mikrostruktur liefert eine geschlossener Darstellung der effektiven Moduli $\bar{\mathbb{C}}$. Das Verschiebungsfeld auf der Mikroskale wird durch den Ansatz $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{u}}$ in $\mathcal{B}$ beschrieben. Hierbei sind $\tilde{\boldsymbol{u}}$ die Fluktuationen des Verschiebungsfeldes. Für die hier untersuchten periodischen Mikrostrukturen wählen wir die Randbedingungen $\tilde{\boldsymbol{u}}^+ = \tilde{\boldsymbol{u}}^-$ auf $\partial\mathcal{B}$. Eine Diskussion allgemeiner Mikro–Makro–Übergänge sowie alternativer Randbedingungen ist der Arbeit MIEHE ET AL. [4] zu entnehmen. Mit der Diskretisierung der Fluktuationsverzerrungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{d}}$ und den Testfunktionen $\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{B}\delta\tilde{\boldsymbol{d}}$ ergibt sich aus der schwachen Formulierung der Gleichgewichtsbedingung $\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{0}$ in $\mathcal{B}$

$$\tilde{\boldsymbol{d}} = -\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L}\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{K} = \bigcup_{p=1}^{n} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T\mathbb{C}\boldsymbol{B}\,\mathrm{dV} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{L} = \bigcup_{p=1}^{n} \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T\mathbb{C}\,\mathrm{dV}\,. \tag{1}$$

Mit der Definition makroskopischer Feldgrößen als Volumenmittelwerte der assoziierten mikroskopischen Größen gemäß $\bar{(\bullet)} = \frac{1}{vol(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}}(\bullet)\,\mathrm{dV}$ erhält man mit $\bar{\mathbb{C}} = \partial_{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}[\bar{\boldsymbol{\sigma}}]$ und (1) eine explizite Darstellung der homogenisierten Moduli

$$\bar{\mathbb{C}} \;=\; \frac{1}{vol(\mathcal{B})}\int_{\mathcal{B}} \mathbb{C}\,\mathrm{dV} \;-\; \frac{1}{vol(\mathcal{B})}\,\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{L}\,. \tag{2}$$

3. Homogenisierungsbasierte Transferoperatoren

Es werden zwei Gitterebenen mit den konformen, hierarchischen Ansatzräumen $\mathcal{S}^C \subset \mathcal{S}^f$ betrachtet. Es seien $\boldsymbol{P}^f{}_C$ und $\boldsymbol{R}^C{}_f$ lokale Projektionsoperatoren, die auf a priori definierten Patches agieren. Desweiteren seien $\boldsymbol{d}^f$ und $\boldsymbol{d}^C$ die auf der lokalen Patchebene diskreten Fein– und Grobgitterverschiebungen. Wesentliches Ziel ist, den Einfluß der Heterogenität der Mikrostruktur basierend auf der Homogenisierungsanalyse zu berücksichtigen. Die Konstruktion homogensisierungsbasierter Transferoperatoren wird in den Arbeiten BAYREUTHER ET AL. [1],[2] detailliert diskutiert. Ausgehend von der additiven Zerlegung des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}^f = \bar{\boldsymbol{u}}^f + \tilde{\boldsymbol{u}}^f$ im Rahmen der Homoge-

nisierungsanalyse wird eine entsprechende Zerlegung des Prolongationsoperators $\boldsymbol{P}^f{}_C = \bar{\boldsymbol{P}}^f{}_C + \tilde{\boldsymbol{P}}^f{}_C$ vorgenommen, um die assoziierten Verschiebungsanteile in der Form $\boldsymbol{u}^f = \boldsymbol{P}^f{}_C\,\boldsymbol{u}^C$, $\bar{\boldsymbol{u}}^f = \bar{\boldsymbol{P}}^f{}_C\,\boldsymbol{u}^C$ und $\tilde{\boldsymbol{u}}^f = \tilde{\boldsymbol{P}}^f{}_C\,\boldsymbol{u}^C$ auf das feine Gitter zu prolongieren. Die mit dem linearen Verschiebungsfeld assoziierte Interpolationsvorschrift ist durch

$$\bar{d}^f_{ia} = \sum_I \sum_A N^C_I(\boldsymbol{\xi}_i)\,\delta_{aA}\,d^C_{IA} \tag{3}$$

gegeben, wobei $N^C_I(\boldsymbol{\xi})$ eine Ansatzfunktion des Grobgitteransatzraumes im Knoten I darstellt. Hier bezeichnet a den Freiheitsgrad des Feingitterknotens i und A den Freiheitsgrad des Grobgitterknotens I. δ_{aA} ist das Kronecker–Symbol. Mit (1) ergeben sich die diskreten Knotenparameter des Fluktuationsfeldes aus der Interpolationsvorschrift

$$\tilde{d}^f_{ia} = \sum_j \sum_K -\{K_p^{-1}\}_{(ia)j}\,L^f_{jK}\,\bar{\varepsilon}_K =: \sum_K H_{(ia)K}\,\bar{\varepsilon}_K\,, \tag{4}$$

worin $\boldsymbol{K}_p$ die Patchmatrix darstellt. Die makroskopischen Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ werden durch den Grobgittervektor $\boldsymbol{d}^C$ und den Mittelwerten der B–Matrizen über das Patchvolumen parametrisiert. Dies führt auf die benötigte Transferbedingung $d^f_{ia} = P^{ia}_{IA} d^C_{iA}$, und wir extrahieren schließlich den Prolongationsoperator in der geschlossenen Form

$$P^{ia}{}_{IA} = N^C_I(\boldsymbol{\xi}_i)\,\delta_{aA} + \sum_K H_{(ia)K}\,\bar{B}^C_{I(KA)}\,. \tag{5}$$

Ist $\boldsymbol{\xi}_i$ ein Grobgitterknoten, lautet die Transferbedingung $P^{ia}{}_{IA} = 1$. Transponieren von $\boldsymbol{P}^f{}_C$ ergibt $\boldsymbol{R}^C{}_f$.

4. Modellproblem mit periodisch heterogener Mikrostruktur

Als Modellbeispiel betrachten wir einen Biegeversuch. Geometrie, Materialeigenschaften und Patchstruktur sind der Abbildung 1a zu entnehmen. Es wird ein Zweigitterverfahren zugrunde gelegt. Auf dem Feingitter wird mit

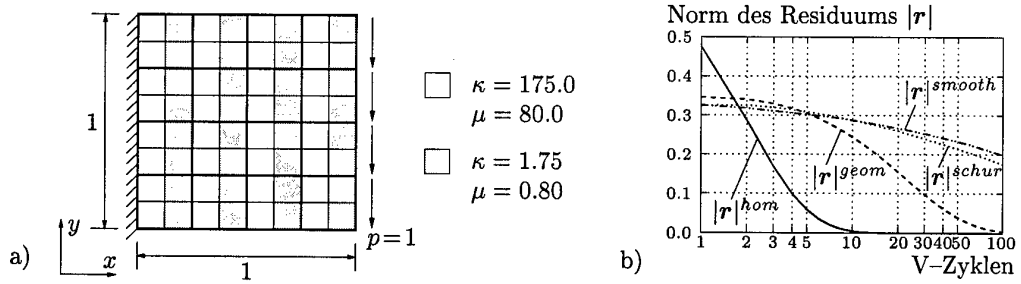


Abb. 1: a) Biegeversuch an einem Versuchskörpers mit periodisch heterogener Mikrostruktur. Patches werden durch dicke Linien gekennzeichnet. b) Norm des Residuums aufgetragen über die Anzahl der V–Zyklen.

Gauß–Seidel dreimal vor– und nachgeglättet. In Abbildung 1b wird die mit dem homogenisierungsbasierten Transfer erzielte Konvergenzrate mit denen eines glättungsangepaßten, Schurkomplement assoziierten und eines geometrischen Transfers, siehe [1],[2], verglichen. Der neue Transfertyp zeichnet sich deutlich im Vergleich zu den anderen ab.

Danksagung

Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) im Rahmen des SFB 404/C6 unterstützt.

5. Literaturverzeichnis

1 Bayreuther, C. G., Miehe, C., Schröder, J.: Aspects of Homogenization Techniques and Multigrid Solving; SFB–Tagungsband (1999), Springer–Verlag.

2 Bayreuther, C. G., Miehe, C., Schröder, J.: Construction of Transfer Operators Based on Homogenization Techniques for Multigrid Solving; eingereicht zur Veröffentlichung (2000).

3 Miehe, C., Schröder, J., Bayreuther, C. G.: Homogenization Analysis of Linear Composite Materials on Discretized Fluctuations on the Micro–Structure; eingereicht zur Veröffentlichung in Acta Mechanica (1999).

4 Miehe, C., Schröder, J., Schotte, J.: Computational Homogenization Analysis in Finite Plasticity. Simulation of Texture Development in Polycrystalline Materials; Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **171** (1999), Nos. 3–4, 387–418.

Adresse: Dipl-Ing. Claus Bayreuther, Prof. Dr.–Ing. C. Miehe, Dr.–Ing. J. Schröder, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Pfaffenwaldring 7, 70550 Stuttgart.

EHLERS W., DIEBELS S., AMMANN M.

Gemischt-hybride Finite Elemente für mikropolare Kontinua

Für ein mikropolares poröses Festkörperskelett wird eine gemischt-hybride Elementformulierung auf der Basis eines Hu-Washizu-Funktionals angegeben. Dabei werden für den Verschiebungs-Rotations-Dehnungs-Ansatz die Ansatzfunktionen vorgestellt und die Stabilitätsanforderungen diskutiert. An einer einfachen numerischen Beispielrechnung wird die Effizienz der neuen Elementformulierung gegenüber einer herkömmlichen gemischten Methode demonstriert, bei der nur die Verschiebungen und die Rotationen als FE-Freiwerte benutzt werden.

1. Hu-Washizu-Funktional

Die folgende gemischt-hybride Elementformulierung soll aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit im Rahmen einer geometrisch wie auch materiell linearen Theorie hergeleitet werden. Dies führt bei einer Beschreibung innerhalb der Mikropolaren Theorie Poröser Medien (MTPM) zu folgenden Gleichungen für die Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S$ und die Krümmungen $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_S$ (EHLERS & VOLK [3]):

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \operatorname{grad} \mathbf{u}_S + \overset{3}{\mathbf{E}}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S\,, \qquad \bar{\boldsymbol{\kappa}}_S = \operatorname{grad} \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S. \tag{1}$$

Dabei bildet der Operator $\operatorname{grad}(\cdot) = \partial(\cdot)/\partial\mathbf{x}$ die partielle Ableitung nach den Ortsvektoren $\mathbf{x}$, und $\overset{3}{\mathbf{E}}$ stellt den 3-stufigen RICCI-Permutationstensor dar. Die Primärvariablen des betrachteten Modells setzen sich aus der Festkörperverschiebung $\mathbf{u}_S$ und der unabhängigen Festkörperrotation $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S$ zusammen. Mittels eines modifizierten HOOKEschen Gesetzes können die folgenden Beziehungen für die Festkörperextraspannungen $\boldsymbol{\sigma}_E^S$ und die Momentenspannungen $\mathbf{M}^S$ aufgestellt werden (DE BORST [2], EHLERS & VOLK [3], STEINMANN & WILLAM [4]):

$$\boldsymbol{\sigma}_E^S = \left(2\,\mu^S\, \overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{sym}} + \lambda^S\, (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\,\mu_c^S\, \overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{skw}} \right) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S\,, \qquad \mathbf{M}^S = 2\,\mu_c^S\, (l_c^S)^2\, \bar{\boldsymbol{\kappa}}_S\,. \tag{2}$$

Darin sind $\overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{sym}} = \frac{1}{2}[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{13}{T}}]$ und $\overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{skw}} = \frac{1}{2}[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{23}{T}} - (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})^{\overset{13}{T}}]$ die 4-stufigen Fundamentaltensoren, μ^S und λ^S die klassischen LAMÉschen Konstanten und μ_c^S und l_c^S die zusätzlichen mikropolaren Parameter.
Mit den obigen Gleichungen kann das HU-WASHIZU-Funktional für das betrachtete Modell aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW} \;=\; & \int_\Omega \delta\mathbf{u}_S \cdot (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_E^S + \rho\,\mathbf{b})\, \mathrm{d}v + \int_\Omega \delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S \cdot (\operatorname{div} \mathbf{M}^S + \mathbf{I} \times \boldsymbol{\sigma}_E^S)\, \mathrm{d}v + \\ & \int_\Omega \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S \cdot (\boldsymbol{\sigma}_E^S - [2\,\mu^S\, \overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{sym}} + \lambda^S\, (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\,\mu_c^S\, \overset{4}{\mathbf{I}}_{\mathrm{skw}}]\, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S)\, \mathrm{d}v + \\ & \int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}_E^S \cdot (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S - \operatorname{grad} \mathbf{u}_S - \overset{3}{\mathbf{E}}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S)\, \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Verschiebungs-Rotations-Dehnungs-Ansatz

In Anlehnung an SIMO & RIFAI [5] wird in einem nächsten Schritt ein verbesserter Ansatz für die Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S$ und die Testfunktionen der Verzerrungen $\delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S$ definiert:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \operatorname{grad} \mathbf{u}_S + \overset{3}{\mathbf{E}}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_S + \tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S\,, \qquad \delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_S = \operatorname{grad} \delta\mathbf{u}_S + \overset{3}{\mathbf{E}}\, \delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S + \delta\tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S. \tag{4}$$

Unter Berücksichtigung der Orhogonalitätsbedingung $\int_\Omega \delta\boldsymbol{\sigma}_E^S \cdot \tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S\, \mathrm{d}v = \int_\Omega \delta\tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S \cdot \boldsymbol{\sigma}_E^S\, \mathrm{d}v = 0$ entfällt nach Einsetzen von (4) in (3) für das HU-WASHIZU-Funktional die explizite Abhängigkeit von der Festkörperspannung $\boldsymbol{\sigma}_E^S$. $\delta\Pi_{HW}$ ist somit lediglich von den beiden Primärvariablen $\mathbf{u}_S$, $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_S$ sowie dem zusätzlichen Anteil $\tilde{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}}_S$ aus den in (4) definierten verbesserten Verzerrungen abhängig.

Nach der Ortsdiskretisierung ergibt sich für das Gesamtsystem der folgende Ausdruck:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & \mathbf{K}_{u\alpha} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\alpha} \\ \mathbf{K}_{\alpha u} & \mathbf{K}_{\alpha\varphi} & \mathbf{K}_{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \bar{\boldsymbol{\varphi}}_3 \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_\varphi \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}\, (\mathbf{K}_{\alpha u}\, \boldsymbol{u} + \mathbf{K}_{\alpha\varphi}\, \bar{\boldsymbol{\varphi}}_3)\,. \tag{5}$$

Darin sind die $\mathbf{K}_{ii}$ die nach der Ortsdiskretisierung entstandenen Einträge in der Steifigkeitsmatrix, $\boldsymbol{u} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]^T$ und $\bar{\varphi}_3$ entsprechen den FE-Knotenwerten der Primärvariablen, und $\mathbf{F}_{\boldsymbol{u}}$ bzw. $\mathbf{F}_{\varphi}$ sind die Oberflächenintegrale für die Verschiebungen bzw. die Rotationen. Der Vektor $\boldsymbol{\alpha}$ beinhaltet die zusätzlichen Anteile der verbesserten Verzerrungen, die im Gegensatz zu den Verschiebungen und den Rotationen keinen FE-Knoten zugeordnet werden können. Die Dimension von $\boldsymbol{\alpha}$ wird dabei durch den gewählten Ansatz für die verbesserten Verzerrungen bestimmt. Da für die zusätzlichen Anteile der verbesserte Verzerrungen keine Oberflächenterme definiert sind, kann das Gesamtsystem im folgenden durch statische Kondensation (vgl. $(5)_2$) auf die Primärvariablen reduziert werden, d. h. die zusätzlichen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}$ können auf Elementebene eliminiert werden. Somit ist bei dieser Vorgehensweise ein zusätzlicher numerischer Aufwand lediglich auf Elementebene vorhanden.

3. Ansatzfunktionen und Stabilitätsanforderungen

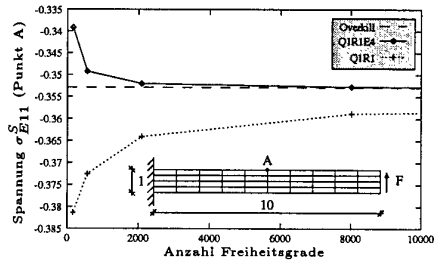
Für die neue Elementformulierung müssen im weiteren die einzelnen Ansatzfunktionen festgelegt werden. Dabei werden in einem Viereckselement für $\mathbf{u}_S^h$ und $\bar{\varphi}_S^h$ jeweils bilineare Ansätze gewählt. Für den zusätzlichen Anteil aus den verbesserten Verzerrungen $\tilde{\bar{\varepsilon}}_S^h$ wird der folgende Ansatz benutzt:

$$\tilde{\bar{\varepsilon}}_S^h(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^{\mathrm{E}} \begin{pmatrix} \Theta_{11}^j(\mathbf{x})\,\alpha^j(t) \\ \Theta_{22}^j(\mathbf{x})\,\alpha^j(t) \\ \Theta_{12}^j(\mathbf{x})\,\alpha^j(t) \\ \Theta_{21}^j(\mathbf{x})\,\alpha^j(t) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} \Theta_{11} \\ \Theta_{22} \\ \Theta_{12} \\ \Theta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Die Anteile Θ_{11} bzw. Θ_{22} vermindern dabei den Effekt des volumetrischen Lockings, wohingegen Θ_{33} bzw. Θ_{44} das Schublocking abschwächen (vgl. ANDELFINGER [1]). Für ein stabiles Verhalten des neuen Elements muß bei der Wahl des Ansatzes für $\tilde{\bar{\varepsilon}}_S^h$ berücksichtigt werden, daß die neuen Ansätze linear unabhängig sind. Desweiteren müssen für die Einhaltung der im Abschnitt 2 aufgeführten Orhogonalitätsbedingung die Transformationen von Θ von dem Einheitsraum auf den physikalischen Raum mit einer konstanten, am Elementmittelpunkt ausgewerteten Transformationsmatrix durchgeführt werden. Für die Erfüllung des Patch-Tests sind bei der GAUSS-Quadratur sämtliche Größen, die mit den zusätzlichen Anteilen $\tilde{\bar{\varepsilon}}_S^h$ in Verbindung stehen, mit einer konstanten, ebenfalls am Elementmittelpunkt ausgewerteten JACOBI-Determinante zu integrieren (SIMO & RIFAI [5]).

4. Beispiel: Kragarm unter Schubbelastung

An einem einfachen Beispiel soll die Effizienz der neuen Elementformulierung (Q1R1E4) im Vergleich zu einer reinen Verschiebungs-Rotations-Formulierung (Q1R1) demonstriert werden. Hierfür wurde der in der Abbildung dargestellte Kragarm auf Schub belastet und mit unterschiedlich feinen FE-Netzen berechnet. Um die beiden Elementformulierung vergleichen zu können, wurde exemplarisch jeweils die Spannung σ_{E11}^S am Punkt A betrachtet. Man kann deutlich erkennen, daß die Berechnungen mit dem Q1R1E4-Element schneller gegen einen Referenzwert, der mit einem gleichmäßig verfeinerten FE-Netz (150x150 Elemente) ermittelt wurde, konvergieren als mit dem Q1R1-Element.



5. Literatur

1 ANDELFINGER, U.: Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiter Elemente für Flächentragwerke. Dissertation, Bericht Nr. 13 aus dem Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991.

2 DE BORST, R.: Numerical modelling of bifurcation and localization in cohesive-frictional materials. Pageoph. **137** (1991), 368–390.

3 EHLERS, W. & VOLK, W.: On shear band localization phenomena induced by elasto-plastic consolidation of fluid-saturated soils. In D. J. R. Owen, E. Oñate & E. Hinton (Hrsg.), Computational Plasticity – Fundamentals and Applications, Vol. 2, pp. 1657–1664. CIMNE, Barcelona 1997.

4 STEINMANN, P. & WILLAM, K.: Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity. In O. Brüller, V. Mannl & J. Najar (Hrsg.), Advances in continuum mechanics, pp. 296–313. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

5 SIMO, J. C. & RIFAI, M. S.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. Int. J. Numer. Methods Eng. **29** (1990), 1595–1638.

Adresse: PROF. DR.-ING. WOLFGANG EHLERS, DR.-ING. STEFAN DIEBELS, DIPL.-ING. MARTIN AMMANN, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Pfaffenwaldring 7, 70569 Stuttgart, Deutschland.

GEE, M., WALL, W.A., RAMM, E.

Parallel Iterative Solvers in Nonlinear Shell Analysis

A challenge for parallel iterative solvers in nonlinear shell analysis comes from the fact that shell analyses inherently tend to be ill conditioned problems. This challenge becomes especially pronounced when three–dimensional shell formulations – including thickness change – are used. A preconditioning idea for such models along with its advantageous influence on the performance of (parallel) iterative solvers is introduced and discussed in this paper.

1. Introduction

The analysis of large–scale nonlinear shell problems nowadays asks for parallel simulation approaches. One crucial part of efficient and well scalable parallel FE–programs is the solver for the system of linear equations. Here one is very much directed towards iterative solvers (PAPADRAKAKIS [3]). Along with shell structures however some decisive issues have to be solved in this respect. The performance of iterative solvers severely depends on the condition number c (eq. 1) of the resulting tangent stiffness matrices of the shell problem. The number of iterations k taken by a conjugate gradient solver can be estimated by

$$c = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \qquad k \leq \frac{1}{2}\sqrt{c}\,\ln\left(\frac{2}{\epsilon}\right) + 1 \tag{1}$$

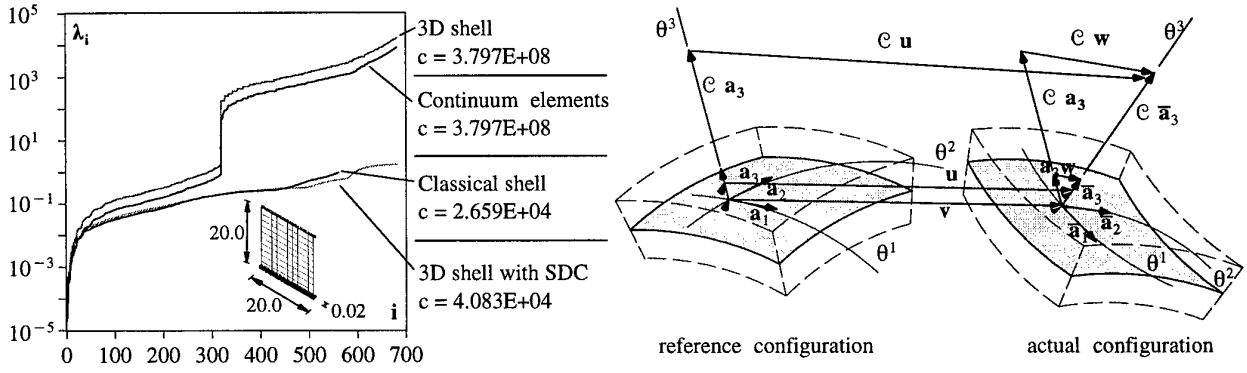
were c is the condition number, and ϵ the desired accuracy. The analysis of thin–walled structures using finite shell elements inherently leads to ill conditioned stiffness matrices. This is a well known fact and strategies to overcome this difficulty can be found in the literature, e.g. in (ALEFELD ET. AL. [1]). This situation further deteriorates, when the thickness change of the shell body is taken into account. In the following, a physically motivated approach to condition such shell elements with thickness change at almost no numerical cost is presented.

2. 3D–shell formulation

The shell formulation, which is refered to as 3D shell here, is capable to present linear strains in thickness direction, so fully three–dimensional constitutive equations without modifications can be applied (BISCHOFF [2]). The figure in chapter 3 shows the eigenvalue spectra of a thin plate, discretized with volumetric– , 3D–shell and classical shell elements. The dramatic deterioration of condition numbers of formulations including thickness change as compared to a classical shell formulation with Reissner–Mindlin kinematics becomes obvious and is due to the high ratio of transverse to in–plane normal stiffness. The 3D shell formulation employed herein is based on a difference vector formulation. Three displacement components **v** of the mid–surface and three components of a difference vector **w** of a shell director are introduced, which points from the mid–surface to the upper surface of the shell (see figure). A seventh degree of freedom represents the linear strain field in thickness direction and is introduced via enhanced assumed strains.

3. The Scaled Director Approach

The principle idea of our conditioning approach is based on the scaling of the shell director and its displacement components ***w*** by a factor $\mathcal{C}$.



By this means the ratio of in–plane– to transverse stiffnesses becomes optimal within one element. This scaling is introduced in the spirit of a pre–conditioning technique and hence does not affect the physical behaviour. The Scaled Director Conditioning (SDC) is introduced to this formulation via the basis vectors and metrics of the shell body in a consistent way, such that the original displacements and strains can be obtained at any time in the calculation. The basis vectors of the shell mid–surface $\boldsymbol{a}_i$ and those of the shell body $\boldsymbol{g}_i$ of the reference configuration are obtained by (eq. 2), and the deformed state is described by (eq. 3).

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{r}_{,\alpha} \qquad \mathbf{a}_3^{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}\,\frac{h}{2}\,\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \qquad \mathbf{g}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha + \frac{\theta^3}{\mathfrak{C}}\,\mathbf{a}_{3,\alpha}^{\mathfrak{C}} \qquad \mathbf{g}_3^{\mathfrak{C}} = \mathbf{a}_3^{\mathfrak{C}} \tag{2}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \bar{\mathbf{r}}_{,\alpha} \qquad \bar{\mathbf{a}}_3^{\mathfrak{C}} = \bar{\mathbf{a}}_3 + \mathfrak{C}\,\mathbf{w} \qquad \bar{\mathbf{g}}_\alpha = \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \frac{\theta^3}{\mathfrak{C}}\,\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha}^{\mathfrak{C}} \qquad \bar{\mathbf{g}}_3^{\mathfrak{C}} = \bar{\mathbf{a}}_3^{\mathfrak{C}} \tag{3}$$

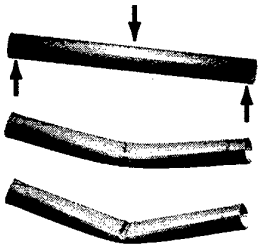
The modified Green–Lagrange strains $\boldsymbol{E}_{ij}^{\mathfrak{C}}$ for use in the B–operator of the tangent stiffness matrix are then calculated in the usual manner and there are almost no changes to be made when integrating over the shell body (eq. 4).

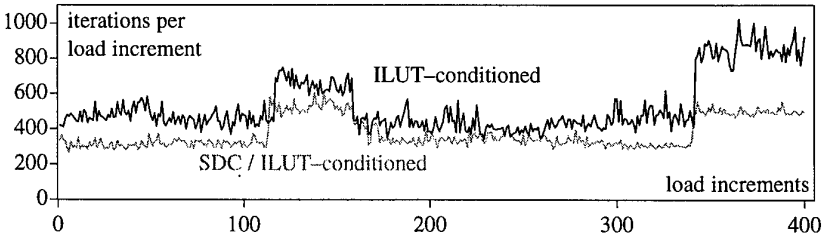
$$E_{ij}^{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2}\left(\bar{\mathbf{g}}_i^{\mathfrak{C}} \cdot \bar{\mathbf{g}}_j^{\mathfrak{C}} - \mathbf{g}_i^{\mathfrak{C}} \cdot \mathbf{g}_j^{\mathfrak{C}}\right) \qquad \int_V (\,\cdot\,)\,dV = \int_A \int_{-1}^{1} (\,\cdot\,)\,\hat{\mu}\,d\theta^3\,dA \qquad \hat{\mu} = \frac{1}{\mathfrak{C}}\frac{(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2)\cdot \mathbf{g}_3^{\mathfrak{C}}}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|} \tag{4}$$

This approach is not intended as standalone preconditioner for shell problems. It is designed to close the 'gap' in the eigenvalue spectrum between the 3D shell and a classical shell formulation. It can be easily combined with any standard preconditioning technique, such as e.g. ILUT. Details of the implementation can be found in WALL ET. AL. [4].

3. Example

As a first example the eigenvalue spectrum of the above plate, discretized with SDC–conditioned 3D shell elements is calculated. The characteristic jump in the spectrum disappeared and the condition number is in the range of the classical shell formulation. In a second example, iteration numbers and CPU time are compared when scaled director conditioning is applied for calculating the nonlinear response of a steel tube.





- 5116 degrees of freedom
- optimal SDC–factor : $\mathfrak{C} = 18.0$

The very slender structure (lenght : radius : wall thickness = 1000:50:1) is loaded as shown in the figure and a squared conjugate gradient solver with ILUT factorization with 30% fill–in as preconditioner is used. The diagram shows iteration numbers versus load increments. It clearly shows the decrease in iteration numbers that can be achieved through the combination of the two conditioning methods. The combined SDC / ILUT – conditioned simulation saved 81.1 CPU–minutes or 32% of the pure solving time on a HP–J7000, accumulated over all solver calls.

4. References

1 G. ALEFELD, I. LENHARDT, TH. ROTTNER, K. SCHWEIZERHOF: Verbesserung und Beschleunigung von Lösungsverfahren für Versagensanalysen in der Strukturmechanik, Theorie und Parallelisierung: Schlußbericht des BMBF Vorhabens 01IR413A3, Institute of Mechanics, Institute of Applied Mathematics, University of Karlsruhe, (1997).

2 M. BISCHOFF, E. RAMM: On the Physical Significance of Higher Order Kinematics and Static Variables in a Three–Dimensional Shell Formulation. to appear in: International Journal for Solids and Structures, (2000).

3 M. PAPADRAKAKIS: Parallel Solution Methods in Computational Mechanics, *J. Wiley & Sons, Chichester 1997.*

4 W.A. WALL, M. GEE, E. RAMM: The challenge of a three–dimensional shell formulation – the conditioning problem. To appear in: Conference Proceedings of IASS–IACM 2000, Chania–Crete, Greece, June 5–7, 2000.

Addresses: DIPL.–ING. M. GEE, DR.–ING. W. A. WALL, PROF. DR.–ING. E. RAMM,
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, D–70550 Stuttgart, Germany.

GRASBERGER, S.; MESCHKE, G.

A coupled thermo-hygro-mechanical material model for concrete

In the paper, a coupled thermo-hygro-mechanical model is formulated within the framework of thermomechanics of partially saturated porous media in the sense of Biot's theory [1]. An anisotropic plasticity-damage model is employed in conjunction with the fracture energy concept for the description of the pre- and post-cracking behaviour of concrete. Nonrecoverable strains are associated with a nonrecoverable increase of the porosity. The effect of cracking on liquid permeability is accounted for by relating plane Poiseuille flow through discrete fracture zones to the degree of damage in the continuum model.

1. Poroplastic Damage Model

Concrete is described within the framework of the theory of porous media. It is assumed to consist of the matrix material – a mixture of cement paste and the aggregates – and the pores which are partially saturated by an ideal mixture of water and dry air. The function of free energy Ψ defining the poroplastic damage behavior of concrete is characterized by the dependence on external and internal variables

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, m, T, \varepsilon^p, \phi^p, \mathbf{C}, \alpha_R, \alpha_{DP}), \tag{1}$$

whereby the linearized strain tensor ε, the moisture content m and the temperature T are external variables. The tensor of plastic strains ε^p, the nonrecoverable portion of the porosity ϕ^p, the degrading 4th-order stiffness tensor $\mathbf{C}$ and the variables α_R and α_{DP} characterizing the pre- and postpeak behavior of concrete in tension (subscript R) and compression (subscript DP) are internal variables. From the entropy inequality, the state equations are obtained as

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial(\varepsilon - \varepsilon^p)}, \quad p_l = \rho_l \frac{\partial \Psi}{\partial(m - \rho_l \phi^p)}, \quad S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad q_R = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_R}, \quad q_{DP} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{DP}}, \tag{2}$$

where σ is the stress tensor, p_l is the liquid pressure, ρ_l is the density of the liquid and S is the entropy. q_R and q_{DP} are stress-like variables which determine the damage-dependent size of the damage (f_R) and loading (f_{DP}) surface in the stress space.

2. Hygro-Mechanical Coupling

The transport properties of concrete are highly influenced by the existence of cracks, resulting from mechanical and thermal loading or shrinkage. Starting from an idealized crack formation, assumed to be planar, parallel and of constant opening width w, it is possible to estimate the moisture flux along one single crack from the solution of the Navier-Stokes equation for plane Poiseuille flow. Introducing the anisotropic damage permeability tensor $\mathbf{k}_d$,

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{T}^T \mathbf{k}'_d \mathbf{T}, \qquad \text{with} \qquad \mathbf{k}'_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_h^3/12s \end{bmatrix}, \tag{3}$$

whereby w_h denotes the equivalent hydraulic crack width when considering the crack-roughness and aperture variations, the tensor of isothermal liquid permeability for cracked concrete reads

$$\mathbf{D}_l = \frac{k_r(S_l)}{\mu_l} \left[\mathbf{k}\, k_\phi(\phi) + \mathbf{k}_d(d) \right]. \tag{4}$$

In (4), $\mathbf{k}$ denotes the intrinsic isothermal permeability tensor, k_r is the relative permeability depending on the liquid saturation S_l, μ_l is the viscosity of water and k_ϕ describes the relationship between permeability and porosity ϕ. In (3) one single crack is considered to be open in the respective material point. In the finite element analysis, s is associated with the length of the cracked finite element. This is consistent with the underlying smeared crack concept. $\mathbf{k}'_d$ is related to a local coordinate system $x' - y'$ defined by the current crack direction with the crack normal $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_{x'}$. The transformation to global axes is accomplished by means of the rotation tensor $\mathbf{T}$. Details of the coupling with the thermal field and on the anisotropic plasticity damage model are contained in [2],[3].

3. Numerical Solution

The finite element method is used for the solution of the governing differential equations of the 3-field problem, characterized by the displacement field $\mathbf{u}$, the capillary pressure p_c and the temperature T as primary variables. Discretization in space results in a coupled set of equations of the following form

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{x} + \mathbf{S}(\mathbf{x})\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

with $\mathbf{x} = \{\overline{\mathbf{u}}, \overline{p}_c, \overline{T}\}$ as the vector of unknown nodal values. Discretization in time in conjunction with a fully implicit integration scheme yields the following nonlinear system of coupled algebraic equations

$$[\mathbf{S} + \Delta t\mathbf{K}]_{n+1}\,\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{S}\,\mathbf{x}_n + \Delta t\,\mathbf{f}_{n+1}. \tag{6}$$

(6) is solved by means of a Newton-Raphson procedure, using a consistently linearized algorithmic tangent operator.

4. Numerical Example: Effects of cracking on drying permeability

The effect of cracking-induced stiffness degradation on drying permeability is investigated numerically by means of re-analyses of a laboratory test performed by BAŽANT ET AL. [4]. In the test, a C-shaped reinforced concrete frame was used (Fig.1). A constant flexural moment was applied by means of a tie rod to induce uniformly spaced cracks on the tensile face of the horizontal member. Fig.2 contains the measured and the computed relative weight loss

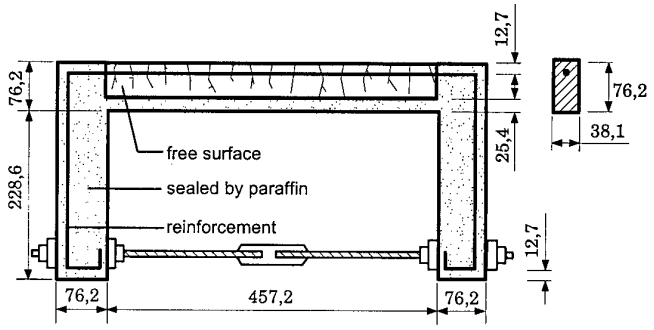


Figure 1: Partially sealed concrete specimen with crack-producing tie-rod [4] (dimensions in [mm])

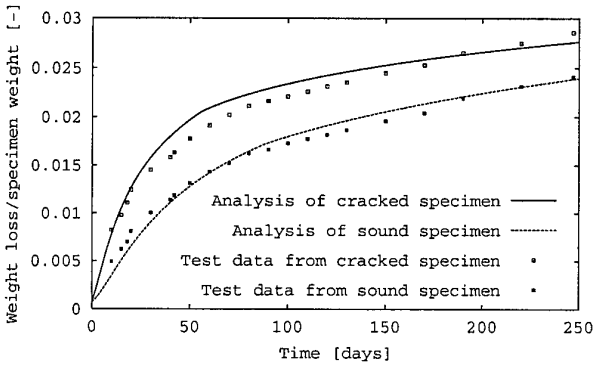


Figure 2: Computed relative weight loss versus experimental data [4]

during the first 250 days of drying. Experimental and numerical results from uncracked specimens are also included in Fig.2 for comparison.

Acknowledgements

Financial support to the first author was provided by the German Science Foundation (DFG) through the graduate programe Computational Structural Dynamics. Support was also provided by the DFG in the framework of project A9 of the collaborative research center SFB 398. This support is gratefully acknowledged.

5. References

1 COUSSY, O.: Mechanics of Porous Continua; John Wiley & Sons, Chichester 1995.
2 GRASBERGER, S., MESCHKE, G.: A hygro-thermal-poroplastic damage model for durability analyses of concrete structures; European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (2000), Barcelona, Spain.
3 MESCHKE, G., LACKNER, R., MANG, H.A.: An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete; International Journal for Numerical Methods in Engineering **42** (1998), 703–727.
4 BAŽANT, Z.P., ŞENER, S., KIM, J.K.: Effect of cracking on drying permeability and diffusivity of concrete; ACI Materials Journal **84** (1987), 351–357.

Addresses: DIPL.-ING STEFAN GRASBERGER, UNIV. PROF. DR. TECHN. GÜNTHER MESCHKE,
Ruhr-University Bochum, Institute for Structural Mechanics, D–44780 Bochum, Germany.

HARNAU, M; SCHWEIZERHOF, K.

'Solid-Shell' Elemente mit quadratischen Ansätzen für große Deformationen

Eine Erweiterung der bekannten acht-Knoten Solid-Shell Elemente mit trilinearen Ansatzfunktionen [5] zu 18-Knoten Elementen mit biquadratisch-linearen Ansatzfunktionen wird vorgestellt. Membran- und Querschubversteifung werden durch die Implementierung der 'Assumed Natural Strain' Methode [3], Dickenversteifungseffekte werden durch einen EAS-Ansatz bzw. alternativ dazu durch die Erhöhung der Ansatzordung in Dickenrichtung verhindert. Bei inkompressiblem Materialverhalten tritt zusätzlich das Problem der volumetrischen Versteifung und deren Beseitigung auf, das aber, wie an Beispielen gezeigt wird, bei Schalen mit entsprechend feiner Diskretisierung meist vernachlässigbar ist. Der wesentliche Vorteil der 18-Knoten Solid-Shell Elemente ist die durch die quadratische Ansatzordnung gegebene bessere Approximation der Geometrie gekrümmter Strukturen, was im direkten Vergleich mit den acht-Knoten Elementen deutlich wird.

1. Solid-Shell Konzept

Solid-Shell Elemente verfügen analog zu Volumenelementen über Knoten an der Schalenober- $\boldsymbol{X}_{io}$ und -unterseite $\boldsymbol{X}_{iu}$ mit jeweils drei Verschiebungsfreiheitsgraden. Daraus ergibt sich für Elemente mit biquadratischen Ansätzen folgende Geometrie- und Verschiebungsapproximation:

$$\boldsymbol{X}(\xi,\eta,\zeta) = \left[\begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array}\right]^T = \sum_{i=1}^{9} \left(\frac{1}{2} N_i(\xi,\eta) \Big((1+\zeta)\, \boldsymbol{X}_{io} + (1-\zeta)\, \boldsymbol{X}_{iu} \Big) \right) , \tag{1}$$

$$\boldsymbol{u}(\xi,\eta,\zeta) = \left[\begin{array}{ccc} u & v & w \end{array}\right]^T = \sum_{i=1}^{9} \left(N_i(\xi,\eta) \boldsymbol{T}(\xi,\eta) \boldsymbol{\Theta}(\zeta) \left[\begin{array}{cc} \boldsymbol{T}^T(\xi,\eta) & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{T}^T(\xi,\eta) \end{array}\right] \boldsymbol{d}_e^i \right) . \tag{2}$$

Als Ansatzfunktionen $N_i((\xi,\eta), i = 1 \ldots 9$ in der Tangentialebene werden die biquadratischen Lagrange Ansätze, in Dickenrichtung ζ werden lineare Ansätze verwendet. Eine Transformaton der Verschiebungen mit Hilfe der Matrix $\boldsymbol{T}$ wird notwendig, wenn für die einzelnen Verschiebungen unterschiedliche Ansatzordnungen in Dickenrichtung (Glg. 3) verwendet werden. Der Vorteil dieser Formulierung ist, daß ein Übergang zu Volumenelementen problemlos möglich ist. Außerdem kann ein vollständiger 3D-Spannungszustand dargestellt, und allgemeine Materialgesetze können problemlos eingebunden werden.

2. Dickenversteifung

Die lineare Ansatzordnung für die Verschiebung w in Dickenrichtung führt zu einer konstanten Interpolation der Verzerrung $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ über die Dicke, die über die Querkontraktion mit den Verzerrungen $\varepsilon_{\xi\xi}$ und $\varepsilon_{\eta\eta}$, die als linear veränderlich über die Dicke interpoliert werden, gekoppelt ist. Daraus entsteht ein Versteifungseffekt, der durch eine linear veränderliche Approximation von $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ über die Dicke verhindert werden kann. Dabei werden zwei Möglichkeiten vorgeschlagen: Für das **MI9K3Dq**-Element wird eine quadratisch hierarchische Interpolation der Verschiebung w in Dickenrichtung [4] angenommen. Die Interpolationsmatrix Θ wird dabei um einen quadratischen Anteil erweitert:

$$\boldsymbol{\Theta}(\zeta) = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{ccccccc} 1+\zeta & 0 & 0 & 1-\zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\zeta & 0 & 0 & 1-\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\zeta & 0 & 0 & 1-\zeta & \boxed{1-\zeta^2} \end{array}\right] . \tag{3}$$

Dafür wird ein zusätzlicher Freiheitsgrad β_i pro Knotenpaar eingeführt, was den Rechenaufwand für die Gleichungslösung entsprechend erhöht. Beim **MI9K3DEAS**-Element erfolgt eine lineare Verzerrungserweiterung der Verzerrung $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ mit Hilfe der EAS-Methode [1] [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\zeta\zeta} &= \varepsilon_{\zeta\zeta}^k + \hat{\varepsilon}_{\zeta\zeta} = \varepsilon_{\zeta\zeta}^k + \boldsymbol{M}\boldsymbol{\alpha}_e \\ &= \varepsilon_{\zeta\zeta}^k + \underbrace{t_{33}^2\, \zeta \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \xi^2\eta^2 \end{array}\right]}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \cdots & \alpha_9 \end{array}\right]^T}_{\boldsymbol{\alpha}_e} . \end{aligned} \tag{4}$$

Die mit der EAS-Methode zusätzlich eingeführten Freiwerte α_i werden bei der Lösung auf Elementebene auskondensiert, dabei wird eine 9x9-Matrix pro Element und Lastschritt invertiert.

3. Volumetrische Versteifung

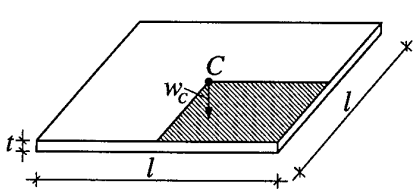
Wenn nahezu inkompressibles Materialverhalten vorausgesetzt wird, tritt ein Versteifungseffekt, das sogenannte 'Volumetric locking', auf. Dieser Versteifungseffekt kann z.B. durch eine reduzierte Integration der volumetrischen Verzerrungsanteile, d.h. mit 2x2 anstelle von 3x3 Gaußpunkten, beseitigt werden:

$$\left(\int_V \left(\delta \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{S}_d}{\partial \boldsymbol{E}} \Delta \boldsymbol{E} + \Delta\delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S}_d\right) dV + \int_V^{(red)} \left(\delta \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{S}_v}{\partial \boldsymbol{E}} \Delta \boldsymbol{E} + \Delta\delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S}_v\right) dV\right) \Delta \boldsymbol{u} = -\left(\int_V \delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S}_d \, dV + \int_V^{(red)} \delta \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{S}_v \, dV\right) - \delta \Pi_{ext} \, . \tag{5}$$

Vorausgesetzt wird dabei ein Materialgesetz, das eine Aufspaltung in volumetrische und deviatorische Anteile zuläßt.

4. Numerische Vergleichsberechnungen

Als numerisches Beispiel wird eine elastoplastische Platte unter einer vertikalen Flächenlast (Abb. 1) berechnet. Die Diagramme in Abbildung 2 zeigen die Ergebnisse für das MI9K3Dq Element (das MI9K3DEAS Element liefert



Geometrie:
$l = 508$
$t = 2.54$
Belastung:
$q_0 = 10^{-2}$

Material:
$\kappa = 57500$
$\mu = 26538$
$y_0 = 248$

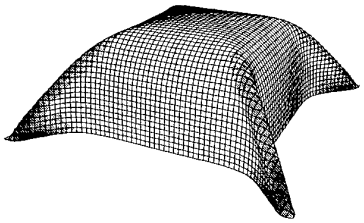


Abbildung 1: Einfach gelagerte quadratische Platte; Geometrie, Material, Belastung und verformtes Netz

qualitativ identische Ergebnisse) im Vergleich mit dem entsprechenden linearen Element für unterschiedliche Diskretisierungen. Die Endung -rv bedeutet selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile. Deutlich wird, daß die biquadratischen Elemente insbesondere für die gröbere Diskretisierung bessere Ergebnisse liefern, zudem ist bei feinen Netzen der volumetrische Versteifungseffekt relativ klein.

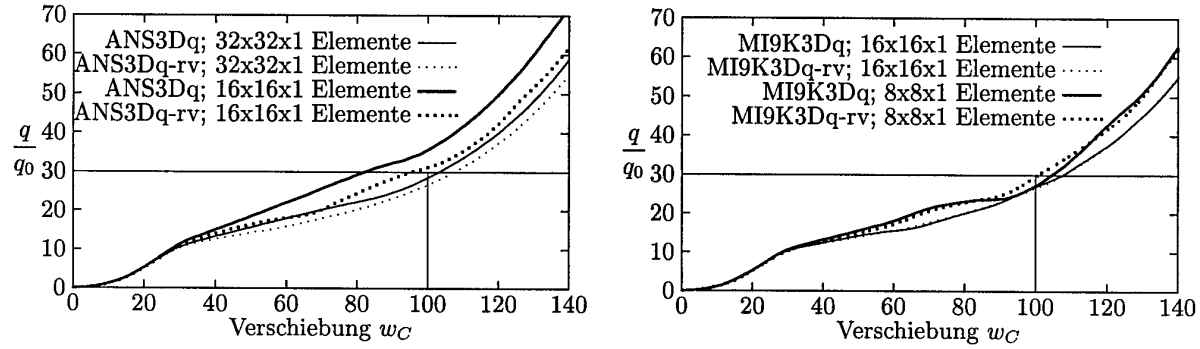


Abbildung 2: Quadratische Platte; Kraft-Verschiebungs-Diagramme für Solid-Shell Elemente mit linearen und quadratischen Ansätzen

5. Literatur

1 M. Braun: Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1995.

2 N. Büchter, E. Ramm and D. Roehl: Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept, Int. J. Numer. Methods Engng. **37** (1994), 2551-2568.

3 E.N. Bucalem and K.J. Bathe: Higher-order MITC general shell elements, Int. J. Numer. Meth. Engng. **36** (1993), 3729-3754.

4 F. Gruttmann: Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Bericht Nr. F96/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, 1996.

5 R. Hauptmann and K. Schweizerhof: A systematic development of solid-shell element formulations for linear and nonlinear analyses employing only displacement degrees of freedom, Int. J. Numer. Methods Engng. **42** (1998), 49-70.

Adressen: Harnau, M.; Schweizerhof, K.; Inst. f. Mechanik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Germany.

KOCH, A. / MIEHE, C.

Aspekte Adaptiver Berechnungsverfahren bei Elastoplastizität inhomogener Materialien und kleiner Verzerrungen

Ein Problem bei der Anwendung der Methode der Finiten Elemente auf die Berechnung von Randwertproblemen der Strukturmechanik mit elastoplastischem Materialverhalten ist die Bereitstellung eines geeigneten Finite Elemente Netzes. Wir stellen mögliche a posteriori Fehlerschätzer für inhomogene Materialien vor, auf deren Basis eine Dichtefunktion zur Steuerung der Vernetzung generiert wird. In diesem Zusammenhang wird ebenfalls auf die Problematik des Tranfers innerer Variablen zwischen den Netzen eingegangen. Die Qualität der adaptiven Berechnungsverfahren wird anhand numerischer Beispiele demonstriert.

1. Variationsformulierung der Elastoplastizität

Betrachtet wird einen Körper $\mathcal{B}$ auf dessen Rand $\partial\mathcal{B}_u$ Verschiebungsrandbedingungen und auf $\partial\mathcal{B}_t$ Kraftrandbedingungen vorgegeben sind. Der Verzerrungstensor ist definiert als $\boldsymbol{\varepsilon} := \mathrm{sym}[\nabla \boldsymbol{u}]$ und setzt sich additiv aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen $\boldsymbol{\varepsilon} := \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$. Die freie Energiefunktion kann ebenfalls in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt werden

$$\psi := \hat{\psi}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \hat{\psi}^p(\alpha) \geq 0 \quad \text{mit} \quad \hat{\psi}^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)\,, \quad \hat{\psi}^p(\gamma) := \frac{1}{2} h \alpha(\gamma)^2 \tag{1}$$

mit dem Elastizitätstensor $\mathbb{C}$, dem akkumulierten plastischen Multiplikator γ und dem Verfestigungsparameter h. Im Rahmen einer inkrementellen Variationsformulierung führen wir nun das Gesamtpotential ein als

$$\Pi(\boldsymbol{u}_{n+1}, \gamma_{n+1}) := \int_{\mathcal{B}} \hat{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1})\, dV - \Pi_{ext} \rightarrow \text{Min.} \tag{2}$$

mit der Formänderungsenergiedichte $\hat{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1}) = \psi_{n+1} - \psi_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\gamma}\sqrt{2/3} y_0\, dt$. Unter der Annahme einer Evolution der plastischen Verzerrungen vom v. Mises Typ erhalten wir nach der Anwendung eines impliziten Euler-Schrittes

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}^p_n + (\gamma_{n+1} - \gamma_n)\boldsymbol{n}_{n+1} \tag{3}$$

wobei $\boldsymbol{n}_{n+1}$ die Fließflächennormale bezeichnet. Die totale Arbeit ist damit nur noch eine Funktion der inneren Variablen zum Zeitpunkt t_{n+1}

$$\underbrace{\hat{W}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1})}_{\text{totale Arbeit}} := \underbrace{\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1}))}_{\text{gespeicherte Arbeit}} + \underbrace{c(\gamma_{n+1} - \gamma_n)}_{\text{dissipierte Arbeit}} \tag{4}$$

Die Variation des Potentials in Gl. (2) liefert mit den Variationen der freien Energiefunktionen $\delta\psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \gamma_{n+1})$ und $\delta\psi^p(\gamma_{n+1})$ die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \bar{\gamma} &= \boldsymbol{0} \quad \text{auf } \mathcal{B} \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{t}} &= \boldsymbol{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}_t \\ ||\mathrm{dev}\boldsymbol{\sigma}_{n+1}|| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\beta_{n+1} + y_0) &= 0 \quad \text{auf } \mathcal{B} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Lösung dieser Gleichungen erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird eine lokale Lösung von $(5)_3$ mit Hilfe eines Optimierungsalgorithmus gefunden und anschließend die globale Lösung von $(5)_{1,2}$ mit der FE-Methode berechnet.

2. A posteriori Fehlerschätzer

Von BOROOMAND & ZIENKIEWICZ [1999] wurde vorgeschlagen, den bekannten Fehlerschätzer für lineare Probleme auf elastoplastische Probleme zu übertragen. Der Fehler wird dabei in der Fehlerenergienorm

$$E^{h^2} := \int_{\mathcal{B}} |(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon})|\, dV \quad \Rightarrow \quad E^{h^2} := \int_{\mathcal{B}} |(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^* - \Delta\boldsymbol{\varepsilon})|\, dV \tag{6}$$

gemessen, wobei entsprechend der Vorgehensweise bei glättungsbasierten Fehlerindikator die exakten Größen durch verbesserte geglättete Größen ersetzt werden. Ausgehend von der plastischen Dissipation $\mathcal{D} := \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \beta\dot{\alpha} \geq 0$ erhält man durch Übertragung der Vorgehensweise von ZIENKIEWICZ & ZHU[1987] den Fehlerindikator

$$E^{h^2} := \int_{\mathcal{B}} |(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,*} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p\,h})|\, dV + \int_{\mathcal{B}} |(\beta^* - \beta^h)(\dot{\alpha}^* - \dot{\alpha}^h)|\, dV\,. \tag{7}$$

Im Gegensatz zu (6) werden hier die inneren plastischen Variablen bei der Fehlerschätzung berücksichtigt. Von RADOVITZKY & ORTIZ [1998] wurde ein Fehlerschätzer für finite elastische Probleme vorgeschlagen, der hier auf elastoplastische Probleme angewandt werden soll. Der Fehler der FE-Approxiamtion wird durch den Interpolationsfehler zwischen der FE-Lösung und einer FE-Lösung niedrigeren Grades abgeschätzt. Die Lösung niedrigeren Grades wird dabei nicht berechnet, stattdessen wird der Interpolationsfehler mit Hilfe der Sobolev–Seminorm $||\tilde{\boldsymbol{u}}^h - \boldsymbol{u}||_1^2 \leq C \int_{\mathcal{B}} h(\boldsymbol{x}) \sum_{|\alpha|=2} [D^\alpha \boldsymbol{u}^h]^2\, dV$ direkt abgeschätzt. Mit Hilfe einer Variationsformulierung erhält man hieraus die Dichtefunktion für die Fehlerschätzung

$$h(\boldsymbol{x}) = A \left(\sum_{|\alpha|=2} [D^\alpha \boldsymbol{u}^h]^2 \right)^{-1/4} \quad \text{mit} \quad A = \left[\frac{1}{n_{el}} \int_{\mathcal{B}} \left(\sum_{|\alpha|=2} [D^\alpha \boldsymbol{u}^h]^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \tag{8}$$

Die zweiten Ableitungen werden mit Hilfe einer linearen Interpolation der im Rahmen der FE-Methode bereits berechneten ersten Ableitungen der Verschiebungen an den Gaußpunkten berechnet. Der Vorteil dieses Fehlerschätzers gegenüber glättungsbasierten Schätzern liegt darin, daß keine geglätteten Größen berechnet werden müssen.

Bei der Glättung der Spannungen und inneren Variablen ist bei heterogenen Materialien zu beachten, daß die exakten Lösungen Sprünge an den Gebietsgrenzen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften aufweisen. Diese Sprünge leisten keinen Beitrag zur Fehlerenergie, weswegen Gebiete mit unterschiedlichen Materialeigenschaften (Einschlüsse und Matrixmaterial) gebietsweise betrachtet werden müssen.

3. Numerische Beispiele

Betrachten wir einen Verbundwerkstoff mit einem Matrixmaterial und einem Einschlußmaterial, wobei die Materialparameter so gewählt sind, daß das Einschlußmaterial als starr angenommen werden kann. Untersucht wird ein quadratisches Gebiet unter einfacher Schubbeanspruchung. In Abb. 1a ist deutlich zu sehen, wie sich die plastischen Zonen in zwei Bändern ausbilden und eine starke Netzverfeinerung in der Nähe des Einschlußmaterials hervorrufen. In einem Vergleich der drei vorgestellten Fehlerschätzer wurden die besten Ergebnisse mit dem Indikator nach Gl. (7) erzielt. Für das zweite Beispiel wurden die gleichen Materialparameter gewählt. Das betrachtete Gebiet besitzt 20 zufallsverteilte starre Einschlüsse und wird einer reinen Zugbeanspruchung unterzogen. Auch hier beobachtet man eine Lokalisierung der plastischen Verzerrungen in Bändern zwischen den Einschlüssen. Das feinste Netz besitzt 12770 Freiheitsgrade und wurde nach 20 Neuvernetzungen und 13 Zeitschritten erhalten.

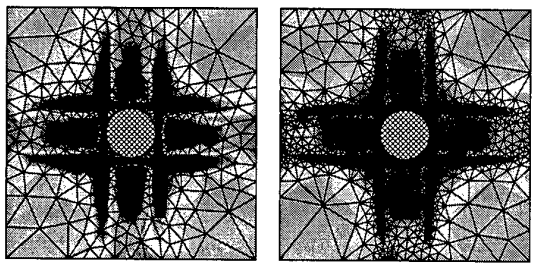
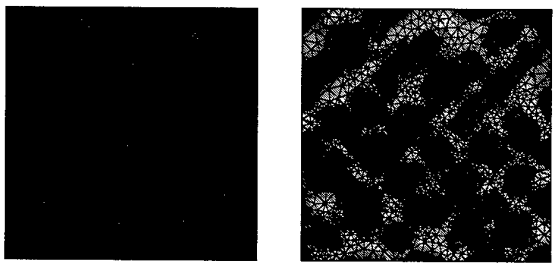
a)  b) 

Abb. 1 a–b. a) Verbundwerkstoff unter Schubbelastung. Adaptiv neuvernetzte Gebiete mit 3802 und 35996 Freiheitsgraden. b) Zugbeanspruchung eines Gebietes mit 20 starren Einschlüssen.

4. Literatur

1 F.-J. BARTHOLD, M. SCHMIDT, E. STEIN: Error indicators and mesh refinement for finite-element-computations of elastoplastic deformations. Comp. Mechanics **22** (1998), 225–238.

2 BOROOMAND & ZIENKIEWICZ: Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. **176** (1999), 127–146.

3 D. PERIC, M. VAZ JR., D.R.J. OWEN: On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. **176** (1999), 279–312.

4 R. RADOVITZKY, M. ORTIZ: Error estimation and adaptive meshing in strongly nonlinear dynamic problems. Comp. Methods Appl. Mech. Engrg. **172** (1999), 203–240.

5 O.C. ZIENKIEWICZ AND J.Z. ZHU: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. Int. J. Numer. Methods Eng. **24** (1987), 337–357.

Addresses: A. KOCH & C. MIEHE, Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I, Universität Stuttgart, 70550 Stuttgart, Pfaffenwaldring 7

KRSTULOVIĆ-OPARA, L., WRIGGERS, P. AND KORELC, J.

Rolling contact simulations with frictional contact elements using Lagrangian description

Modeling of 2D frictional circular cross section contact problems using FEM is addressed. Sliding and rolling of such problems is characterized with the non-physical rough behavior caused by the discretization applying the standard piecewise linear interpolation. Here Hermite interpolation and the Bézier curves are used for the definition of smooth contact surfaces, particular attention is paid within the definition of the Bézier points.

1. Introduction

The presented paper can be considered as a special topic of work described in [1]. When modeling rolling problems, particular attention has to be paid with regard to the geometry definition of a discretized surface. Introduction of smooth Hermite (figure 1) and Bézier (figure 2) elements enables a reduction of the elements needed for the description of circular cross sections. For a complete understanding of the frictional smooth approaches, one has to refer to [1] where smoothing of a straight master segment is achieved by the use of two adjacent C^1 continuous cubic polynomials. Here, polynomials are defined between three mid-nodes ($\mathbf{m}_{12}$, $\mathbf{m}_{23}$ and $\mathbf{m}_{34}$) and are tangential to the non smoothed surface segments.

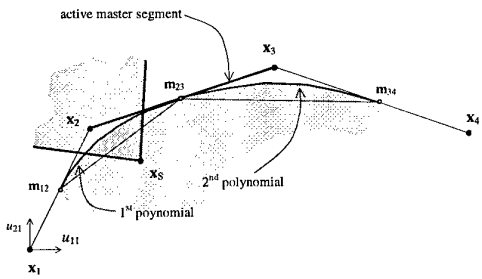


Figure 1. Smooth surface based on the Hermite interpolation

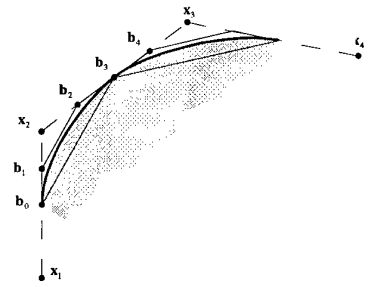


Figure 2. Smooth surface based on Bézier curves

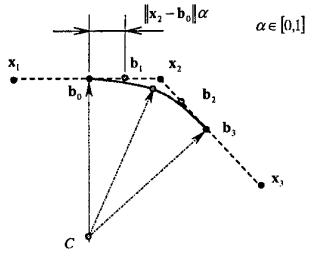


Figure 3. Definition of the parameter α for the variable Bézier points

2. Definition of the smooth surface

A cubic polynomial based on the Hermite interpolation is defined in the following parametric form

$$\mathbf{x}(\xi)=\mathbf{m}_{12}+(\mathbf{m}_{23}-\mathbf{m}_{12})\,\xi+w(\xi)\,\mathbf{e}_N\,,\qquad w(\xi)=A\,\xi^3 l^3+B\,\xi^2 l^2+C\,\xi l+D\,,\qquad \xi\in[0,1], \tag{1}$$

where unknowns *A, B, C* and *D* are evaluated from the requirement that the points $\mathbf{x}(\xi=0)$ and $\mathbf{x}(\xi=1)$ of the polynomial are passing through mid-nodes ($\mathbf{m}_{12}$, $\mathbf{m}_{23}$ and $\mathbf{m}_{34}$) and are tangential to the segments ($(\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1)$, $(\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2)$ and $(\mathbf{x}_4-\mathbf{x}_3)$). The cubic Bézier curve is defined explicitly as

$$\mathbf{x}(\xi)=\mathbf{b}_0\,B_0^3(\xi)+\mathbf{b}_1\,B_1^3(\xi)+\mathbf{b}_2\,B_2^3(\xi)+\mathbf{b}_3\,B_3^3(\xi)\,,\qquad B_i^m(\xi)=\binom{m}{i}\xi^i(1-\xi)^{m-i}\quad i=0,..m\,, \tag{2}$$

where mid-nodes define the Bézier points $\mathbf{b}_0$ and $\mathbf{b}_3$. Position of the Bézier points $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$ is given using the parameter α, i.e. $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_0+(\mathbf{x}_2-\mathbf{b}_0)\alpha$ and $\mathbf{b}_2=\mathbf{x}_2+(\mathbf{b}_3-\mathbf{x}_2)(1-\alpha)$ (see figure 3). A Bézier curve is characterized by the convex hull property, i.e. the curve is always laying inside the polygon defined by the Bézier points (see figure 2). This represents a constraint to the curve resulting in a form that might not be close enough to the ideal circle segment (arch). In comparison with the Bézier curve when parameter $\alpha=1/2$, a cubic Hermite curve is not constrained and therefore closer to the ideal arch form. For circular cross sections, when a coarse mesh is used, such a Bézier interpolation shows significant inconsistency considering the proper circle description. For the particular problem of a circular cross section parameter α can be defined in the following two ways. The first one results from the requirement that the radius of the point $\mathbf{x}(\xi=1/2)$ for the Bézier polynomial is the same as the one of the point $\mathbf{x}(\xi=1/2)$ for the Hermite polynomial. This requirement

results in the parameter $\alpha = 2/3$ that is not dependable on the discretized problem geometry. In a case of equal master segment lengths, such a Bézier polynomial is the same as the Hermite polynomial. The second way of defining parameter the α is to use the requirement that the radius is the same for the points $\mathbf{x}(\xi = 0)$ and $\mathbf{x}(\xi = 1/2)$. Such a Bézier surface, when comparing with the Hermite interpolation, is closer to the ideal circular shape. Disadvantage of this formulation, in comparison with the previous one, is that the parameter α depends on the discretization and has to be re-calculated for each different circular cross section discretization. For both approaches the requirement for the C^1 continuity is satisfied.

3. Numerical example

A dynamical example, that can be proposed as a benchmark test for the smooth 2D frictional contact elements, is presented. A wheel with prescribed radius $r = 4 \cdot 10^{-2} m$, density $\rho = 7850\ kg/m^3$, elasticity parameters $K = 1.75 \cdot 10^5 MPa$, $G = 8.08 \cdot 10^4 MPa$, and gravity $g = 9.81 m/s$, is laying on the flat surface with Coulomb friction coefficient $\mu = 0.3$. Under the applied initial velocity v_0=*1 m/s*, the wheel is first sliding without rolling, and after some period, pure rolling occurs (figure 4). According to the analytical solution $l = (5/18) v_0^2 / \mu g$, the length when pure rolling starts is $l = 0.094 m$ (the associated time is $t = 0{,}1133\ s$). This dynamical problem is solved using the Newark method with parameters $\beta = 0.25$ and $\gamma = 0.5$. The moment when the pure rolling starts can be detected from the fact that for pure rolling some master nodes have horizontal velocity zero, while the diagonally symmetric master nodes (plotted with the same gray scale in the figure 4) have velocity twice as big as the central node (dashed line). The pure rolling for the simple node to segment contact element, that occurred at $l = 0.115 m$, is characterized with the jumps and non-physical separation from the base surface (left diagram in the figure 4). For the smooth formulations pure rolling started at $l = 0.099 m$ *(t=0.12 s)*, hence represents a solution close to the analytical one. The right diagram in figure 4 depicts the response for the Bézier contact element, where the parameter $\alpha = 0.65292$ is calculated from the second requirement (see chapter 2).

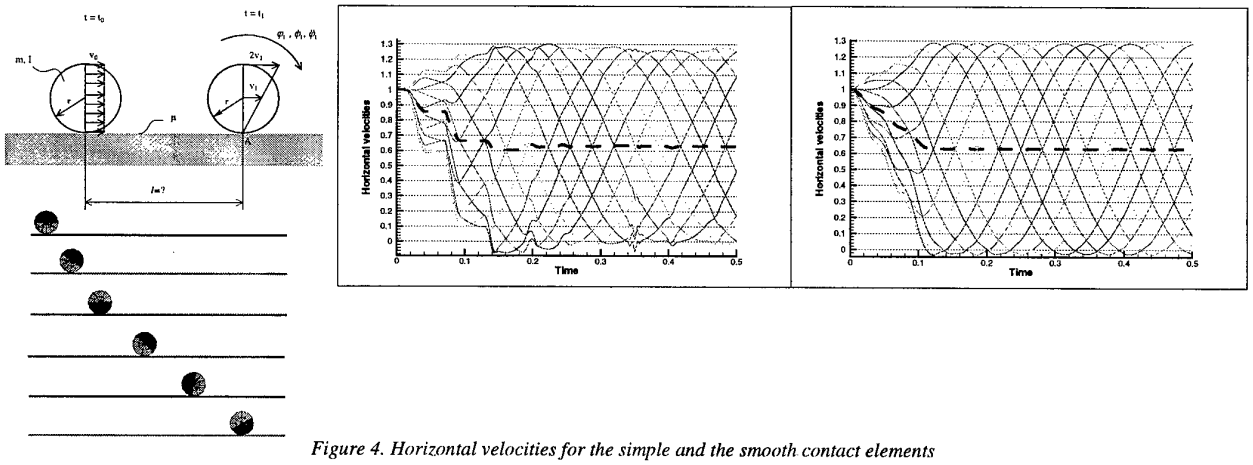


Figure 4. Horizontal velocities for the simple and the smooth contact elements

Acknowledgements The financial support from the Commission of European Communities, DG II, Brite-EuRam project BE-96 3924 is gratefully acknowledged.

References

[1] P. Wriggers, L. Krstulović-O. and J. Korelc: *Development of 2D Smooth Polynomial Frictional Contact Element based on a Symbolic Approach.* Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics, ed.: W. Wunderlich, München, Germany (1999).

[2] R. L. Taylor, P. Wriggers: *Smooth discretisation for large deformation frictionless contact.* SEMM-Report, UC Berkeley, (1998).

[3] G. Pietrzak, A. Curnier: *Large deformation frictional contact mechanics: continuum formulation and augmented Lagrangean treatment,* Computer methods in applied mechanics and engineering, **177**, 351-381(1999).

Address: M.Sc. Lovre Krstulović-Opara; Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik;
Universität Hannover, Appelstraße 9A ;D-30167 Hannover
E-mail: opara@ibnm.uni-hannover.de

LAPUSTA YU., SAMBORSKA A.

On mathematical modeling of stability loss of a fibre series in an incompressible matrix

Solutions in a general form are constructed within the framework of a 3-D mathematical model for the description of micromechanically possible instability modes of a periodic row of fibres in an elastic matrix with a Treloar potential under compression. The piecewise inhomogeneity of the fibrous structure is taken into account. As a result of the techniques developed, all boundary conditions can be satisfied exactly. Strength limit for the given values of initial parameters is determined as a minimal value of loads calculated for the possible instability modes.

1. Introduction

A substantial number of models have been reported during the recent several decades, dealing with mechanisms of compressive failure in fibre composites. Most attention has been given to microbuckling, kink band formation, various damage phenomena, or to some combination of them [1-8]. In view of the very complicated nature of the instability-like and related phenomena occurring in composites, a majority of investigators employ substantial simplifications of the mechanical problem statement, reducing often the consideration to two- or even one-dimensional cases, which cannot guarantee the appropriate description of the behaviour of the matrix and the fibres at stability loss. More rigorous from the mathematical viewpoint results can be obtained within the framework of an approach [2] involving the three-dimensional theory of stability [9] and a model of a piecewise-uniform medium. This report considers an instability problem statement and its solutions for an infinite series of parallel fibres in an infinite elastic matrix, derived within the framework of the indicated above rigorous approach.

2. Statement of the problem

Let us consider the aforementioned problem in the assumption that the fibres and the matrix consist of incompressible elastic materials with a Treloar potential, a perfect bonding exists between the fibres and the matrix

$$\vec{P}^{aq} = \vec{P}^{m}, \qquad \vec{u}^{aq} = \vec{u}^{m} \qquad (r_q = R), \tag{1}$$

and the deformation of the fibres and the matrix along the fibre axes are equal. In this case, the nonzero stress components of the precritical state can be determined as follows

$$\sigma_{33}^{0m} = 2C^m(1-(\lambda_3^m)^{-3}), \qquad \sigma_{33,q}^{0a} = 2C^a(1-(\lambda_3^{aq})^{-3}), \qquad \lambda_3^m = \lambda_3^{aq} = \lambda, \tag{2}$$

with λ_j^m and λ_j^a denoting elongations in the j-direction in the matrix and fibres, respectively. Following the notations from [2, 9], we write down the linearised equilibrium equations in terms of displacements in the form

$$\begin{aligned} &N_{jm}u_m = 0, \qquad N_{jm} = \kappa_{ijmn}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_n}(1-\delta_{j4})(1-\delta_{m4}) + \delta_{m4}(1-\delta_{j4})q_j\frac{\partial}{\partial x_j} + \delta_{j4}(1-\delta_{m4})q_m\frac{\partial}{\partial x_m}, \\ &\kappa_{ijmn} = const, \qquad q_j = const, \qquad u_4 = p, \qquad j,m = 1,2,3,4, \qquad i,n = 1,2,3. \end{aligned} \tag{3}$$

The problem is reduced to the determination of the minimal value of the compressive loading at which equations (3), written down for the matrix and the fibres, have nontrivial solutions, which satisfy the continuity conditions for the forces and displacements at the interfaces and the necessary attenuation conditions for the displacement disturbances while moving away from the fibre series.

3. Solutions

As follows from [9], for the precritical state (2), we can determine displacement disturbances in each of the components, satisfying exactly equations of the type (3), by means of the following formulae

$$\begin{aligned} &u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi - \frac{\partial^2}{\partial r\partial x_3}\chi, \qquad u_\theta = -\frac{\partial}{\partial r}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial x_3}\chi, \qquad u_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_3\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\chi, \\ &u_4 = \left[(\lambda_1\kappa_{1111} - \lambda_3\kappa_{1313} - \lambda_3\kappa_{1133})\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) + \lambda_1\kappa_{3113}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\chi. \end{aligned} \tag{4}$$

We present the functions ψ and χ for the fibres in a general form as follows

$$\psi^{aq} = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty} I_n(\gamma r_q)(\delta_{\mu 1}\sin n\theta_q + \delta_{\mu 2}\cos n\theta_q)[A_{n11}^{aq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q}) + A_{n21}^{aq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})],$$
$$\chi^{aq} = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\{I_n(\gamma r_q)(\delta_{\mu 1}\cos n\theta_q + \delta_{\mu 2}\sin n\theta_q)[A_{n12}^{aq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q}) + A_{n22}^{aq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})] \quad (5)$$
$$+I_n((\lambda_3^a)^{-3/2}\gamma r_q)(\delta_{\mu 1}\cos n\theta_q + \delta_{\mu 2}\sin n\theta_q)[A_{n13}^{aq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q}) + A_{n23}^{aq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})]\},$$

and search the corresponding solutions for the matrix in the following form

$$\psi^{m} = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} K_n(\gamma r_q)(\delta_{\mu 1}\sin n\theta_q + \delta_{\mu 2}\cos n\theta_q)[A_{n11}^{mq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})$$
$$+A_{n21}^{mq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})], \qquad \chi^{m} = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{K_n(\gamma r_q)(\delta_{\mu 1}\cos n\theta_q + \delta_{\mu 2}\sin n\theta_q) \quad (6)$$
$$\times[A_{n12}^{mq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q}) + A_{n22}^{mq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})] + K_n((\lambda_3^m)^{-3/2}\gamma r_q)$$
$$\times(\delta_{\mu 1}\cos n\theta_q + \delta_{\mu 2}\sin n\theta_q)[A_{n1s}^{mq\mu}\cos\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q}) + A_{n2s}^{mq\mu}\sin\gamma(x_{3q}-\tilde{x}_{3q})]\}.$$

It can be seen, that the solutions thus constructed contain as many unknown constants, as necessary in order to satisfy the boundary conditions. These solutions include possible stability loss modes of the fibres in the matrix, satisfy exactly the equilibrium equations and the attenuation conditions while moving away from the fibre series.

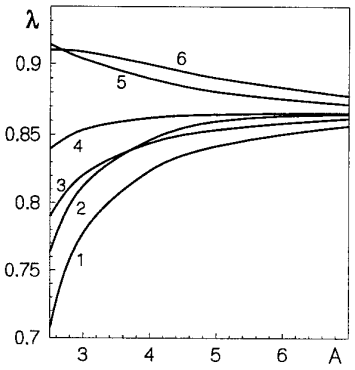


Fig. 1: Values of λ versus A for $C^a/C^m = 50$.

The in-plane, out-of-plane, in-phase, out-of-phase stability loss modes, stability loss modes with some shift between the neighbouring fibres, as well as other configurations of stability loss modes of the fibres in the matrix can be obtained as particular cases of the constructed solutions owing to the remaining freedom of introducing the corresponding symmetry and/or periodicity conditions. In order to satisfy the boundary conditions at the interfaces between the fibres and the matrix, we represent the solutions for the matrix in the coordinate systems (r_q, θ_q, x_{3q}) and introduce the obtained expressions together with the solutions for the fibres into (1). After that, a characteristic equation is derived in an explicit form by means of equating to zero the determinant of the obtained system of equations for the general case of solutions (5), (6), as well as for particular cases. Strength limit must correspond to a minimal value of loads (or maximal value of λ), calculated for possible instability modes. A numerical example for a fibre series with a period equal to AR is presented in Fig. 1. It was additionally assumed $x_{3q} = x_{3p}$ $(p, q = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Curves 1-6 represent solutions (values of λ) for some possible stability loss modes. Curve 1 corresponds to $(\mu, \tilde{x}_{3q}/q) = (1, \pi/\gamma)$, 2 to $(1, \pi/(2\gamma))$, 3 to $(2, \pi/\gamma)$, 4 to $(2, \pi/(2\gamma))$, 5 to $(2, 0)$, and 6 to $(1, 0)$. Cases 5 and 6 correspond to the stability loss modes which can become critical (for some A) in this example.

4. References

1 ROSEN, B.W.: Mechanics of composite strengthening, fiber composite materials, American Society of Metals, (1965), 37-75.

2 BABICH, I.YU., GUZ, A.N.: Stability of fibrous composites, In: Micromechanics of composite materials: Focus on Ukrainian research (Edit. Guz, A.N.), Applied Mechanics Reviews, **45**, No. 2 (1992), 61-80.

3 CHUNG, I., WEITSMAN, Y.A.: On the buckling/kinking compressive failure of fibrous composites, International journal of solids and structures, **32**, No. 16 (1995), 2329-2344.

4 SUTCLIFFE, M.P.F., FLECK, N.A.: Microbuckle propagation in fibre composites, Acta materialia, **45**, No. 3 (1997), 921-932.

5 BERBINAU, P., SOUTIS, C., GUZ, I.A.: On the failure criteria for unidirectional carbon fibre composite materials under compression, International Applied Mechanics, **35**, No. 5 (1999), 462-468.

6 BABICH, I.YU., SEMENYUK, N.P., BORISEIKO, A.V.: Stability and efficient design of cylindrical shells of metal composites subject to combination loading, International Applied Mechanics, **35**, No. 6 (1999), 595-601.

7 EVANS, A.G., ADLER W.F.: Kinking as a mode of structural degradation in carbon fiber composites, Acta Metallurgica, **26** (1978) 725-738.

8 GUZ, A.N., LAPUSTA, YU.N.: Three-dimensional problems of the near-surface instability of fiber composites in compression (model of a piecewise-uniform medium) (Survey), International Applied Mechanics, **35**, No. 7 (1999), 641-670.

9 GUZ, A.N.: Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies, Springer 1999.

Addresses: DR. Y. LAPUSTA, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH), Kaiserstr. 12, D-76131 Karlsruhe, Germany

Permanent address: S.Timoshenko Institute of Mechanics, Nesterov Str.3, Kiev, 03057, Ukraine

DR. A. SAMBORSKA, Ternopil State Technical University, Rus'ka Str. 56, Ternopil, 46001, Ukraine

U. NACKENHORST, B. W. ZASTRAU

On the Finite Element Analysis of Steady State Wheel–Rail Rolling Contact

The rolling contact of the wheel on the rail is computed by an ALE based finite element approach. The normal contact is modeled very realistic within the concept of rough surfaces, whereas the stick condition is enforced by a penalty approach. The computation for different contact constellations shows that the contact behavior between wheel and rail is non–Hertzian because of the non–linearities which are taken into account.

1. Introduction

Numerical methods are developed to help to explain wear and deterioration of railway wheels. In this paper an ALE based finite element approach of steady state rolling contact of elastic counterparts is presented. The treatment of the contact conditions is discussed. Studies with three–dimensional models show the practicability of the suggested method. By a comparison with Hertzian solutions the influence of the non–linearities on the contact is demonstrated.

2. Basic theory

Rolling contact problems are computed efficiently in an ALE frame of reference [1], which may be interpreted as the introduction of an observer riding on the axis of the rolling wheel. In the ALE picture the steady state rolling contact is described independent of time, the time derivatives are replaced by spatial gradients. Thus, no expensive time discretization is necessary and additionally, the mesh refinement may be concentrated to the contact region.

The equations of steady state rolling may be derived from Hamiltons Principle, which for two bodies $\mathcal{B}^{(i)}$ in rolling contact is expressed with respect to the ALE reference configurations $\chi^{(i)}(\mathcal{B})$,

$$\sum_{i=1}^{2}\Bigg[-\int_{\chi^{(i)}(\mathcal{B})}\hat{\varrho}^{(i)}\left(\mathrm{Grad}\boldsymbol{\varphi}^{(i)}\cdot\boldsymbol{w}^{(i)}\right)\cdot\left(\mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}^{(i)}\cdot\boldsymbol{w}^{(i)}\right)\mathrm{d}\hat{v}-\int_{\chi^{(i)}(\mathcal{B})}\boldsymbol{P}^{(i)}\cdot\cdot\mathrm{Grad}\boldsymbol{\eta}^{(i)}\,\mathrm{d}\hat{v}$$
$$+\int_{\chi^{(i)}(\mathcal{B})}\hat{\varrho}^{(i)}\hat{\boldsymbol{b}}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(i)}\,\mathrm{d}\hat{v}+\int_{\partial\chi^{(i)}(\mathcal{B})}\hat{\boldsymbol{t}}^{(i)}\cdot\boldsymbol{\eta}^{(i)}\,\mathrm{d}\hat{a}\Bigg]-\int_{\partial_c\phi(\mathcal{B})}(p\delta d+\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\boldsymbol{s})\,\mathrm{d}a=0\,,\quad(1)$$

where $\boldsymbol{\varphi}^{(i)}$ are the relative displacements, $\boldsymbol{\eta}^{(i)}$ are the virtual displacements, $\boldsymbol{w}^{(i)}$ are the rigid body velocities, $\boldsymbol{P}^{(i)}$ are the Piola–Kirchhoff stress tensors, $\hat{\boldsymbol{b}}^{(i)}$ and $\hat{\boldsymbol{t}}^{(i)}$ are the externally applied body force densities and surface loads respectively, and $\hat{\varrho}^{(i)}$ are the mass densities of the bodies i measured in the ALE reference configuration. The last integral represents the virtual work of the contact pressure p performed with the variation of the penetration d and the virtual work of the contact shear tractions $\boldsymbol{\tau}$ performed with the variation of the slip vector $\boldsymbol{s}$. This term is expressed on the contact surface in the actual deformed state $\partial_c\phi(\mathcal{B})$.

Special emphasis has to be laid onto the treatment of the rolling contact conditions. For the normal contact the concept of rough surfaces is applied as suggested by Willner [2] in the frame of large deformation elastic–elastic contact. This leads to a non–linear constitutive law for the pressure dependency from the penetration. The input data have been measured on real rails. The tangential stick conditions are applied by the enforcement of vanishing slip velocities $\dot{\boldsymbol{s}}$ via a penalty approach. Additionally, the vanishing impulse flux over the contact boarders has to be enforced [3]. This procedure ensures a path–independent solution of steady state rolling contact. For a more detailed description of the theoretical foundations it is referred to [4].

3. Application to the wheel–rail system

By three–dimensional finite element computations different contact constellations have been analyzed. In these parameter studies the lateral position of the wheel with respect to the rail has been varied in the range of –3mm to

+5mm measured from the neutral position. Because of the surface curvatures of the wheel and of the rail change in this range, the contact patch changes its size, shape and position, and also the maximal contact pressure changes its value as shown in figure 1. The finite element solutions are compared with the corresponding Hertzian solutions. It is conspicuous that the finite element computation leads to lower maximal contact pressures and to larger contact regions than the linear Hertzian theory. This is due to rough contact and non–linearities, which are taken into account, e.g. the reduction of the local curvatures.

It also attracts attention that the main contact point, i.e. the location of the maximal contact pressure, changes its lateral position drastically near the neutral position (between 0 and +2 mm) and again at +5mm. Here the contact is non–conforming, the initial curvature of the wheel is larger than that of the rail. But there is no two point contact or jump observed, the reduction of the curvatures leads to a smooth transition.

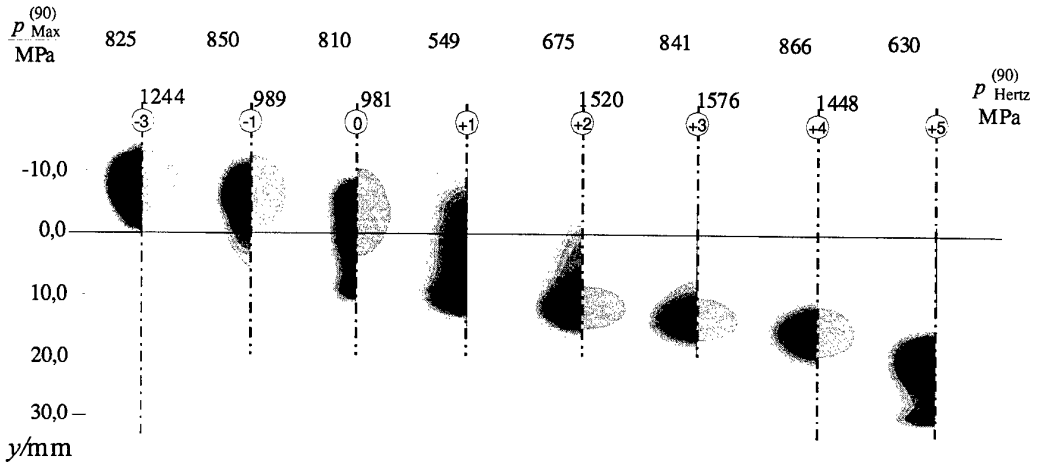


Figure 1: Change of the contact region by a lateral shift of the wheel.

4. Conclusions

A finite element approach for the computation of 3d elastic–elastic rolling contact with applications to the wheel–rail system has been suggested. A fully non–linear ALE–description has been chosen. The contact conditions have been modeled very realistic within the concept of rough surfaces. The numerical efficiency of the method allows parameter studies with realistic models for the wheel rail contact.

Acknowledgements

This work is supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) under contract Za141/5-2, which is gratefully acknowledged.

5. References

1 NACKENHORST, U.: Zur Berechnung schnell rollender Reifen mit der Finite Element Methode. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 1992.

2 WILLNER, K.: Ein statistisches Modell für den Kontakt metallischer Körper. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 1995.

3 NACKENHORST, U.: A new finite element rolling contact algorithm. In Gaul, L. and Brebbia, C.A. (eds.): Contact Mechanics IV, WIT–Press, Southamton, Boston (1999), 497–504.

4 NACKENHORST, U.; ZASTRAU, B.: Rolling Contact of Elastic Bodies - Basic Aspects of a Finite Element Approach. In Meskouris, K. and Wittek, U. (eds.): Aspects in Modern Computational Structural Analysis, Balkema Publishers, Rotterdam (1997), 385 -400.

Addresses: DR.–ING. UDO NACKENHORST, University of Federal Armed Forces Hamburg, Institute of Mechanics, D–22039 Hamburg, Germany. E–mail: *Udo.Nackenhorst@unibw–hamburg.de*
PROF. DR.–ING. BERND W. ZASTRAU, Technische Universität Dresden, Institute of Mechanics and Applied Informatics, D–01062 Dresden, Germany. E–Mail: *Bernd.W.Zastrau@mailbox.tu–dresden.de*

RONG, Q., LENZ, J., FREISCHLÄGER, C., SCHWEIZERHOF, K., SCHINDLER, H.J., RIEDIGER, D.

Knochenmodellation um ein Unterkiefer-Implantat unter Berücksichtigung der Revaskularisation und Resorption

In den vergangenen Jahren wurden in einer wachsenden Zahl von Veröffentlichungen mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente (FEM) die durch funktionell belastete Implantate und Implantatverteilungen im voll ausgereiften Unterkieferknochen hervorgerufenen Spannungsverteilungen analysiert. In diesem Beitrag wird versucht, mit dieser Methode auch die Modellierung des Knochens während der sog. Einheilphase zu simulieren. Das hierzu verwendete biomechanische Modell unterstellt, dass der nach der Insertion des Implantats ausgelöste Reparationsprozess durch eine von der unversehrten Knochenoberfläche ausgehende Revaskularisation (Neuversorgung mit Blutgefäßen) des Reparationsgebietes und eine damit einher gehende Substitution der nekrotischen Zone durch vitales Gewebe sowie auch durch Resorptionsprozesse gekennzeichnet ist.

1. Medizinische Fragestellung

Nach der Insertion eines i.a. aus Titan gefertigten Implantats liegt zwischen der vitalen Knochenoberfläche und dem Implantat ein dünner Ringspalt (Reparationszone) vor, der mit Koagulum und demineralisierter Knochenmatrix gefüllt ist. Die temporäre Unterbrechung der Blutzufuhr und die damit verbundene Nekrose des Knochengewebes triggert unmittelbar nach der Insertion Reparationsprozesse. Eine direkte Apposition des Knochens an das Implantat (Osseointegration) gelingt jedoch nur, wenn das knöcherne Implantatbett dauernden mechanischen Reizen ausgesetzt ist. Da das Implantat in der Einheilphase keine direkten Lasten erfährt, können diese Stimuli nur durch die Beanspruchungen des Unterkiefers unter funktionellen Prozessen (Kauen, Beißen, Schlucken etc.) bereit gestellt werden.

2. Biomechanische Modellierung und Ergebnisse

Als Stimulus für die Knochenmodellation wird in der vorliegenden Untersuchung die von Misessche Vergleichsspannung gewählt. In einem Element der diskretisierten FE-Struktur wird bei jedem Lastschritt Knochenreifung (geringfügige Erhöhung des Elastizitätsmoduls) nur dann erlaubt, wenn die Vergleichsspannung in ein sog. „Stimulusfenster" fällt; zu große oder zu kleine Beanspruchungen bewirken eine Resorption (geringfügige Erniedrigung des Elastizitätsmoduls). Da der Revaskularisationsprozess von der unversehrten Knochenoberfläche ausgeht, kann Wachstum nur von hierher in Richtung zum Implantat hin erfolgen. Deshalb wird im Modell ein Zuwachs des Elastizitätsmoduls im einem Element nur zugelassen, wenn es wenigstens in einem Knoten über eine „Brücke" mit Elementen der knochennahen Ringspaltschicht verbunden ist und diese „Brücken-Elemente" in vorangegangenen Lastschritten bereits mindestens eine Erhöhung ihres Elastizitätsmoduls erfahren haben.

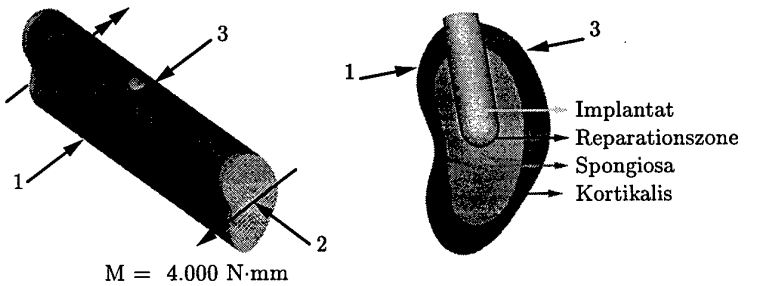


Abbildung 1: Balkenmodell und Querschnitt

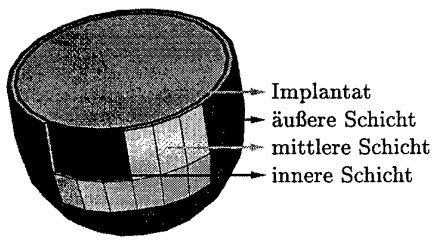


Abbildung 2: Teil-Vernetzung

Abb.1 zeigt das verwendete Unterkiefer-Modell. Es handelt sich um einen inhomogenen Balken (äußere kortikale Schicht, innerer Spongiosa-Kern) mit konstanter Querschnittsfläche. Der gewählte Querschnitt und somit der Implantatsitus entspricht dabei der Konfiguration um einen Prämolaren. Als funktionelle Bewegung des Unterkiefers wurde in dieser orientierenden Untersuchung alleine eine (beim Kauen dominierende) Biegung angenommen, wobei das Biegemoment zu M = 4.000 N·mm gewählt wurde, welches im implantatfreien Kiefer zu einer klinisch-

realistischen Durchbiegung von ca. 25 μm führt. Abb.2 zeigt die Teil-Vernetzung des FE-Modells in der Umgebung des Implantatbodens. Insbesondere wurde die mit einer Dicke von 200 μm angesetzte Reparationszone in drei parallele Schichten diskretisiert. Die verwendeten Materialparameter sind in der Tabelle 1 aufgeführt. Hierbei wurde dem klinisch beobachten Sachverhalt Rechnung getragen, dass die Spongiosa schneller reift als die Kortikalis.

	E-Modul [MPa]	ν
Implantat (Titan)	110.000	0,3
Reparationszone (Startwert)	500	0,3
Spongiosa (Zielwert)	2.000	0,3
Kortikalis (Zielwert)	18.000	0,3
schrittweise Änderung der Materialparameter im Ringspalt:		
im spongiösen Bereich	100 (Zu- bzw.	0
im kortikalen Bereich	50 Abname)	0

Tabelle 1: Elastizitätsmoduln und Querkontraktionszahlen

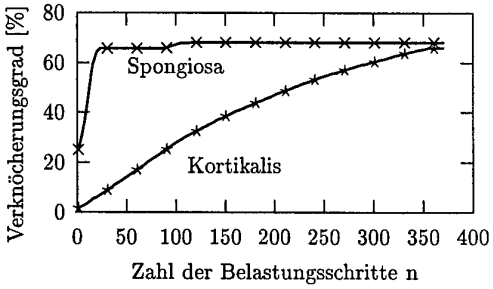


Abbildung 3: Verknöcherungsgeschichte

Der Verknöcherungsgrad der Spongiosa bzw. der Kortikalis nach dem n-ten Belastungsschritt wird als

$$E_S^*(n) = (\sum E_i(n) \cdot V_i)/(E_S \cdot V_S) \quad \text{bzw.} \quad E_K^*(n) = (\sum E_i(n) \cdot V_i)/(E_K \cdot V_K)$$

definiert, wobei E_i der im i-ten Element erreichte Elastizitätsmodul und V_i dessen Volumen, E_S bzw. E_K der gemessene Zielwert für den Elastizitätsmodul der Spongiosa bzw. der Kortikalis und V_S bzw. V_K das von der Spongiosa bzw. der Kortikalis in der Reparationszone eingenommene Volumen bezeichnen. Die numerischen Analysen zeigen, dass der maximal erzielbare Verknöcherungsgrad der Spongiosa entscheidend durch die untere Grenze und derjenige der Kortikalis durch die obere Grenze des gewählten Stimulusfensters bestimmt wird.

In der im Folgenden vorgestellten Analyse wurde für die von Misessche Vergleichsspannung das spezielle Stimulusfenster [0,16 MPa , 5,5 MPa] gewählt. Die sich hierfür einstellende Verknöcherungsgeschichte ist in Abb. 3 dargestellt: Während die Spongisa sehr schnell in ihre endgültige Konfiguration überführt wird, reift die Kortikalis deutlich langsamer. Nach dem Belastungsschritt n = 370 hat die Reparationszone ihre endgültige Konfiguration erreicht, d.h. zusätzliche Belastungsschritte führen zu keiner weiteren Knochenreifung.

Abb.4 veranschaulicht die Verteilung des Elastizitätsmoduls in der Reparationszone nach dem Zwischenschritt n = 24 (obere Abb.) und in der Endkonfiguration (n = 370; untere Abb.), und zwar in der äußeren (knochennahen), mittleren und inneren (implantatnahen) Schicht jeweils in den in Abb.1 angegebenen Ansichten 1, 2 und 3 (von links nach rechts). Bei n = 24 haben bereits weite Teile des spongiösen Reparationsgebiets nahezu den Zielwert E_S = 2.000 MPa erreicht; lediglich am Implantatboden hat eine mäßige Knochenmodellation stattgefunden. Ab etwa dem 30. Belastungsschritt laufen in der Spongiosa praktisch keine weiteren Reifevorgänge mehr ab und die weitere Knochenmodellierung beschränkt sich auf die Kortikalis.

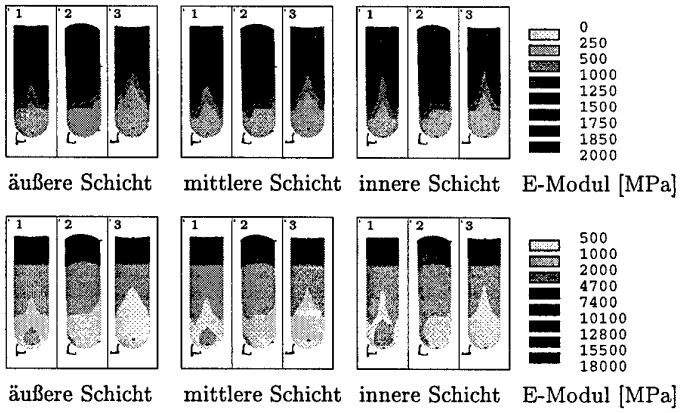


Abbildung 4: Verteilung des Elastizitätsmoduls (oben: Schritt n = 24, unten: Schritt n = 370)

Nach dem 370. Belastungsschritt (Endkonfiguration, untere Abb.) hat sich, mit Ausnahme der Umgebung des Implantatbodens, die Spongiosa im Wandbereich durch alle drei Schichten hindurch weitgehend homogen remodelliert, während der Zielwert E_K = 18.000 MPa in der Kortikalis halbwegs durchgehend nur in der knochennahen Schicht, und zwar lediglich an der Kieferoberfläche erreicht wird.

Diese Ergebnisse stimmen qualitativ gut mit den klinischen Befunden überein. Für eine auch in quantitativer Hinsicht befriedigende Modellierung von Knochen-Reifungsprozessen muss jedoch von Seiten der Klinik weiteres Datenmaterial bereit gestellt werden, damit die Simulationsparameter realistisch-sicher gewählt werden können.

Literatur

1 LENZ, J., RONG, Q., FREISCHLÄGER, C., SCHWEIZERHOF, K., SCHINDLER, H.J., RIEDIGER, D.: Einheilungsprozess eines Unterkiefer-Implantats unter Berücksichtigung der Revaskularisation: eine orientierende numerische Simulation. Z. Zahnärztl. Implantol., erscheint demnächst.

Anschrift: MSc. QIGUO RONG, Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik, Kaiserstr. 12, D-76128 Karlsruhe

SCHIECK, B.

Shakedown Analysis of shells with large strains and deformations

A finite element method for shakedown analysis of shells with large elasto-plastic strains and rotations is presented, which is based on the simultaneous computation of the relevant load cases using a common plastic strain field.

1. Introduction

The classical shakedown analysis based on Melan's theorem [1] is performed by an optimization procedure that is valid only for small strains and deformations. Improvements towards shakedown with small deformations superposed on large pre-deformations were presented e.g. in [2]. For general non-linear deformations with finite strains and rotations the computation of load histories by "multi reverse load cycles" was proposed in [5]. However, for admissible load domains with more than 2 independent load parameters this technique becomes inefficient due to the large number of possible load cycles along the edges of the load domain. This disadvantage is overcome by the present approach, that is the "simultaneous computation of all relevant load cases". The relevant load cases are located at the corners of the admissible load domain and at the snap-through and snap-back points with extremal loads. All load cases are coupled by the common plastic strain field $\mathbf{E}^{\mathrm{p}}$.

The following extended static shakedown theorem has been proved by Polizzotto and Borino [3] for small strains and large rotations and later by Schieck [4] for the more general case of large strains and rotations: "Shakedown occurs, if there exists a fictitious time-independent plastic strain field $\mathbf{E}^{\mathrm{p}}$ such, that the fictitious elastic stress response $\mathbf{S}$ due to the varying loads and $\mathbf{E}^{\mathrm{p}}$ does not violate the yield limit." The task of the shakedown finite element, which will be considered next, is to find this plastic strain field $\mathbf{E}^{\mathrm{p}}$ by the method of "simultaneous computation of all relevant load cases".

2. A shakedown finite element

The technique of the shakedown finite element is to start the simultaneous computation of all relevant load cases with a small elastic load domain and then to increase the load domain to its limit size step by step. During this procedure the common plastic strain field $\mathbf{E}^{\mathrm{p}}$ evolves due to the plastifications of all plastifying load cases (denoted by j):

$$\dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{p}} = \sum_j \dot{\lambda}_j \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}_j^{\mathrm{p}}}. \tag{1}$$

There, $\phi = \phi(\mathbf{S}_j^{\mathrm{p}}\, \mathbf{C}_j) \le 0$ denotes the yield condition, $\mathbf{S}_j^{\mathrm{p}} = \mathbf{S}_j - \partial\psi / \partial \mathbf{E}^{\mathrm{p}}$ is the plastic stress derived from the Clausius-Duhem inequality, $\mathbf{C}_j$ is the right Cauchy-Green tensor, $\psi = \psi(\mathbf{E}_i^{\mathrm{e}}, \mathbf{E}^{\mathrm{p}})$ is the free energy, $\mathbf{E}_i^{\mathrm{e}}$ are the elastic strains, and $\dot{\lambda}_j \ge 0$ are the yield parameters that are obtained as the solution of the system of consistency equations

$$\dot{\phi}_i = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}_i^{\mathrm{p}}} \bullet \frac{\partial \mathbf{S}_i^{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{E}^{\mathrm{e}}} + 2 \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{C}_i} \right) \bullet \dot{\mathbf{E}}_i + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}_i^{\mathrm{p}}} \bullet \left(\frac{\partial \mathbf{S}_i^{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{E}^{\mathrm{p}}} - \frac{\partial \mathbf{S}_i^{\mathrm{p}}}{\partial \mathbf{E}^{\mathrm{e}}} \right) \bullet \sum_j \dot{\lambda}_j \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}_j^{\mathrm{p}}} = 0. \tag{2}$$

This linear equation system can be solved uniquely as far as the shakedown limit is not reached. At the shakedown limit the equation system becomes singular due to alternating plastification, the regular behavior at the limit for large deformations.

The considered theory is implemented into the finite strain elastoplastic shell element that has been presented in [6].

3. Numerical application

As application a shallow arch shell is chosen that is similar to the shallow arch truss in [5]. The problem definition and the shakedown domain as the set of the corners of all possible admissible load domains are shown in fig. 1. One recognizes that the shakedown domain computed with the present method is partially larger than the domain obtained with the method of "multi reverse cycle computations" proposed in [5]. The reason is that by application of the latter method one has to decide

whether the incremental plastic dissipation reaches zero or not, what is frequently difficult after the computation of a restricted number of load cycles. However, the present method doesn't suffer under such problems and it always allows to obtain the real shakedown limit. Fig. 2 defines the relevant load cases at the corners of the admissible load domain (left part) and presents the load-displacement curves for them during increasing the admissible load domain. One recognizes that the shakedown limit is reached when after load cases 2 and 3 load case 4 becomes plastic, what causes alternating plastification.

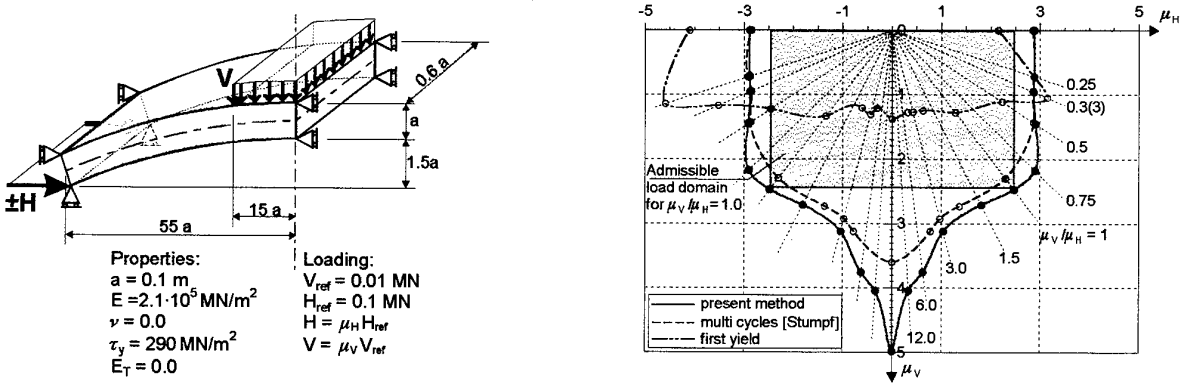


Fig. 1: Shakedown of a shallow arch: problem definition and shakedown domain

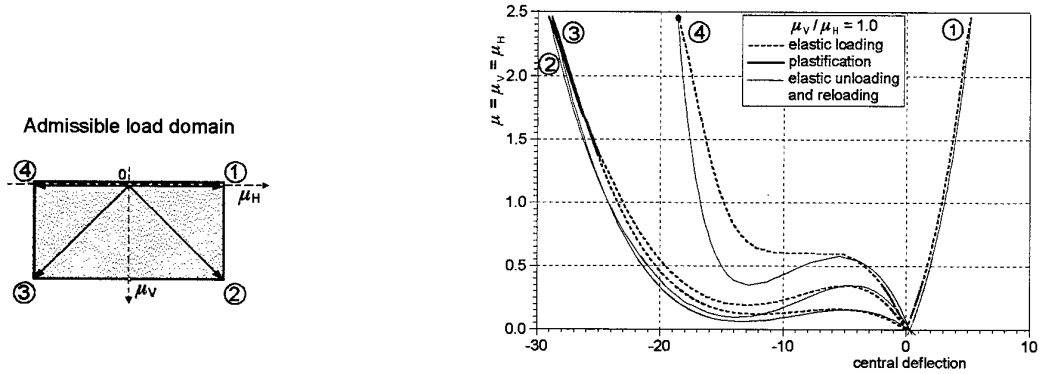


Fig. 2: Relevant load cases at the corners of the admissible load domain and evolution of the central deflection for the relevant load cases

Acknowledgement

The author gratefully acknowledges support by the Fachhochschule Lübeck, permanent scientific support by Prof. em. Dr.-Ing. H. Stumpf and by Dr.-Ing. W. M. Smoleński and financial support of the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) within the SFB-Project 398/A7.

4. References

1 MELAN, E.: Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischem Baustoff, Sitzb. Akad. Wiss., Wien, IIa, 145 (1936), 195 pp.
2 WEICHERT, D. and HACHEMI, A.: Influence of geometrical nonlinearities on the shakedown of damaged structures, Int. J. Plasticity 14.9 (1998), 891-907.
3 POLIZZOTTO, C. and BORINO, G.: Shakedown and steady-state responses of elastic-plastic solids in large displacements, Int. J. Solids Structures 33.23 (1996), 3415-3437.
4 SCHIECK, B.: The proof of an extension of Melan's theorem at large strains. Lecture notes of the GAMM conference in Metz 1999. (To appear in ZAMM 79, 2000).
5 STUMPF, H.: Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity; Int. J. Plasticity 9 (1993), 583-602.
6 SCHIECK, B., SMOLEŃSKI, W. M., STUMPF, H.: A shell finite element for large strain elastoplasticity with anisotropies; part I: shell theory and variational principle; part II: constitutive equations and numerical applications; Int. J. Solids Structures 36 (1999), 5399-5451.

Addresses: PROF. DR.-ING. B. SCHIECK, Fachhochschule Lübeck, FB M+W, D-23562 Lübeck, Germany; guest at Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, Ruhr-Universität, D-44780 Bochum, Germany; e-mail: schieck@fh-luebeck.de .

A. STIEGELMEYR, F. PFEIFFER

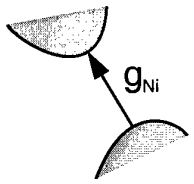
Simulation of Rigid Multibody Systems with Unilateral Constraints

This paper deals with the numerical simulation of rigid multibody systems with unilateral contacts. Following the classical procedure, the unilateral contacts are modelled with properly stiff force elements, which induce high frequencies. As a consequence the numerical computation of the problem is very time consuming. If these high frequencies are of no interest, in many cases a rigid contact model is the better choice with respect to the simulation time. From the mathematical point of view, the application of such models leads to set valued contact laws and thus requires methods from non smooth analysis. A number of authors [1] present a straightforward formulation of the contact problem after shifting the contact law to the acceleration level. Unfortunately this preparative limits the class of computable problems and increases the problem of numerical drift phenomenon. In this paper we present a formulation of the contact problem on the position level. Our aims are to reduce the complexity of the computer codes, to speed up the simulation and to improve its robustness. In order to show the basic idea of the algorithm we concentrate on the normal contact problem, only. Some comparisons of simulation results with measurements confirm the theory.

1. Contact Kinematics

The distance $g_{Ni}(\boldsymbol{q},t)$ of two bodies depends on the generalized coordinates $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^f$ and the time t. Assuming smooth functions g_{Ni}, the total differential (1) splits the matrix $\boldsymbol{W}_N \in \mathbb{R}^{f \times n_N}$ and the vector $\boldsymbol{w}_N \in \mathbb{R}^{n_N}$. n_N denotes the complete number of normal contacts. Equation (2) gives a discretisation of $\boldsymbol{g}_N$ up to the first order.

$$d\boldsymbol{g}_N(\boldsymbol{q},t) = \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{g}_N}{\partial \boldsymbol{q}}}_{\boldsymbol{W}_N^T} d\boldsymbol{q} + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{g}_N}{\partial t}}_{\boldsymbol{w}_N} dt \tag{1}$$



$$\Delta \boldsymbol{g}_N(\boldsymbol{q},t) = \boldsymbol{W}_N^T \Delta \boldsymbol{q} + \boldsymbol{w}_N \Delta t + \boldsymbol{R}_N \tag{2}$$

$$\boldsymbol{g}_N{}^{l+1} - \boldsymbol{g}_N{}^{l} = \boldsymbol{W}_N^T (\boldsymbol{q}^{l+1} - \boldsymbol{q}^{l}) + \boldsymbol{w}_N \Delta t + \boldsymbol{R}_N \tag{3}$$

Terms of higher order are summarized in $\boldsymbol{R}_N$. Finally $\Delta \boldsymbol{g}_N$ can be represented by the difference of the normal distances of two following time steps "l" and "$l+1$" (see (3)).

2. Equation of Motion

Usually the equations of motion in absence of any unilateral conditions are given in the form

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t)\ddot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \boldsymbol{0} \tag{4}$$

$\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{f \times f}$ is the mass matrix and $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^f$ the vector of gyroscopic and active forces. This system implicitly fulfils all frictionless bilateral constraints. If additional contact forces influence the system, an adequate extension completes the equations of motion [1].

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t)\ddot{\boldsymbol{q}} - h(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{\lambda}_N = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

The vector of all n_N normal contact forces $\boldsymbol{\lambda}_N$ is transformed into the space of generalized coordinates $\boldsymbol{q}$ by the Jacobian $\boldsymbol{W}_N$. To solve the contact problem on the position level, the equations of motion have to be integrated for the purpose of a certain discretisation scheme. In the simplest case we use an Euler-discretisation.

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = \frac{\boldsymbol{v}^{l+1} - \boldsymbol{v}^{l}}{\Delta t}; \qquad \boldsymbol{q}^{l+1} = \boldsymbol{q}^{l} + \boldsymbol{v}^{l+1} \Delta t \tag{6}$$

It should be noted that the discretisation (6) has to be a combination of an explicit (acceleration $\rightarrow$ velocity) and an implicit (velocity $\rightarrow$ position) step, no matter what the order of the applied scheme is. However, in this special

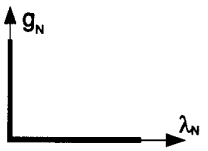
case the equations of motion (5) together with (6) become:

$$\boldsymbol{v}^{l+1} = \boldsymbol{v}^l + \boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{h}\Delta t + \boldsymbol{W}_N \boldsymbol{\lambda}_N \Delta t\right); \qquad \boldsymbol{q}^{l+1} = \boldsymbol{q}^l + \boldsymbol{v}^{l+1}\Delta t \tag{7}$$

3. Contact Law

The contact law in the normal direction for rigid bodies is based on the impenetrability condition, thus a law on the position level. The complementarity condition (8) is a mathematical representation which can be identified from its graph very easily. The basic idea is that both, the normal force λ_N as well as the normal distance g_N can not be negative. Moreover, both quantities can not be positive at the same time.

$$\boldsymbol{g}_N{}^{l+1} \geq \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{\lambda}_N{}^{l+1} \geq \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{g}_N^{T\,l+1}\boldsymbol{\lambda}_N{}^{l+1} = \boldsymbol{0}; \tag{8}$$



A formulation for the complete contact problem in the normal direction can be obtained by eliminating $\boldsymbol{q}^{l+1}$ in (3) using (7). The result together with the complementarity (8) represents the contact problem in the normal direction as a linear complementarity condition.

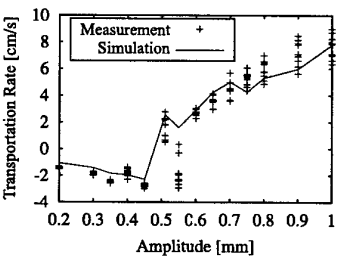
$$\begin{gathered}\boldsymbol{g}_N{}^{l+1} = \boldsymbol{W}_N^T\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{W}_N\boldsymbol{\lambda}_N\Delta t + \boldsymbol{W}_N^T\Delta t(\boldsymbol{v}^l + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{h}\Delta t) + \boldsymbol{w}_N\,\Delta t + \boldsymbol{g}_N{}^l + \boldsymbol{R}_N \geq \boldsymbol{0}; \\ \boldsymbol{\lambda}_N{}^{l+1}\,\Delta t \geq \boldsymbol{0}; \quad \boldsymbol{g}_N^{T\,l+1}\boldsymbol{\lambda}_N{}^{l+1}\,\Delta t = \boldsymbol{0};\end{gathered} \tag{9}$$

The numerical solution $\boldsymbol{\lambda}_N$ of this problem can be found with Lemke's algorithm [3], for example. With the contact force the equation of motion (7) can be solved for the new velocity $\boldsymbol{v}^{l+1}$ and position $\boldsymbol{q}^{l+1}$. This completes one step of the integration procedure.

As mentioned above, we do not include the tangential problem in this paper. In order to give the main idea of the algorithm the discussion of the normal contact problem suffices, since it includes the basic idea of the overall procedure.

4. Example

A rather complex system with lots of contact phenomena is the depicted vibratory feeder. The diagram shows the transportation rate of the parts with respect to the amplitude of the vibratory feeder. The measurement points out that the process is subjected to fluctuations. It is obvious out that the simulation result lies within the fluctuation of the measurement. Solely, near the point of velocity reversal, were the process changes from negative to positive transportation rates (amplitude: 0.5-0.6 mm), a discrepancy can be seen. The reason is that in this area the feeder is extremely sensitive to the system parameters and requires their identification with very high precision. However, such a parameter set is not of practical interest, because the aim of the investigation is to find stable machine parameters with high transportation rates were the process is not sensitive to the parameters.



5. References

1 F. Pfeiffer, Ch. Glocker: Multibody Dynamics Unilateral Contacts, Wiley Series in Nonlinear Science John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996

2 J. J. Moreau: Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics, Preprint, Montpellier, 1987

3 K. G. Murty: Nonlinear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, Heldermann Verlag, Berlin, 1988

4 A. Stiegelmeyr, F. Pfeiffer: A Time Stepping Algorithm for Mechanical Systems with Unilateral Contacts, Proceedings of DETC'99, ASME Design Engineering, September 12.-15., 1999, Las Vegas, Nevada

Addresses: Prof. Dr. F. Pfeiffer, A. Stiegelmeyr Technische Universität München, Lehrstuhl B für Mechanik, Boltzmannstr. 15, 85748 Garching

WEINBERG, KERSTIN; CARSTENSEN, CARSTEN

Experimental Comparison of Some Recent Finite Element Methods for the Reissner-Mindlin Plate Model

This paper is devoted to numerical studies on the practical performance of shear-locking free finite element methods for the Reissner-Mindlin plate recently introduced in mathematical literature.

1. Mechanical Model and Finite Element Discretisation

The standard Reissner–Mindlin variational formulation for rotations $\vartheta = (\vartheta_x, \vartheta_y) \in H_0^1(\Omega)^2$ and displacements $w \in H_0^1(\Omega)$ is – because of the shear locking phenomena – not sufficient for effective finite element discretisation. Recently, new finite element technologies were proposed in mathematical literature [1, 3, 7], where an additional linear constaint $\gamma := (t^{-2} - \alpha)(\nabla w - \vartheta)$ establishs a mixed variational form. The parameter α is bounded with $0 \leq \alpha < t^{-2}$, including the classical mixed model of [2] with $\alpha = 0$. Here $\alpha = \alpha(x)$ is a possibly discontinuous function which may vary with $x \in \Omega$. With bilinear forms

$$a(\vartheta, w; \varphi, v) := \int_\Omega \varepsilon(\vartheta) : \mathbf{C}\varepsilon(\varphi)\, dx + \int_\Omega \alpha\,(\vartheta - \nabla w) \cdot (\varphi - \nabla v)\, dx, \tag{1}$$

$$b(\vartheta, w; \eta) := \int_\Omega (\vartheta - \nabla w) \cdot \eta\, dx, \tag{2}$$

$$c(\gamma; \eta) := \int_\Omega \beta\, \gamma \cdot \eta\, dx, \qquad \beta := 1/(t^{-2} - \alpha), \tag{3}$$

linear strain $\varepsilon = \mathrm{sym}(\nabla\vartheta)$ and elasticity operator $\mathbf{C}$ defined by $\mathbf{C}\varepsilon = \frac{1}{12}\frac{\lambda}{\mu k}\mathrm{tr}\,\varepsilon I + \frac{1}{6k}\varepsilon$ (μ, λ Lamè–Constants) the **continuous problem** reads: *Find* $(w, \vartheta, \gamma) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2$ *such that*

$$a(w, \vartheta; v, \varphi) + b(v, \varphi; \gamma) = (g; v), \tag{4}$$

$$b(w, \vartheta; \eta) - c(\gamma; \eta) = 0 \qquad \textit{for all } (v, \varphi, \eta) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2. \tag{5}$$

For finite element discretisation we replace $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2$ by discrete spaces $V_h \times W_h \times \Gamma_h$ which base on a mesh $\mathcal{T}$ and consists of $\mathcal{T}$-piecewise polynomials of degree $\leq k$, denoted here with subindex h.

$$\mathcal{P}_k(\mathcal{T}) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \forall T \in \mathcal{T},\, u|_T \in \mathcal{P}_k(T)\} \qquad \mathcal{B}_3(\mathcal{T}) := \{u|_T \in \mathcal{P}_3(T) \text{ and } u = 0 \text{ on } \partial T\} \tag{6}$$

We compare finite element discretisations with constant shear approximation, i.e. $\Gamma_h := \mathcal{P}_0(\mathcal{T})^2$ and with

$$V_h \times W_h := \big(\mathcal{P}_1^{NC}(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times \big((\mathcal{P}_1(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{B}_3(\mathcal{T})) \cap H_0^1(\Omega)\big)^2, \qquad \alpha = 0 \tag{7}$$

$$V_h \times W_h := \big(\mathcal{P}_2(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times \big((\mathcal{P}_1(\mathcal{T}) \oplus \mathcal{B}_3(\mathcal{T})) \cap H_0^1(\Omega)\big)^2, \qquad \alpha \neq 0 \tag{8}$$

$$V_h \times W_h := \big(\mathcal{P}_2(\mathcal{T}) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times \big((\mathcal{P}_2(\mathcal{T})) \cap H_0^1(\Omega)\big)^2, \qquad \alpha \neq 0 \tag{9}$$

2. Error Control and Numerical Performance

All discretisations are locking free and asymptotically stable with mesh size $h \to 0$ (cf. [1, 2, 7]). But to assess whether these theoretical predictions are observed for applicable, reasonable sized (but for the mathematical analysis possibly too coarse) meshes too, needs numerical investigation. For choice of parameter α we prosecute two strategies, both avoiding strange preasymptotic performance as observed with e.g. $\alpha = 1$ [8]. We compare a mesh adapted parameter α due to [6, 8] applying elementwise $\alpha = \alpha(T) = 1/(h_T^2 + t^2)$, with a model adapted but fixed parameter α using thickness t as a measure of model size $\alpha = 1/t$.

First an all side clamped L-shaped plate $(-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$ is computed. The (unknown) exact solution is expected to be singular near the origin at the re-entering corner even though the load is uniformly distributed and the material parameters are constant. Instead of computing a reference solution on a very fine mesh (and then providing a lot of

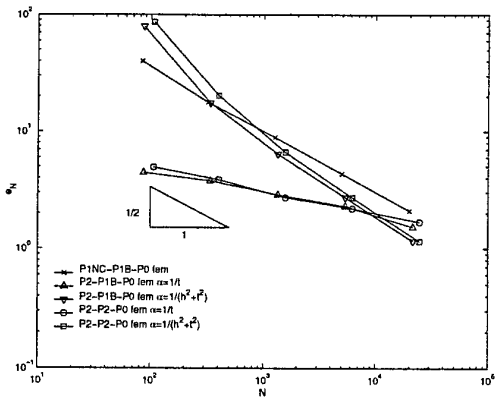
data for the public) in [4] a method is proposed to compute only one (problem depending) constant C which then allows an error representation of discrete solution (w_h, ϑ_h) in natural energy norm

$$e_h := \left(\|\mathbb{C}^{1/2}\varepsilon(\vartheta - \vartheta_h)\|^2 + t^{-2}\|\vartheta - \vartheta_h - \nabla(w - w_h)\|^2\right)^{1/2}, \tag{10}$$

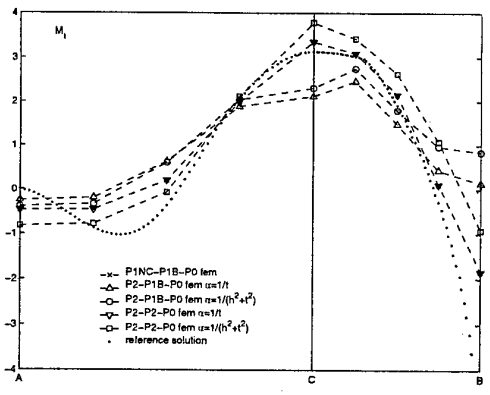
what equals the square root of

$$C - \|\mathbb{C}^{1/2}\varepsilon(\vartheta_h)\|^2 + t^{-2}\|\nabla w_h - \vartheta_h\|^2 - 2\big((t^{-2} - \alpha)(\nabla w_h - \vartheta_h) - \gamma_h; \nabla w_h - \vartheta_h\big) \tag{11}$$

with the real number $C := (f; w) = \|\mathbb{C}^{1/2}\varepsilon(\vartheta)\|^2 + t^{-2}\|\vartheta - \nabla w\|^2$. In practice we may use a finite element calculation on a very fine mesh or an extrapolation technique to provide this constant (cf. [4]). Figure 2 displays the relative energy error $e_N = e_h/\sqrt{C}$ versus the degrees of freedom with uniformly (but presumably sub-optimal) refined meshes, calculated with an extrapolated constant $C = 0.4062 \cdot 10^{-8}$ and started with an initial mesh of 6 finite elements.



The $P_1^{NC} - P_1^B - P_0$ discretisation yields convergence rates smaller than one ($\approx 1/2$) what is still better than the error reduction archieved with $P_2 - P_1^B - P_0$ and $P_2 - P_2 - P_0$ discretisations if α is an constant number, $\alpha = 1/t$. But significant improvement is obtained in case of mesh adapted α, $\alpha = 1/(h_T^2 + t^2)$ up to convergence rate 3/2. (Because of the singularity even better convergence may achieved with adaptive refined finite element meshes, cf. [5].) Thickness t has no significant influence on approximation quality (the discretisations are really locking free).



Besides stress resultants calculated on an all side hard simply supported and uniformly loaded skewed plate are displayed. The obtused corners of 120 degrees cause stress singularities. Here the scaled principal moments M_I computed with a uniform 32 finite element mesh are plotted along lines from the 60 degree corner (A) to plate center (C) to 120 degree corner (B). The results underlines the superiority of $P_2 - P_2 - P_0$ discretisation with mesh adpted α, verified in numerous further computations, too.

3. References

1 ARNOLD, D.N., BREZZI, F.: Some new elements for the Reissner-Mindlin plate model. Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications (J.L. Lions, C. Baiocchi, eds.) Masson. (1993) 287-292.

2 ARNOLD, D.N., FALK, R.S.: A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate. SIAM J. Numer. Anal. **26**, (1989) 1276–1290.

3 BRAESS, D.: Finite Elements. Cambridge University Press (1997).

4 CARSTENSEN,C.; WEINBERG,K.: Calculating the Energy-Norm FEM-Error for Reissner-Mindlin Plates Without Known Reference Solution. Technical report 00-03. Christian–Albrechts–Universität zu Kiel.

5 CARSTENSEN,C.; WEINBERG,K.: Adaptive mixed finite element method for Reissner-Mindlin plates. Technical report 00-07. Christian–Albrechts–Universität zu Kiel.

6 CHAPELLE,D.; STENBERG,R.: An optimal low-order locking–free finite element method for Reissner–Mindlin plates. Math. Models and Methods in Appl. Science **8** (1998) 407–430.

7 LOVADINA, C.: A new class of finite elements for Reissner-Mindlin plates. SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996) 2457—2467.

8 WEINBERG,K.: An adaptive finite element approach for a mixed Reissner–Mindlin plate formulation. Technical report 99-21. Christian–Albrechts–Universität zu Kiel.

Addresses: DR. KERSTIN WEINBERG, PROF. DR. CARSTEN CARSTENSEN, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Ludewig-Meyn-Str. 4, D-24098 Kiel, Germany, {kw,cc}@numerik.uni-kiel.de

ZEMAN, V.; JEDLIČKA, Z.

Seismic Vibration of Nonconservative Mechanical Systems with Viscodampers

The contribution is devoted to the seismic vibration analysis of nonconservative mechanical systems with viscodampers by a new modified response spectrum method. The method is based on the modal analysis of non-classic damped systems with frequency dependent viscodampers. The seismic excitation is described by an acceleration response spectrum. The method is applied for the seismic analysis of the primary coolant loop of the nuclear reactor.

1. Model of nonconservative mechanical systems with viscodampers

The mathematical model of the system with viscodampers (bellow only dampers) can be written for the seismic excitation caused by a translational motion of the base in the form

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}(t) + [\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}(\omega)]\,\dot{\boldsymbol{q}}(t) + [\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}(\omega)]\,\boldsymbol{q}(t) = -\sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_j \ddot{u}_j(t)\,, \tag{1}$$

where $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{V}^{-T}\mathrm{diag}(2D_\nu\Omega_\nu)\boldsymbol{V}^{-1}$ is a proportional damping matrix of the system without dampers, $\boldsymbol{r}_j$ is a vector of the static displacement of the system invoked by the unit translation of the base and $\ddot{u}_j(t)$ is the acceleration of the base in the direction of the coordinate axes in sequence $x(j=1)$, $y(j=2)$, $z(j=3)$. Proportional damping is expressed by the damping ratio D_ν of eigenshapes characterized by eigenfrequencies Ω_ν and eigenvectors $\boldsymbol{v}_\nu$ of the conservative model (for $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{B}(\omega) = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{K}(\omega) = \boldsymbol{0}$, $\ddot{u}_j(t) = 0$). For the expression of the matrix $\boldsymbol{B}_0$ we introduced modal matrix $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_\nu]$, which fulfills relation $\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{E}$. The damping matrix $\boldsymbol{B}(\omega)$ and the stiffness matrix $\boldsymbol{K}(\omega)$ of the dampers are frequency dependent [1].

2. Seismic response of system with dampers

Let the seismic excitation be described by the known displacement response spectra [2]

$$S_d^{(j)}(\Omega, D) = \max_t \frac{1}{\Omega\sqrt{1-D^2}} \left| \int_0^t \ddot{u}_j(\tau) e^{-D\Omega(t-\tau)} \sin\left[\Omega\sqrt{1-D^2}(t-\tau)\right] d\tau \right| \tag{2}$$

for two horizontal directions ($j = 1, 3$) and the vertical direction ($j = 2$) of the seismic excitation of the base. Let us consider that in the frequency domain $\omega \in < 0, 2\pi f > [rad.s^{-1}]$ of the seismic excitation m pairs of complex conjugated eigenvalues of the model (1) $\lambda_\nu(\omega) = -\alpha_\nu(\omega) + i\beta_\nu(\omega), \lambda_{\nu+m}(\omega) = -\alpha_\nu(\omega) - i\beta_\nu(\omega)$ for $\nu = 1, 2, .., m$ exist, whose imaginary parts fulfill the condition $\beta_\nu = \lim_{\omega\to\beta_\nu} \Im\{\lambda_\nu(\omega)\}$, $\beta_\nu \le 2\pi f$.

The response for the seismic excitation in the direction j can be expressed by the node displacements as

$$q_i(t) = -\sum_{\nu=1}^{2m} q_{i,\nu} \int_0^t \boldsymbol{q}_\nu^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_j \ddot{u}_j(\tau) e^{\lambda_\nu(t-\tau)} d\tau\,, \quad i = 1, 2, .., n\,, \tag{3}$$

where $\boldsymbol{q}_\nu = [q_{i,\nu}]$ are eigenvectors of the homogeneous mathematical model (1) (where the right side is equal to $\boldsymbol{0}$). Each sum element assigned to the index ν represents the ν^{th} mode. If we sum in (5) modes corresponding to each pair of complex conjugated eigenvalues λ_ν and $\lambda_{\nu+m}$, the expression (5) can be rewritten in the form

$$q_i(t) = -2\sum_{\nu=1}^{m} \left| q_{i,\nu}\boldsymbol{q}_\nu^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_j \right| \int_0^t \ddot{u}_j(\tau) e^{-\alpha_\nu(t-\tau)} \cos\left[\beta_\nu(t-\tau) + \varphi_{i,\nu}\right] d\tau\,, \tag{4}$$

where $\varphi_{i,\nu}$ is the argument of the complex number $q_{i,\nu}\boldsymbol{q}_\nu^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_j$. If we compare convolution integrals in (2) and (4), maxima of absolute values of the sum of the pair of modes (members in the sum in (4)) can be approximated by

$$\hat{q}_{i,\nu}^{(j)} \doteq 2\left| q_{i,\nu}\boldsymbol{q}_\nu^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{r}_j \right| \beta_\nu S_d^{(j)}(\Omega_\nu, D_\nu)\,, \quad i = 1, 2, .., n\,;\; j = 1, 2, 3\,, \tag{5}$$

where arguments of the displacement response spectra are $\Omega_\nu = |\lambda_\nu|$, $D_\nu = \frac{\alpha_\nu}{|\lambda_\nu|}$.

Upper effective estimate of the displacement q_i excited by the translation of the base in all directions of coordinate axes is given by the expression

$$\hat{q}_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} \left(\hat{q}_i^{(j)}\right)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{m} \left(\hat{q}_{i,\nu}^{(j)}\right)^2}, \quad i = 1,2,..,n. \tag{6}$$

3. Seismic response of primary coolant loop of WWER 1000

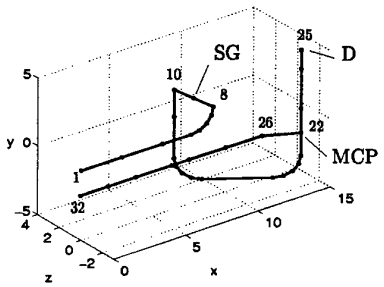


Figure 1: Primary coolant loop

The model of the primary coolant loop of nuclear power plants (NNPs) with the reactor WWER 1000 (Fig. 1) was constituted using technique described in [1]. The chosen nodes of the system, the mass centers of the steam generator (SG), the main circulating pump (MCP) and the drive (D) of the main circulating pump are marked in the Fig. 1. The use of dampers GERB (see [3]) with frequency dependent damping and stiffness parameters in two horizontal and vertical directions results in existence of twelve pairs of complex conjugated eigenvalues in frequency domain $\omega \in \langle 0, 2\pi f \rangle$ of the seismic excitation defined in (5) for $f = 30$[Hz].

Upper effective estimates of the node displacements in the directions of the coordinate axes computed for the nonconservative system according to expressions (5) and (6) are shown in Fig. 2. This figure demonstrates the behaviour for three different types of the damping model: PD ($D = 0.02$) – the system without dampers with the proportional damping only, PDG ($D = 0.02; 0.05; 0.1$) – the system with the proporcional damping with dampers GERB, whose properties are modeled by the frequency dependent stiffnesses, VKG – the non-classic damped system with GERBs modeled by the Voigt-Kelvin model with frequency dependent parameters. From the computed upper effective estimates of the node displacements of the primary

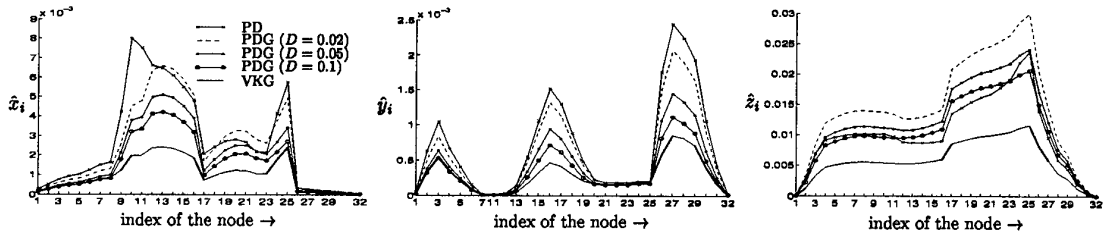


Figure 2: Upper effective estimate of the loop node displacements

coolant loop in NPP Temelín the following conclusions can be formulated:

- installed dampers significantly decrease the seismic response
- numerical experiments show that the substitution of properties of dampers by the frequency dependent stiffness and the proportional damping of the whole piping system is not suitable.

Acknowledgements

This research was supported by the grant project No. 101/00/0345 of the Grant Agency of the Czech Republic.

4. References

1 ZEMAN, V.; JEDLIČKA, Z.: Seismic response of body–piping systems with viscodampers. Proceedings of the Colloquium Dynamics of Machines 2000, , 253–260, Prague 1999.

2 GUPTA, A. K.: Response Spectrum Method in Seismic Analysis and Design of Structures. Blackwell Scientific Publications, Boston 1990.

3 FA. GERB: Technischer Bericht Rohrleitungsdämpfer, Berlin, 1998.

Addresses: PROF. ING. VLADIMÍR ZEMAN, DRSC.; ING. ZDENĚK JEDLIČKA,, University of West Bohemia in Pilsen, Department of Mechanics, Univerzitní 22, 306 14 Plzeň, Czech Republic.

BADER, V.; GROSCHE, F.-R.

Experimentelle Untersuchungen zur aktiven Beeinflussung des Wirbelsystems über angestellten Deltaflügeln

Infolge des Druckfeldes über einem angestellten Deltaflügel neigen die charakteristischen Tütenwirbel dazu aufzuplatzen. Der Aufplatzpunkt wandert mit zunehmenden Anstellwinkel über die Flügelhinterkante nach vorne [1]. Es entsteht ein hecklastiges Nickmoment und, im Fall des asymmetrischen Aufplatzens der Wirbel zum Beispiel bei einem schiebenden Flügel, kann ein instabiles Rollmoment um die Längsachse des Flügels auftreten [2]. Ziel dieser Arbeit ist es, für Flugzeuge mit Deltaflügelkonfiguration Methoden zur günstigen Beeinflussung der Flügelumströmung beim Flug unter großen Anstellwinkeln zu finden. Dafür werden die bei Deltaflügeln charakteristischen Wirbelströmungen auf Möglichkeiten zu ihrer Beeinflussung untersucht, vor allem die Beeinflussung des Wirbelaufplatzens mittels Leitflächen auf der Saugseite des Flügels.

Umfangreiche experimentelle Untersuchungen wurden mit Deltaflügeln in einem Wasserkanal und einem Windkanal ausgeführt. Bild 1 zeigt die im Wasser- und Windkanal untersuchten einfachen Deltaflügel-Prinzipmodelle mit einem Pfeilwinkel von 57° und zugeschärfter Vorderkanten. Dabei war bei den hier vorgestellten Experimenten beim Flügel für den Wasserkanal die Fase mit einem Winkel von 22° auf der Druckseite und bei dem Windkanalmodell mit einem Winkel von 15° auf der Saugseite. Es wurden Leitflächen, die in der in Bild 1 dargestellten Weise etwa parallel zur Wirbelachse des Primärwirbels und senkrecht auf der Oberfläche der Saugseite angeordnet waren, auf ihre Wirkungsweise hin überprüft. In Bild 2 sind Strömungssichtbarmachungen in einem Wasserkanal bei der kleinen Reynoldszahl von $Re = 6 \cdot 10^3$ zu sehen, die das Wirbelaufplatzen auf dem Deltaflügel veranschaulichen. Es wurde dabei Tinte nahe der Spitze des Flügels zugeführt, so dass sie sich in den Wirbelachsen der Primärwirbel sammeln konnte und somit diese sichtbar machte. Die linke Aufnahme demonstriert dabei das Wirbelaufplatzen bei etwa der halben Flügeltiefe beim Anstellwinkel von $\alpha = 16°$ und ohne Schiebewinkel β. Dabei gehen die geradlinigen Wirbelachsen etwa symmetrisch auf beiden Flügelhälften über in eine spiralförmige turbulente Struktur. Vergleicht man die rechte Aufnahme in Bild 2, so erkennt man schnell, dass auf der Flügelhälfte mit einer Leitfläche der Wirbelaufplatzpunkt deutlich verzögert wurde. Der Aufplatzort auf der anderen Flügelhälfte (ohne Leitfläche) blieb etwa unverändert bzw. wanderte etwas nach vorne. Für diesen Effekt der Verzögerung des Wirbelaufplatzens war es wesentlich, dass die verwendete Leitfläche etwa parallel zur Wirbelachse stand. Wurde der Abstand s zwischen Leitflächenhinterkante und Flügelvorderkante (vgl. Bild 1) halbiert, so wanderte der Aufplatzpunkt wieder deutlich nach vorne. Im Windkanal wurden 6-Komponenten Kraftmessungen am Deltaflügel mit und ohne auf beiden Flügelhälften angebrachten Leitflächen (vgl. Bild 1) bei einer Re-Zahl von $Re = 6,3 \cdot 10^5$ ausgeführt. Links in Bild 3 ist das Rollmoment C_l über dem Anstellwinkel α bei einem Schiebewinkel von $\beta = 5°$ für die Fälle mit und ohne Beeinflussung durch Leitflächen aufgetragen. Die Kurve ohne Beeinflussung (ausgefüllte Kreise) zeigt den typischen Verlauf für ein Modell mit Deltaflügelkonfiguration bei einem positiven Schiebewinkel. Der Tütenwirbel auf der voreilenden Seite platzt dabei früher auf als der Wirbel auf der nacheilenden. Zunächst erhält man für kleinere Anstellwinkel negative Rollmomente, die stabilisierende Rollmomente darstellen, da der Flügel in eine Richtung rollen möchte, bei der er symmetrischer zur Anströmung liegt. Im Anstellwinkelbereich von etwa $22° \leq \alpha \leq 32°$ hat er jedoch ein positives Rollmoment, d.h. hier ein instabiles Rollmoment. Oberhalb dieses Bereichs hat der Wirbelaufplatzort auf beiden Flügelhälften die Spitze erreicht und man hat wieder ein stabilisierendes Rollmoment. Verwendet man allerdings die Leitflächen, so erhält man im ursprünglich instabilen Bereich des Rollmomentes eine deutliche Verminderung der Instabilität bzw. sogar eine stabilisierendes Rollmoment. Die rechte Seite in Bild 3 zeigt für den festen Anstellwinkel von $\alpha = 24°$ eine Auftragung des Rollmomentes C_l über dem Schiebewinkel β. Hier erkennt man für den unbeeinflussten Flügel eine weitgehend positive Steigung der Kurve, was ein instabiles Verhalten bedeutet. Dagegen zeigt das Verhalten des Flügels mit Leitflächen auf beiden Flügelhälften im Schiebewinkelbereich von $-7° \leq \beta \leq 7°$ einen gegensinnigen Verlauf und somit ein dort stabiles Verhalten. Die Messungen der anderen Beiwerte zeigten, dass sie nur geringfügig beeinflusst wurden. Die in dieser Arbeit verwendete Leitflächen zeigen also eine stabilisierende Einwirkung auf das Verhalten des hochangestellten Flügels.

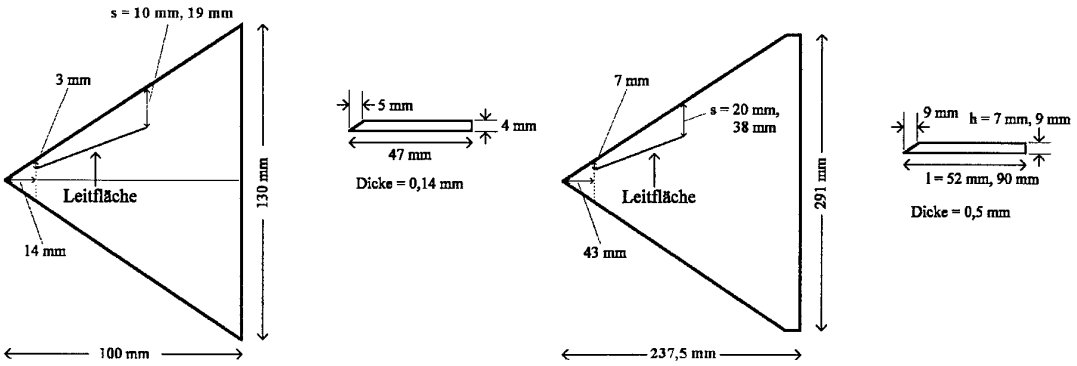


Bild 1: Abmessungen und Positionen der untersuchten Leitfläche auf der Saugseite der untersuchten Deltaflügel im Wasserkanal (links) und im Windkanal (rechts)

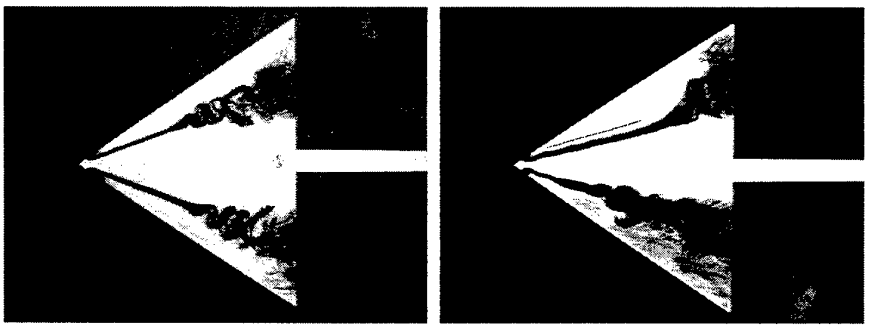


Bild 2: Strömungssichtbarmachungen des Wirbelaufplatzens im Wasserkanal mit (rechts) und ohne (links) Beeinflussung durch eine Leitfläche, $\alpha = 16°$, $U_\infty = 60$ mm/s ($Re = 6 \times 10^3$) , s = 19 mm

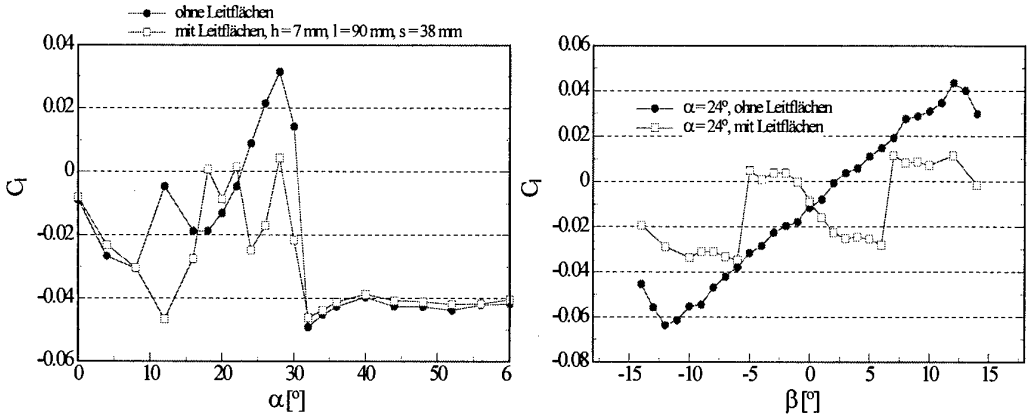


Bild 3: Kraftmessungen im Windkanal: Rollmomentenbeiwert C_l in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α bei $\beta = 5°$(links) und als Funktion vom Schiebewinkel β beim Anstellwinkel $\alpha = 24°$ (rechts) mit und ohne Leitflächen (h = 7 mm, l = 90 mm, s = 38 mm), $U_\infty = 40$ m/s ($Re = 6{,}3 \times 10^5$)

Literatur

[1] Hummel, D.
Zur Umströmung scharfkantiger Deltaflügel bei großen Anstellwinkeln. ZFW 13, 1967

[2] Herbst, W.B.
Future Fighter Technologies. Journal of aircraft, Vol. 17, No. 8, pp. 561-566, 1980

Adressen

Dr. V. Bader
Dr. F.-R. Grosche
DLR, Institut SM-SK
Bunsenstr. 10
37073 Göttingen
e-Mail: viktor.bader@volkswagen.de; fr.grosche@dlr.de

BREHMER, F., LAERMANN, K.-H.

Ein hybrides Verfahren zur Berechnung zweidimensionaler Spannungszustände unter Berücksichtigung unterschiedlicher und zeitabhängiger Werkstoffe

Es wird das experimentelle Verfahren der Spannungsoptik bzw. der Photoviskoelastizität in Kombination mit der numerischen Methode der finiten Elemente verwendet, um zweidimensionale Spannungszustände in ebenen Objekten zu untersuchen, die aus unterschiedlichen Materialien bestehen. Diese hybride Technik vereint die Vorteile beider Methoden und ermöglicht dadurch eine weitaus realistischere Untersuchung des Spannungszustandes von Bauteilen. Insbesondere im Falle eines zeitabhängigen Materialverhaltens oder der Kombination unterschiedlicher Materialien hat sich die hybride Technik als eine sehr geeignete Methode erwiesen.

Zur Berechnung der Hauptspannungssumme des ebenen Spannungszustandes wird die LAPLACE'sche Differentialgleichung herangezogen. Dabei werden auch die Übergangsbedingungen im Kontaktbereich zwischen unterschiedlichen Materialien berücksichtigt. Infolge des Randeffektes sind die Randwerte der Isochromaten ungenau. Deshalb werden die gemessenen Randwerte durch Extrapolation aus den Feldinformationen korrigiert. Mit der Hauptspannungssumme und der Hauptspannungsdifferenz sind schließlich die Hauptspannungen gegeben. Deren Richtungsorientierung kann aus den Isoklinen abgeschätzt werden, ohne daß diese selbst zur Bestimmung der Komponenten des Spannungstensors herangezogen werden müssen.

1. Spannungsoptik

Der Zusammenhang zwischen den Spannungen eines zweidimensionalen Spannungszustandes und dem Effekt der temporären optischen Anisotropie viskoelastischer und elastischer Materialien kann hinreichend genau durch die Beziehung zwischen dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors s_{ij} und dem Brechungstensors N_{ij} beschrieben werden [3]:

$$S_{ij} = C_N^*(t) N_{ij}(0^+) + \int_{0+}^{t} C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} N_{ij}(\tau) d\tau \tag{1}$$

In Gl.(1) stellt C_N^* eine Materialfunktion, die sog. optische Relaxationsfunktion, dar. Mit Gl.(1) kann die Hauptspannungsdifferenz des zweidimensionalen Spannungszustandes unter Einführung der Isochromatenordnung $\delta(t)$ und der Bauteildicke $d(t)$ wie folgt angegeben werden:

$$\sigma_1(t) - \sigma_2(t) = C_N^*(t) \frac{\delta(0^+)}{d(0^+)} + \int_{0+}^{t} C_N^*(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\delta(\tau)}{d(\tau)} d\tau \tag{2}$$

Für elastisches Materialverhalten wird die optische Relaxationsfunktion C_N^* durch die Spannungsoptische Konstante S ersetzt und aus der Integralgleichung erhält man:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\delta}{d} S^* \tag{3}$$

Durch Messung der Isochromatenordnung im Versuch und mit bekannter Bauteildicke und Materialfunktionen kann die Hauptspannungsdifferenz für elastische und viskoelastische Materialien und für die Kombination dieser Materialien angegeben werden.

2. Potentialtheorie

Zur Beschreibung des vollständigen Spannungszustandes kann die Hauptspannungssumme $S(x_1, x_2, t)$ des zweidimensionalen Spannungszustandes herangezogen werden. Diese ist eine Lösung der LAPLACE'schen Differentialgleichung (4), die mit Hilfe der Methode der finiten Elemente basierend auf der Potentialtherie gelöst werden soll [1].

$$\frac{\partial^2 S(x_1, x_2, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 S(x_1, x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0, \qquad S(x_1, x_2, t) = \sigma_1(x_1, x_2, t) + \sigma_2(x_1, x_2, t) \tag{4}$$

Hierzu kann am lastfreien Bauteilrand folgende Randbedingung aufgestellt werden [2]:

$$S(x_1, x_2, t) = {}^{\Gamma}S(x_1, x_2, t) \tag{5}$$

Die Randwerte nach Gl.(5) sind aus dem Experiment bekannt und lassen sich für viskoelastisches Materialverhalten nach Gl.(6)

$${}^{\Gamma}S(t) = {}^{\Gamma}\sigma_1(t) = {}^{\Gamma}C_N^*(t)\frac{{}^{\Gamma}\delta(0^+)}{d(0^+)} + \int_{0+}^{t} C_N^*(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{{}^{\Gamma}\delta(\tau)}{d(\tau)}d\tau \tag{6}$$

und für elastisches Materialverhalten nach Gl.(7)

$${}^{\Gamma}S = {}^{\Gamma}\sigma_1 = \delta\frac{S^*}{d} \tag{7}$$

angeben. Die Gleichungen (6) und (7) stellen somit die Kopplung zwischen Experiment und Berechnung dar und ermöglichen, daß die Randbedingungen nicht mehr idealisiert werden müssen. Für die Kombination unterschiedlicher Materialien in einem Bauteil müssen neben den Randbedingungen noch Übergangsbedingungen formuliert werden. Unter der Annahme eines festen Materialverbundes ergibt sich diese Übergangsbedingung für die Kombination elastischer Materialien unter Einführung des Elastiztätsmoduls und der Querdehnzahl:

$$\frac{\mu^I}{E^I}S^I = \frac{\mu^{II}}{E^{II}}S^{II} \tag{8}$$

Für die Kombination elastischer und viskoelastischer Materialien lautet die Übergangsbedingung:

$$-\frac{\mu^I}{E^I}S^I(t) = \frac{1}{9}[S^{II}(0^+)B(t) + \int_{0+}^{t} B(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}S^{II}(\tau)d\tau] - \frac{1}{3}[S^{II}(0^+)I(t) + \int_{0+}^{t} I(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}S^{II}(\tau)d\tau] \tag{9}$$

Hierin stellen $B(t)$ und $I(t)$ die Kriechfunktionen für den hydrostatischen und den Schubzustand dar.

Nach Implementierung dieser Übergangsbedingungen in das finite Elemente Programm kann die Hauptspannungssumme zu jedem Zeitpunkt mit bekannten Randwerten aus dem Experiment berechnet werden. Mit bekannter Hauptspannungsdifferenz nach Gl.(2) und (3) und Hauptspannungssumme nach Gl.(4) stehen zwei Gleichung zur Bestimmung der Hauptspannungen des ebenen Spannungszustandes zur Verfügung. Die Kenntnis der Richtung der Hauptspannungen ist hierbei nicht erforderlich.

3. References

1 BATHE, K.-J.: Finite-Elemente-Methode. Springer-Verlag, 1986.
2 BREBBIA C. A.; DOMINGUEZ, J.: Boundary Elements: An Introductory Course. McGraw-Hill, 1989.
3 COLEMAN, B. D., DILL, E. H.: Photoviscoelasticity: Theory and Practice. Kestens, J. (ed.), Springer-Verlag, 1975.

Addresses: DR.-ING. FRANK BREHMER, PROF. DR.-ING. K.-H. LAERMANN
Bergische Universität-Gesamthochschule Wuppertal, Fachbereich 11-Bauingenieurwesen, Lehr- und Forschungsgebiet Baustatik, Labor für Experimentelle Spannungsanalyse, Pauluskirchstr. 7, 42285 Wuppertal.

A.R. DA SILVA, B. SCHÄFER, L.C.G. DE SOUZA AND R.A. FONSECA

Online Identification for Space Manipulator Dynamics Parameters

To increase confidence in the dynamic modeling process of space robotic systems, the proper knowledge of system parameters, especially in the joints, is very important. DLR therefore is developing a Space Station based robotic experiment to verify dynamics models and to online identify critical joint parameters being different under micro-gravity and in hostile environment. A modified identification procedure is presented, where the dynamic model adopted makes a balance between complexity and fidelity in tracking the measured data. Non-linearities in both elastic gears and damping are considered. For time-dependent behavior of the physical parameters, an online algorithm is applied, and a modified Recursive Least Squares (RLS) algorithm with variable gain has been derived. The results show that the underlying algorithm and the adopted strategy exhibit remarkable features, allowing identifying the desired parameters with good accuracy.

1. Introduction

In space-based robotic applications, their dynamic behaviour is often very different from ground-based testing results. The changing behaviour is strongly influenced by reduced or almost micro gravity and the outer space, i.e. hostile environment, that is caused by big temperature oscillations [1] due to solar irradiation and eclipse phases, and by hard space radiation. These influences affect predominantly the material and lubrication properties of robotic joints and other servomechanisms, especially in long-term mission applications. In order to better understand the time-dependent variances of joint physical parameters, space technology demonstration experiments therefore are required to validate the proposed strategies and algorithms for physical parameter identification. DLR is strongly involved in preparing and developing advanced technologies for space telerobotic systems and their successful in-orbit operations. This work focuses on the intelligent robotic joint (IRJ) experiment, a design with multiple sensor integration on both, the joint input and the output side, which has served as a testbed for the identification strategy verification.

2. Mathematical model

To obtain a reliable joint dynamics model, much effort is given to detect the main modeling features within the harmonic drive gear. Here, elastic effects, mainly arising from the flexspline (fs), and nonlinear types of viscous damping and dry friction of Coulomb type have been identified as the critical ones [2]. According to Fig (1) and (2), after relate the damping torques and friction compensation to the angular velocity ($\dot{\theta}$) and position (θ) respectively, the dynamic equations for the IRJ experiment can be written as

$$J_{in}\ddot{\theta}_{in} = K_m I_a - (\mu|T_{out}| + b_2)sign(\dot{\theta}_{in}) - b_3\dot{\theta}_{in} - \left[k_1\Delta\theta + k_2\Delta\theta^3\right] - b_1(\Delta\dot{\theta}) \quad (1)$$

$$J_{out}\ddot{\theta}_{out} = (N+1)\left[k_1(\Delta\theta) + k_2(\Delta\theta)^3\right] + b_1(\Delta\dot{\theta}) - A\sin(\theta_{out}+\varphi) - b_4\dot{\theta}_{out} + T_g\sin(\theta_{out}) \quad (2)$$

where $\Delta\dot{\theta} = \dot{\theta}_{in} - (N+1)\dot{\theta}_{out}$, $\Delta\theta = \theta_{in} - (N+1)\theta_{out}$

and $A\sin(\theta_{out}+\varphi) = A_1\sin(\theta_{out}) - A_2\cos(\theta_{out})$.

Eqs. (1) and (2) can easily be written in a linear regression formalism that is very suitable to be applied to an identification algorithm like recursive least squares (RLS)

$$Y_k = \phi\,\Theta^T \quad (3)$$

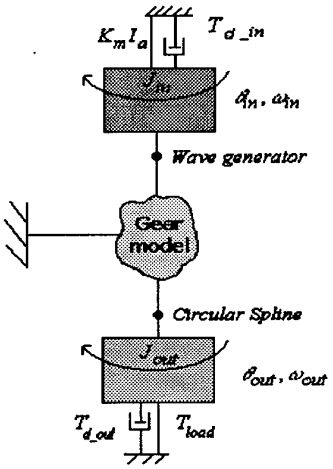


Figure 1. Dynamic representation of the intelligent robotic joint IRJ

3. Identification Strategy

As is well known, the physical parameters of a robot for space applications due to environmental conditions may be time variant. Therefore the identification algorithm should be able to track these variations even after the convergence (small magnitude of covariance matrix P). In this investigation, a very simple but efficient strategy has been developed to deal with this problem. The relative error of the estimation is monitored and a variable gain (Fig. 4) is adjusted according to this information, and if necessary, a reset in matrix P is performed. This procedure ensures that the algorithm will be "alert" to changes in the parameters but also having a smooth behaviour if the parameters do not present significant changes. Additionally, the initial conditions, excitation level on the information matrix (matrix of regressors), check of unidentifiability is performed before starting the online algorithm [3].

4. Obtaining output position and results

From the plots of the measurements (Fig. 5 and 6) it is clear that the information about output position is not available. In order to overcome this problem, two assumptions have been taking into account: 1) the measured output torque is almost equal to the stiffness torque; 2) the true value of stiffness coefficient could be

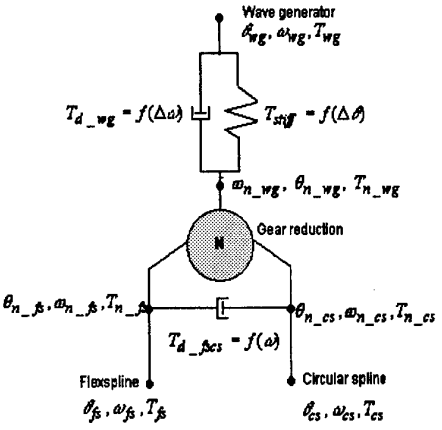


Figure 2. Harmonic drive gear model

obtained from catalogue information. From these hypotheses, one obtains

$$T_{outM} \cong k_1 \Delta\theta + k_2 \Delta\theta^3 \quad \Rightarrow \Delta\theta = \frac{C}{6k_2} - \frac{2k_1}{C} \Rightarrow \theta_{out} = \theta_{in} - \Delta\theta$$

$$\text{and } C = \sqrt[3]{12k_2\left(9T_{outM} + \frac{\sqrt{3k_2}}{k_2}\sqrt{4k_1^3 + 27k_2T_{outM}}\right)}\,. \qquad (4)$$

Then, by using the strategy described above, all the damping coefficients in both, input and output side are online identified. Some of them are shown in Fig. 7, where the online results are compared to the offline estimation by using the SVD (singular value decomposition technique). In all parameters, it was observed that after the transient period, the online estimation converges to the offline value. After, the identified parameters are used in the model described by eqs. 1 and 2 in order to verify the agreement with the measured quantities. The output torque and motor position are shown in Fig. 8. It can be noted that a good agreement has been achieved. This is observed in all of the measured data available.

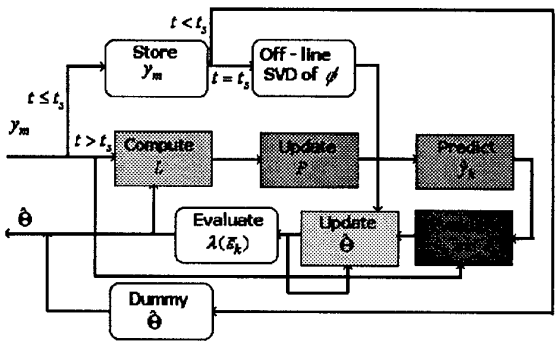


Figure 3. Identification Strategy

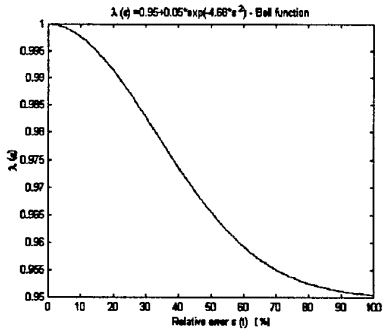


Figure 4. Variable gain

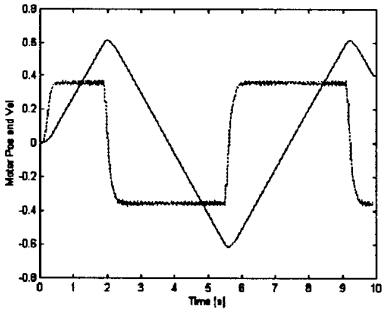


Figure 5. Measured motor position and velocity

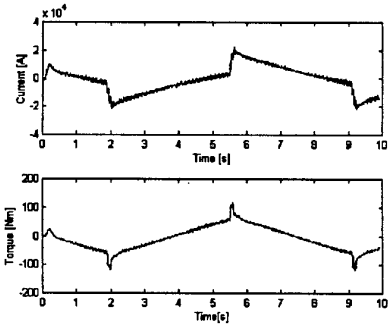
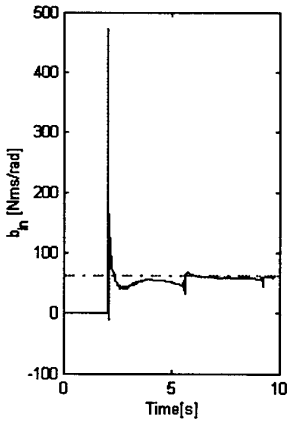


Figure 6. Measured electric current and output torque



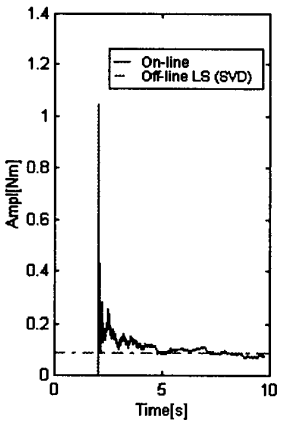
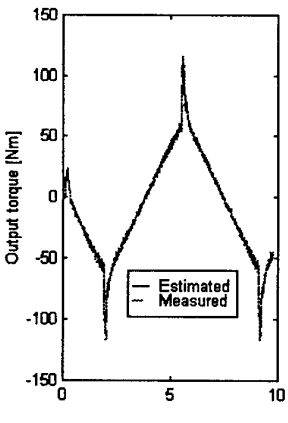


Figure 7. Input linear damping coefficients and amplitude of cyclic damping compensation



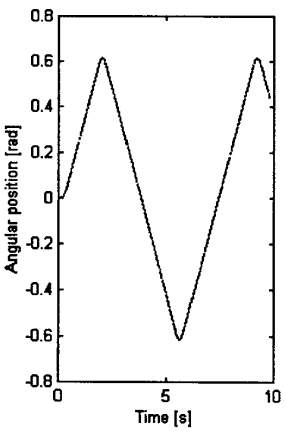


Figure 8. Model verification: Output torque and motor position

5. Conclusions

Conventional identification schemes consider the robot gears as a rigid body or consider linear stiffness. Concerning damping in the dynamic models, often only simple models have been considered so far. In this work, we proposed a non-standard model for both: damping and stiffness. This model is adopted in order to best describe the system characteristics, but also allowing the identification process to be possible. The presented identification algorithm has a variable gain that adjusts its value based on general algorithm performance, i.e. in the ability to follow the real measurements even the parameters present a time variant behavior.

References

[1] M. Grotjahn, M. Daemi and B. Heimann, Friction and rigid body identification of robot dynamics, 5th Pacam Pan American Congress on Mechanical Sciences, Rio de Janeiro, Brazil (1999).

[2] T.D. Tuttle, Understanding and modeling the behavior of Harmonic Drive gear transmission, Master Dissertation, MIT Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA, pp. 314 (1992).

[3] A.R. da Silva, B. Schäfer, L.C.G. de Souza and R.A. Fonseca, Space robotics joints non-linear modeling and online parameters identification, ISR2000 – 31st Int. Symp. on Robotics, Montreal, Canada, 14-17 May 2000.

Adressen: ADENILSON DA SILVA, DR. BERND SCHÄFER,
Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V., Oberpfaffenhofen, D-82234 Wessling
e-mail: adenilson.silva@dlr.de, bernd.schaefer@dlr.de

JASCHKE, P.; WALLER, H.

Hybride Identifikationsverfahren für hydrodynamische Kupplungen

Um Antriebe mit hydrodynamischen Kupplungen bereits in der Auslegungsphase simulieren zu können, muss das Betriebsverhalten hydrodynamischer Kupplungen mit parametrischen Modellen abgebildet werden. Es werden hybride Vorgehensweisen zur Modellermittlung vorgestellt, die die analytisch physikalische Modellierung mit der experimentellen Identifikation verbinden. Die vorgestellten Verfahren sind mit dem Ziel entwickelt worden, Modelle, die für Antriebsstrangsimulationen geeignet sind, mit möglichst wenig Aufwand zu erstellen. Zur Überprüfung der ermittelten Modelle werden Vergleiche von Simulationsrechnungen mit Messungen an einem Versuchsaufbau vorgestellt.

1. Einführung

Hydrodynamische Kupplungen gehören zur Gruppe der Föttinger-Getriebe und bestehen aus einer Kreiselpumpe und einer Flüssigkeitsturbine, die in einem Gehäuse angeordnet sind. Ist eine Drehzahldifferenz zwischen Pumpe und Turbine vorhanden, so wird das Fluid in der Pumpe beschleunigt und in der Turbine verzögert, was eine Momentenübertragung vom Antrieb auf die Abtriebswelle bewirkt.

2. Hybride Modellierung

Unter hybrider Modellierung wird eine Kombination der physikalischen Modellierung und der experimentellen Identifikation verstanden, d.h. in der Regel werden relativ einfache physikalische Modelle eines komplexen Systems aufgestellt und die Parameter dieses Modells durch Anpassung des Modells an gemessenes Übertragungsverhalten ermittelt. In Bezug auf hydrodynamische Kupplungen bedeutet dies, dass die Strömung in der Kupplung nach der Stromfadentheorie beschrieben wird. Wie z.B. in [1], [2] und [3] beschrieben wird, führt eine solche Modellierung – nach geeignetem Umstellen der Gleichungen – auf Modelle der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}\,\mathbf{z}^{[2]} + \mathbf{B}\,\mathbf{M} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \mathbf{z} &= (\omega_P \quad \dot{V} \quad \omega_T)^T \\ \mathbf{z}^{[2]} &= (\omega_P^2 \quad \omega_P \dot{V} \quad \omega_P \omega_T \quad \dot{V}^2 \quad \dot{V}\omega_T \quad \omega_T^2)^T \\ \mathbf{M} &= (M_P \quad M_T)^T \quad , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die Punkte ($\dot{}$) Zeitableitungen, ω Winkelgeschwindigkeiten der Laufräder und $\dot{V}$ der Volumenstrom des Fluids bedeuten. Die Matrizen $\mathbf{Q}$ und $\mathbf{B}$ sind die sogenannten Parametermatrizen. Wird nun die hydrodynamische Kupplung dynamisch erregt und die Momente und Winkelgeschwindigkeiten der Kupplungslaufräder gemessen, so können die Parameter der Gl. (1) über eine nichtlineare Optimierung bestimmt werden – der Volumenstrom $\dot{V}$ kann in der Regel nicht gemessen werden, weshalb Parameter nichtlinear in den zu bildenden Ausgangsfehler des Modells eingehen. Diese Parameteroptimierung ist jedoch mit großem Rechenaufwand verbunden. Daher wird die im folgenden gezeigte hybride Parameterermittlung verwendet.

Da die Modellstruktur als bekannt vorausgesetzt wird, sind *nur noch* die Parameter zu identifizieren. Hierzu genügt eine Anregung der Kupplung in kleinen Betriebsbereichen – sofern der innere Freiheitsgrad mit angeregt wird –, da ein rein quadratisches Modell vorliegt. Für kleine Betriebsbereiche ist das Kupplungsverhalten linearisierbar, so dass auch lineare Modelle der Form

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{J}_i\,\mathbf{z} + \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{B}\,\mathbf{M} \tag{2}$$

identifiziert werden können, wobei $\boldsymbol{\xi}_i$ Koordinatenursprungsverschiebungen und $\mathbf{J}_i$ die Jakobi-Matrizen in den jeweiligen Betriebspunkten sind. Werden die linearen Modellgleichungen aus einer Taylorreihenentwicklung des nichtlinearen Systems erhalten, so sind die Matrizen $\mathbf{B}$ bei allen Betriebspunkten gleich. Die inneren Freiheitsgrade dieser identifizierten Modelle entsprechen jedoch nicht den physikalischen Koordinaten und es können Ähnlichkeitstrans-

formationen der Art

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\,\mathbf{z}^* + \mathbf{z}_0^* \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{T}_i & = & \mathrm{diag}\,(1 \quad k_i \quad 1) \\ \mathbf{z}_0^* & = & (0 \quad g_i \quad 0)^T \end{array} \tag{3}$$

durchgeführt werden, ohne das Ein- / Ausgangsverhalten des Modells und die Matrix **B** zu verändern. Letzteres ist relevant, um zur Bestimmung des quadratischen Modells die Anzahl der Parameter gering zu halten. Die Bestimmung der Transformationsbeziehung $\mathbf{T}_i$ und $\mathbf{z}_{0,i}^*$ erfolgt aus Messungen stationärer Betriebspunkte in den Gültigkeitsbereichen der Modelle und Anwendung der Euler-Turbinengleichung für die Berechnung des Volumenstroms. Eine Simulation des Betriebsverhaltens der Kupplung mit den ermittelten linearen Modelle liefert nun näherungsweise alle Zustandsgrößen und die Parameter der nichlinearer Modellgleichung (1) können einfach bestimmt werden, da die Parameter nun linear in den Ausgangsfehler des Modells eingehen.

3. Verifikation

Um die Verwendbarkeit der Modelle für Antriebsstrangsimulationen zeigen zu können, sind Simulationsrechnungen eines Modellantriebsstranges entsprechenden Messungen an einem Versuchsaufbau (vgl. Abb. 1) gegenübergestellt worden. Der Versuchsaufbau ist dabei so konstruiert worden, dass er gut als diskreter Schwinger abgebildet werden kann. Die Antriebsmaschinen beaufschlagen den Antriebsstrang mit einer Drehzahlerregung.

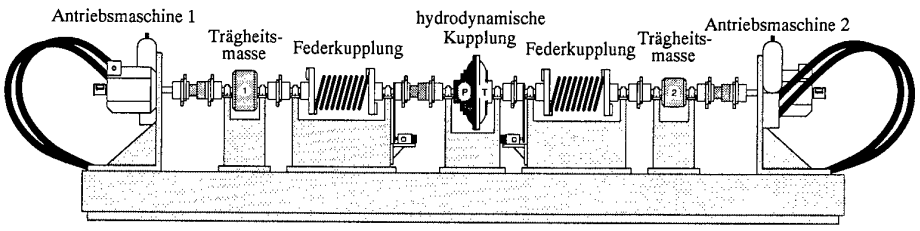


Abb. 1: Versuchsaufbau

Die Drehzahlen n_2 und n_3 des Pumpen- bzw. Turbinenrades werden simuliert und den Messungen gegenübergestellt (s. Abb. 2) Obwohl weite Betriebsbereiche der Kupplung bei der gezeigten Simulationsrechnung mit großer Beschleunigung durchfahren werden, sind nur geringe Abweichungen zwischen Rechnung und Messung zu erkennen.

Es konnte damit ein Verfahren gezeigt werden, mit dem relativ einfach mathematische Modelle zur Beschreibung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen ermittelt werden können. Die ermittelten Modelle bilden das Betriebsverhalten gut ab. Eine Kopplung der Kupplungsmodelle mit Modellen von anderen Antriebsstrangelemente ist leicht möglich. Aufgrund der relativ einfachen Struktur der Modelle mit wenigen Freiheitsgraden ist auch eine sehr schnelle und einfache Simulation möglich.

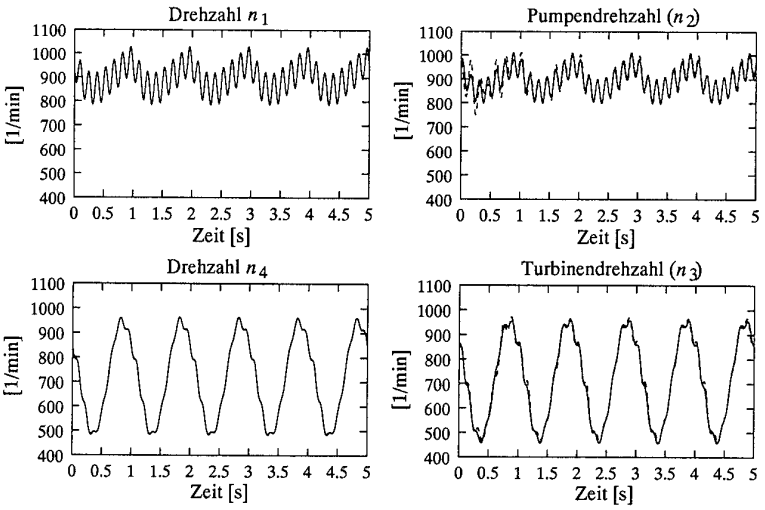


Abb. 2: Simulationsrechnung

4. References

1 HASSELGRUBER, H.: Zum Drehschwingungsverhalten der hydrodynamischen Kupplung (Industrieanzeiger 87. Jg. 1965, Nr. 8, S. 121-123, Nr. 25, S. 436-438)

2 HERBERTZ, R.: Untersuchung des dynamischen Verhaltens von Föttinger-Getrieben (Universität Hannover 1973)

3 JASCHKE, P.: Mathematische Modellierung des Betriebsverhaltens hydrodynamischer Kupplungen mit hybriden Modellansätzen (Ruhr-Universität Bochum 2000)

4 RATH, M.: Abbildung hydrodynamischer Kopplungen in Antriebssystemen (Verlag Shaker 1992)

Addresses: DR.-ING. PETER JASCHKE, PROF. DR.-ING. HEINZ WALLER, Ruhr-Universität Bochum, D-44780 Bochum

JONÁŠ, P.; MAZUR O.

Contribution to hot-wire measurement in gas mixtures flow

The diffusion of the fluid particles is one of the most important fundamental problems of the research of transitional and turbulent flows. Investigating the diffusion, it is very useful to let some gas stream into the main airflow as to visualise the flow pattern or to imitate the action of the Archimedes force. The Corrsin's method [1] was adopted for the simultaneous measurement of the mean values, the standard deviations and the covariance of velocity and concentration of the gas mixture by means of a single hot-wire anemometer (HWA).

1. Proposal of procedure

Lomas [2] and Brunn [3] presented appropriate surveys on HWA application onto the velocity and concentration measurement. Some of the published procedures are working with two different heated sensors. We aim our attention to the use of a single hot wire. As a rule, the interest was given mainly to the statistical characteristics of fluctuations. The mean velocity or the mean concentration must be often determined by means of an another method, independent of HWA. The proposed procedure is removing this deficiency. The method is derived upon assumptions: the gas mixture (in continuous phase) consists of air (subscript i = A) and the known admixture gas (subscript i = X); the mean values of pressure P and temperature T are measured independently of thermoanemometer measuring system; the flow is statistically stationary; the compressibility can be neglected; a single hot wire normal to the mean flow direction is operating at several different gradually varying temperatures T_w; the system of the heated wire and CTA apparatus is described by the wire diameter and length d_w and l_w, the resistance of wire R_o, the temperature coefficient of resistance α_o and the resistances of bridge arm and probe leads with cables R_b and R_c; the heat-transfer law of Collis and Williams [4] is generalised with regard to the results of Kramers [5], Andrews [6], Koch and Gartshore [7], Jonáš [8] and in view of the finite wire length

$$\mathrm{Nu}\left(\frac{T_m}{T}\right)^M = A\left(\frac{Pr_X}{Pr_A}\right)^{0,2} + B\left(\frac{Pr_X}{Pr_A}\right)^{0,33} Re^N \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu} &= \frac{R_w E^2}{\pi l_w \lambda_m (T_w - T)(R_b + R_c + R_w)^2}; \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho_m d_w U}{\mu_m}; \mathrm{Pr} = \frac{Cp\mu_m}{\lambda_m} \\ T_m &= (T_w + T)/2; \quad R_w = R_o(1 + \alpha_o(T_w - 273,2)) \end{aligned} \tag{2}$$

where Nu, Pr and Re are the Nusselt-, Prandtl- and Reynolds-numbers; T_m is the film temperature (quantities denoted with the index m are to be computed at the film temperature); R_w is the operating resistance of the heated wire at the temperature T_w; E is the output voltage of a DANTEC constant temperature anemometer with bridge 55M01 ($R_b = 50\Omega$). Physical properties of gases are density ρ_i, thermal conductivity λ_i, molecular viscosity μ_i and specific heat at constant pressure C_{P_i}.

Let us remind that an individual calibration of conventional hot wire probes is necessary if satisfactory measurement accuracy is required. Hence it is better to perform the wire calibration in air and in the admixture gas separately than to substitute the values Pr_A and Pr_X into a detailed calibration in airflow to recalculate coefficients in (1). With regard to the results of Andrews at al. [6], the same value of the empirical exponent N can be applied in cooling laws of the given wire in different gases:

$$\mathrm{Nu_A} = \left(\frac{T_m}{T}\right)^{M_A} = A_A + B_A Re_A^N, \quad \mathrm{Nu_X}\left(\frac{T_m}{T}\right)^{M_X} = A_X + B_X Re_X^N. \tag{3}$$

Then the anemometer output voltage E_j can be approximated with sufficient accuracy by formula

$$\begin{aligned} \overline{E}_j^2 &= f_j(\overline{P}, \overline{T}, T_w) + g_j(\overline{P}, \overline{T}, T_w)\,\overline{U}^N = \alpha_j + \beta_j\vartheta + \gamma_j\vartheta^2, \quad \vartheta = \ln\left(\frac{T_w}{T}\right), \\ \alpha_j &= (a_\alpha)_j + (b_\alpha)_j\,\overline{U}^N, \quad \beta_j = (a_\beta)_j + (b_\beta)_j\,\overline{U}^N, \quad \gamma_j = (a_\gamma)_j + (b_\gamma)_j\,\overline{U}^N. \end{aligned} \tag{4}$$

All coefficients in formulas (4) being valid at air-flow (j = A) or at the admixture gas-flow (j = X), can be calculated by means of (3), if the wire temperature T_w and the mean values of the temperature, pressure and flow velocity $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{U}$ are known. Taking into consideration results of McQuaid and Wright [10], the following equation is valid at the given values of T_w, $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{U}$ and at the mean concentration $\overline{\Gamma}$

$$\overline{E}_\Gamma^2 = \left(1 - \Psi(\overline{\Gamma})\right) \overline{E}_A^2 + \Psi(\overline{\Gamma}) \overline{E}_X^2 , \tag{5}$$

where $\overline{E}_A$ and $\overline{E}_X$ are output voltages which should be measured in pure air ($\overline{\Gamma} = 0$) or in pure admixture gas ($\overline{\Gamma} = 1$) at the given values of T_w, $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{U}$. The function Ψ is simply $\Psi = \Gamma$ in analogy with intermittence if the admixture gas serves as a tracer. We consider the parabolic form of the function Ψ (see [10]) in well-unified gas mixtures

$$\Psi(\Gamma) = (1 + \kappa)\Gamma - \kappa\Gamma^2 , \quad \kappa = \text{const} . \tag{6}$$

It is awaited that the constant κ is small and depends on the composition of gases as it follows from McQuaid and Wright [10] results. The true value of κ for the given composition must be determined in the course of the hot wire calibration. The measurement of the voltage $\overline{E}_\Gamma$ at several wire temperatures T_w (several values of ϑ) in a gas-mixture (j = Γ) is interpolated as the function of ϑ (4). The calculated coefficients α_Γ, β_Γ, γ_Γ are valid at the mean flow regime $\overline{\Gamma}$, $\overline{T}$, $\overline{P}$, $\overline{U}$. Substituting the relations (4) into the equation (5) we obtain the equation

$$\alpha_\Gamma + \beta_\Gamma\vartheta + \gamma_\Gamma\vartheta^2 = F_1 + F_2\vartheta + F_3\vartheta^2 , \quad F_i = F\left(\overline{U}^N, \Psi(\overline{\Gamma})\overline{U}^N, \Psi(\overline{\Gamma})\right) . \tag{7}$$

As the equation must hold at each value of ϑ, the following equations must be valid simultaneously

$$\begin{aligned}
\alpha_\Gamma &= F_1 = (a_\alpha)_A + (b_\alpha)_A \overline{U}^N + \left[(b_\alpha)_X - (b_\alpha)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma})\overline{U}^N + \left[(a_\alpha)_X - (a_\alpha)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma}) , \\
\beta_\Gamma &= F_2 = (a_\beta)_A + (b_\beta)_A \overline{U}^N + \left[(b_\beta)_X - (b_\beta)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma})\overline{U}^N + \left[(a_\beta)_X - (a_\beta)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma}) , \\
\gamma_\Gamma &= F_3 = (a_\gamma)_A + (b_\gamma)_A \overline{U}^N + \left[(b_\gamma)_X - (b_\gamma)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma})\overline{U}^N + \left[(a_\gamma)_X - (a_\gamma)_A\right] \Psi(\overline{\Gamma}) , \\
\Psi(\overline{\Gamma}) &= (1 + \kappa)\overline{\Gamma} - \kappa\overline{\Gamma}^2 .
\end{aligned} \tag{8}$$

Receiving the solution of these equations, it is possible to continue with the measurement of statistical characteristics of the velocity and concentration fluctuations according to Wasan and Baid [9] or McQuaid and Wright [10]. Another possibility is to calculate sensitivities to the velocity and concentration fluctuations assuming that the equations (4), (5) and (6) are describing instantaneous quantities. Till this time, the described procedure was tested by means of a computer operated experiment only. The considered mixture was air and helium. The received results are promising. An experimental proof of this proposal is being prepared.

Acknowledgements

This work was funded by grants # A2076903 and # S2076010 from the Grant Agency of the Academy of Sciences of the Czech Republic. This support is gratefully acknowledged.

2. References

1 Corrsin, S. : Experimental methods; In: Handbook of Physics, 8/2, Springer Ver. Berlin (1963), 524–590.
2 Lomas, C.G. : Fundamentaals of hot-wire anemometry; Cambridge Univ. Press (1986).
3 Bruun, H.H. : Hot-wire anemometry; Oxford Univ. Press (1995).
4 Collis, D.C., Wiliams, M.J. : Fluid Mech., **6** (1959), 357–384.
5 Kramers, H.: Physica, **12** (1946), 61–120.
6 Andrews, G.E., Bradley, D., Hundy G.F.: Int. J. Heat Mass Transfer, **15** (1972), 1765–1786.
7 Koch, F.A., Gartshore, I.S.: Phys. E.: Sci. Inst. **5** (1972), 58–61.
8 Jonáš, P.: J. Engineering Phys. No. **1** (1980), 55–61 (in Russian).
9 Wasan, D.T., Baid, K.M.: AIChE **17** (1971), 729–731.
10 McQuaid, J., Wright, W.: Int. J. Heat Mass Transfer **16** (1973), 819–828.

Addresses: DrSc. Tech. Jonáš, P., Dipl. Phys. Mazur, O., Institute of Thermomechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Dolejškova 5, CZ -18200 Prague 8,
Czech Republic

Rütten, M. / Dallmann, U. Ch.

Numerische Simulation des Wirbelplatzens über einem Deltaflügel zur Identifikation von Beeinflussungsmaßnahmen

Für eine vereinfachte Deltaflügelkonfiguration wird anhand numerischer Simultionen (RANS) eine experimentell gewonnene Strömungssteuerungsmethode zur günstigen Beeinflussung des Wirbelplatzens untersucht. Zur Wirbelsteuerung werden auf der Saugseite des hochangestellten Flügels zwei Wirbelsteuerklappen so angebracht, dass sie jeweils entlang der Primärwirbelachse verlaufen. Um die Wirkung der Leitbleche auf die Wirbelstruktur räumlich aufzulösen, wird der in Göttingen entwickelte Strömungssimulationscode TAU herangezogen, der die Untersuchung reibungsbehafteter Strömungen zeitgenau und räumlich mit einer Genauigkeit 2. Ordnung erlaubt. Es werden vergleichende Rechnungen sowohl laminar als auch mit Turbulenzmodellen durchgeführt, wobei Lage und Struktur des Wirbelplatzens im Vordergrund stehen. Die Ergebnisse werden mit PIV Messungen verglichen.

Bei einem Deltaflügel führt schon ein mittlerer Anstellwinkel bei einer entsprechenden Anströmung zu einer Ablösung der Strömung entlang der gesamten Vorderkante. Die Scherschicht rollt sich auf der Leeseite des Flügels zu einem Wirbelpaar auf. Durch die hohen Umfangs- und Axialgeschwindigkeiten erzeugen die Wirbel unterhalb ihrer Wirbelachse auf der Flügeloberfläche eine Druckabsenkung, Auftrieb und Widerstand werden verstärkt. Mit zunehmendem Anstellwinkel verstärken sich die Wirbel, überschreitet jedoch der Anstellwinkel einen kritischen Wert, so tritt Wirbelplatzen auf. Urplötzlich weitet sich der Wirbelkern auf, die Geschwindigkeiten der Strömung nehmen deutlich ab. Der Druck im Strömungsfeld und auf der Kontur nimmt damit stark zu. Das Auftriebsverhalten verändert sich schlagartig, wodurch das Flugverhalten von Deltaflüglern destabilisiert wird. Ziel der Arbeit ist es, effektive, aktive Wirbelsteuerungsmaßnahmen zu finden, die ein Destabilisieren des Flugverhaltens verhindern. Dazu werden mit dem in Göttingen entwickelten TAU-Code numerische Simulationen der Strömung um eine einfache Deltaflügelkonfiguration durchgeführt. Im ersten Schritt werden mittels stationärer Rechnungen sowohl die stabile Wirbeltruktur als auch das Wirbelplatzens räumlich aufgelöst. Letztere Ergebnisse können in ihrer Aussagekraft jedoch nur eingeschränkt betrachtet werden, da instationäre Effekte unterdrückt werden. Insbesondere werden hier zwei Konfigurationen bei 18 und 24 Grad Anströmung miteinander verglichen: Es wird die Wirbelsteuerungsmöglichkeit einer Klappe numerisch simuliert, da hier experimentelle Ergebnisse der Arbeit von Bader [1] vorliegen. Der Vergleich zum unbeeinflussten Fall wird angestellt. Dargestellt wird nur jeweils eine Flügelhälfte, da von einem symmetrischen Rechenfall ausgegangen wurde. Beim Anströmungwinkel 18 Grad tritt bei beiden Konfigurationen noch kein Wirbelplatzen auf. Beim unbeeinflussten Fall erkennt man das klassische Aufrollen anhand des aufgeprägten Druckkonturverlaufs auf der Oberfläche (Abb. 1) mit dem ausgeprägten Primärwirbel und dem stromab stärker werdenden Einfluß des Sekundärwirbels und an den in einander verdrehten Stromlinien (Abb. 2). Durch die Wirbelsteuerklappe entstehen zwei Primärwirbel, wie an dem Stromlinienverlauf (Abb. 6) zu erkennen ist, wobei der sich links der Wirbelsteuerklappe befindende Wirbel nun deutlich schächer als der rechts der Klappe drehende Wirbel ist. Dies gibt auch die Druckkontur auf der Oberfläche wieder (Abb. 5). Im 24 Grad Anstr ömungsfall gibt die unbeeinflusste Konfiguration das Mäandern des geplatzten Wirbels gut anhand des Druckkonturverlaufs auf der Oberfläche (Abb. 3) und der Stromlinien (Abb. 4) wieder. Die Wirbelsteuerklappe scheint jedoch nun eine neuartige Wirbelstruktur zu bewirken (Abb. 7, Abb. 8). Zur näheren Untersuchung werden verschiedene Wirbelidentifikationsmodelle implementiert, die einen Einblick in die räumliche Wirbelstruktur erlauben. Die Wirbelstärke (Abb. 9) löst die Struktur nur unzureichend auf, andere Wirbelidentifikationsmodelle sind erforderlich: Lambda2 = 0 (Abb. 11) [2] und Invariante Q = 0 (Abb. 12) [3] [4] geben das Aufspalten der Struktur in zwei Primärwirbel am deutlichsten wieder. Das Totaldruckverlustmodell (Abb. 10) gibt ebenfalls den Effekt der Klappe wieder. Ein Einblick in die Struktur des geplatzten Wirbels geben die Abb. 13 bis Abb. 16. Die zukünftige Arbeit wird sich auf die genaue Analyse der Strukturen des Wirbelplatzen konzentrieren, die entscheidenden Parameter dieses Phänomens müssen identifiziert werden und in eine Modellbildung einfließen. Dazu werden z. Zt. räumlich und zeitlich hochauflösende, instationäre Rechnungen durchgeführt.

[1] V. Bader. Experimentelle Untersuchungen zur Beeinflussung der Wirbelströmung über hochangestellten Deltaflügeln. Gamm2000, Jahrestagung, Göttingen, 2000

[2] J.Jeong & F. Hussain. On the identification of a vortex. J. Fluid Mech., 285: 69-94, 1995

[3] U. Dallmann. Topological structures of the three-dimensional flow separations, IB 221-82 A07, DFVLR, 1982

[4] U. Dallmann, H. Vollmers, Flow Topology and Tomography for Vortex Identification in Unsteady and in Three-Dimensional Flows, IUTAM Symposium on Simulation and Identification of Organized Structures in Flows, Lyngby, DEnmark, 1997

Adresse: Dipl.-Ing. Markus Rütten und Priv.Doz. Dr.Uwe Ch. Dallmann, DLR, Institut für Strömungsmechanik, Abteilung Transition und Turbulenz, Bunsenstr. 10, 37073 Göttingen

Deltaflügelkonfigurationen mit/ohne Wirbelsteuerklappe, Ma = 0.12, Re = 630000, 18/24 Grad Anströmung, k-w Turb.modell

Abb. 1: Druckkontur Oberfl.
18 Grad, ohne Steuerklappe

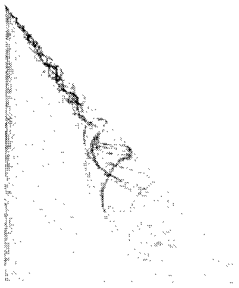


Abb. 2: Stromlinien
18 Grad, ohne Steuerklappe

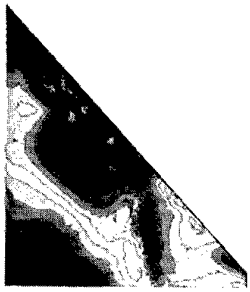


Abb. 3: Druckkontur Oberfl.
24 Grad, ohne Steuerklappe

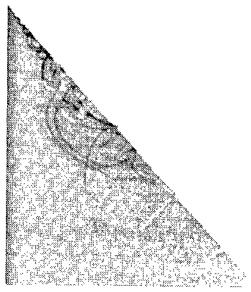


Abb. 4: Stromlinien
24 Grad, ohne Steuerklappe

Abb. 5: Druckkontur Oberfl.
18 Grad, mit Steuerklappe

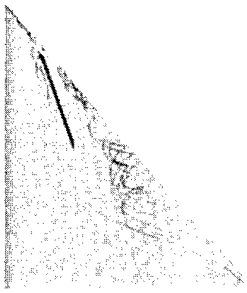


Abb. 6: Stromlinien
18 Grad, mit Steuerklappe

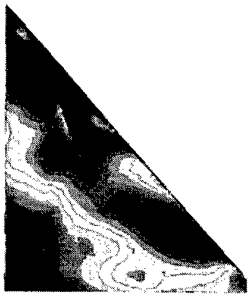


Abb. 7: Druckkontur Oberfl.
24 Grad, mit Steuerklappe

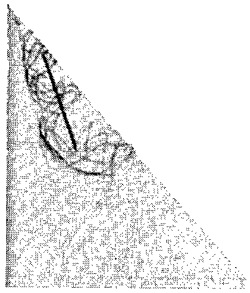


Abb. 8: Stromlinien
24 Grad, mit Steuerklappe

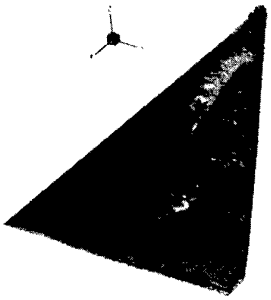


Abb. 9: Wirbelstärke
18 Grad, mit Steuerklappe

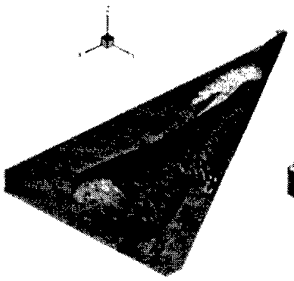


Abb. 10: Totaldruckverlust 0,15
18 Grad, mit Steuerklappe

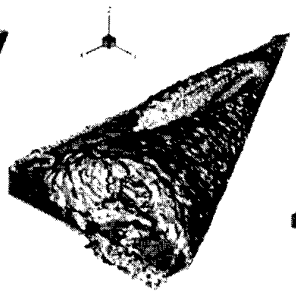


Abb. 11: Lambda2 = 0
18 Grad, mit Steuerklappe

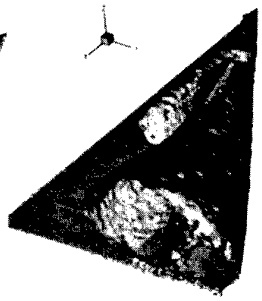


Abb. 12: Invariante Q = 0
18 Grad, mit Steuerklappe

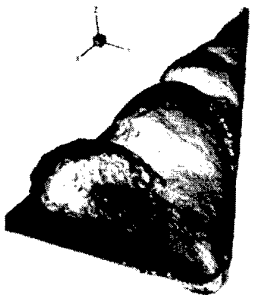


Abb. 13: Totaldruckverlust 0.1
24 Grad , mit Steuerklappe

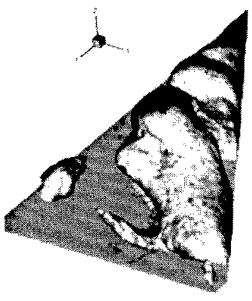


Abb. 14: Totaldruckverlust 0.15
24 Grad , mit Steuerklappe

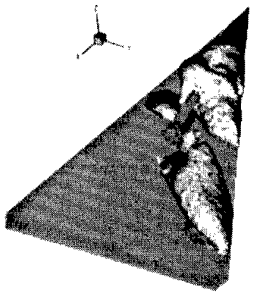


Abb. 15: Totaldruckverlust 0.2
24 Grad , mit Steuerklappe

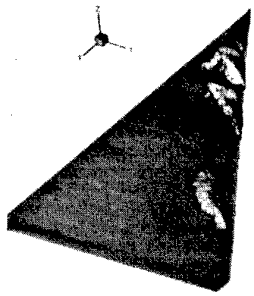


Abb. 16: Totaldruckverlust 0.25
24 Grad , mit Steuerklappe

SCHEDAY, G. / MIEHE, C.

Parameteridentifikation finiter Elastizität bei inhomogenen Deformationen

Ausgehend von einem inhomogenen Deformationsexperiment an einer Flachprobe mit Loch aus rußgefülltem Polymer diskutieren wir die Parameteridentifikation bei inhomogenen Deformationen. Auf der experimentellen Seite steht eine Feldmeßmethode nach dem Objektrasterverfahren zur Verfügung, die die Verschiebungen der Probenoberfläche liefert. Die Simulation des experimentellen Ablaufs erfolgt mit der Methode der Finiten Elemente. Hierfür ist ein Materialmodell der finiten Elastizität gewählt. Die Qualität der Parameteridentifikation wird mit einer abschließenden Materialparameteranpassung demonstriert.

1. Experiment und Probendiskretisierung

Mit Hilfe einer CCD Kamera werden während des Experiments zu diskreten Zeitpunkten Aufnahmen der Probenoberfläche gemacht. Diese Oberfläche muß der Kamera eine signifikante Grauwertverteilung liefern. Die Auswertesoftware vergleicht dann die Grauwertverteilungen der unverformten mit der verformten Probe und berechnet daraus Verschiebungsfelder $\boldsymbol{d}_x^{exp}$, $\boldsymbol{d}_y^{exp}$. Abbildung 1a) zeigt die verformte Konfiguration mit Fensteranordnungen der Auswertesoftware, siehe auch WINTER [3].

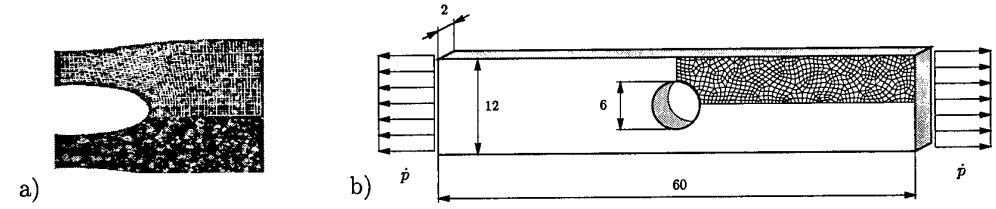


Abbildung 1. a) Probenbild der CCD–Kamera mit stochastischer TiO–Tinktur für signifikante Grauwertverteilung zum Zeitpunkt $t = 100\,s$. b) Probengeometrie und FE–Diskretisierung unter Berücksichtigung der Symmetrie, alle Angaben in $[mm]$.

Den experimentellen Messungen werden während des Identifikationsprozesses Simulationen gegenübergestellt. Die Simulationsdaten werden aus den Knotenverschiebungen $\boldsymbol{d}_x(\boldsymbol{\kappa})$, $\boldsymbol{d}_y(\boldsymbol{\kappa})$ einer Finiten–Elemente Diskretisierung ermittelt, Abbildung 1b).

2. Modellproblem Finite Elastizität vom Ogden–Typ

Die freie Energiefunktion ist in den Hencky Verzerrungen $\varepsilon_i = \ln[\lambda_i]$ formuliert, dabei sind λ_i die Eigenwerte des rechten Strecktensors $\boldsymbol{U}$. Mit den weiteren Abkürzungen $e := \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ und $\tilde{\varepsilon}_i := \varepsilon_i - \frac{1}{3}e$, sowie der Konsistenzbedingung für inkompressibles Material $\sum_{p=1}^{N} \mu_p^* \alpha_p = 2$ ergeben sich die konstitutiven Gleichungen für finite Elastizität, siehe auch OGDEN [1]; MIEHE & KECK [2].

$$\textit{freie Energie} \quad \psi = \tfrac{1}{2}\kappa e^2 + \mu \sum_{r=1}^{3}\sum_{p=1}^{N} \frac{\mu_p^*}{\alpha_p}\left(\exp[\tilde{\varepsilon}_r]^{\alpha_p} - 1\right)$$

$$\textit{Spannungen} \quad \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\psi_{,i}}{\lambda_i^2} \boldsymbol{N}_i \otimes \boldsymbol{N}_i$$

$$\text{mit} \quad \psi_{,i} := \kappa e + \mu \sum_{p=1}^{N} \mu_p^* \sum_{r=1}^{3} \exp[\tilde{\varepsilon}_r]^{\alpha_p} P_{ri} \quad \text{und} \quad P_{ri} := \delta_{ri} - \tfrac{1}{3}$$

Die zugehörigen konsistenten Tangentenmoduli berechnen sich aus den 2. Piola–Kirchhoff Spannungen und dem rechten Cauchy Green zu $\mathbb{C} = 2\partial \boldsymbol{S}/\partial \boldsymbol{C}$. Da die 1. Piola–Kirchhoff Spannungen benötigt werden, folgt in Indexnotation die Umrechnung $P^{aA} = F^a{}_C S^{CA}$ mit den zugehörigen nominellen Moduli $\mathbb{A}^{aA}{}_b{}^B = \mathbb{C}^{CADB} F^a{}_C F^c{}_D g_{cb} + S^{AB} g^a{}_b$.

3. Parameteridentifikation inhomogener Deformationsprozesse

Im Gegensatz zu homogenen Deformationsprozessen bildet sich das bezüglich der Materialparameter $\boldsymbol{\kappa}$ zu minimierende, gewichtete Least–Squares Funktional nicht über die Spannungen, sondern über die Oberflächenverschiebungen zu $f(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{x=1}^{2} W_{tkx}[d_{tkx}(\boldsymbol{\kappa}) - d_{tkx}^{exp}]^2 \rightarrow \min$.. Hierbei ist W_{tkx} ein Wichtungsfaktor, m die Anzahl der Zeitpunkte, n die Anzahl der Identifikationsstellen und x eine Summe über die Richtungen x und y.Da die Koordinaten der Meßpunkte aus dem Experiment nicht direkt mit den Knotenverschiebungen der Simulation verglichen werden können, ist es notwendig, die experimentellen Daten $\boldsymbol{d}^{exp}$ auf den Simulationsraum $\mathcal{U}^{sim}$ mit einem Projektionsoperator $\mathcal{M}$ zu projizieren $\mathcal{M} : \mathcal{U}^{exp} \rightarrow \mathcal{U}^{sim}$. Bei gradientenbasierten Verfahren, wie dem hier zum Einsatz kommenden SQP–Algorithmus, ist der Gradient der Zielfunktion $\nabla_{\boldsymbol{\kappa}} f(\boldsymbol{\kappa})$ vorzuhalten. Der Finite–Elemente Ansatz für den algorithmischen Tangentenmodul $\boldsymbol{F}_{n+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{d}_{n+1}$ führt zu der diskretisierten schwachen Form $\boldsymbol{r}_{n+1} := \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}_{n+1}\, dV - \boldsymbol{f}_{n+1}^{ext} = \boldsymbol{0}$. Die Gradienten der Knotenverschiebungen berechnen sich über $\nabla_{\kappa}\boldsymbol{r}_{n+1} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T \nabla_{\kappa}\boldsymbol{P}_{n+1} dV \nabla_{\kappa}\boldsymbol{r}_{n+1} = \boldsymbol{0}$ und $\nabla_{\kappa}\boldsymbol{P}_{n+1} = \partial \boldsymbol{P}_{n+1}/\partial\boldsymbol{\kappa} + \mathbb{A}_{n+1}\boldsymbol{B}\nabla_{\kappa}\boldsymbol{d}_{n+1}$. Aufgelöst nach den Sensitivitäten der Knotenverschiebungen und der Definition der Steifigkeitsmatrix $\boldsymbol{K}_{n+1} := \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T\, \mathbb{A}_{n+1}\boldsymbol{B}dV$ führt dies auf $\nabla_{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{d}_{n+1} = -\boldsymbol{K}_{n+1}^{-1}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{B}^T \partial \boldsymbol{P}_{n+1}/\partial\boldsymbol{\kappa}\, dV$. Bis auf die partiellen Ableitungen der 1. Piola–Kirchhoff Spannungen nach dem Materialparametervektor lassen sich die Sensitivitäten der Knotenverschiebungen aus, zu diesem Zeitpunkt t_{n+1}, bekannten Größen ermitteln. Die partiellen Ableitungen der Spannungen sind in der Materialroutine bereitzustellen.

4. Parameteranpassung

In dem gewählten Materialgesetz der finiten Elastizität sind für die Simulation $N = 4$ Ogden Terme gewählt, somit lautet der zu bestimmende Materialparametersatz $\boldsymbol{\kappa} := [\kappa, \mu, \mu_1^*, \alpha_1, \mu_2^*, \alpha_2, \mu_3^*, \alpha_3, \mu_4^*, \alpha_4]^T$. Mit einer Spannungsrate von $0.0157 N/mm^2/s$ liegen zu den Zeitpunkten $t = 50s$, $70s$, $80s$, $90s$ und $100s$ Meßdaten zur Verfügung. Nach 18 SQP Iterationsschritten ist das Abbruchkriterium erfüllt. Sowohl durch ändern des Startparametersatzes, wie auch die Änderung der Anzahl der Ogden Terme führte zu keiner Verbesserung des Ergebnisses.

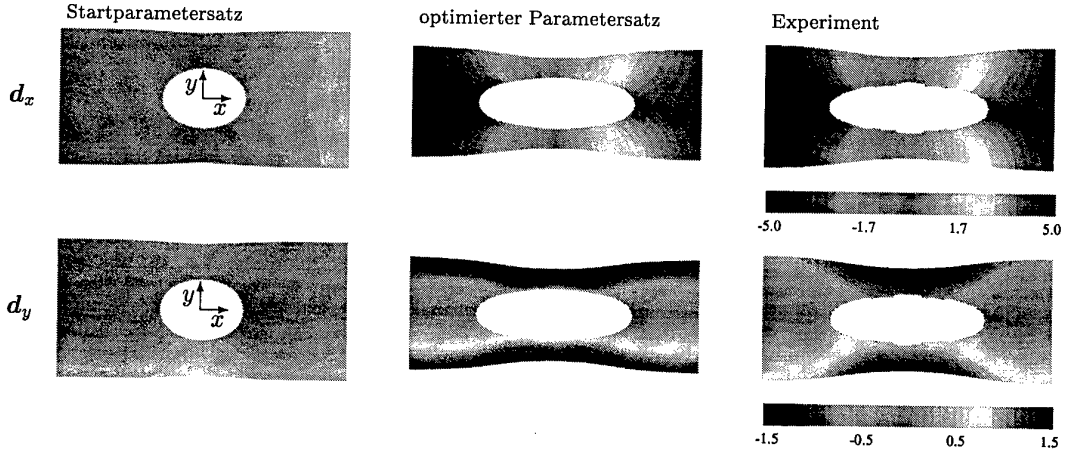


Abbildung 2. Oberflächenverschiebungen d_x, d_y der Flachprobe mit Loch zum Zeitpunkt $t = 100\,s$ für Simulationen mit Startparametersatz und optimierten Parametersatz, sowie Experimentergebnisse, alle Angaben in $[mm]$.

Danksagung

Unterstützung für diese Arbeit wurde gewährt durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), Projekt Mi 295-6/2.

5. Literatur

1 OGDEN, R.W.: Non–Linear Elastic Deformations. Ellis Horwood, Chichester, 1984.
2 MIEHE, C. & KECK, J.: Superimposed Finite Elastic–Viscoelastic–Plastoelastic Stress Response with Damage in Filled Rubbery Polymers. Journal of the Mechanics and Physics of Solids **48**(2000), pp. 323-365.
3 WINTER, D.: Optische Verschiebungsmessung nach dem Objektrasterprinzip mit Hilfe eines flächenorientierten Ansatzes. Dissertation Technische Universität Braunschweig, 1993.

Adresse: Dipl.-Ing. G. SCHEDAY und Prof. Dr.-Ing. C. MIEHE, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik (Bauwesen) Lehrstuhl I, Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart.

M. SCHMELZER

Identifikation der Parameter von Zeitbereichsmodellen viskoelastischer Werkstoffe

Die Verformungsgesetze viskoelastischer Werkstoffe mit Gedächtnis können im Zeitbereich mit Hilfe von inneren Variablen formuliert werden. Die Werkstoffparameter, auch die den inneren Variablen zugeordneten, können mit Schwingungsexperimenten ermittelt werden.
Eine Methode verwendet Snap-Back-Versuche an homogenen, streifenförmigen Proben unterschiedlicher Länge. Die Zeitverläufe der Biegeverformung enthalten gedämpfte Schwingungen und Relaxationsvorgänge. Durch gleichzeitiges Berücksichtigen der mit unterschiedlicher Länge gemessenen Zeitverläufe in einem Optimierungsprozess gelang die Identifikation der Parameter des Zeitbereichsmodells für das Beispiel PMMA. Beim Anwenden der gewonnenen Ergebnisse auf Resonanzversuche wurde im Vergleich mit Messungen eine gute Übereinstimmung erzielt.

1. Das viskoelastische Stoffgesetz

Zur Beschreibung eines viskoelastischen Werkstoffs wird hier von dem Gedächtnisintegral mit einem entarteten Kern (Prony-Reihe) mit zu identifizierenden Koeffizienten $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$ und $b_0 := 0$ ausgegangen:

$$\sigma(x,y,z,t) = \int_{\tau=-\infty}^{t} \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \, e^{-b_k (t-\tau)} \right] \frac{\partial \varepsilon(x,y,z,\tau)}{\partial \tau} \, d\tau \tag{1}$$

für einen einachsigen Spannungszustand (vgl. [1]). Dies motiviert nach partieller Integration die Definition:

$$y_k(x,y,z,t) := \int_{\tau=-\infty}^{t} b_k \, e^{-b_k (t-\tau)} \, \varepsilon(x,y,z,\tau) \, d\tau \qquad , \qquad k = 0, \dots, n. \tag{2}$$

Wegen $b_0 = 0$ ist $y_0 \equiv 0$. Diese neuen Größen y_k werden **innere Variablen** genannt. Deren Zeitentwicklung kann auch in differentieller Form mit Anfangsbedingungen geschrieben werden.

2. Der Bernoulli-Balken mit dem viskoelastischen Werkstoffmodell

Die Bernoulli-Hypothese wird auch auf die inneren Variablen (2) angewendet. Für das entstehende Differentialgleichungssystem eines Bernoulli-Biegebalkens erhält man per Produktansatz und Separation mit der Konstanten $c \in \mathbf{C}$ im Ortsbereich das bekannte Eigenwertproblem; im Zeitbereich haben die Lösungen die Form $e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbf{C}$. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$A \rho \lambda^2 = -c \, I_y \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\lambda}{\lambda + b_k} \tag{3}$$

mit der Querschnittsfläche A, der Dichte ρ und dem Flächenmoment I_y des Balkens. Als Funktion für λ besitzt (3) genau n reell negative Lösungen in der Nähe der $-b_k$ und ein Paar komplex konjugierter Lösungen.

3. Parameteridentifikation im Ausschwingversuch

Man lenkt einen Kragbalken an seinem freien Ende aus und läßt ihn in dieser Position einige Zeit ruhen. Es wird davon ausgegangen, daß in dieser Ruhephase die inneren Variablen y_k hinreichend vollständig relaxieren, so daß folgende Anfangsbedingungen benutzt werden können: $\dot{y}_k(x,0) = 0$ für $k = 0, \dots, n$. Bei den anschließenden Ausschwingexperimenten konnte nur die erste Eigenschwingungsform nachgewiesen werden.
Für die Parameteridentifikation wird bei verschiedenen Einspannlängen $L_1, \dots, L_m$ die Balkendurchbiegung am freien Ende des Kragbalkens in Abhängigkeit von der Zeit gemessen: $w(L,t)$. Dies wird rückkopplungsfrei mit optischen Wegaufnehmern durchgeführt. Jeder der Zeitverläufe $w(L,t)$ setzt sich gemäß (3) aus einer gedämpften Schwingung und mehreren Relaxationen zusammen. In einem ersten Schritt werden deren Zeitkonstanten aus den Messungen identifiziert. Dazu wird die Differenz zwischen dem Meßsignal und einer Ansatzfunktion aus den genannten Bestandteilen unter Nutzung einer gewichteten Fehlerquadratsumme im Zeitbereich mit MatLab-Funktionen minimiert. Die Anzahl der benutzten Relaxationen wird bis zu einer guten Beschreibung schrittweise vergrößert. Setzt man diese

Zeitkonstanten der Schwingungen (die Relaxationen blieben bei der Auswertung bisher noch unberücksichtigt) in (3) ein, so erhält man ein Gleichungssystem für die Identifikation der Parameter $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Die Anzahl n der inneren Variablen muß vorgegeben, später aber evtl. korrigiert werden. Es hat sich herausgestellt, daß für p zu beschreibende Dekaden im Zeitbereich $n = p + 1$ ein guter Ausgangspunkt ist. In dem zu beschreibenden Zeitbereich werden die $b_1, \ldots, b_n$ nun zunächst geometrisch verteilt vorgegeben. Da das Gleichungssystem linear in den $a_0, \ldots, a_n$ ist, können mit der Pseudo-Inversen Werte für die $a_0, \ldots, a_n$ bestimmt werden. Mit diesen Werten für die $a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ als Startwerte wird ein Simplex-Suchverfahren aus der MatLab-Bibliothek angewendet, um alle Parameter zu verbessern. Stellt man hierbei fest, daß sich zwei oder mehr der b_k in ihren Werten nähern, so ist die Anzahl n zu verkleinern und neu zu starten. Indem man zusätzlich einen Suchalgorithmus vom Evolutionstyp mit Zufallseinflüssen nutzt, verringert man die Gefahr, in einem lokalen Minimum "steckenzubleiben". Auf diese Weise wurden folgende Parameter identifiziert:

Parameter	Wert $[10^8\, N\, m^{-2}]$	rel. Fehler	Parameter	Wert $[s^{-1}]$	rel. Fehler
a_0	37,1	10%	b_0	0	0%
a_1	4,37	14%	b_1	$2,19 \cdot 10^2$	35%
a_2	4,11	15%	b_2	$3,36 \cdot 10^1$	29%

Die Güte der Identifikation läßt sich im Raum der 1. Eigenfrequenz und der Dämpfungskonstante gut erkennen:

Bild 1:

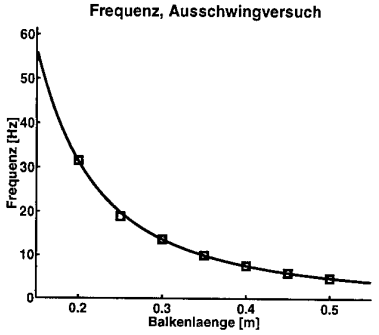
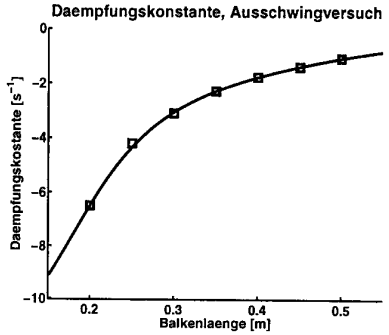


Bild 2:



In den Bildern 1 und 2 ging die durchgezogene Kurve jeweils aus Rechnung mit den identifizierten Parametern der vorangegangenen Tabelle hervor; die Punkte bezeichnen die Meßwerte.
Für die Probe gilt: $A = 1.00 \cdot 10^{-4} m^2$, $\rho = 1.14 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$ und $I_y = 1.33 \cdot 10^{-10} m^4$.

4. Anwendung der identifizierten Parameter im Erregerversuch

Setzt man die identifizierten Parameter in (3) ein, so kann man für einen Kragbalken mit harmonischer Fußpunkterregung mit der Frequenz Ω das Amplitudenverhältnis und die Phasenverschiebung zwischen der Schwingung am freien Ende und am Erregerende berechnen und diese mit Messungen vergleichen:

Bild 3:

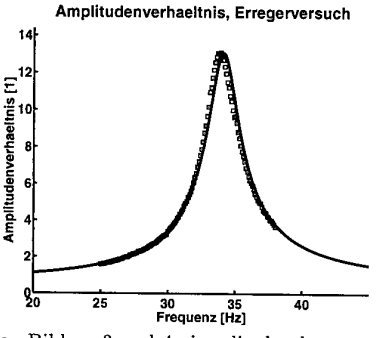
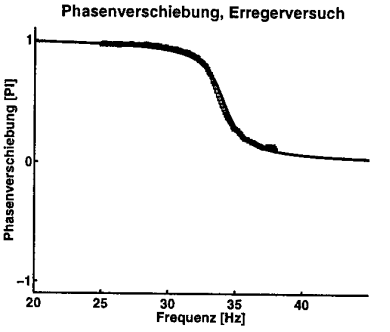


Bild 4:



Auch in den Bildern 3 und 4 ging die durchgezogene Kurve jeweils aus Rechnung mit den identifizierten Parametern der vorangegangenen Tabelle hervor; die Punkte bezeichnen die Meßwerte. Gemessen wurde bei der 2. Eigenfrequenz.
Für die Probe gilt: $A = 1.00 \cdot 10^{-4} m^2$, $\rho = 1.14 \cdot 10^3 kg \cdot m^{-3}$, $I_y = 1.33 \cdot 10^{-10} m^4$ und $L = 0.481 m$.

5. Literatur

1 AHRENS, R.: "Innere Variablen in linear-viskoelastischen Schwingungssystemen - Modellierung, numerische Behandlung und Parameteridentifikation", Fortschr.-Ber. VDI Reihe 11, Nr. 181, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1993

Adresse: DIPL.-PHYS. MARTIN SCHMELZER Institut für Technische Mechanik, Technische Universität, Postfach 3329, D-38023 Braunschweig, m.schmelzer@tu-bs.de

SEIDLER, M., MARKERT, R.

Non-stationary Balancing of Flexible Rotors

In this investigation, methods for balancing flexible rotors using non-stationary measurements are theoretically derived and experimentally verified. Only the mode shapes and the modal masses have to be known from prior measurements or calculations. The unbalances and all other system parameters are identified from a single run-up or run-down without any additional test runs. The parameter identification is carried out using either a frequency domain or a time domain method. Both methods are successfully tested on a flexible laboratory rotor.

1. Introduction

In industrial practice, flexible rotors are balanced using the modal or the influence coefficient method as described in [2]. Normally, both methods require several test runs at constant rotational speeds close to the critical speeds. To avoid the problem of large rotor deflections and to reduce the duration of the balancing procedure, non-stationary balancing methods have been developed [1, 3, 4, 5], an overview is given in [6]. In this investigation, time domain and frequency domain methods for the identification of unbalances are derived and compared to each other.

2. Model of the rotor system

In a limited frequency range, the vibrational behavior of a real rotor can be described by a discrete model with N degrees of freedom. As usual for balancing, it is assumed that gyroscopic effects as well as the antisymmetric damping and stiffness parts resulting from journal bearings are negligible. The oscillations of the system in the principal axes y and z are considered uncoupled from each other. With this simplification, the equation of motion for the z-direction is given by

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{z}}_W + \boldsymbol{C}_z\,\dot{\boldsymbol{z}}_W + \boldsymbol{K}_z\,\boldsymbol{z}_W = -\mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}[e^{i\varphi(t)}]^{\bullet\bullet}\}\,, \tag{1}$$

and accordingly for the y-direction. The mass matrix $\boldsymbol{M}$, damping matrix $\boldsymbol{C}_z$ and stiffness matrix $\boldsymbol{K}_z$ are real and symmetric. On the right hand side, the second time derivative of the rotating unbalance appears as the excitation of the system. The unbalances with respect to the collocation planes are described in the vector $\boldsymbol{u}^T = [u_1, \ldots, u_N]$, using complex notation $u_n = u_{n\zeta} + iu_{n\eta} = |u_n|e^{i\beta_n}$. In order to reduce the number of unknown parameters, the equation of motion (1) is uncoupled by using the modal coordinates $\boldsymbol{q}_z(t)$,

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_{z,1}\\ \ddot{q}_{z,2}\\ \vdots\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\zeta_1\omega_1 & & \\ & 2\zeta_2\omega_2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_{z,1}\\ \dot{q}_{z,2}\\ \vdots\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \ddots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{z,1}\\ q_{z,2}\\ \vdots\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_{\zeta,1}^{(0)}/m_1^{(0)} & u_{\eta,1}^{(0)}/m_1^{(0)}\\ u_{\zeta,2}^{(0)}/m_2^{(0)} & u_{\eta,2}^{(0)}/m_2^{(0)}\\ \vdots & \vdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\\ \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\end{bmatrix} \tag{2}$$

with $\boldsymbol{z}(t) \approx \boldsymbol{\Phi}_z\,\boldsymbol{q}_z(t)$, the modal matrix $\boldsymbol{\Phi}_z$ containing the mode shapes $\hat{\boldsymbol{z}}_n$, modal masses $m_{z,n}^{(0)}$, undamped natural frequencies $\omega_{z,n}$, damping ratios $\zeta_{z,n}$ and the modal unbalance with respect in the z-direction $\boldsymbol{u}_z^{(0)} = \boldsymbol{u}_\zeta^{(0)} + i\boldsymbol{u}_\eta^{(0)} = \boldsymbol{\Phi}_z^T\boldsymbol{u}$. If the mode shapes and modal masses are known from a precedent modal analysis or calculations, the system (2) can be used to calculate the vibration response of the rotor in the time domain for a given set of values for $\omega_{z,n}$, $\zeta_{z,n}$ and $\boldsymbol{u}$ and a measured course of the rotation angle $\varphi(t)$. The functions $\dot{\varphi}(t)$ and $\ddot{\varphi}(t)$ are computed from the measured $\varphi(t)$ by numerical differentiation and filtering.

Alternatively, the unbalance response in the z-direction can be computed directly in the frequency domain,

$$\boldsymbol{Z}_W(\Omega) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\hat{\boldsymbol{z}}_n\hat{\boldsymbol{z}}_n^T}{m_n^{(0)}(\omega_n^2 + 2i\,\Omega\,\omega_n\zeta_n - \Omega^2)}\,\Omega^2[\boldsymbol{u}_\zeta\mathcal{F}\{\cos\varphi\} - \boldsymbol{u}_\eta\mathcal{F}\{\sin\varphi\}]\,, \tag{3}$$

where $\mathcal{F}$ denotes the Fourier transform.

3. Identification of unbalances and system parameters

The unknown parameters (unbalances, natural frequencies and modal damping ratios) are estimated by fitting the theoretical response to the measured vibration response of the rotor during one non-stationary run-up or run-down. This may be done either in the frequency domain (3) or in the time domain (2). By including the damping ratios and natural frequencies in the estimation, a nonlinear minimization problem arises that has to be solved by an iterative search algorithm. As shown in [1], the measurement at a single location during one non-stationary run without trial unbalances contains sufficient information to identify the unbalances, damping ratios and natural frequencies.

The measured vibration response $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_W(\Omega_k)$ in the frequency domain is calculated by applying the fast Fourier transform (FFT) to the measured vibration response $\widetilde{\boldsymbol{z}}_W(t)$. The fitting of the theoretical frequency response $\boldsymbol{Z}_W(\Omega_k)$ to the measured frequency response $\widetilde{\boldsymbol{Z}}_W(\Omega_k)$ is achieved by using the least squares method

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{\Omega_k} |\boldsymbol{E}(\Omega_k)|^2 \quad \longrightarrow \quad \boldsymbol{\theta} \qquad \text{with} \quad \boldsymbol{E}(\Omega_k) = \boldsymbol{Z}_W(\Omega_k) - \widetilde{\boldsymbol{Z}}_W(\Omega_k)\,. \tag{4}$$

Only the elements of the error $\boldsymbol{E}(\Omega_k)$ relating to measurement locations are involved in the minimization (4). The vector $\boldsymbol{\theta}$ includes all parameters to be estimated. The minimization is carried out by any standard algorithm, for example by the MATLAB algorithm leastsq.

In the time domain, the optimal estimation for the unknown parameters $\boldsymbol{\theta}$ minimizes the prediction error $\boldsymbol{e}(t_k) = \boldsymbol{z}_W(t_k) - \widetilde{\boldsymbol{z}}_W(t_k)$, where $\widetilde{\boldsymbol{z}}_W(t_k)$ denotes the measured vibration of the rotor and $\boldsymbol{z}_W(t_k) = \boldsymbol{\Phi}_z\,\boldsymbol{q}_z$ is the displacement of the rotor predicted by the model (2) for the measured course of rotation angle $\varphi(t)$, both at the same sample point t_k and only for the positions where measurements are taken. The minimum is found by the MATLAB algorithm pem (*prediction error method*) which integrates the system equation (2) in each iteration step.

4. Experimental Results

The identification methods were tested on the test rig schematically shown in figure 1. The overall length of the setup is 1.2 m, the disk masses are 1 kg each and the first two critical speeds are at 1560 and 3750 rpm. A PC was used for recording the signals and estimating the unbalances. The runout measured during a slow roll was subtracted from all measurements. The mode shapes and the modal masses which are required for the identification methods were measured in a precedent modal analysis. For taking the measurements, the rotor was accelerated from 0 to 4000 rpm within only 2 seconds. With the initial unbalance, the maximum amplitude of the disk vibrations during run-up was 1.2 mm. Both methods were tested starting from the same initial unbalance state and applying the method repeatedly. After each measurement run, the identified unbalances were compensated at the disks. Figure 2 shows how the vibrations are reduced by the two methods: while the frequency domain method achieves a faster reduction of the vibrations after the first balancing runs, the time domain method yields in this case a slightly lower level of residual vibrations. In both cases, the achieved accuracy is sufficient to meet common industrial tolerances for rotor unbalances.

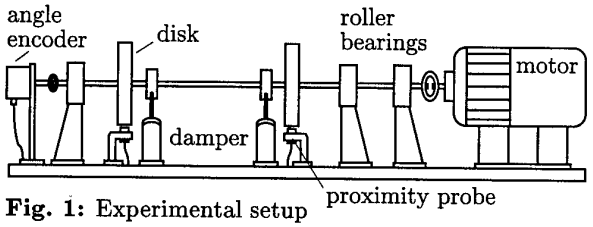


Fig. 1: Experimental setup

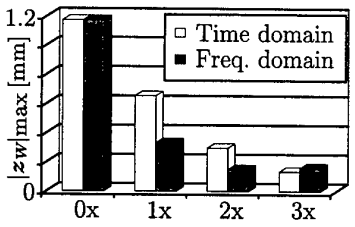


Fig. 2: Maximum amplitude before balancing (0x) and after repeated balancing with the time domain/freq. domain method

5. References

1 MARKERT, R.: System- und Unwuchtidentifikation aus Anfahrmessungen, VDI-Berichte 536 (1984), 121–139.
2 KELLENBERGER, W.: Elastisches Wuchten, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1987).
3 MARKERT, R.: Modal balancing of flexible rotors with data acquisition from non-stationary run-up or run-down, Proc. VI. Int. Modal Analysis Conf., Orlando (1988), 210–216.
4 DE SILVA, R.: Auswuchten elastischer Rotoren nach nur einem transienten Meßlauf, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11, Nr. 143 (1991).
5 MENZ, I., GASCH, R.: Instationäres Auswuchten starrer Rotoren, SIRM 95, Vieweg-Verlag (1995).
6 SEIDLER, M., MARKERT, R.: Time domain and frequency domain identification for non-stationary balancing, Proc. Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu Univ. Press, Oulu, Finland (1999), Vol. 4, 1740–1745.

Address: DIPL.-ING. M. SEIDLER, PROF. DR.-ING. R. MARKERT, Darmstadt University of Technology, Institute of Mechanics, AG II, Hochschulstr. 1, 64289 Darmstadt, Germany.

WAGNER, N.

Parameteridentifikation bei viskos gedämpften Fachwerkstrukturen

Die Eigenschwingungen eines passiven viskos gedämpften Systems werden durch ein quadratisches Matrizenpolynom beschrieben. Das Verfahren ist eine Erweiterung zu [1] und ermöglicht es, bei einer begrenzten Anzahl von bekannten Eigenformen und Eigenwerten, systemspezifische Parameter wie hier die Dehnsteifigkeit, Massenbelegung und Dämpfungskonstanten einer ebenen oder räumlichen Fachwerkstruktur zu berechnen. Dazu wird ein Optimierungsproblem gelöst. Es entsteht ein Gleichungssystem für die gesuchten Parameter. Darüber hinaus wird gezeigt, wie modale Daten und Systemmatrizen aus gemessenen Übertragungsfunktionen ermittelt werden.

1. Einleitung

Ausgangspunkt ist das quadratische Eigenwertproblem

$$\left[\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{K}\right]\mathbf{z} = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Liegen M gemessene komplexe Eigenformen und Eigenwerte vor, so ist ein Fehler ε zu erwarten, der in Hinblick auf die Systemparameter minimiert werden soll :

$$\min_{p_j} \left\{ \varepsilon = \sum_{i=1}^{M} |\mathbf{K}\mathbf{z}_i + \lambda_i\mathbf{D}\mathbf{z}_i + \lambda_i^2\mathbf{M}\mathbf{z}_i|^2 \right\}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2}$$

Um die partiellen Ableitungen nach diesen Größen darzustellen, werden die Systemparameter aus den global formulierten Elementmatrizen herausgezogen

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{Ne}(EA)_i\mathbf{L}_i\mathbf{K}_{e_i}\mathbf{L}_i^T, \quad \mathbf{D} = \sum_{i=1}^{Ne} d_i\mathbf{L}_i\mathbf{D}_{e_i}\mathbf{L}_i^T, \quad \mathbf{M} = \sum_{i=1}^{Ne}(\rho A)_i\mathbf{L}_i\mathbf{M}_{e_i}\mathbf{L}_i^T. \tag{3}$$

Diese Beziehungen werden wiederum in das Optimierungsproblem (2) eingesetzt

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{M}\left[\mathbf{x}_1^T\bar{\mathbf{P}}_m + \bar{\lambda}_m\mathbf{x}_2^T\bar{\mathbf{Q}}_m^* + \bar{\lambda}_m^2\mathbf{x}_3^T\bar{\mathbf{R}}_m\right]\left[\mathbf{P}_m\mathbf{x}_1 + \lambda_m\mathbf{Q}_m\mathbf{x}_2 + \lambda_m^2\mathbf{R}_m\mathbf{x}_3\right], \tag{4}$$

wobei die Parameter $(EA)_i, d_i, (\rho A)_i$ der einzelnen Fachwerkelemente in den Spalten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ zusammengefaßt werden. Die Matrizen $\mathbf{P}_m, \mathbf{Q}_m, \mathbf{R}_m, (\bar{\mathbf{P}}_m, \ldots)$ enthalten spaltenweise die Produkte aus den global definierten Elementmatrizen und der m-ten (konjugiert)-komplexen Eigenform. Aus den Bedingungen (2) folgt ein Gleichungssystem für die gesuchten Systemparameter.

2. Identifikation komplexer Eigenformen

Die Behandlung nichtproportional gedämpfter Systeme erfolgt zweckmäßig im Zustandsraum

$$\mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{r}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Für eine zeitharmonische Belastung $\hat{\mathbf{f}}\exp[i\Omega t]$ wird die Lösung $\mathbf{q}_c$ des komplexen Gleichungssystems $(\mathbf{A} + i\Omega\mathbf{B})\mathbf{q}_c = \mathbf{r}_c$ im modalen Raum beschrieben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_c \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathrm{diag}\nu_j \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix} \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_j + i\Omega b_j}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathrm{diag}\nu_j \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}\mathrm{diag}\nu_i \\ \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{q} + \nu\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \ldots & \mathbf{z}_{2n} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

wobei die untere Blockzeile in (6) auch als Summe dyadischer Produkte

$$\mathbf{u}_c = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\mathbf{z}_j^T \mathbf{f}_c}{a_j + i\Omega b_j} \mathbf{z}_j, \quad H_{jk} = \sum_{r=1}^{2n} \frac{\mathbf{e}_j^T \mathbf{z}_r \mathbf{z}_r^T \mathbf{e}_k}{a_r + i\Omega b_r} \tag{8}$$

dargestellt werden kann und letztendlich den Zusammenhang zwischen einer Verschiebung an der Stelle j infolge einer Belastung an der Stelle k beschreibt. Die gemessenen Übertragungsfunktionen werden durch gebrochen rationale Funktionen $\bar{H}_{jk} \approx \dfrac{p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + q_{2n-1} s^{2n-1} + s^{2n}}, \quad s = i\Omega, \quad i = \sqrt{-1}$, approximiert, deren Koeffizienten p_i, q_i nach einer Kollokation und anschließender Anwendung der Fehlerquadratmethode bestimmt werden. Die Nullstellen λ_i des Nennerpolynoms sind Näherungen für die Eigenwerte ν_i des Systems und werden aus dem Eigenwertproblem [3]

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & & & -q_0 \\ 1 & 0 & & -q_1 \\ & 1 & & -q_2 \\ & & 1 & -q_{2n-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

berechnet. Unter der Voraussetzung, daß die Nullstellen einfach sind, wird eine Partialbruchzerlegung in der Form

$$\frac{p_0 + p_1 s + \ldots + p_m s^m}{q_0 + q_1 s + q_{2n-1} s^{2n-1} + s^{2n}} = \sum_{j=1}^{2n} \frac{r_j}{s - \lambda_j}, \quad r_j = \left(p_0 + p_1 \lambda_j + \ldots + p_m \lambda_j^m\right) / \prod_{k=1, k \neq j}^{2n} (\lambda_j - \lambda_k) \tag{10}$$

durchgeführt. Ein direkter Vergleich der beiden Darstellungen für die Übertragungsfunktionen (8), (10) ist dann möglich, wenn die komplexen Eigenformen zu $\hat{\mathbf{Z}}^T \mathbf{B} \hat{\mathbf{Z}} = \mathrm{diag} b_i = \mathbf{1}, \hat{\mathbf{Z}}^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{Z}} = \mathrm{diag} a_i = -\mathrm{diag} \nu_i$ normiert werden. Aus den Residuen r_j werden anschließend die Komponenten der Eigenvektoren bestimmt. Zur Rekonstruktion der Systemmatrizen werden die Gleichungen für die normierten Eigenformen invertiert und mit den Inversen der Hypermatrizen $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ verglichen, was auf die spektrale Darstellung der rekonstruierten Systemmatrizen führt:

$$\mathbf{M}^{-1} = \sum_{i=1}^{2n} \nu_i \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T, \quad \mathbf{K}^{-1} = -\sum_{i=1}^{2n} \frac{\mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T}{\nu_i}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{M} \sum_{i=1}^{2n} (\nu_i \mathbf{z}_i)(\nu_i \mathbf{z}_i^T) \mathbf{M}. \tag{11}$$

3. Beispiel

Für das Identifikationsverfahren wird ein System mit 7 Freiheitsgraden mit Daten nach [2] verwendet, wobei die Übertragungsfunktionen $H_{11}, H_{21}, \ldots, H_{71}$ in einem Frequenzbereich $[0, 47.75Hz]$ simuliert wurden. Die Tabelle zeigt eine gute Übereinstimmung der rekonstruierten Eigenwerte des Matrizenpaares $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ mit den Eigenwerten des Originalsystems, die in der rechten Hälfte aufgeführt sind.

i	Real-	Imaginärteil		Real-	Imaginärteil
1,2	-1,1823	± 84,17		-1,1823	±84,17
3,4	-7,2594	±143,64		-7,2597	±143,64
5,6	-7,6345	±176,79		-7,6162	±176,73
7,8	-7,9124	±181,32		-7,9187	±181,28
9,10	-5,6737	±256,59		-5,6738	±256,59
11,12	-18,464	±259,39		-18,44	±259,37
13,14	-11,907	±288,72		-11,91	± 288,72

4. References

1 Liu, P.: Identification and damage detection of trusses using modal data, Journal of Structural Engineering **121** (1995), 599–608

2 Tsuei, Y. G.: Estimation of mass, stiffness and damping matrices from frequency response functions, Journal of Vibration and Acoustics **118** (1996) 76–82

3 Edelman, A., Murakami, H. : Polynomial roots from companion matrix eigenvalues, Mathematics of Computation **64** (1995), 763–776

Addresses: Dipl.-Ing. Nils Wagner, Universität Stuttgart, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Pfaffenwaldring 27, D-70569 Stuttgart, **nwagner@isd.uni-stuttgart.de**

Author Index

Adam, C. 173
Ammann, M. 387
Ams, A. 221
Andrä, H. 329
Apel, N. 367

Bader, V. 413
Baldinger, M. 239
Balke, H. 369
Ballmann, J. 375
Bammer, F. 175
Barkow, B. 177, 261
Basar, Y. 303
Bayreuther, C. 385
Becker, W. 299
Belyaev, A. K. 179
Berg, C. P. 279
Berger, S. 331
Bertram A. 333
Blaimschein, P. 239, 241
Blajer, W. 265
Blekhman, I. I. 181
Bogacz, R. 219
Böhlke, T. 333
Bontcheva, N. 353
Brämer, T. 287
Brehmer, F. 415
Bremer, H. 239, 241, 257
Brockmann, T. 281
Brommundt, E. 199
Bruhns, O. T. 377, 379
Brünig, M. 331, 357
Brunn, P. O. 321
Bryja, D. 183
Buschmann, A. 267
Büskens, Ch. 243, 249, 263

Carstens, C. 409
Chudej, K. 245

da Silva, A. R. 417
Dallmann, U. Ch. 423
de Souza, L. C. G. 417
Diebels, S. 335, 387
Drescher, J. 369
Dresig, H. 181
Dreyer, M. 279
Duckstein, H. 223
Dziedzic, K. 185

Eberhard, P. 269
Eckert, S. 283
Ehlers, W. 285, 335, 387
Eich, T. 287, 289
Engleder, T. 187
Eppler, K. 247

Filipescu, C. 211
Fonseca, R. A. 417
Freischläger, C. 403
Frik, M. 275

Gamer, U. 351
Gampert, B. 287, 289
Gausmann, R. 189
Gawinecki, J. A. 291
Gee, M. 389
Gerdts, M. 249
Gerlach, S. 293
Gerstmayr, J. 337
Grasberger, S. 391
Griesse, R. 251
Grosche, F.-R. 413
Gross, D. 283, 311, 317, 381
Guz, I. 383

Hachemi, A. 363
Hackl, K. 359
Hametner, G. 253
Harnau, M. 393
Haupt, P. 339, 343
Heinen, A. H. 259
Heinzl, Ph. 271
Helm, D. 339
Hentosh, O. 213
Herrmann, K. P. 295, 373
Hesebeck, O. 329
Hessenberger, K. 349
Heuer, R. 173, 297
Hiller, M. 273
Hinze, U. 273
Hochrainer, M. J. 191
Hohe, J. 299
Hohn, B. 341
Hörsken, C. 273
Hortel, M. 193
Hutter, K. 323

Iankov, R. 353
Insperger, T. 195
Irschik, H. 337
Itskov, M. 301, 303

Janski, L. 305
Jaschke, P. 419
Jedlicka, Z. 411
Jonas, P. 421
Juhasz, L. 329

Kacprzyk, P. 291
Kashtalyan, M. 371
Kersten, Th. 343
Kessler, H. 369
Kienzler, R. 307

Klein, H. W. 227
Koch, A. 395
Koenemann, F. H. 309
Kolling, S. 311
Korelc, J. 397
Kosel, F. 313, 319
Kreuzer, E. 197
Kröger, M. 345
Kröplin, B. 349
Krstulovic-Opara, L. 397
Kuhn, G. 315
Kurnik, W. 185
Kuselj, B. 313

Labrenz, H. 199
Laermann, K.-H. 415
Lambrecht, M. 347, 367
Lammering, R. 281
Lapusta, Y. 399
Lenz, J. 403
Litvinov, W. G. 349
Loboda, V. V. 373
Lugner, P. 271

Mack, W. 351
Mahrenholtz, O. 353
Markert, B. 285
Markert, R. 429
Markus, B. 275
Matzenmiller, A. 293
Mazur, O. 421
Mecking, K. 375
Meschke, G. 391
Michelitsch, T. 335
Miehe, C. 347, 361, 367, 385, 395, 425
Mikhailov, S. A. 255
Mikota, J. 201
Mishuris, G. 315
Mitterhuber, R. 257
Mittermayr, P. 203
Müller, P. C. 229, 255
Müller, R. 283, 317
Müller, W. H. 295

Nackenhorst, U. 401
Neumann, S. 295

Obrecht, H. 331, 357
Osinski, Z. 205

Panning, L. 207
Paulke, S. 259
Pethö, A. 355
Petrisic, J. 319
Pfeiffer, F. 407
Pietrzakowski, M. 209

Pisla, A. 277
Pisla, D. 277
Plöchl, M. 271, 351
Popp, K. 207
Poterasu, V. F. 211
Prytula, M. 213
Przybylowicz, P. M. 215

Quent, T. 377

Ramm, E. 389
Rath, H. J. 279
Raue, A. 217
Ricci, S. 357
Riediger, D. 403
Rong, Q. 403
Rothert, H. 341
Rütten, M. 423
Ryczek, B. 219
Ryssel, E. 321

Sadiki, A. 323
Salomeia, L. 211
Samborska, A. 399
Sampaio, R. 229
Schäfer, B. 417
Scheday, G. 425
Schieck, G. 405
Schindler, H. J. 403
Schmalfuss, C. 221
Schmelzer, M. 427
Schmidt, B. 223
Schmidt, R. 231
Schmidt-Baldassari, M. 359
Schnack, E. 329
Schöck, E. 349
Schotte, J. 361
Schröder, J. 361, 385
Schultheiss, R. 273
Schütte, H. 379
Schwabe, F. 363
Schweizerhof, K. 393, 403
Seemann, W. 189
Seidler, M. 429
Sextro, W. 207, 225
Simha, H. 227
Sippel, W. 293
Skuderova, A. 193
Söffker, D. 229
Soutis, C. 371, 383
Sperling, L. 223
Srpcic, J. 325
Srpcic, S. 325
Starczewski, Z. 205
Steindl, A. 261
Stepan, G. 195
Stiegelmeyr, A. 407
Stoffel, M. 231
Troger, H. 175, 177
Tröltzsch, F. 247
Turk, G. 325
Tylikowski, A. 233

Ulbricht, V. 305

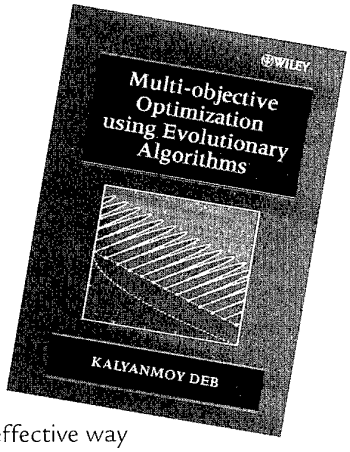
Vielsack, P. 187
von Wagner, U. 235

Wagner, N. 327, 431
Wall, W. A. 389
Waller, H. 419
Wang, Y. S. 381
Weber, H. I. 229
Wedig, W. 221, 235
Weichert, D. 231, 363
Weinberg, K. 409
Wendt, M. 197
Wilkes, C. 289
Winderl, S. 263
Wojcicki, Z. 237
Wriggers, P. 397

Zastrau, B. W. 401
Zeman, V. 411
Zhuk, Y. 365, 383

New book information

Multi-objective Optimization using Evolutionary Algorithms



KALYANMOY DEB, Indian Institute of Technology, Kanpur, India

Evolutionary algorithms are relatively new, but very powerful techniques used to find solutions to many real-world search and optimization problems. Many of these problems have multiple objectives, which leads to the need to obtain a set of optimal solutions, known as effective solutions. It has been found that using evolutionary algorithms is a highly effective way of finding multiple effective solutions in a single simulation run.

- Comprehensive coverage of this growing area of research
- Carefully introduces each algorithm with examples and in-depth discussion
- Includes many applications to real-world problems, including engineering design and scheduling
- Includes discussion of advanced topics and future research
- Accessible to those with limited knowledge of classical multi-objective optimization and evolutionary algorithms

The integrated presentation of theory, algorithms and examples will benefit those working and researching in the areas of optimization, optimal design and evolutionary computing. This text provides an excellent introduction to the use of evolutionary algorithms in multi-objective optimization, allowing use as a graduate course text or for self-study.

0471 87339 X May 2001 496pp Hbk £60.00

WILEY

For the latest information on forthcoming mathematics titles, please visit the Wiley Mathematics website at

http://www.wiley.co.uk/mathematics

For further information, or to place an order, please contact:

Zoë Mitchell, John Wiley and Sons, Baffins Lane, Chichester, West Sussex, PO19 1UD, UK
Telephone: +44 (0) 1243 779777
Fax: +44 (0) 1243 770154
Email: technology_uk@wiley.co.uk
http://www.wiley.co.uk

CONTENTS:

Prologue
Multi-Objective Optimization
Classical Methods
Evolutionary Algorithms
Non-Elitist Multi-Objective Evolutionary Algorithms
Elitist Multi-Objective Evolutionary Algorithms
Constrained Multi-Objective Evolutionary Algorithms
Salient Issues of Multi-Objective Evolutionary Algorithms
Applications of Multi-Objective Evolutionary Algorithms
Epilogue
Bibliography

ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics
Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik
Volume 81 2001 Supplement 2

Contents

Preface	S 165
Table of Contents	S 167
Sections 1–8	S 173
Author Index	S 433

ZAMM is indexed in Current Contents/Engineering, Computing, Technology; INSPEC; Science Citation Index; CompuMath Citation Index Mechanics; Applied Mechanics Reviews; Mathematical Reviews; Zentralblatt Math.